



MODELAGEM NUMÉRICA DO EFEITO DE ESCALA EM ESTRUTURAS DE MATERIAIS FRÁGEIS HETEROGÊNEOS

Roque Luiz Pitangueira

Departamento de Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. do Contorno, 842 - 30110-060 - Belo Horizonte, MG, Brasil

Raul Rosas e Silva

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil
Rua Marquês de São Vicente, 225 - 22453-900 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

***Resumo.** Apresenta-se um modelo de elementos finitos para análise não-linear de estruturas sujeitas à ruptura frágil. O modelo introduz a heterogeneidade do material de uma maneira simples, adotando uma célula básica composta de três fases características da mistura heterogênea. A resposta constitutiva da célula básica representativa de um ponto do domínio do problema é determinada aleatoriamente através de um modelo estatístico. Tal modelo combina relações tensão x deformação das várias fases que compõem a mistura heterogênea com uma relação tensão x deformação do sólido composto. O tamanho da célula básica (função do tamanho estrutural) e as proporções em volume com que cada componente participa da mistura são as informações requeridas para a simulação numérica das trajetórias de equilíbrio da análise. Mostra-se que os resultados experimentais do efeito de escala no teste de flexão em três pontos e no ensaio de compressão diametral são satisfatoriamente verificados com o uso do modelo proposto, de forma simples e computacionalmente eficiente.*

***Palavras-chave:** Material frágil, Efeito de tamanho, Elementos finitos, Heterogeneidade*

1. INTRODUÇÃO

Em materiais granulares a natureza heterogênea dos mesmos responde por muitos dos fenômenos a que estes são submetidos. Um dos mais interessantes é o fenômeno do efeito de escala. A questão do efeito de escala tem importância relevante em muitos problemas de Engenharia. É uma questão tão antiga quanto a mecânica dos materiais. Leonardo da Vinci já preocupava-se com a questão e teria sugerido uma relação inversamente proporcional entre resistência e tamanho. Tal relação é, notadamente, um exagero do ponto de vista atual e foi rejeitada por Galileu, que admitiu o efeito de escala em estruturas naturais, como as dos ossos de animais. Durante muitos anos pouca atenção foi dada à questão do efeito de tamanho sendo atribuído ao fenômeno uma natureza puramente estatística.

Para estruturas de concreto, o estudo deste fenômeno se inicia com as investigações da natureza do fraturamento. Tais investigações tem marco inicial nos trabalhos de Kaplan

(1961), na área experimental, e Hillerborg *et al.* (1976), no campo teórico. A partir destas, muitas investigações, a respeito da natureza do fraturamento do concreto, foram feitas, tanto de cunho experimental como de cunho teórico.

O tratamento do efeito do tamanho estrutural e da heterogeneidade do material, na análise de estruturas através do método dos elementos finitos, é normalmente feito com processos tão elaborados que tornam seu uso proibitivo. O principal objetivo deste trabalho é a apresentação de um modelo desenvolvido por Pitangueira (1998) que considera a natureza heterogênea do material e o efeito de tamanho na modelagem de estruturas de materiais frágeis heterogêneos, sem perda da simplicidade do método dos elementos finitos.

2. EVIDÊNCIAS EXPERIMENTAIS DO EFEITO DE ESCALA

Até o início dos anos 80, eram escassos os resultados experimentais diretamente relacionados com o efeito de escala e a análise do fenômeno era feita a partir da observação do mesmo nos ensaios disponíveis. Uma das maiores verificações da ocorrência do efeito de escala em dados experimentais anteriores foi feita por Bazant & Oh (1983). Eles argumentaram a existência de diferentes formas de ruptura em função da relação entre o tamanho estrutural e uma dimensão representativa das não-homogeneidades do material. Segundo esta argumentação, quando a estrutura é pequena comparada com o tamanho das não-homogeneidades do material, a zona de microfissuração que se forma durante o processo de propagação lenta de fissuras, ocupa quase todo o volume da estrutura. Assim, quase não acontece fluxo de energia entre as regiões intactas e danificadas e o colapso da estrutura pode ser determinado pela resistência limite do material. Por outro lado, quando a estrutura é muito grande, a região danificada é bastante restrita e seu tamanho é relativamente pequeno, de modo que o limite de resistência pode sempre ser ultrapassado devido à concentração de tensões na região de localização. Neste caso o processo é comandado pela transformação de energia de deformação em energia de superfície, para a formação das superfícies de fratura. Para estruturas de tamanho intermediário, o fenômeno se situa entre os dois extremos.

