



DETERMINAÇÃO ANALÍTICA E VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO VIBRATÓRIO DE VIGAS ACOPLADAS A SISTEMAS DISCRETOS

José B. de Medeiros

Prof. Moysés Zindeluk

COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Programa de Engenharia Mecânica

Laboratório de Acústica e Vibrações

moyses@serv.com.ufrj.br

Prof. Halei F. de Vasconcelos

CCEN/Dpto. De Física/Universidade Federal da Paraíba

Mercurio@jop.sol.com.br

Resumo. *O problema da vibração de sistemas contínuos combinados com sistemas discretos, de grande importância para a engenharia, tem sido objeto de vários estudos. Muitos sistemas mecânicos e estruturas como pontes, veículos, oleodutos e gasodutos com suportes intermediários são exemplos desses sistemas. No estudo de vigas são freqüentes os casos onde encontramos vínculos flexíveis, apoios intermediários e ligações com massas concentradas ou sistemas vibratórios discretos. Nas aplicações a controle de vibrações, a modelagem é requisito de projeto, especialmente quando os sistemas concentrados atuam como neutralizadores dinâmicos. Em controle ativo, quando os excitadores não estão ancorados a estruturas auxiliares, caso da ancoragem inercial ou “sky-hook”, é essencial incorporar suas características ao modelo do sistema. Além da complexidade da questão, que exige truncamento de modelo e métodos aproximados para sua solução, a realização experimental e aplicações tornam necessária a construção de protótipos. No presente trabalho será apresentado um exemplo de desenvolvimento analítico para determinar as freqüências e modos naturais de sistemas combinados e apresentados resultados experimentais. O modelo do experimento é uma viga Euler-Bernoulli engastada-simplesmente apoiada, com mini-excitadores eletromagnéticos presos em posições no seu vão. Os sinais para determinação das freqüências naturais são adquiridos com as próprias bobinas dos mini-excitadores e com acelerômetro piezoelétrico.*

Palavras-chave: Vibrações, Dinâmica estrutural, Sistemas Combinados.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de vigas simples fornece informações preciosas sobre o comportamento de estruturas, entretanto, na prática são freqüentes os casos onde encontramos vigas com

vínculos flexíveis, apoios intermediários, ligações com massas concentradas, sistemas vibratórios discretos e combinações desses sistemas. Estes casos têm um modelo matemático mais complexo e devido à sua grande importância para a engenharia têm sido inspiração para elaboração de muitos trabalhos, como os de Bergman et al. (1998), Dowel (1979), Jen et al. (1993), Liu & Huang (1998), Nicholson & Bergman (1986), Nicholson (1986), White & Heppler (1995) e Yang (1992).

2. VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS ACOPLADAS COM SISTEMAS DISCRETOS

Considere-se uma viga uniforme de comprimento l , engastada/simplesmente apoiada, que segue o modelo de Euler-Bernoulli e com amortecimento desprezível, acoplada em R pontos com massas concentradas e osciladores não amortecidos de um grau de liberdade como ilustra a “Fig. 1”.

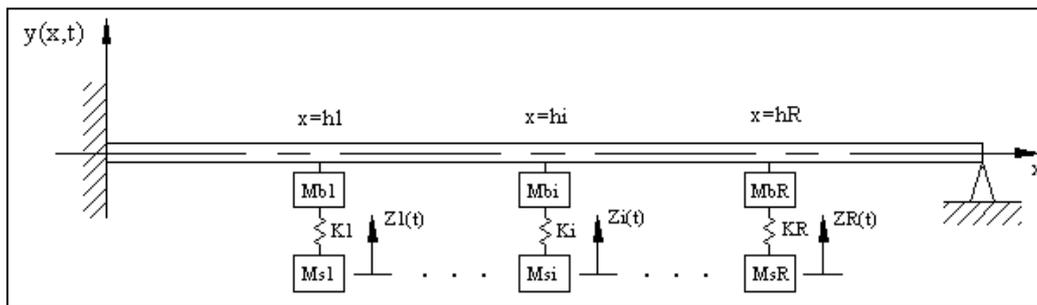


Figura 1 – Viga acoplada com massas concentradas e osciladores

Na ausência de carregamentos externos, as equações do movimento do sistema são dadas, Medeiros (1999), para a viga com as massas, por:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = \sum_{i=1}^R F_i(t) \delta(x - h_i) \quad (1)$$

