



## TRATAMENTO NUMÉRICO IMPLÍCITO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO NÃO-LINEAR DE TURBULÊNCIA EM COORDENADAS GENERALIZADAS

**Marcelo Assato**

**Marcelo J.S. de Lemos**

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 – São José dos Campos, SP, Brasil - E-mail: [mdelemos@tecsat.com.br](mailto:mdelemos@tecsat.com.br)

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado um novo tratamento numérico para aplicação de um modelo não-linear de turbulência. Esta classe de modelo é capaz de simular efeitos anisotrópicos presentes em certos tipos de escoamentos. Basicamente, este modelo é uma extensão do modelo  $k-\epsilon$  padrão, acrescido de termos não-lineares para representação das tensões turbulentas. As equações de transporte para o campo médio e turbulento são apresentadas e discretizadas em coordenadas generalizadas. Os fluxos difusivos, oriundos dos termos não-lineares, são tratados numericamente nas formas implícita e explícita, buscando-se, assim, melhorar a estabilidade numérica do algoritmo. Resultados preliminares usando o modelo não-linear são apresentados.

**Palavras-chave:** Turbulência, Modelo Não-linear, Anisotropia, Coordenadas Generalizadas

### 1. INTRODUÇÃO

Os modelos não-lineares de viscosidade turbulenta originaram-se na necessidade de suprir as deficiências apresentadas pelos modelos que fazem uso de uma relação linear entre as tensões turbulentas e as taxas de deformação. Em suma, os modelos que utilizam uma relação linear mostram ser incapazes de descrever escoamentos onde a diferença das tensões normais é importante, como por exemplo, em escoamentos em dutos de seção não circular. Portanto, para simulação destes efeitos anisotrópicos da turbulência, modelos introduzindo termos não-lineares na relação tensão x taxa de deformação têm sido desenvolvidos. Estas tentativas buscam, de certa forma, os mesmos objetivos dos chamados Modelos de Tensões Algébricas (e.g. de Lemos, 1988).

Os modelos de viscosidade turbulenta não-lineares tiveram origem numa proposta geral feita por Pope, 1975. Porém, somente na década de 80 tais modelos tiveram grandes avanços com os trabalhos de Speziale, 1987, Yoshizawa, 1987, Rubinstein & Barton, 1990, Taubee, 1992, Shih et al, 1993. Nestes trabalhos foram introduzidos produtos quadráticos das tensões-deformações e vorticidade na relação tensão-deformação, com diferentes derivações e

calibrações para os modelos. Estas formas quadráticas produzem um certo grau de anisotropia entre as tensões normais, com isso são capazes de prever, entre outros processos, a presença de escoamentos secundários em dutos de seção não circular. Craft et al, 1993, foram além dos termos quadráticos e incluíram produtos cúbicos afim de obter uma melhor sensibilidade das tensões cisalhantes nos locais onde apresenta uma acentuada curvatura das linhas de correntes, como por exemplo, nos escoamentos com redemoinhos (swirling flows).

Motivado pelos sucessivos avanços dos modelos não-lineares, Assato & de Lemos, 1998 apresentaram os passos necessários para adaptar uma equação não-linear em um código computacional baseado em um sistemas de coordenadas generalizadas. Dando continuidade àquele desenvolvimento, neste trabalho é proposto um tratamento numérico para os termos não-lineares, consistindo de partes implícita e explícita, visando, assim, uma melhoria na estabilidade numérica da solução.

## 2. EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E CONSTITUTIVA

As equações gerais que descrevem o escoamento de fluidos podem ser escritas na seguinte forma:

$$\text{Massa: } \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Momento: } \operatorname{div}(\rho \vec{v} U_i - \vec{t}_i) = s_{u_i} \quad (2)$$

$$\text{Escalar: } \operatorname{div}(\rho \vec{v} \phi - \vec{q}_\phi) = s_\phi \quad (3)$$

