

A CRIAÇÃO DE UM VÓRTICE NA ÁGUA DO MAR POR MEIO DA M.H.D.

Oswaldo Missiato

Academia da Força Aérea – Pirassununga

Michael George Maunsell

Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos – São Carlos

Roberto Serrano

Academia da Força Aérea – Pirassununga

João Paulo Delicato

Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos – São Carlos

Resumo. As equações da M.H.D. (Magnetohidrodinâmica) são discutidas para fluidos fracamente condutores de eletricidade e, em seguida, uma solução analítica é apresentada. Um vórtice MHD é gerado utilizando água do mar em um recipiente cilíndrico, onde são aplicados de modo conveniente campos eletromagnéticos externos. Algumas grandezas físicas de interesse são discutidas e medidas por meio de técnicas bastante conhecidas.

Palavras-Chave: Magnetohidrodinâmica, Vórtice, Água do Mar

1. INTRODUÇÃO

Os fluidos fracamente condutores de eletricidade, quando sujeitos a forças eletromagnéticas, podem responder de maneira um tanto surpreendente dependendo de como se aplica a força no volume do fluido.

Mesmo sendo o fluido fracamente condutor, a densidade de força eletromagnética, $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$, onde \vec{j} é a densidade de corrente elétrica e \vec{B} o campo magnético aplicado externamente, pode ser suficiente para induzir grandes movimentos de fluido, desde que o campo magnético seja de intensidade relativamente grande, pois as correntes que são induzidas nestes, de modo geral, são muito pequenas devido ao fato de a condutividade elétrica ser relativamente pequena (ver BRAGINSKII).

A rotacionalidade da força magnética, isto é, $\nabla \times \vec{f} \neq \vec{0}$ é fundamental para gerar movimento do fluido e, portanto, criar o vórtice M.H.D..

O fluido encontra-se em repouso no instante em que a força eletromagnética (Força de Lorentz) é aplicada.

O estabelecimento do vórtice no fluido se dá após alguns segundos da aplicação da força e é visualizado com bastante clareza.

A vorticidade, dada pelo rotacional do vetor velocidade, é uma grandeza física de grande interesse (está associada ao conceito de velocidade angular). Um medidor de velocidade de

rotação (rotor de medição) foi introduzido dentro do recipiente com o líquido em movimento rotacional.

Por meio de técnica estroboscópica, foi possível medir a velocidade angular. Valores da ordem 1000 RPM são comuns para campos magnéticos de 0,3 Tesla e tensão aplicada da ordem de 400 V/m.

Pode-se destacar a importância da Camada de Hartmann no mecanismo de geração do movimento rotacional do fluido; a corrente elétrica tende a circular pela referida camada propiciando o máximo de força aplicada, pois, nesse caso, o campo é axial e forma ângulo de 90° com a densidade de corrente.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1. Importância da Vorticidade

Considere um fluido condutor incompressível submetido à influência de campos eletromagnéticos externos, inicialmente em repouso. Considere ainda a 2ª Lei de Newton expressa por unidade de volume, na seguinte forma

$$\rho \vec{a} = -\nabla p + \vec{f} \quad (1)$$

onde ρ é a densidade, \vec{a} é o vetor aceleração total, p é a pressão e \vec{f} é o campo de forças.

Aplicando-se o operador rotacional sobre a Eq. (1), matematicamente se elimina a pressão e a força \vec{f} se for irrotacional (conservativa). Se a força \vec{f} for rotacional (viscosa, Lorentz, etc.), ou seja, possuir a tendência de induzir um giro sobre um elemento de fluido ou modificar seu estado de rotação, então um caminho para a solução do movimento do fluido pode ser encontrado em função da vorticidade $\vec{\omega}$, a qual é uma medida da rotação média em cada ponto do fluido. Pode-se mostrar ainda que o movimento de um fluido de densidade uniforme, ocupando um recipiente fechado, não ocorre sem a presença da vorticidade (ver Moffat).