onde $y(x,t)$ é o deslocamento transversal da viga; E é o módulo de elasticidade; I é o momento de inércia da seção transversal; ρ é a massa por unidade de comprimento; $\delta(x-h_i)$ é a função generalizada Dirac e $F_i(t)$ é a força de contato provocada pelo i -ésimo oscilador sobre o ponto $x=h_i$ da viga.

Para cada uma das massas concentradas, a equação do movimento é:

$$M_{s_i} \frac{d^2}{dt^2} z_i(t) + K_i z_i(t) = K_i y(h_i, t) \quad i=1,2,\dots,R. \quad (2)$$

onde $z_i(t)$ é o deslocamento da i -ésima massa sísmica M_{s_i} fixa elasticamente à massa da base M_{b_i} , através da i -ésima mola com constante elástica K_i . As expressões

$$F_i(t) = -M_{b_i} \frac{\partial^2 y(h_i, t)}{\partial t^2} + k_i [z_i(t) - y(h_i, t)] \quad \text{ou}$$

$$F_i(t) = -M_{b_i} \frac{\partial^2 y(h_i, t)}{\partial t^2} - M_{s_i} \frac{d^2}{dt^2} z_i(t) \quad (3)$$

calculam as forças desconhecidas de contato.

Admitindo-se que:

$$y(x, t) = Y(x)\eta(t) \quad (4)$$

e

$$z_i(t) = A_i Y(x)\eta(t) \quad (5)$$

onde A_i é uma constante a ser determinada, e substituindo-se as “Eqs. (3), (4) e (5)” na “Eq. (1)”, depois de se determinar $\frac{d^2}{dt^2} z_i(t)$ através da “Eq. (2)”, vem:

$$\frac{\frac{d^4}{dx^4} Y(x) - \left[\sum_{i=1}^R (M_{s_i} \omega_{s_i}^2 (A_i - 1) \delta(x - h_i)) \right] Y(x)}{\left[\rho + \sum_{i=1}^R M b_i \delta(x - h_i) \right] Y(x)} = - \frac{\frac{d^2}{dt^2} \eta(t)}{\eta(t)} = \omega^2 \quad (6)$$

onde:

$\omega_{s_i} = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$, é a freqüência natural do i -ésimo oscilador e

ω^2 é a constante de separação. A “Eq. (6)” implica que a separação de variáveis é possível e que, naturalmente, a dependência do movimento no tempo é harmônica da forma:

$$\eta(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (7)$$

Usando-se as “Eqs. (2), (4), (5) e (7)” encontra-se a constante A_i como sendo:

$$A_i = \frac{\omega_{s_i}^2}{\omega_{s_i}^2 - \omega^2} \quad (8)$$

que, substituída na “Eq. (6)” leva a:

$$EI \frac{d^4}{dx^4} Y(x) - \left\{ \sum_{i=1}^R [(M_{s_i} \omega_{s_i}^2 (A_i - 1) + M b_i \omega^2) \delta(x - h_i)] + \rho \omega^2 \right\} Y(x) = 0 \quad (9)$$

As soluções não-triviais da “Eq. (9)” com as condições de contorno homogêneas para a viga engastada-simplesmente apoiada da “Fig. 1” são as autofunções (modos naturais de vibração) $Y_n(x)$ e seus respectivos autovalores ω_n . É interessante notar que se $\omega_n^{-1} = \omega_{s_i}$, onde ω_n^{-1} é uma freqüência natural do sistema sem o oscilador i , então o i -ésimo oscilador atuará como um neutralizador dinâmico para o sistema, desde que $x=h_i$ não seja um nó do modo natural $Y_n(x)$ do sistema primitivo. O sistema combinado não terá mais a freqüência natural $\omega_n = \omega_{s_i}$, surgindo duas novas freqüências $\omega_n < \omega_{s_i}$ e $\omega_{n+1} > \omega_{s_i}$.