Onde:  $\vec{t}_i$  na eq.(2) contém a tensão agindo no direção-i, e  $s_{u_i}$  representa todos os termos fonte, incluindo o termo de pressão e gravitacional. Na eq.(3)  $\phi$  representa uma quantidade escalar,  $\vec{q}_\phi$  é seu fluxo difusivo e  $s_\phi$  representa a fonte ou sumidouro de  $\phi$ . As equações para  $\vec{t}_i$ ,  $\vec{q}_\phi$  e  $s_{u_i}$  são dadas por:

$$\vec{t}_i = \tau_{ij} \cdot \vec{i}_j \quad (4)$$

$$\vec{q}_\phi = \Gamma_\phi \operatorname{grad} \phi = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \vec{i}_j \right) \quad (5)$$

$$s_{u_i} = - \frac{\partial P}{\partial y^i}, \quad P = p + \rho gh \quad (6)$$

onde, na eq.(5), a expressão para a difusão tem sido usado com a ajuda do coeficiente de transporte  $\Gamma_\phi$ , formado pela viscosidade turbulenta  $\mu_t$ , dado por:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (7)$$

onde na eq.(7)  $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$  é a energia cinética turbulenta por unidade de massa,  $\varepsilon$  a taxa de dissipação de  $k$ ,  $C_\mu$  é uma constante e  $\sigma_\phi$  o número de Prandtl/Schmidt para  $\phi$ .

A equação constitutiva apresentada por Craft et al, 1993 tem termos linear, quadrático e cúbico. Neste trabalho, os termos cúbicos não são apresentados. Atenção especial é dado para os termos quadráticos. Portanto, a expressão das tensões de Reynolds segundo Craft et al, 1993 são escritas como:

$$\hat{\sigma}_{ij} = -(\hat{\iota}_t S_{ij})^L + \left( C_1 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} [S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \hat{a}_{ij}] \right)^{NL1} + \left( C_2 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} [\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}] \right)^{NL2} + \left( C_3 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} [\Omega_{lk} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{lk} \Omega_{lk} \hat{a}_{ij}] \right)^{NL3} \quad (8)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = (\hat{\sigma}_{ij})^L + (\hat{\sigma}_{ij})^{NL1} + (\hat{\sigma}_{ij})^{NL2} + (\hat{\sigma}_{ij})^{NL3} \quad (9)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, os sobrescritos nas eqs.(8) e (9) indicam contribuições **L**inear e **N**ão-**L**inear,  $S_{ij}$  e  $\Omega_{ij}$  representam os tensores deformação e vorticidade, respectivamente, dados por:

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

Expandindo os termos quadráticos da eq.(8) em sua forma bidimensional ( $k=1,2$  e  $l=1,2$ ), tem-se:

$$(\hat{\sigma}_{ij})^{NL1} = C_1 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} \left[ A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} \right] \quad (11)$$

$$(\hat{\sigma}_{ij})^{NL2} = 2C_2 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} [B_{ij} + C_{ij}] \quad (12)$$

$$(\hat{\sigma}_{ij})^{NL3} = C_3 \hat{\iota}_t \frac{k}{\hat{a}} \left[ -A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} - D_{ij} \right] \quad (13)$$

onde:

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial x_2}, \quad C_{ij} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_2}, \quad E_{ij} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \quad (14)$$

$$F_{ij} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2, G_{ij} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2$$

Na eq.(14)  $u_1 = U$  e  $u_2 = V$  são as componentes da velocidade na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente.

## 2.1 Discretização da equação de momento em coordenadas generalizadas

O método numérico empregado para a discretização das equações é o método dos volumes finitos. A figura abaixo mostra um volume de controle genérico com seus detalhes e notações, distâncias e índices usados na transformação das equações para o sistema de coordenadas  $\eta - \xi$ .