2.2. Fluidos Fracamente Condutores: Equações Básicas e Simplificações

As equações que descrevem o comportamento de um fluido condutor incompressível, submetido à influência de campos eletromagnéticos externos no regime de baixas frequências (despreza-se a corrente de deslocamento), são dadas por: (ver LEWELLEN)

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} + \eta \nabla^2 \vec{V} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \quad (5)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (6)$$

onde \vec{V} é o vetor velocidade, p a pressão, ρ é a densidade, \vec{j} é a densidade de corrente, \vec{B} o campo magnético, \vec{E} campo elétrico, σ é a condutividade elétrica, η é a viscosidade e μ permeabilidade magnética.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \quad (7)$$

Seja $Rm = \mu\sigma UL$ o número de Reynolds Magnético o qual é definido pela razão entre a convecção e difusão do campo magnético pelo fluido. Utilizando as equações (4), (5) e (6), pode-se mostrar que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$, $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ e, assim, $Rm = \frac{|\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})|}{|\eta \nabla^2 \vec{B}|} = \mu\sigma UL$,

U é uma velocidade características e L é um comprimento característico.

Sendo $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I., $\sigma \cong 4$ s/m, pode-se verificar facilmente que $Rm \ll 1$ neste trabalho, pois $U \cong 1$ m/s e $L \cong 1$ m.

A força, $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$, impõe um movimento sobre o fluido. Devido a esse movimento uma força eletromotriz induzida da ordem de VB e uma corrente da ordem de σVB são geradas no fluido. O campo magnético, devido a essa corrente, é da ordem de $B_1 - (RmB)$ e, como $Rm \ll 1$, será descartado, o mesmo sucedendo com o campo elétrico induzido $E_1 - Rm(VB)$. O campo magnético é o próprio campo externo aplicado e, como é suposto uniforme, $\nabla \times B = 0$, além disso $\nabla \cdot B = 0$. (ver também Braguinskii e Landau)

Note, entretanto, que a Lei de Ampère não se aplica. As correntes elétricas são determinadas pela Lei de Ohm e a força de Lorentz é dada por:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = [\sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (8)$$

Observe que o líquido se encontra inicialmente em repouso, assim o primeiro termo à direita da Eq. (8) é mais importante que o segundo.

2.3. Solução Simplificada

Uma solução muito simples do problema, é aquela em que se considera apenas a velocidade azimutal $V_\theta (V_r = 0, V_z = 0)$, em um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . A justificativa para tal hipótese se baseia na aplicação de um forte campo magnético externo sobre o fluido. Tudo se passa como se o fluido ficasse suspenso no campo. É uma situação completamente diferente de um vórtice de pia por exemplo, onde as velocidades radial e axial são consideráveis.

Supondo escoamento estacionário $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, com simetria axial $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$, $E_z = 0$ $E_\theta = 0$, $B_z = B_0 \cong \text{const.}$, o sistema de equações acima, em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se escreve: ($J_z = 0$, exceto no entorno do eletrodo central, mesmo assim não há contribuição para a força, pois $\vec{j} // \vec{B}$).

$$j_r \cong \sigma E_r \quad (9)$$

$$j_\theta = 0 \quad (10)$$

$$-\frac{V_{\theta}^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r} - \frac{V_{\theta}^2}{r} \right) - \frac{1}{\rho} \text{Bo} j_r = 0 \quad (13)$$

A conservação da carga ou continuidade da corrente elétrica garante que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) = 0 \quad (14)$$

e, portanto

$$r j_r = \text{cte} \quad (15)$$

Combinando as Eqs. (13) e (15) com $x = \frac{r}{r_0}$, $V = \frac{V_{\theta}}{V_{\theta_0}}$, $V^* = \frac{E}{\text{Bo} V_{\theta_0}}$, $H = \text{Bo} r_0 \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2}$ (n°

de Hartmann) e sendo $J = \frac{x j_r}{\sigma \text{Bo} V_{\theta_0}}$, obtém-se a forma adimensionalizada da Eq. (13):

$$x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + x \frac{\partial V}{\partial x} - V = x H^2 J \quad (16)$$

A solução da equação diferencial de 2ª ordem, linear, é dada por

$$V(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{H^2 J}{2} x \ln x \quad (17)$$