A solução analítica da “Eq. (9)” com as condições de contorno homogêneas pode ser encontrada através do uso da função de Green para a vibração da viga original. A função de Green $G(x, \xi, \beta)$ que satisfaz o operador

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - \beta^4 \right) G(x, \xi; \beta) = \delta(x - \xi) \quad (10)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EI} \quad (11)$$

e às condições de contorno homogêneas :

$$Y(0) = Y'(0) = Y(l) = Y''(l) = 0$$

que é o caso da viga da “Fig. 1” é:

$$G(x, \xi; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta^3} \text{sen}(\beta\xi - \beta x) + \frac{1}{2\beta^3} \text{senh}(\beta x - \beta\xi) + f_1(x, \xi; \beta) + f_2(x, \xi; \beta) + \\ f_3(x, \xi; \beta) + f_4(x, \xi; \beta); & p / 0 \leq \xi \leq x \\ f_1(x, \xi; \beta) + f_2(x, \xi; \beta) + f_3(x, \xi; \beta) + f_4(x, \xi; \beta); & p / x \leq \xi \leq l \end{cases} \quad (12)$$

onde

$$f_1(x, \xi; \beta) = \frac{-\text{sen}(\beta x) \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l - \beta\xi) - \text{sen}(\beta x) \cosh(\beta l) \text{sen}(\beta\xi - \beta l)}{2\beta^3 (\text{sen}(\beta l) \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l))}$$

$$f_2(x, \xi; \beta) = \frac{\cos(\beta x) \text{sen}(\beta l) \text{senh}(\beta l - \beta\xi) + \cos(\beta x) \text{senh}(\beta l) \text{sen}(\beta\xi - \beta l)}{2\beta^3 (\text{sen}(\beta l) \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l))}$$

$$f_3(x, \xi; \beta) = \frac{\text{senh}(\beta x) \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l - \beta\xi) + \text{senh}(\beta x) \cosh(\beta l) \text{senh}(\beta\xi - \beta l)}{2\beta^3 (\text{sen}(\beta l) \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l))}$$

$$f_4(x, \xi; \beta) = \frac{-\cosh(\beta x) \text{sen}(\beta l) \text{senh}(\beta l - \beta\xi) - \cosh(\beta x) \text{senh}(\beta l) \text{sen}(\beta\xi - \beta l)}{2\beta^3 (\text{sen}(\beta l) \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \text{senh}(\beta l))}$$

A solução da “Eq. (9)” é então:

$$Y(x) = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^R \left[(M s_i \omega_s^2 (A_i - 1) + M b_i \omega^2) G(h_i, x, \beta) Y(h_i) \right] \quad (13)$$

Fazendo-se $x \rightarrow h_j$ para $j=1, 2, \dots, R$ obtém-se um sistema de equações para $Y(h_j)$:

$$\sum_{i=1}^R \left\{ \delta_{ij} \left[\frac{1}{EI} \left((M_{s_i} \omega_{s_i}^2 (A_i - 1) + M_{b_i} \omega^2) G(h_i, x, \beta) \right) \right] Y(h_i) \right\} = 0 \quad (14)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Anulando-se o determinante da matriz dos coeficientes da “Eq. (14)”, define-se a equação característica para os autovalores ω_n^2 . A solução não trivial da “Eq. (14)” correspondente a $\omega = \omega_n$ determina a forma da linha elástica da viga $Y_n(x)$ para o n-ésimo modo natural do sistema combinado usando-se a “Eq. (13)”. A solução trivial corresponde aos modos triviais $Y_n(x)=0$ ou a osciladores localizados somente nos nós dos modos naturais $Y_n(x)$ da viga.

3. MONTAGEM EXPERIMENTAL

Neste trabalho, visando-se verificar as frequências naturais obtidas analiticamente, foi montada uma bancada experimental como mostrado na “Fig. 2”.