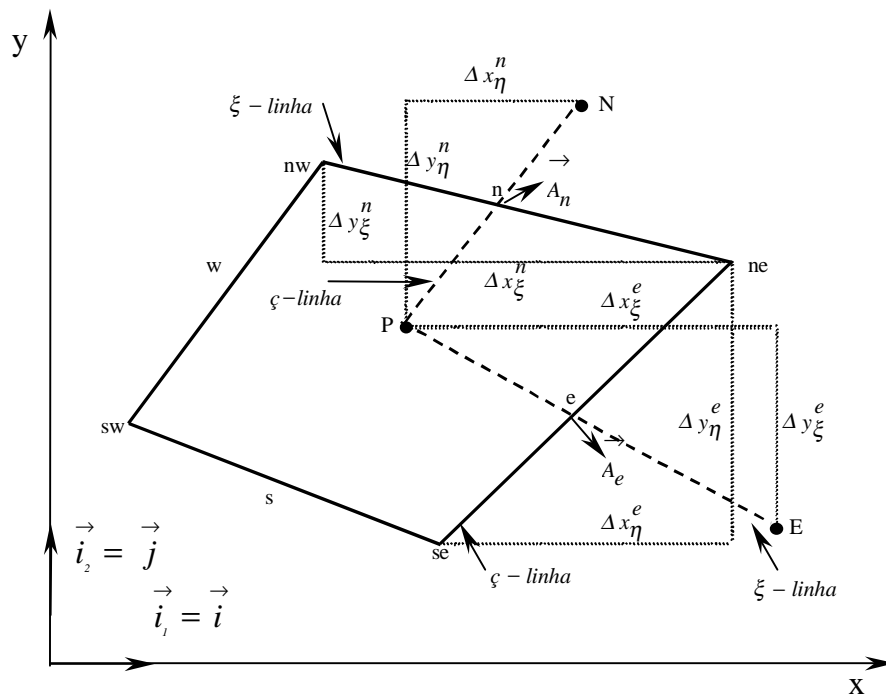


Figura 1 Volume de controle e notações

Da fig. 1 é definido as seguintes distâncias geométricas:

$$\begin{aligned} \ddot{A}x_{\xi}^e &= (x_{ne} - x_{se}), & \ddot{A}x_{\eta}^e &= (x_E - x_P), & \ddot{A}y_{\xi}^e &= (y_{ne} - y_{se}), & \ddot{A}y_{\eta}^e &= (y_E - y_P), \\ \ddot{A}x_{\xi}^n &= (x_{ne} - x_{nw}), & \ddot{A}x_{\eta}^n &= (x_N - x_P), & \ddot{A}y_{\xi}^n &= (y_{ne} - y_{nw}), & \ddot{A}y_{\eta}^n &= (y_N - x_P). \end{aligned} \quad (15)$$

A forma do vetor de área do volume de controle nas faces leste e norte, respectivamente, são dados por:

$$\begin{aligned} \vec{A}_e &= \Delta y_{\eta}^e \vec{i} - \Delta x_{\eta}^e \vec{j} & \vec{A}_n &= -\Delta y_{\xi}^n \vec{i} + \Delta x_{\xi}^n \vec{j} \end{aligned} \quad (16)$$

Para uma variável genérica dependente  $\varphi$ , em um escoamento em regime permanente, a forma discretizada da eq.(2) pode ser escrita como:

$$I_e + I_w + I_n + I_s = S_\varphi \quad (17)$$

onde  $I_e, I_w, I_n, I_s$  são os fluxos totais ( convectivo e difusivo ) de  $\varphi$  na face leste, oeste, norte e sul do volume de controle, respectivamente, e  $S_\varphi$  o termo fonte correspondente.

Para a face leste o fluxo pode ser escrito como:

$$I_e = \int_{A_e} (n \cdot \varphi) dA \approx (n_e \cdot \varphi_e) A_e \quad (18)$$

onde  $A_e$  é a área da face leste do volume de controle,  $n_e$  é o vetor normal unitário a  $A_e$  e  $\varphi_e$  é o valor médio de  $\varphi$  prevalecendo sobre  $A_e$ . No processo de discretização, para um qualquer ponto nodal P é assumido que:

$$(I_w)_P = -(I_e)_W \quad (I_s)_P = -(I_n)_S \quad (19)$$

Todo o tratamento numérico e processo de discretização dos termos convectivo e difusivo linear e não-linear, bem como as equações para  $k$  e  $\varepsilon$  são mostrados em detalhes no trabalho feito por Assato & de Lemos, 1998. O tratamento numérico apresentado por Assato & de Lemos, 1998, para os termos difusivos não-lineares foi totalmente explícito, determinados no termo fonte. No presente trabalho estes termos tem tratamento implícito e explícito com a finalidade de melhorar a estabilidade numérica do código computacional.