Mais recentemente, o ensaio de flexão em três pontos tem sido amplamente realizado para verificação do efeito do tamanho em estruturas de concreto simples. Inúmeros trabalhos baseados neste ensaio (Gettu *et al.*, 1990, Chang & Shieh, 1996) mostram uma queda da resistência com o aumento do tamanho da estrutura. A influência na ductilidade também é observada, quando se tomam as curvas carga - deslocamento do ponto de aplicação da carga, obtidas nestes ensaios. Tais curvas mostram uma associação de comportamento mais frágil (inclinação mais acentuada em regime pós - crítico) com estruturas maiores.

3. MODELOS TEÓRICOS PARA O EFEITO DE ESCALA

O tratamento analítico do efeito de escala somente é possível para um número limitado de peças estruturais. Além disto, uma série de hipóteses simplificadoras, nem sempre verificadas experimentalmente, são feitas, de modo a permitir este tipo de análise. De todo modo, a elucidação qualitativa do fenômeno, é um mérito inegável deste tipo de abordagem.

Os modelos de elementos finitos com relações constitutivas baseadas em comprimento característico têm sido usados para o estudo de materiais granulares, considerando-os como contínuos e homogêneos, através da identificação de uma dimensão estrutural, suficientemente grande para o tratamento como contínuo e suficientemente pequena para a ocorrência de “softening” estável, que é função da natureza heterogênea do material. Usando o relacionamento entre as grandezas energia de fratura por unidade de superfície, energia de fratura por unidade de volume e a referida dimensão característica, muitos trabalhos (Bazant & Oh, 1983) propõem que os problemas de localização e efeito de tamanho sejam

solucionados com um ajuste na relação constitutiva local, baseado em parâmetros geométricos da discretização numérica.

Em lugar da associação entre comprimento característico do material e parâmetros geométricos da malha de elementos finitos tem-se optado, mais recentemente pela descrição do meio contínuo através do enfoque não-local. Neste enfoque o comportamento constitutivo é descrito, não em função de deformações locais, mas em função de uma média espacial das mesmas. A hipótese central deste enfoque é que a tensão em um ponto não é uma função da deformação neste mesmo ponto, mas uma função das deformações em um determinado volume centrado no referido ponto.

Existem ainda, os modelos que consideram a natureza heterogênea do material. A abordagem básica destes modelos é sempre a de subdividir a região a ser modelada em polígonos, aos quais as fases da mistura (em alguns casos duas, em outros três) são associadas. A seguir, uma malha de elementos finitos, compatível com a subdivisão obtida, é usada para discretizar as várias fases. A principal desvantagem dos estudos que consideram a heterogeneidade a partir do modelamento da microestrutura do material (Vonk, 1993) é a limitação de sua aplicação à estruturas de pequenas dimensões, devido ao grande esforço computacional despendido nas simulações.

4. MODELO NUMÉRICO PARA HETEROGENEIDADE E EFEITO DE ESCALA

A representação do comportamento mecânico de estruturas de materiais frágeis se beneficiou profundamente dos estudos desenvolvimentos na área de modelos constitutivos. Entretanto, a heterogeneidade do material e as diferenças das respostas estruturais devidas ao efeito de escala precisam ser consideradas em modelos numéricos racionais que resultem em simulações mais realistas.

São duas as formulações dos modelos de elementos finitos para propagação de fissuras: o modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas. O modelo de fissuras discretas trata a fissura como uma descontinuidade geométrica e a modela a partir da redefinição da topologia da malha de elementos finitos. O enfoque distribuído considera as fissuras como regiões de material danificado no elemento finito. Este último parece oferecer uma ferramenta mais conveniente para o modelamento numérico da propagação de fissuras em estruturas de materiais heterogêneos. Usando este enfoque, a heterogeneidade do material pode ser considerada de uma maneira simples, através da associação de diferentes propriedades mecânicas para cada ponto de integração do modelo. Entretanto, a lei constitutiva local (de um ponto de integração) não pode ser considerada como uma simples relação tensão x deformação de um dos constituintes que formam a estrutura heterogênea do material. Tal lei deve ser uma combinação da resposta local e da resposta estrutural, de modo a considerar o efeito de escala.