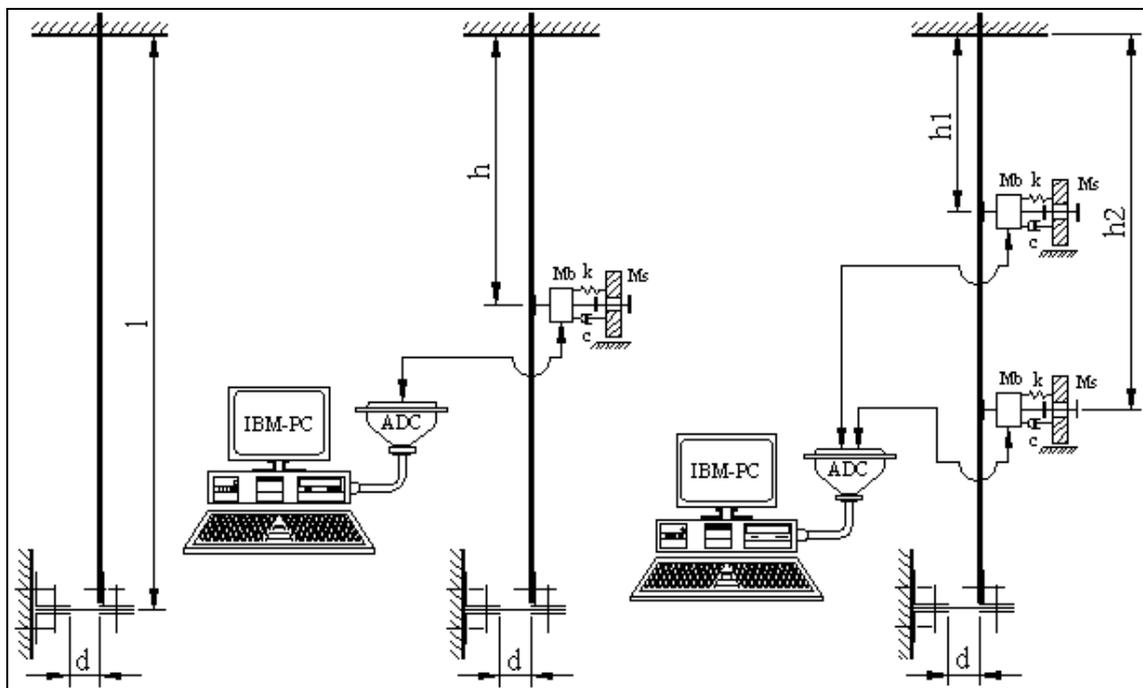


Figura 2 – Montagem experimental

Nesta figura apresenta-se um sistema combinado formado pela junção de mini-excitadores eletromagnéticos a uma viga de alumínio comercial de comprimento $l=1\,500$ mm (sistema de base), largura 50,4 mm, espessura de 3,2 mm, módulo de elasticidade $E=72,5$ GPa, massa por unidade de comprimento $\rho=0,45$ kg/m. Tal viga teve seu módulo de elasticidade, massa por unidade de comprimento, modos e frequências naturais determinados experimentalmente por Ripper, (1994).

3.1. Mini-Excitadores

Os mini-excitadores eletromagnéticos utilizados nesta montagem fazem parte de uma linha de excitadores projetados e construídos no Departamento de Tecnologia Mecânica (DTM) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) – CAMPUS I, e encontram-se em

operação desde 1988 (Vasconcelos, 1994, 1996,1997). Esse tipo de excitador, ilustrado na “Fig. 3”, pode ser utilizado como excitador ou como transdutor para captar vibrações, sendo o sinal produzido proporcional a velocidade instantânea. Neste trabalho os mini-excitadores são modelados como sistemas discretos acoplados à viga e utilizados como transdutores, permitindo a verificação experimental dos fatores A_i .

