

ANÁLISE NUMÉRICA DE MEMBRANAS E BIO-MEMBRANAS VISCOELÁSTICAS SUBMETIDAS À EXPANSÃO

Cristina de A. Alvim
Djenane C. Pamplona
Larissa B. Muniz

Departamento de Engenharia Civil
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
R. Marquês de São Vicente, 225
CEP: 22453-900 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

***Resumo.** Expansão de tecidos é uma conhecida técnica de cirurgia plástica reparadora. Existem muitos estudos sobre o comportamento histológico da pele após a expansão, como por exemplo seu afinamento. Alguns autores observaram o comportamento viscoelástico da pele, mas desconhecemos um estudo matemático da pele submetido à expansão. O presente trabalho tem como objetivo a determinação de um modelo matemático para o fenômeno e a sua solução através de métodos numéricos.*

***Palavras-chave:** Biomembranas, Pele, Viscoelasticidade, Grandes Deformações*

1. INTRODUÇÃO

1.1 Expansão de tecidos conectivos

Expansão é um processo fisiológico, definido como a capacidade de uma membrana aumentar em área superficial devido a uma deformação externa imposta. Ela pode ser um fenômeno natural como, por exemplo, o crescimento da área superficial do abdômen durante a gestação, e também pode ser um processo induzido artificialmente. Assim, técnicas ligadas à cirurgia plástica reparadora têm sido desenvolvidas com o intuito de expandir a pele do próprio paciente para utilizá-la em enxertos (ex.: queimaduras ou grandes cicatrizes), reconstrução mamária (após mastectomia), etc.

A expansão artificial de tecido conectivo é um processo mais antigo do que se possa imaginar. Tribos indígenas pelo mundo inteiro utilizam adereços nos lábios (conhecidos no Brasil como botoques) e nas orelhas, a partir da capacidade do tecido se adaptar a um novo formato após uma deformação induzida.

Para expandir-se a pele, implanta-se cirurgicamente o expansor sob a camada da pele. Em seguida, através de um tubo externo, introduz-se um fluido que irá provocar o aumento do volume inicial e, conseqüentemente, o aumento da área superficial da pele sobre o expansor.

Este é um processo lento, feito em etapas, até que se obtenha a área superficial desejada para cada fim.

Para fins medicinais, a expansão de tecido teve seus primórdios em 1957, quando Neumann usou um implante inflável para reconstrução da microtia. Na época, não houve uma boa aceitação no meio médico, mas sem dúvida foi um trabalho a frente de seu tempo. Já em 1976, Dr. Chedomir Radovan projetou um novo implante com base semi-rígida e controle de injeção. Apesar de tudo, novamente este método custou a ter seu potencial reconhecido (Austad *et al.*, 1982).

A partir de então, diversos trabalhos foram publicados, com o objetivo de descrever o comportamento do tecido conectivo submetido à expansão, do ponto de vista fisiológico, morfológico e histológico. Foram usadas amostras da pele de suínos, para observação das mudanças histomorfológicas durante a expansão (Austad *et al.*, 1982) e para comparação entre os diversos formatos e dimensões de expansores (Brobmann & Huber, 1985). Em seres humanos, foram feitas observações a respeito do comportamento clínico de pacientes submetidos à expansão de tecido conectivo (Manders *et al.*, 1984). Como descrito anteriormente, a expansão é feita em etapas e a dor sentida pelo paciente é um fator limitador para cada etapa. Mas após algumas horas, o desconforto diminui e a pele expandida parece ficar menos tencionada. Este aspecto foi essencial para que, mais à frente em nosso trabalho, pudéssemos modelar a pele como uma membrana viscoelástica.

Ultimamente, há um crescente interesse na técnica de expansão. Já foram feitos trabalhos procurando, através de formulação matemática, formatos de expansores. Atkinson (1988) usou uma modelagem através de cálculo variacional, sendo a área de pele expandida uma função minimizada pelo volume interno do expansor inflado. Também procuram-se novos procedimentos de expansão, visando um melhor aproveitamento da técnica. A técnica de expansão contínua (Schmidt *et al.*, 1991) promete uma área de tecido expandido maior que a obtida em expansão convencional, em bem menos tempo.

Finalmente, o objetivo principal deste trabalho é modelar matematicamente o comportamento da pele, através da teoria da elasticidade para grandes deformações (Green & Zerna, 1975) e equações constitutivas viscoelásticas.