O último termo da Eq. (17) representa a força impulsionadora eletromagnética. As constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno

$$1) \quad V(x=1) = 0$$

$$2) \quad V(x=x_0) = V_0 \approx 0, \quad x_0 = \frac{r}{r_0} \ll 1$$

Substituindo 1 e 2 na Eq. (17), encontra-se

$$C_1 = \frac{H^2 j}{2} x_0^2 \ln x_0 \quad (18)$$

$$C_2 = -\frac{H^2 j}{2} x_0^2 \ln x_0 \quad (19)$$

Pode-se ver que a densidade de corrente está relacionada com a diferença de potencial aplicada pela Eq. (9) e, considerando a definição de V^* , tem-se

$$V^* = \frac{1}{r_0 B_0 V_{\theta_0}} \int_{x_0}^1 E_r d_r = J \ln x_0 \quad (20)$$

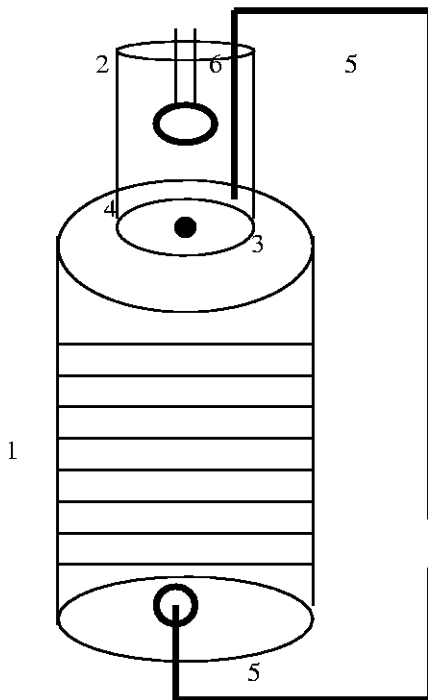
Expressões para a pressão e vorticidade são facilmente encontradas através das relações Eq. (11) e $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$.

3. PARTE EXPERIMENTAL

Na literatura especializada (ver Sommeria), poucos trabalhos experimentais existem sobre a geração, medidas e análise de vórtices por meio de magnetohidrodinâmica. Mesmo assim a imensa maioria trata de fluidos com condutividade elétrica relativamente alta (mercúrio, sódio e várias ligas envolvendo metais líquidos), onde efeitos de indução desempenham papel relevante e muitas aproximações feitas aqui não se aplicam. A seguir apresentar-se-á um experimento que trata da geração de um vórtice “forçado”, utilizando-se como fluido de trabalho água do mar e campos eletromagnéticos escolhidos de modo conveniente.

3.1. Montagem e Descrição do Experimento

Em um recipiente cilíndrico adaptam-se dois eletrodos: um no centro do recipiente, de ouro, de 4mm de diâmetro (semi-esférico) e outro no formato de anel (latão, aço inox) de diâmetro variável concêntrico ao primeiro. Em seguida, adiciona-se água do mar até a altura de 10,0 cm aproximadamente. O cilindro com água repousa sobre a base de um solenóide de 50 cm de diâmetro de tal maneira a se beneficiar do máximo de intensidade do campo magnético, o qual é da ordem de 0,35 Tesla, em média, próximo ao centro. O solenóide é alimentado por uma fonte de até 90A. Um outro dispositivo elétrico fornece uma tensão regulável que é aplicada entre os eletrodos (ouro-aço inox) para estabelecer uma diferença de potencial e, portanto, uma corrente elétrica no líquido. O campo elétrico aplicado varia desde zero até 1000 V/m, aproximadamente.



- 1 - Solenóide
- 2 - Cilindro com água
- 3 - Eletrodo de ouro
- 4 - Eletrodo em anel
- 5 - Circuito elétrico
- 6 - Rotor de medição

Quando só o campo elétrico está atuando, não há movimento do líquido. No instante em que se aplica, também, o campo magnético, passa a atuar a força magnética, a qual, agindo na direção tangencial, acelera o fluido.

A camada de Hartmann atua no sentido de conduzir a corrente elétrica com mais facilidade na direção radial contribuindo para tornar a força tangencial mais intensa. Pode-se dizer que nestas regiões, ocorre aumento da densidade de corrente elétrica (ver Hunt and Shercliff).

Uma verificação experimental da circulação de corrente pela camada de Hartmann pode ser inferida pelo movimento do eletrodo na forma de anel ao longo do eixo de simetria. O vórtice continua sendo formado e perde pouca intensidade, mesmo quando o eletrodo, em anel, é deslocado verticalmente.