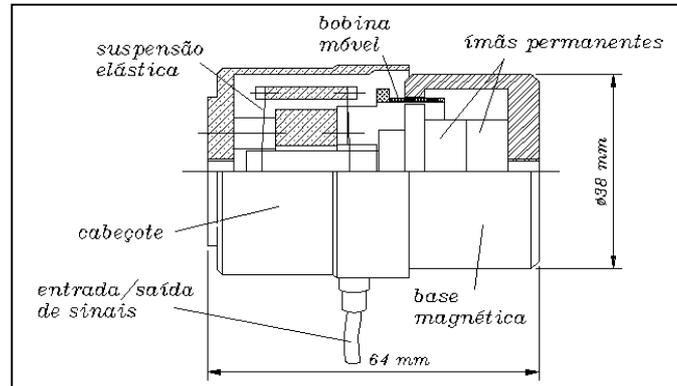


Figura 3 – Mini-excitador eletromagnético

No experimento, cada mini-excitador foi acoplado à viga pelo cabeçote. Assim, na realização de cálculos M_b é a massa do cabeçote e M_s é a massa da base ver “Figs. 2 e 3”. Dois mini excitadores, com características distintas, foram utilizados: o mini-excitador 1, que tem frequência natural $f_n=18,7$ Hz e o mini-excitador 2, $f_n=21,7$ Hz. As massas do cabeçote e da base do mini-excitador 1 são respectivamente, 94 g e 166 g e as massas do cabeçote e de base para o mini-excitador 2 são respectivamente, 99 g e 166 g.

3.2. Aquisição dos sinais

Nesta realização experimental os sinais de vibração provenientes da viga, monitorados pelos mini-excitadores, foram adquiridos em um microcomputador padrão IBM/PC via placa conversora analógico/digital (ADC) LYNX, juntamente com o software de aquisição e monitoração de sinais fornecido por este fabricante, o AQD4 (AQDADOS4).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A “Tabela 1” indica as cinco primeiras frequências naturais em Hz, da viga da “Fig. 2” correspondente ao espectro da “Fig. 4”.

A “Fig. 4” mostra as cinco primeiras frequências naturais do sistema da viga (sistema de base) sem sistemas acoplados. O espectro apresentado nesta figura foi obtido utilizando-se um acelerômetro piezoelétrico fixado em um ponto conveniente.

Conforme a “Fig. 2”, foram acoplados ao sistema de base (viga simples), um ou dois mini-excitadores. Realizaram-se medições para determinação das frequências e modos naturais da viga simples e do sistema combinado em duas situações: o mini-excitador 1 acoplado em $x=h_1=527$ mm do engaste, correspondendo a um sistema combinado cujas primeiras cinco frequências naturais, calculadas pela “Eq. (14)” estão apresentadas na coluna 1 da “Tabela 2” e as cinco primeiras frequências naturais determinadas experimentalmente estão na coluna 2 desta mesma tabela e correspondem ao espectro mostrado na “Fig. 5”, o mini-excitador 1 acoplado em h_1 e o mini-excitador 2 acoplado em $x=h_2=1\ 222$ mm do engaste, correspondendo a um sistema combinado cujas primeiras cinco frequências naturais, calculadas analiticamente pela “Eq. (14)” estão apresentadas na coluna 1 da “Tabela 3” e as

cinco primeiras freqüências naturais determinadas experimentalmente estão na coluna 2 desta mesma tabela correspondendo aos espectros mostrados nas “Figs. 6 e 7”.

Tabela 1. Freqüências naturais (Hz) da viga da “Fig. 2”.