1.2 Pele

A pele é uma estrutura complexa, composta por duas camadas principais: a epiderme, camada superficial e mais fina (0,07mm-0,12mm) e a derme (1-4mm). A derme é uma estrutura densa, composta por fibras embebidas em um meio coloidal. Estas fibras são o colágeno, a elastina e fibras reticulares. As fibras de colágeno são organizadas em fardos paralelos à superfície da pele. Enquanto estas fornecem resistência e rigidez à pele, as fibras de elastina formam uma rede, sendo responsáveis pelo retorno das fibras de colágeno à sua configuração inicial após um carregamento ou deformação ser aplicado (Oomens *et al.*, 1987).

O meio coloidal é composto por polisacarídeos e proteínas agrupados em macromoléculas capazes de reter água. As propriedades mecânicas da pele são comandadas pela geometria e interação do colágeno e a rede de elastina na derme.

1.3 Tipos de Expansor

O expansor é geralmente feito de silicone e seu formato e tamanho varia conforme a sua utilização. Os expansores mais conhecidos são os redondos, ovais, retangulares e em formato de meia-lua. No caso de reconstrução mamária, existem expansores que, ao serem inflados, têm o formato do seio. O tamanho do expansor pode variar conforme a quantidade necessária de pele a ser expandida. Por outro lado, é comum o uso de dois ou mais expansores em um

mesmo local, apesar de trazer desconforto e mais riscos de infecções (Brobmann & Huber, 1985).

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Após conversas com cirurgiões plásticos e através da observação do processo de expansão em fotos e vídeos (Maxwell *et al.*, 1995), verificou-se que o comportamento da pele é variável com o tempo. Em cada intervalo entre as etapas de expansão, verificou-se diminuição nas tensões resultantes na superfície da pele (associada à diminuição da dor sentida pelo paciente), mantido o mesmo volume, como pode ser observado esquematicamente na Fig. 1.

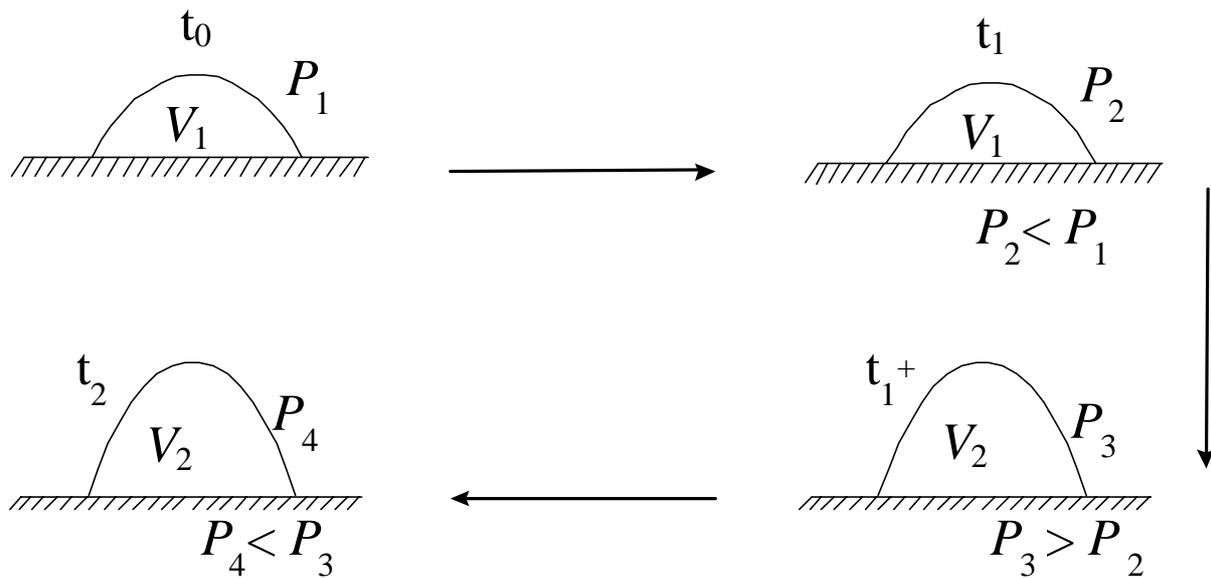


Figura 1 - Representação esquemática do processo de expansão

Em um tempo $t = t_0$, com uma pressão interna P_1 , tem-se um volume V_1 . Em $t = t_1$, mantendo-se o mesmo volume, tem-se uma nova pressão P_2 , menor que P_1 . Aumenta-se a pressão a fim de aumenta-se o volume. Em $t = t_2$, mantém-se o volume V_2 , mas a pressão cai de P_3 para P_4 .