Após a discretização em coordenadas generalizadas, o fluxo difusivo na direção x para a face leste é o seguinte:

$$I_e^{D_x} = (I_e^{D_x})^L + (I_e^{D_x})^{NL1} + (I_e^{D_x})^{NL2} + (I_e^{D_x})^{NL3} \quad (20)$$

$$(I_e^{D_x})^L = -\frac{\dot{I}_e}{D_e} \left\{ \ddot{A}U_i^e \left[ 2(\ddot{A}y_\zeta^e)^2 + (\ddot{A}x_\zeta^e)^2 \right] - \ddot{A}U_\zeta^e \left[ 2\ddot{A}y_i^e \ddot{A}y_\zeta^e + \ddot{A}x_i^e \ddot{A}x_\zeta^e \right] - (\partial_c^e) \ddot{A}x_\zeta^e \right\} \quad (21)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL1} = \frac{C_1 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -\ddot{A}y_\zeta^e \left[ \frac{8}{3}(\partial_a^e)^2 + \frac{1}{3}(\partial_b^e + \partial_c^e)^2 - \frac{4}{3}(\partial_d^e)^2 \right] + 2\ddot{A}x_\zeta^e [(\partial_a^e + \partial_d^e)(\partial_b^e + \partial_c^e)] \right\} \quad (22)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL2} = \frac{2C_2 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -\ddot{A}y_\zeta^e \left[ (\partial_b^e)^2 - (\partial_c^e)^2 \right] + \ddot{A}x_\zeta^e [(\partial_d^e - \partial_a^e)(\partial_b^e - \partial_c^e)] \right\} \quad (23)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL3} = \frac{C_3 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -\ddot{A}y_\zeta^e \left[ \frac{1}{3}(\partial_b^e - \partial_c^e)^2 \right] \right\} \quad (24)$$

onde  $\partial_a^e = \ddot{A}y_\zeta^e \ddot{A}U_i^e - \ddot{A}y_i^e \ddot{A}U_\zeta^e$   $\partial_b^e = \ddot{A}x_i^e \ddot{A}U_\zeta^e - \ddot{A}x_\zeta^e \ddot{A}U_i^e$   $\partial_c^e = \ddot{A}y_\zeta^e \ddot{A}V_i^e - \ddot{A}y_i^e \ddot{A}V_\zeta^e$

$$\partial_d^e = \ddot{A}x_i^e \ddot{A}V_\zeta^e - \ddot{A}x_\zeta^e \ddot{A}V_i^e \quad D_e = \ddot{A}y_\zeta^e \cdot \ddot{A}x_i^e - \ddot{A}y_i^e \cdot \ddot{A}x_\zeta^e \quad (25)$$

sendo

$$\ddot{A}U_{\zeta}^e = (U_{ne} - U_{se}), \quad \ddot{A}U_i^e = (U_E - U_P), \quad \ddot{A}V_{\zeta}^e = (V_{ne} - V_{se}), \quad \ddot{A}V_i^e = (V_E - V_P). \quad (26)$$

Para a face norte o fluxo difusivo possui uma forma analoga. E para a equação de momento em y, os fluxos difusivos para ambas as faces leste e norte são também expressas de forma similar.

### 2.3 Tratamento implícito e explícito dos termos difusivos

Para melhorar a estabilidade numérica do código computacional, os termos difusivos das eqs. (21), (22), (23) e (24) são reescritos em uma combinação que venham a contribuir para o tratamento implícito e explícito. As equações são escritas da seguinte forma:

$$(I_e^{D_x})^L = -\Delta U_{\xi}^e (D_e^{x,y})^L + (S_e^{*x})^L \quad (27)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL1} = \Delta U_{\xi}^e (D_e^{x,y})^{NL1} + (S_e^{*x})^{NL1} \quad (28)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL2} = \Delta U_{\xi}^e (D_e^{x,y})^{NL2} + (S_e^{*x})^{NL2} \quad (29)$$

$$(I_e^{D_x})^{NL3} = \Delta U_{\xi}^e (D_e^{x,y})^{NL3} + (S_e^{*x})^{NL3} \quad (30)$$