1	2	3	4	5
5,078	16,41	34,38	58,59	89,45

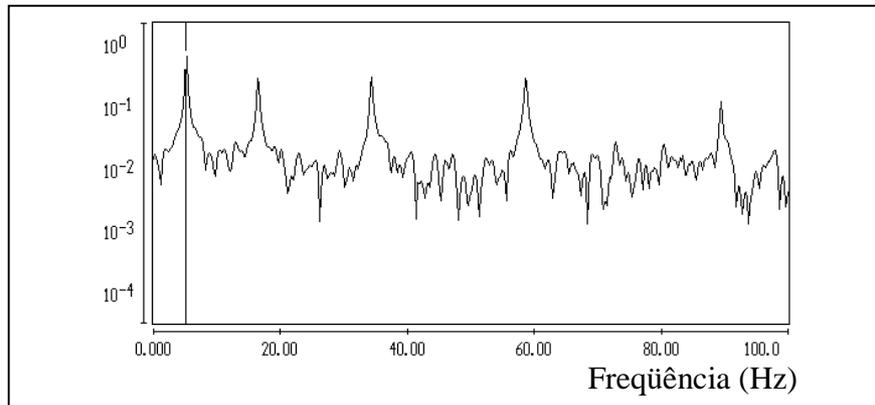


Figura 4 – Freqüências naturais da viga

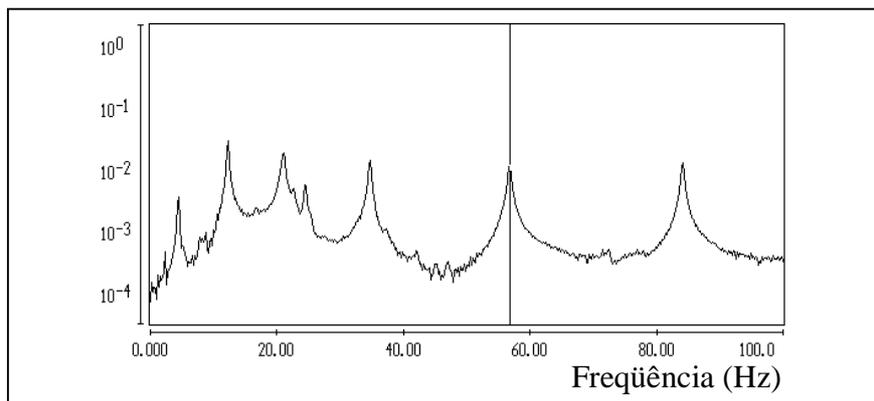


Figura 5 – Espectro de amplitude do sistema combinado (viga mais mini-excitador 1 em h_1)

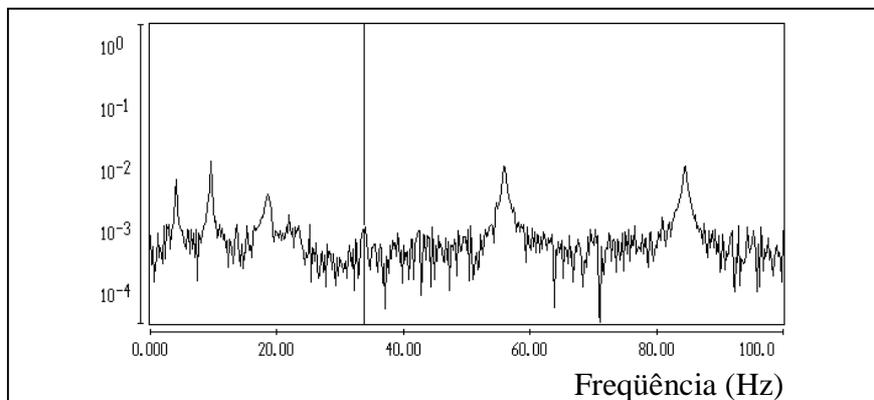


Figura 6 – Espectro de amplitudes do sistema combinado (viga mais o mini-excitador 1 em h_1 e o mini-excitador 2 em h_2), sinais obtidos através do mini-excitador 1.

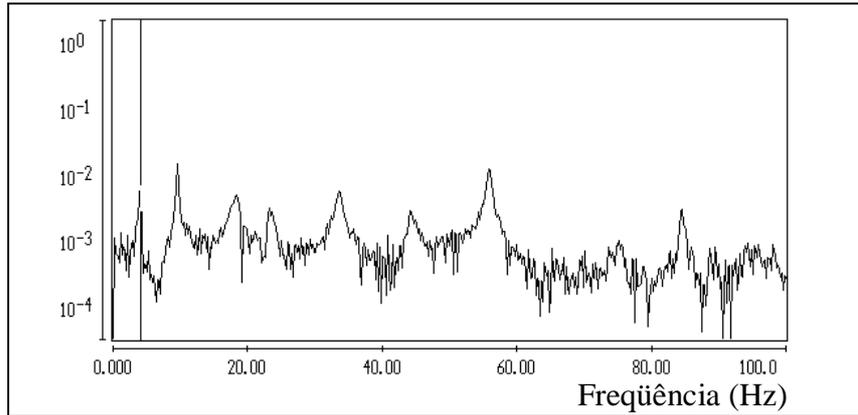


Figura 7 – Espectro de amplitudes do sistema combinado (viga mais o mini-excitador 1 em h_1 e o mini-excitador 2 em h_2), sinais obtidos através do mini-excitador 2.