O modelo a seguir apresentado para tratar a heterogeneidade do material e o efeito de tamanho em estruturas de concreto (Pitangueira, 1998), considera a aleatoriedade da distribuição das características mecânicas do material no volume estrutural e a associação entre uma dimensão característica e o efeito de escala. Adicionalmente, o modelo preserva as características de simplicidade do método dos elementos finitos.

4.1 Modelamento da Heterogeneidade

Para introduzir a heterogeneidade na análise via método dos elementos finitos, preservando-se as características de simplicidade do método, o material é considerado inicialmente heterogêneo, sendo formado por uma mistura dos diversos constituintes.

Neste trabalho, a relação constitutiva, desde o início da análise, depende do material

associado a cada ponto de integração. O material granular é admitido como uma mistura de três fases. As propriedades mecânicas de cada uma das fases que formam a mistura heterogênea sólida, devem ser conhecidas. Para cada ponto de Gauss, no domínio do problema, associa-se um das três fases. Desta forma a heterogeneidade do material fica introduzida no modelo (Figura 1).

Conhecidas as proporções em volume com que cada fase participa da mistura, estabelecem-se as probabilidades de ocorrência das fases que serão associados a cada ponto de integração. Supõe-se um espaço amostral constituído por todos os pontos de integração existentes no domínio do problema e, para determinado ponto de integração, um número aleatório entre 0.0 e 1.0 é gerado. Com o valor deste número e usando-se probabilidade uniforme de ocorrência, escolhe-se, entre as fases da mistura heterogênea, aquela que será associada ao referido ponto de integração.

O modelo acima descrito, apesar das diversas simplificações adotadas (entre outras, probabilidade uniforme, materiais definidos a nível dos pontos de integração em elementos finitos bidimensionais e inexistência de considerações sobre distribuição espacial), introduz a heterogeneidade a partir da aleatoriedade das propriedades mecânicas locais. Entretanto, este aspecto isoladamente, constitui apenas um passo preliminar no avanço do tratamento da heterogeneidade num sólido, uma vez que este deve ser entendido como uma combinação de um grande número de elementos básicos, cada um dos quais com algum grau de responsabilidade no comportamento do sólido como um todo. Portanto, o comportamento constitutivo de determinado ponto, não pode ser descrito simplesmente pela relação tensão-deformação admitida para a fase a ele associada. Tal comportamento deve considerar o efeito de escala, que pode levar à respostas constitutivas locais, mais homogêneas ou mais heterogêneas, dependendo de inúmeros fatores. Alguns destes fatores são considerados neste trabalho, conforme se discute no item seguinte.

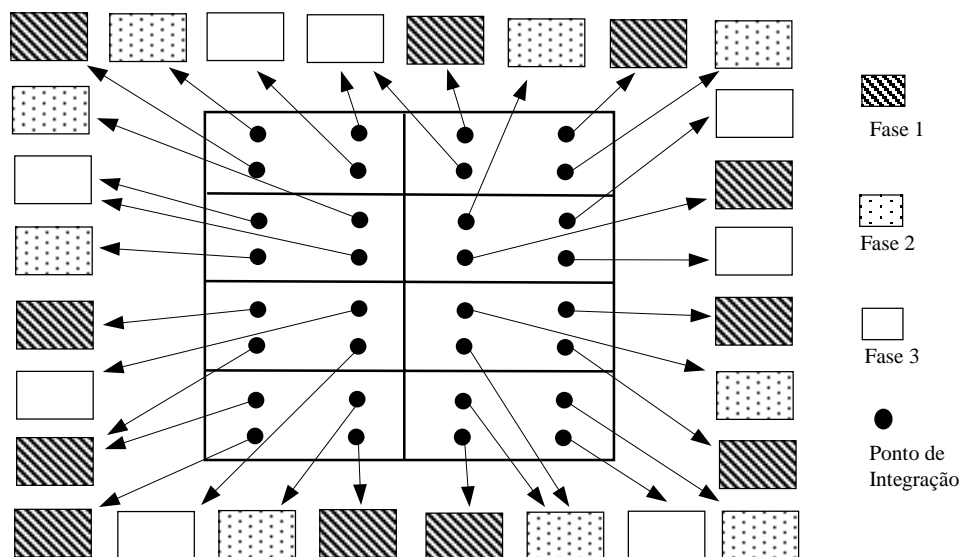


Figura 1 - Fases do material associadas aos pontos de integração.