Assim, considerou-se que a pele submetida à expansão pode ser modelada como uma membrana viscoelástica, incompressível, inicialmente plana, circular (formato mais simples para uma primeira modelagem), com espessura indeformada H e raio a (correspondente ao raio da base do expansor). Considera-se ainda que é fixa em sua borda, pois não há descolamento de pele na região adjacente ao expansor, isto é, não há “peeling”. Esta membrana é submetida a uma pressão interna hidrostática P , podendo assim considerar que a deformação é axissimétrica. Sua configuração deformada pode ser observada na Fig. 2, sendo ρ e r as coordenadas radiais das configurações indeformada e deformada, respectivamente, e z a coordenada vertical deformada:

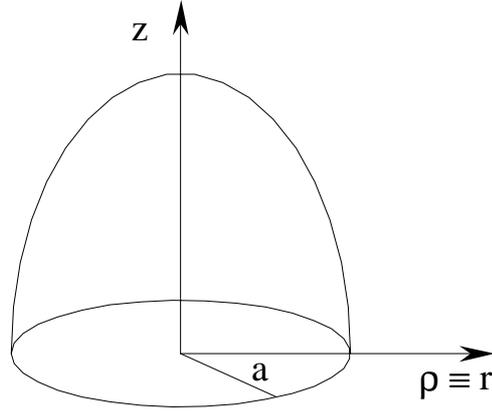


Figura 2: Configuração deformada

Procurou-se uma equação constitutiva para materiais viscoelásticos. Optou-se pela equação de Christensen (1980), que é bastante simples e usualmente com bons resultados quando comparado a dados experimentais:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + x_{i,K}x_{j,L}[g_0\delta_{KL} + g_1(t)*E_{KL}], \quad (1)$$

onde σ_{ij} é a tensão de Cauchy, p é a pressão hidrostática despertada pela deformação imposta, $x_{i,K}$ e $x_{j,L}$ são gradientes de deformação, g_0 é a resposta elástica do material, $g_1(t)$ é função de relaxação (dependente do tempo), E_{KL} é o tensor de deformações de Cauchy-Green e δ_{ij} e δ_{KL} são deltas de Kronecker.

O asterisco na Eq.(1) representa uma integral de convolução, comum em equações da teoria da viscoelasticidade (Flügge, 1967), e pode ser definida por:

$$g_1 * E_{KL} = \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial E_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

Obtém-se então, a partir da Eq.(1), as tensões nas direções principais:

$$\sigma_{11}(t) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * \left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 1 \right) \right] - \lambda_3^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_3^2 - 1) \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{22}(t) = (r'^2 + z'^2) \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (r'^2 + z'^2 - 1) \right] - \lambda_3^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_3^2 - 1) \right] \quad (4)$$

$$\sigma_{33}(t) = 0 \quad (5)$$

Define-se extensão principal a razão entre os comprimentos deformado e indeformado, dS e ds , nas direções principais, e que no estudo da teoria da elasticidade para grandes deformações, é em módulo maior que a unidade:

$$\lambda_i = \frac{dS_i}{ds_i} \quad (6)$$

Reescreve-se as tensões nas direções principais:

$$\sigma_{11}(t) = \lambda_1^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_1^2 - 1) \right] - \lambda_3^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_3^2 - 1) \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{22}(t) = \lambda_2^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_2^2 - 1) \right] - \lambda_3^2 \cdot \left[g_0 + \frac{1}{2} g_1(t) * (\lambda_3^2 - 1) \right] \quad (8)$$

$$\sigma_{33}(t) = 0 \quad (9)$$

A função de densidade de energia de deformação, W ,

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (10)$$

permite escrever:

$$\sigma_{ii}(t) = \lambda_i W_i \quad (11)$$

onde:

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}.$$

Pode-se então determinar a função de densidade de energia de deformação para o material em questão:

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(t) [(\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 - 3) - 2 \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)] \quad (12)$$

onde

$$C_1 = \frac{g_0}{2} \quad (13)$$

$$C_2(t) = \frac{g_1(t)}{8} \quad (14)$$

O sistema de equações de equilíbrio para a configuração deformada, segundo a teoria de Green & Adkins (1970) é:

$$\begin{cases} \frac{d(T_1 r)}{d\xi} = T_2 \frac{dr}{d\xi} ; \\ K_1 T_1 + K_2 T_2 = P \end{cases} \quad (15)$$

onde K_α são as curvaturas principais, P é a pressão imposta, T_α são os vetores da resultante de tensões por unidade de comprimento.