Tabela. 2. Frequências naturais do sistema combinado: viga mais o mini-excitador 1 em h_1 .

n	“Eq. (14)”	Res. Experimentais	Erro (%)
1	4,22	4,29	1,63
2	12,54	12,30	1,91
3	25,55	24,61	3,68
4	34,40	34,77	1,06
5	56,80	56,84	0,07

Tabela. 3. Frequências naturais do sistema combinado: viga mais o mini-excitador 1 em h_1 e o mini-excitador 2 em h_2 .

n	“Eq. (14)”	Res. Experimentais	Erro (%)
1	3,80	4,10	7,31
2	9,78	9,57	2,15
3	21,85	18,55	15,10
4	26,06	23,24	10,82
5	32,07	33,79	5,09

Como visto, os afastamentos entre os resultados teóricos e experimentais são maiores quando acoplamos mais de um sistema discreto à viga. Estes afastamentos podem ser justificados pelos seguintes motivos: as medições feitas com só um mini-excitador foram propositalmente feitas com o mini-excitador 1, tendo em vista o seu baixo amortecimento percentual, ficando-se assim, com um sistema combinado em teste, bem próximo das condições ideais, ou seja, vibração livre sem amortecimento; com apenas um mini-excitador acoplado à viga é mais fácil aliviar-se o carregamento de tração que este provoca sobre a viga, e caso permaneça algum carregamento residual, pela falha do sistema de alívio de carga improvisado, este não causará efeito significativo; com apenas um mini-excitador também é mais fácil, utilizando-se do sistema de alívio de carga, compensar a curvatura estática sofrida pela linha elástica da viga devido ao momento estático causado pelo peso do excitador; quando se acoplamos o mini-excitador 1 e o mini-excitador 2 à viga, além do mini-excitador 2 ter um amortecimento maior, esse amortecimento se somará, de qualquer maneira, ao amortecimento do sistema combinado como um todo. Nesta situação, também torna-se mais

crítica a curvatura da linha elástica da viga, pois agora serão dois momentos de flexão estática aplicados em pontos distintos e o fato de adicionar-se mais um carregamento residual de tração.

Outro aspecto que torna mais crítica a realização do experimento com o mini-excitador 1 e o mini-excitador 2 acoplados à viga é também o carregamento dinâmico de tração que ocorre na viga. Quando a viga curva-se o apoio simples na extremidade inferior da viga permite um pequeno deslocamento do centro de gravidade do sistema como um todo, havendo um aumento ou diminuição, variável com a frequência a qual o sistema encontra-se vibrando, de sua energia potencial. Isto porque o sistema de alívio da carga dos mini-excitadores, como mencionado, não consegue neutralizar totalmente este carregamento.

Também é notável que em todas as situações houve um erro maior entre os resultados teóricos e os experimentais na região compreendida entre a terceira e a quarta frequência natural do sistema combinado uma vez que neste intervalo há uma interação dinâmica muito grande entre a viga e os mini-excitadores, que têm suas frequências naturais nesse intervalo.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho ficou destacado o uso da função de Green, ou seja, o coeficiente de influência do sistema de base (sistema contínuo), para a análise dinâmica de sistemas combinados tais como vigas acopladas com sistemas discretos. Ficou também comprovada uma das maiores virtudes da utilização de métodos analíticos para o estudo de sistemas complexos, que são as ricas e transparentes informações que o equacionamento final nos propõe.