O primeiro termo do lado direito de cada equação é o termo tratado implicitamente e o segundo que possui tratamento explícito. Os coeficientes  $(D_e^{x,y})$  são os mesmos para a equação em x e y, e são expressos por:

$$(D_e^{x,y})^L = \frac{\mu_t^e}{\Pi_e} \left[ (\Delta y_{\eta}^e)^2 + (\Delta x_{\eta}^e)^2 \right] \quad (31)$$

$$(D_e^{x,y})^{NL1} = \frac{C_1 \mu_t^e k}{(\mathcal{D}_e)^2 \hat{\alpha}} \left\{ -2(\ddot{A}y_{\zeta}^e)^2 \delta_a^e + 2\ddot{A}x_{\zeta}^e \left[ \frac{4}{3} \ddot{A}y_{\zeta}^e (\delta_b^e + \delta_c^e) - \ddot{A}x_{\zeta}^e \delta_d^e \right] \right\} \quad (32)$$

$$(D_e^{x,y})^{NL2} = \frac{2C_2 \mu_t^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ \ddot{A}x_{\zeta}^e \ddot{A}y_{\zeta}^e \left[ \ddot{A}x_{\xi}^e \ddot{A}U_{\eta}^e - \ddot{A}y_{\xi}^e \ddot{A}V_{\eta}^e \right] \right\} \quad (33)$$

$$(D_e^{x,y})^{NL3} = \frac{C_3 \mu_t^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ \Delta x_{\zeta}^e \Delta y_{\zeta}^e \left[ (\delta_b^e + \delta_c^e) \right] \right\} \quad (34)$$

Os termos tratados explicitamente  $(S_e^{*x})$  fazem uso dos valores das velocidades nos pontos da malha calculados da iteração anterior. Para a face leste e direção x, tem-se as seguintes expressões:

$$(S_e^{*x})^L = -\frac{\dot{\mu}_t^e}{\mathcal{D}_e} \left\{ (\ddot{A}U_{\xi}^e)^{\circ} (\ddot{A}y_{\zeta}^e)^2 - (\ddot{A}U_{\eta}^e)^{\circ} \left[ 2\ddot{A}y_i^e \ddot{A}y_{\zeta}^e + \ddot{A}x_i^e \ddot{A}x_{\zeta}^e \right] - \delta_c^e \ddot{A}x_{\zeta}^e \right\} \quad (35)$$

$$(S_e^{*x})^{NL1} = \frac{C_1 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -2\ddot{A}y_\zeta^e \left[ \frac{1}{3}(\partial_a^e)^2 + (\ddot{A}U_\zeta^e)^\circ \left( -\ddot{A}y_\xi^e \partial_a^e + \ddot{A}x_\xi^e \left( \frac{1}{3}\partial_c^e + \frac{1}{6}\ddot{A}x_\xi^e (\ddot{A}U_\eta^e)^\circ \right) \right) - \frac{2}{3}(\partial_d^e)^2 + \frac{1}{6}(\partial_c^e)^2 \right] \right. \\ \left. + 2\ddot{A}x_\zeta^e \left[ \frac{1}{6}\ddot{A}x_\zeta^e (\ddot{A}U_\xi^e)^\circ \partial_a^e + (\ddot{A}U_\zeta^e)^\circ \left( \ddot{A}x_\xi^e \partial_d^e - \ddot{A}y_\xi^e \left( \partial_c^e + \frac{2}{6}\partial_b^e - \frac{1}{6}\ddot{A}x_\xi^e (\ddot{A}U_\eta^e)^\circ \right) \right) + \partial_c^e \partial_d^e \right] \right\} \quad (36)$$

$$(S_e^{*x})^{NL2} = \frac{2C_2 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -\ddot{A}y_\zeta^e \left[ (\ddot{A}x_\xi^e)^2 (\ddot{A}U_\eta^e)^\circ \right] - (\partial_c^e)^2 \right\} + \ddot{A}x_\zeta^e \left\{ \left[ (\ddot{A}y_\eta^e)^2 (\ddot{A}U_\xi^e)^\circ (\ddot{A}V_\xi^e)^\circ + \right. \right. \\ \left. \left. (\partial_b^e - \partial_c^e) (\ddot{A}y_\xi^e (\ddot{A}U_\eta^e)^\circ) + \partial_d^e \right] \right\} \quad (37)$$

$$(S_e^{*x})^{NL3} = \frac{C_3 \mu_i^e k}{(\Pi_e)^2 \varepsilon} \left\{ -\frac{\Delta y_\zeta^e}{3} \left[ \Delta x_\zeta^e (\partial_b^e + 3\partial_c^e - \ddot{A}x_\eta^e (\ddot{A}U_\xi^e)^\circ) (\ddot{A}U_\xi^e)^\circ - 2\partial_b^e \partial_c^e + (\partial_c^e)^2 \right] \right. \\ \left. + (\ddot{A}x_\xi^e)^2 (\ddot{A}U_\eta^e)^\circ \right\} \quad (38)$$

O sobrescrito “o” das diferenças das velocidade indica que os valores são tomados da iteração anterior, bem como (embora não indicado) para os valores dos  $\pi$ 's.