Conhecendo a relação:

$$T_i = h \cdot \sigma_{ii}, \quad (16)$$

onde h a espessura deformada, e aplicando as tensões encontradas nas Eqs. (7) - (9), temos como equações de equilíbrio:

$$\lambda_2' W_{22} + \lambda_1' \left(W_{21} - \frac{W_2}{\lambda_1} \right) + \frac{r'}{r\lambda_2} (\lambda_2 W_2 - \lambda_1 W_1) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{(r' z'' - r'' z')}{\lambda_2^2} W_2 + \frac{z'}{r\lambda_2} \lambda_1 W_1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2 P}{H} = 0 \quad (18)$$

com

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial \rho} = (\quad)$$

3. SOLUÇÃO NUMÉRICA

O sistema de equações de equilíbrio não possui uma solução analítica conhecida. Por isso, este sistema de equações diferenciais foi solucionado usando métodos numéricos. Usam-se o método de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordens acoplado ao método da “estimativa” e o método do relaxamento.

Transformando o sistema de duas equações não lineares de 2ª ordem em um sistema de quatro equações de 1ª ordem, para tornar possível a utilização dos métodos numéricos, tem-se:

$$r' = U \quad (19)$$

$$z' = V \quad (20)$$

$$r'' = U' = \frac{(r' F + z' G)}{\lambda_2^2} \quad (21)$$

$$z'' = V' = \frac{(z' F - r' G)}{\lambda_2^2} \quad (22)$$

sendo

$$F = \frac{\lambda_1}{W_{22}} \left[\lambda_1' \left(\frac{W_2}{\lambda_1} - W_{21} \right) - \frac{r'}{r\lambda_2} (\lambda_2 W_2 - \lambda_1 W_1) \right] \quad (23)$$

$$G = \frac{(r'^2 + z'^2)}{W_2} \left(-\frac{Pr \sqrt{r'^2 + z'^2}}{\rho H} + \frac{z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \frac{1}{\rho} W_1 \right) \quad (24)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$r(\rho = 0) = 0 \quad (25)$$

$$z'(\rho = 0) = 0 \quad (26)$$

$$r(\rho = a) = a \quad (27)$$

$$z(\rho = a) = 0 \quad (28)$$

3.1 Método de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem

Em um primeiro momento, usa-se o método de Runge-Kutta, através do software MATLAB, para resolver o sistema de equações diferenciais. Este método requer pouco esforço computacional, porém se torna pouco prático caso não se conheçam todas as condições de contorno no ponto inicial ($\rho = 0$). Então é necessário “estimar” valores para as condições desconhecidas (no caso do problema, z e r), o que fica mais trabalhoso ainda se as propriedades elásticas e viscoelásticas do material não forem conhecidas (no caso de sua determinação experimental).

3.2 Método do Relaxamento (“Relaxation method”)

O método do relaxamento (Press *et al.*, 1992) se revela mais prático. As equações diferenciais são substituídas por equações de diferenças finitas em um conjunto de pontos pertencentes ao domínio de integração.

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{g}(x, y) \rightarrow \bar{y}_k - \bar{y}_{k-1} - (x_k - x_{k-1})g\left(x, \bar{y}\right)\left[\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \frac{\bar{y}_k + \bar{y}_{k-1}}{2}\right)\right] = 0 \quad (29)$$

onde x é a variável independente, \bar{y} é o conjunto de variáveis dependentes, \bar{g} é a função que relaciona x e \bar{y} , e k é o índice relativo a um ponto qualquer no domínio ($k = 1, M$; M é o nº de pontos escolhidos no domínio).