Quanto à realização experimental, também não fica nenhuma dúvida sobre sua necessidade, pois à medida em que incorporam-se sistemas que interagem dinamicamente com o sistema a estudar, surgem os mais diversos tipos de complicações que requerem, muitas vezes, engenhosos artifícios para se contornarem. Os mini-excitadores mostraram-se excelentes transdutores de vibração, pois além de mostrarem-se bastante estáveis dispensam o uso de pré-amplificadores de sinais.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio do Eng^o Anderson Pessoa pela sua significativa participação na realização experimental e dos colegas Flávio Feiteira, Carla Patrícia, Luiz Mariano e Jeanne Barros.

REFERÊNCIAS

- Bergman, L. A., Mcfarland, D. M., 1998, On the vibration of a point-supported linear distributed system, Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 485-492.
- Dowel, E. H., 1979, On some general properties of combined dynamical systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 206-209.
- Jen, Ming Une, Magrab, E. B., April 1993, Natural frequencies and mode shapes of beams carrying a two degree-of-freedom spring-mass system, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 202-209.
- Liu, W. H., Huang, C. C., 1988, Free vibration of restrained beam carrying concentrated masses, Journal of Sound and Vibration, Vol. 123, N^o 1, pp. 31-42.
- Medeiros, J. B., 1999, Estudo analítico e experimental do comportamento vibratório de vigas acopladas a sistemas discretos, Tese de Mestrado – PEM–COPPE/UFRJ.

- Nicholson, J. W., Bergman, L. A., 1986, Free vibration of combined dynamical systems , ASCE Journal of Engineering Mechanics, vol. 112, pp. 1-13.
- Nicholson, J. W., March 1986, Free vibration of stiffened rectangular plates using Green's functions and integral equations, AIAA Journal, Vol. 24, N° 23, pp. 485-491.
- Ripper, G. P., 1994, Análise Modal: teoria e prática aplicadas a um sistema para controle ativo de vibrações, Tese de Mestrado - PEM-COPPE/UFRJ.
- Vasconcelos, H. F., 1994, Uma linha de excitadores e de sensores de vibrações mecânicas projetada e desenvolvida na UFPB, I Congresso Brasil/Argentina e XV Encontro da Sociedade Brasileira de Acústica, pp. 325-328, Florianópolis, Brasil.
- Vasconcelos, H. F., 1996, Vibrations electromagnetic micro exciters using rare earth magnets, Proceedings of the 14th International Workshop on Rare-Earth Magnets and their Applications, Vol. 1, Pp. 607-616, São Paulo, SP, September.
- Vasconcelos, H. F., 1997, Micro-excitador eletromagnético de alto desempenho, IV Simpósio Brasileiro de Acústica Veicular, pp. 187-192, S. B. do Campo, SP.
- White, M. W. D., Heppler, G. R., 1995, Vibration modes and frequencies of Timoshenko beams with attached rigid bodies, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 62, pp. 193-199.
- Yang, B., 1992, Transfer functions of constrained/combined one-dimensional continuous dynamic systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 156, N° 3, pp. 425-443.

EXPERIMENTAL AND ANALYTICAL DETERMINATION OF THE VIBRATORY BEHAVIOUR OF BEAMS COUPLED TO DISCRETE SYSTEMS

Abstract. *The problem of vibrations in systems that combine continuous and discrete components is of great importance in engineering, having been the subject of various investigations. Beams with flexible constraints, intermediate supports, concentrated masses and discrete vibrating attachments are quite common. In control engineering, an accurate modeling of such systems is very important, especially when concentrated masses are used as passive or active vibration reducers. Thus, in an active control setup, with the control vibrating masses not anchored to an auxiliary structure, configuration that is known as “sky-hook”, it is essential to incorporate their dynamic characteristics into the system model. Due to the complexity of the model, which requires truncation and approximations, experimental data from prototypes are essential for . This work presents both an analytical model for evaluating the natural frequencies and the respective mode shapes of coupled systems, combining continuous and discrete components, and the results obtained with an experimental model of such a system. This model consists of a clamped-simply supported Euler-Bernoulli beam, with two small electromagnetic vibration exciters attached to selected points of the beam. The natural frequencies of the system were obtained from measurements using a piezoelectric accelerometer and the coils of the exciters.*

Keywords. Vibrations, Structural Dynamics, Coupled Systems.