3.2. Resultados

Experimento 1: Campo magnético $B = 0,39T$, mantido fixo

Rotor: $R = 2,9$ cm

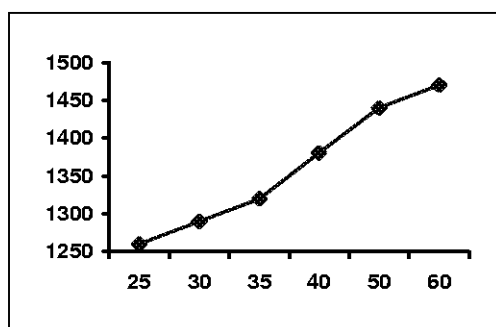
raio: 5,25 cm

Eletrodo de ouro e latão

6 cm de H_2O

aparelho rotor foi colocado a 1,5 cm da superfície

ΔU (v)	Ω (c/s)	Ω (R.P.M.)
25	21	1260
30	21,5	1290
35	22	1320
40	23	1380
50	24	1440
60	24,5	1470



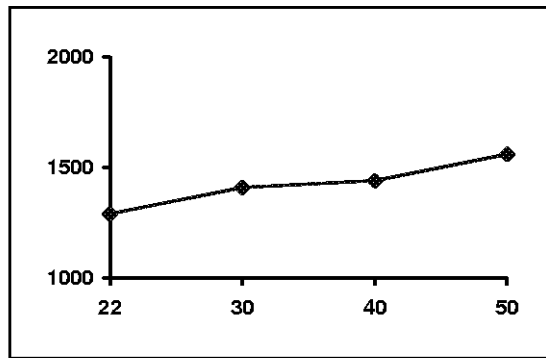
Experimento 2: Campo magnético $B = 0,39T$, nível 6 cm

raio: 5,25 cm

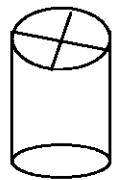
aparelho a 1,5 cm da superfície

temperatura elevada = $70^\circ C$

ΔU (v)	Ω (c/s)	Ω (R.P.M.)
22	21,5	1290
30	23,5	1410
40	24,0	1440
50	24,0	1560

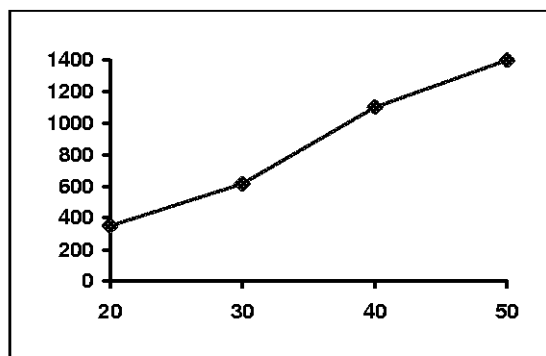


Experimento 3: Medida da rotação do vórtice utilizando cortiça
 campo magnético $B = 0,36T$
 eletrodo de ouro e latão
 recipiente com 5 cm de água
 eletrodo de anel no fundo do recipiente
 raio = 5,25 cm



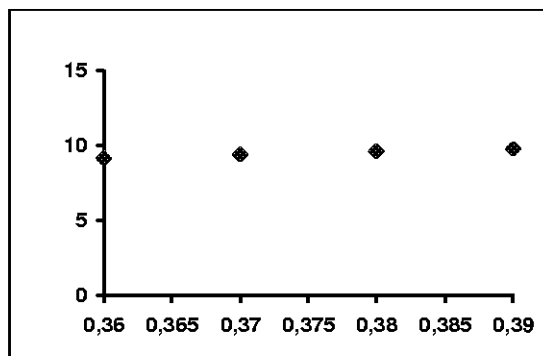
rolha de cortiça

ΔU (v)	Ω (R.P.M.)
20	350
30	615
40	1100
50	1400



Experimento 4: Mantendo a tensão constante e variando o campo

TENSÃO		VALORES MÉDIOS (CORRENTE)	CAMPO B
$\Delta U = 30V$		$I = 3,28 \text{ A}$	$B_1 = 0,376 \text{ T}$
	$R_1 = 9,14\Omega$		
$\Delta U = 30V$		$I = 3,18 \text{ A}$	$B_2 = 0,365 \text{ T}$
	$R_2 = 9,43\Omega$		
$\Delta U = 30V$		$I = 3,11 \text{ A}$	$B_3 = 0,375 \text{ T}$
	$R_3 = 9,64$		
$\Delta U = 30V$		$I = 3,06 \text{ A}$	$B_4 = 0,39 \text{ T}$
	$R_4 = 9,80\Omega$		



4. CONCLUSÕES

Este trabalho mostra que a água do mar se comporta de maneira um tanto surpreendente como fluido de trabalho para um experimento de M.H.D.