Conhecendo as condições de contorno nos pontos inicial e final, estipula-se os valores das variáveis dependentes em cada ponto do domínio. Interações são feitas para ajustar (“relaxar”) os valores inicialmente fornecidos até valores bem próximos da solução real.

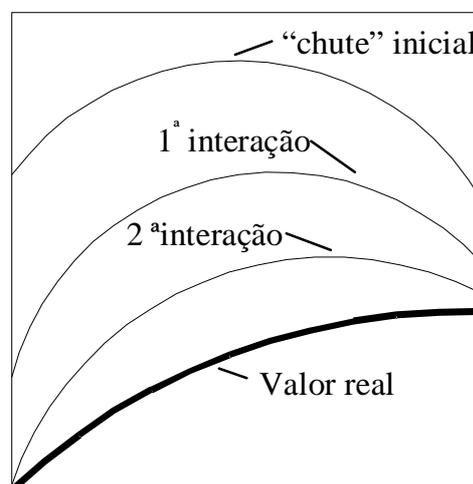


Figura 3 – Representação Esquemática do funcionamento do método do relaxamento

4. VALIDAÇÃO DA MODELAGEM

Para a validação da modelagem, foram usados os dados experimentais de Brobmann & Huber (1985), em porcos. Considerando a espessura da pele suína como 4×10^{-3} m e que foram usados expansores redondos de 6×10^{-2} m de diâmetro e volume inicial 40×10^{-6} m³. Tem-se os seguintes dados:

Tabela 1. Dados experimentais de Brobmann & Huber (1985)

Tempo (s)	Pressão (Pa)	Volume (m ³)
0	1866,67	40 x 10 ⁻⁶
777600	1266,67	40 x 10 ⁻⁶
777600	2933,33	60 x 10 ⁻⁶
1123200	1733,33	60 x 10 ⁻⁶

Com estes dados, usando a modelagem do presente trabalho foi possível encontrar as constantes elásticas e viscoelásticas da pele do porco. Utilizou-se, como relação entre a constante elástica e a viscoelástica, a função sugerida por Fung (1981):

$$g_1(t) = g_0 e^{-\alpha t}, \quad (30)$$

sendo α a frequência do material.

Sabendo que ao se inflar o expansor até um volume de $40 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, este ainda não se deforma, pois seu volume indeformado também é $40 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, tem-se como constante elástica da pele suína $g_0 = 5784,31 \text{ Pa}$ e frequência $\alpha = 2,8935 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Na Fig. 4, pode-se observar a configuração deformada para os dados encontrados.