De forma analoga tem-se o fluxo difusivo para face “e” na direção y, sendo que os coeficientes ( $D_e^{x,y}$ ) são os mesmos, mudando a parte que é tratada explicitamente:

$$(I_e^{D_y})^L = -\Delta V_\xi^e (D_e^{x,y})^L + (S_e^{*y})^L \quad (39)$$

$$(I_e^{D_y})^{NL1} = \Delta V_\xi^e (D_e^{x,y})^{NL1} + (S_e^{*y})^{NL1} \quad (40)$$

$$(I_e^{D_y})^{NL2} = \Delta V_\xi^e (D_e^{x,y})^{NL2} + (S_e^{*y})^{NL2} \quad (41)$$

$$(I_e^{D_y})^{NL3} = \Delta V_\xi^e (D_e^{x,y})^{NL3} + (S_e^{*y})^{NL3} \quad (42)$$

O mesmo tratamento numérico dos termos difusivos é realizado na a face norte “n” nas direções x e y.

## 2.4 Forma final das equações discretizadas

Depois que todos os termos de fluxos e fontes são incorporados na eq.(17), o equivalente algébrico da eq.(2) é finalmente montado. As variáveis nas faces  $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$  e vértices  $ne$ ,  $nw$ ,  $se$ ,  $sw$  são interpolados formando uma equação ligada a variável em P com os pontos vizinhos (ver fig. 1). A forma final pode ser escrita como:

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi^* \quad (43)$$

onde os coeficientes na eq.(43) contém contribuição do termo convectivo e difusivo (termo implícito) que afeta o nível da variável genérica  $\phi$  no ponto P. Para a face “e” tem-se o seguinte coeficiente:

$$a_E = D_e + \max(-F_e, 0) \quad (44)$$

onde o primeiro termo do lado direito, conforme visto, é a parte implícita dos termos difusivos e o segundo termo representa o termo convectivo.

O termo fonte na equação de momento na direção x pode ser montado como:

$$S_x^* = \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{parte explícita do termo linear}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{parte explícita do 1º termo não linear}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{parte explícita do 2º termo não linear}} + \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{parte explícita do 3º termo não linear}} + \underbrace{S_{P_x}}_{\text{termo de pressão}}, \quad (45)$$

onde o termo de pressão é dado por:

$$S_{P_x} = -(P_e - P_w)(y_n - y_s) + (P_n - P_s)(y_e - y_w). \quad (46)$$

É importante notar que os valores de  $D_e$  dependendo do volume de controle na malha pode ser positivo ou negativo, exceto para o termo linear que sempre será positivo. Logo, sempre quando for verificado um valor negativo para  $D_e$ , não é vantagem tratar essa parte do termo difusivo de modo implícito, porque ao invés de contribuir para aumentar a estabilidade numérica, na verdade estaria tornando o código computacional menos estável, pois conforme Patankar, 1980 é interessante ter coeficientes sempre positivos. Assim, quando  $D_e$  for negativo, para os termos não-lineares, os fluxos difusivos serão tratados totalmente de forma explícita, usando as eqs (22), (23) e (24). Logo a eq.(45) tornar-se:

$$S_x^* = \underbrace{S_e^* - S_w^* + S_n^* - S_s^*}_{\text{parte explícita do termo linear}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{1º termo difusivo não linear}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{2º termo difusivo não linear}} + \underbrace{I_e^{D_x} - I_w^{D_x} + I_n^{D_x} - I_s^{D_x}}_{\text{3º termo difusivo não linear}} + \underbrace{S_{P_x}}_{\text{termo de pressão}} \quad (47)$$

## 2.5 Resultados para um canal com expansão abrupta

O problema de escoamento turbulento num canal com expansão abrupta (turbulent flow past a backward facing step) é importante em muitas aplicações tecnológicas, e tem sido usado como um caso teste padrão para quantificar o desempenho de modelos de turbulência, muitas vezes tomando como referência, a predição do ponto de separação do escoamento que se dá após a expansão. A figura abaixo ilustra o tipo de escoamento.