Pode-se concluir que o aumento da intensidade do campo magnético e a diminuição da corrente elétrica são de extrema importância para o aumento da velocidade de rotação e também da eficiência do experimento (diminuição da corrente acarreta diminuição do efeito Joule).

A obtenção de dados ponto a ponto, com técnicas mais refinadas, será necessária para que se possa comparar com o modelo teórico proposto e alterá-lo de modo compatível, se for o caso.

Verificou-se também um aumento da resistência elétrica em função do aumento do campo magnético aplicado. Teoricamente $R = \frac{B_0}{2\pi\sqrt{\sigma\eta}} \ln\left(\frac{R_0}{a}\right)$, a é o raio do núcleo do vórtice e R_0 é o raio do cilindro (ver Sommeria).

Finalmente pode-se fazer alguns comentários entre o modelo teórico e a parte experimental.

1. No núcleo do escoamento a viscosidade pode ser desprezada em primeira aproximação,

assim, pelo teorema do trabalho – energia cinética,
$$V = \left(\frac{4\pi\sigma|\Delta\Phi|B_0}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Sendo $\sigma = 4,3 \text{ S/m}$

$$|\Delta\Phi| = 160\text{V} \quad (\text{a } 1,2 \text{ cm do centro do recipiente})$$

$$B_0 \cong 0,3 \text{ T}$$

$\rho \cong 1030 \text{ Kg/m}^3$, obtém-se: $V \cong 1,5 \text{ m/s}$. Por outro lado, tomando um $\omega \cong 1300 \text{ RPM}$ (experimental) e para $r \cong 1,2 \text{ cm}$, $V \cong \omega r = 1,6 \text{ m/s}$, valores bem próximos.

2. No núcleo do escoamento $j \approx 0$ (a corrente tende a fluir pela camada de Hartmann), logo

$$\nabla\Phi' \approx \vec{V} \times \vec{B} \quad \text{e} \quad V \approx \frac{1}{B} \frac{\Delta\Phi}{\Delta r}, \text{ note que } \Phi \text{ é o potencial induzido.}$$

Para se ter uma velocidade de $1,6 \text{ m/s}$ em um campo médio de $0,3 \text{ T}$, $\frac{\Delta\Phi'}{\Delta r} \approx 0,5\text{v/m} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ v/cm} = \frac{5\text{mV}}{\text{cm}}$, o que faz sentido, pois está dentro do valor esperado.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pela ajuda financeira, ao Professor Luciano Ferro (AFA), pelas discussões relativas ao solucionamento matemático e ao Departamento de Engenharia Mecânica – USP – São Carlos.

REFERÊNCIAS

- BRAGINSKII, S.I., 1960, Magnetohydrodynamics of Weakly Conducting Liquids, Soviet Physics, JETP, vol. 37, n. 5, pp. 1005-1014.
- MOFFAT, H. K., 1978, Some Problems in the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals, ZAMM, vol. 58, pp. 65-71.
- LEWELLEN, W.S., 1960, Magnetohydrodynamically Driven Vortices, Proc. Heat Transf. Fluid Mech. Inst. Stanford University Press, vol. 1, pp. 1-17.
- LANDAU, L. & LIEFCHITZ, E., 1969, Electro Dynamics of Continuous Media, vol. VIII, Ed.Mir.
- SOMMERIA, J., 1988, Electrically Driven Vortices in a Strong Magnetic field, J. Fluid. Mech., vol. 189, pp. 553-569.
- HUNT, J.C. & SHERCLIFF, J.A., 1971, Magnetohydrodynamics at High Hartmann Number, Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 3, pp. 37-62.
- SHERCLIFF, J.A., 1970, Fluid Motions due to a electric current source, J. Fluid Mech., vol. 40, part 2, pp. 241-250.