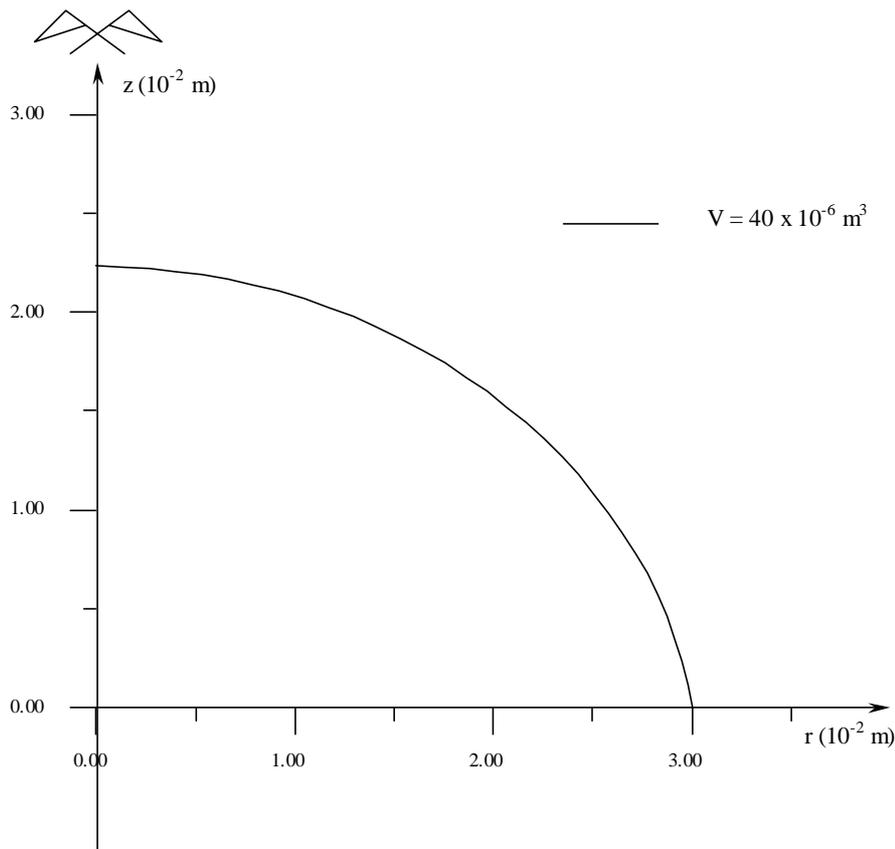


Figura 4 – Membrana deformada

No entanto, ao se inflar o expansor até um volume de $60 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, tanto a pele quanto o expansor se deformam. Então, nesta etapa, deve-se considerar as tensões existentes, devido à deformação anterior. Esta etapa será estudada futuramente.

5. CONCLUSÃO

Em trabalhos feitos anteriormente (Oomens *et al.*, 1987), a pele foi considerada como hiperelástica para a simplificação da modelagem. Neste caso, foram desprezadas as propriedades viscoelásticas que já foram constatadas experimentalmente e que obrigatoriamente devem ser atribuídas à pele.

Portanto, a inovação do presente trabalho é a modelagem matemática da pele sob expansão, considerando-a uma membrana viscoelástica, e a sua comparação com dados experimentais da pele de porcos (Brobmann & Huber, 1985), permitindo assim a determinação de suas constantes elásticas e viscoelásticas.

Ao mesmo tempo, o método numérico de relaxamento se mostrou rápido e eficiente, em comparação ao método de Runge-Kutta, tradicionalmente usado em problemas axissimétricos. Ele se mostrou especialmente prático para a determinação de parâmetros experimentais.

Futuramente, pretende-se estudar a superposição de tensões em grandes deformações, afim de obter-se o comportamento viscoelástico de uma membrana sujeita a deformações sucessivas.

REFERÊNCIAS

- Atkinson, C., 1988, On a possible theory for the design of tissue expander, *Q.J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 41, Pt. 3.
- Austad, E.D., Pasyk, K., and others, 1982, Histomorphologic evaluation of Guinea pig skin and soft tissue expansion, *Plast. Reconstr. Surg.* 70:704.
- Brobmann, G.F. and Huber, J., 1985, Effects of different-shaped tissue expanders on transluminal pressure, oxygen tension, histopathologic changes and skin expansion in pigs, *Plast. Reconstr. Surg.* 76: 731.
- Christensen, R.M., 1980, A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastones, *J. appl. Mech.* 47, *Trans. ASME* 102, Series E, pp 762.
- Flügge, W., 1967, *Viscoelasticity*. Blaisdell Publishing Company, London.
- Fung, Y.C., 1981, *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer, New York.
- Green, A.E. and Adkins, J.E., 1970, *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*. London: Oxford University Press.
- Green, A.E. and Zerna, W., 1975, *Theoretical Elasticity*. London: Oxford University Press.
- Manders, E. K., Schenden, M.J. and others, 1984, Soft-tissue expansion: concepts and complications, *Plast. Reconstr. Surg.* 74: 493.
- Maxwell, G.P., Spear S.L., 1995, Manual e vídeo do “Biodimensional Two-Stage Reconstruction System”.
- Oomens, C.W.J., van Campen, D.H., Grootenboer, H.J., 1987, A mixture approach to the mechanism of skin, *Journal of Biomechanics*, vol.20, No. 9.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran – The Art of Science Computing*. Second Edition, Cambridge University Press.
- Schmidt, S.C., Logan, S.E. and others, 1991, Continuous versus conventional tissue expansion: experimental verification of a new technique, *Plast. Reconstr. Surg.* 87: 10.

NUMERICAL ANALYSIS OF VISCOELASTIC MEMBRANES AND BIOMEMBRANES SUBJECTED TO EXPANSION

Abstract. *Tissue expansion is a well-known plastic surgery technique. There are many studies of histological behaviour of skin after expansion, as an example, changes in its thickness. Many authors have seen the viscoelastic behaviour of skin, but there is no complete mathematical work studding it. This paper has its purpose the determination of a numerical model.*

Key-Words: *Biomembranes, Skin, Viscoelasticity, Large Deformations*