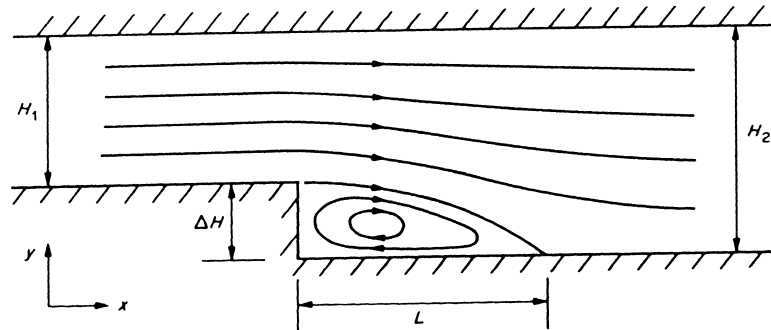


Figura 2 - Canal com expansão abrupta



Onde  $\Delta H = H_2 - H_1$  representa a altura do degrau e  $L$  é o comprimento de separação do escoamento.

No presente trabalho é apresentado os resultados considerando número de Reynolds de entrada igual a 132000, e uma taxa de expansão de  $H_2 / H_1 = 1.5$  com  $H_2 = 3$  e  $H_1 = 2$ . O programa foi executado utilizando uma malha 120x30. O modelo  $k-\varepsilon$  linear produziu um comprimento de separação de  $L / \Delta H = 5.1$ , enquanto que o modelo  $k-\varepsilon$  não-linear forneceu um comprimento de separação de  $L / \Delta H = 5.4$ . Valores experimentais apresentados por Kim et al, 1980 indicam que o ponto de separação é de  $L / \Delta H = 7$ . Nota-se, embora pequena, uma melhor predição no escoamento num canal com expansão abrupta utilizando a abordagem não-linear das tensões de Reynolds. A seguir é mostrado o campo da velocidade média  $\bar{U}/U_0$  em várias seções do canal. A velocidade  $U_0$  é a velocidade média de entrada.

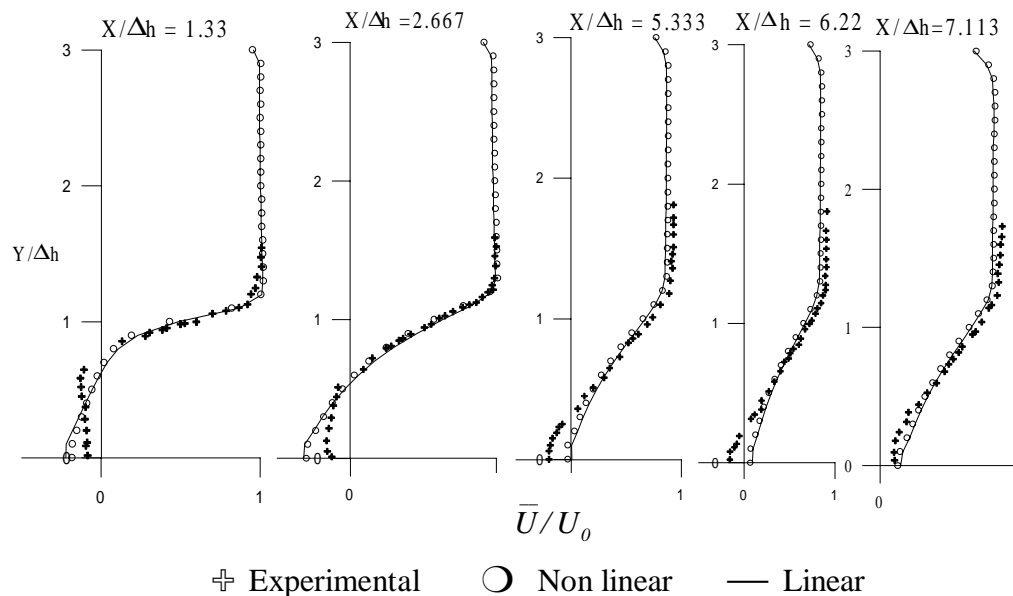


Figura 3 – Campo de velocidade média

Da fig. 3, pode-se notar também que, embora pequena, ocorre uma melhor concordância do campo da velocidade média aplicando o modelo não-linear. Comparando com os resultados de Speziale & Ngo, 1988, onde eles aplicam um modelo não-linear, nota-se uma boa concordância, com as curvas apresentando o mesmo formato.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado uma proposta para tratar parte dos termos difusivos não-lineares implicitamente e a restante explicitamente em coordenadas generalizadas. Foi notado que houve uma significativa melhora na estabilidade numérica do programa, não ocorrendo tantas oscilações nos valores conforme observado no tratamento totalmente explícito, e possibilitando até aumentar os parâmetros de sobre-relaxação de algumas variáveis. Foi notado uma pequena melhora nos resultados para o canal com expansão abrupta utilizando o

modelo não-linear. Aqui é interessante frisar que o modelo de Craft et al, 1993 possui sete termos não-lineares (três quadráticos e quatro cúbicos) e no presente trabalho foi usado somente os termos quadráticos. A inclusão dos termos restantes pode ser que venha a melhorar ainda mais os resultados aqui mostrados. Também não foi feito nenhum ajuste nas constantes dos termos não-lineares visando melhorar os resultados. É sabido que a otimização dos valores das constantes pode melhorar a precisão dos cálculos, porém este procedimento não foi o caminho adotado no presente trabalho.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, Brasil, a ajuda financeira durante a preparação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Assato, M. & de Lemos, M.J.S., 1998, Development of a non-linear turbulence model for recirculating flows using generalized coordinates, 7<sup>th</sup> ENCIT – Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 1386-1391.
- Craft, T.J., Launder, B.E. & Suga, K., 1993, Extending the applicability of eddy-viscosity model through the use of deformation invariant and non-linear elements, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, pp. 125.
- de Lemos, M.J.S., 1988, Anisotropic Turbulent Transport Modeling for Rod-Bundle, Heat & Technology, vol. 6, # 1-2, pp. 27-37.
- Kim, J., Kline, S.J. & Johnston, J.P., 1980, Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step, ASME J.Fluids Engng, 102, pp. 302-308.
- Rubinstein, R. & Barton, J.M., 1990, Renormalization group analysis of the stress transport equation, Phys Fluids A 2, pp. 1472.
- Patankar, S.V., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw Hill.
- Pope, S. B., 1975, J. Fluid Mech., 72, pp.331.
- Shih, T.H., Zhu, J. & Lumley, J.L., 1993, A realisable Reynolds stress algebraic equation model, NASA TM-105993.
- Speziale, C.G., 1987, On nonlinear  $k$ - $l$  and  $k$ - $\epsilon$  models of turbulence”, J. Fluid Mech., vol. 176, pp. 459-475.
- Speziale, C.G. & Ngo T., 1988, Numerical solution of turbulent flow past a backward facing step using a nonlinear  $k$ - $\epsilon$  model, Int. J. Engng. Sci., vol. 26, n<sup>o</sup> 10, pp. 1099-1112.
- Taube, D.B., 1992, An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model, Phys. Fluids A 4, pp. 2555-2561.
- Yoshizawa, A., 1987, Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation”, Phys. Fluids, 27, pp. 1377-1387.

**Title:** *IMPLICIT NUMERICAL TREATMENT FOR APPLICATION OF A NON-LINEAR TURBULENCE MODEL USING BOUNDARY-FITTED COORDINATES*

**Abstract:** *This work presents a novel numerical treatment for application of a non-linear turbulence model. This class of model is capable of predicting anisotropy effects appearing in certain types of flow. Basically, the model consists in an extension of the standard  $k$ - $\epsilon$  theory having additional non-linear terms for representing the stress-strain relationship. Transport equations for the mean and turbulent fields are presented and discretized using a generalized coordinate system. Diffusion fluxes, coming from discretizing non-linear terms, are numerically treated in both implicit and explicit manners. Ultimately, one seeks improvements on the numerical stability of the algorithm. Preliminary results using the proposed numerical treatment are presented.*

**Key words:** *Turbulence Modeling, Non-linear Model, Anisotropy, Generalized Coordinates*