4.2 Consideração do Efeito de Escala

O efeito de escala não é um fenômeno de natureza puramente estatística. Além da aleatoriedade da ocorrência de fases sólidas no volume estrutural, as diferenças das respostas constitutivas associadas a diferentes tamanhos estruturais devem ser consideradas.

O efeito do tamanho é tratado neste trabalho através da representação da resposta

constitutiva local do ponto de integração, como uma combinação da lei tensão-deformação da fase aleatoriamente associada ao referido ponto, com uma lei representativa da mistura, válida para volumes superiores às não-homogeneidades do material composto. Adotando-se o modelo constitutivo de dano distribuído, tais leis são relações tensão-deformação representativas de ensaios uniaxiais em tração e em compressão.

A combinação de leis constitutivas que caracterizam o comportamento estrutural da porção do domínio do problema de responsabilidade do ponto de integração, é determinada definindo-se, para cada ponto de integração, a grandeza Índice de Heterogeneidade (IH). Esta grandeza é definida como a relação entre o volume de uma célula básica (V_{CB}) e o volume do elemento finito de responsabilidade deste ponto de integração (V_{PI}):

$$IH = \frac{V_{CB}}{V_{PI}}. \quad (1)$$

A célula básica é entendida como uma combinação das fases que formam o material composto, representativa da mistura. O volume desta célula básica, deve ser, portanto, algumas vezes superior às dimensões das não-homogeneidades do mesmo. Este volume também representa o nível máximo de heterogeneidade que se deseja considerar na análise, abaixo do qual admite-se um comportamento microestrutural. É importante notar que, se para determinado ponto de integração, $IH \rightarrow 0.0$ ($V_{PI} \gg V_{CB}$), mais próximo do comportamento macroscópico e, portanto, homogêneo deverá ser a lei constitutiva associada a tal ponto de integração. Por outro lado, se $IH \rightarrow 1.0$ ($V_{PI} \cong V_{CB}$), mais próximo do comportamento microscópico e, portanto, heterogêneo, estará tal ponto.

Para obtenção da lei constitutiva associada a determinado ponto de integração, conhecidos IH do referido ponto, as leis constitutivas dos constituintes que definem o nível máximo de heterogeneidade (fase 1, fase 2 e fase 3) e a lei constitutiva válida para um volume representativo das não-homogeneidades (lei da mistura), procede-se uma interpolação nas propriedades que definem a lei constitutiva a partir dos valores das mesmas nos extremos de heterogeneidade (leis dos constituintes) e de homogeneidade (lei estrutural). Para uma propriedade P qualquer, a interpolação resulta

$$P_{PI} = IH \cdot P_{LC} + (1 - IH) \cdot P_{LE}, \quad (2)$$

onde P_{PI} é o valor da propriedade constitutiva P no ponto de integração PI, P_{LC} é o valor de tal propriedade medida localmente (lei constitutiva local) e P_{LE} é o valor da referida propriedade relativa à mistura heterogênea (lei estrutural).

Esta interpolação contempla o efeito de tamanho uma vez que determinada propriedade, quando medida no tamanho estrutural assume valor bastante diferente daquele medido no tamanho constitutivo. O aspecto aleatório da heterogeneidade também é contemplado na citada interpolação uma vez que a parcela P_{LC} pode ser associada a qualquer uma das fases que formam a mistura heterogênea. A Figura 2 ilustra a idéia e mostra o aspecto da interpolação, contemplando o efeito de tamanho e o caráter aleatório da heterogeneidade.

O modelo apresentado oferece dois caminhos para simulação do efeito de escala na análise. Pode-se fixar o volume da célula básica (V_{CB}) e tomar várias discretizações para estruturas de diferentes tamanhos (diferentes valores de V_{PI}). Alternativamente, entretanto, o efeito de escala pode ser simulado sem redefinição da malha de elementos finitos (V_{PI} constante), bastando que se altere o valor do volume da célula básica (V_{CB}), de forma a representar diferentes tamanhos estruturais.

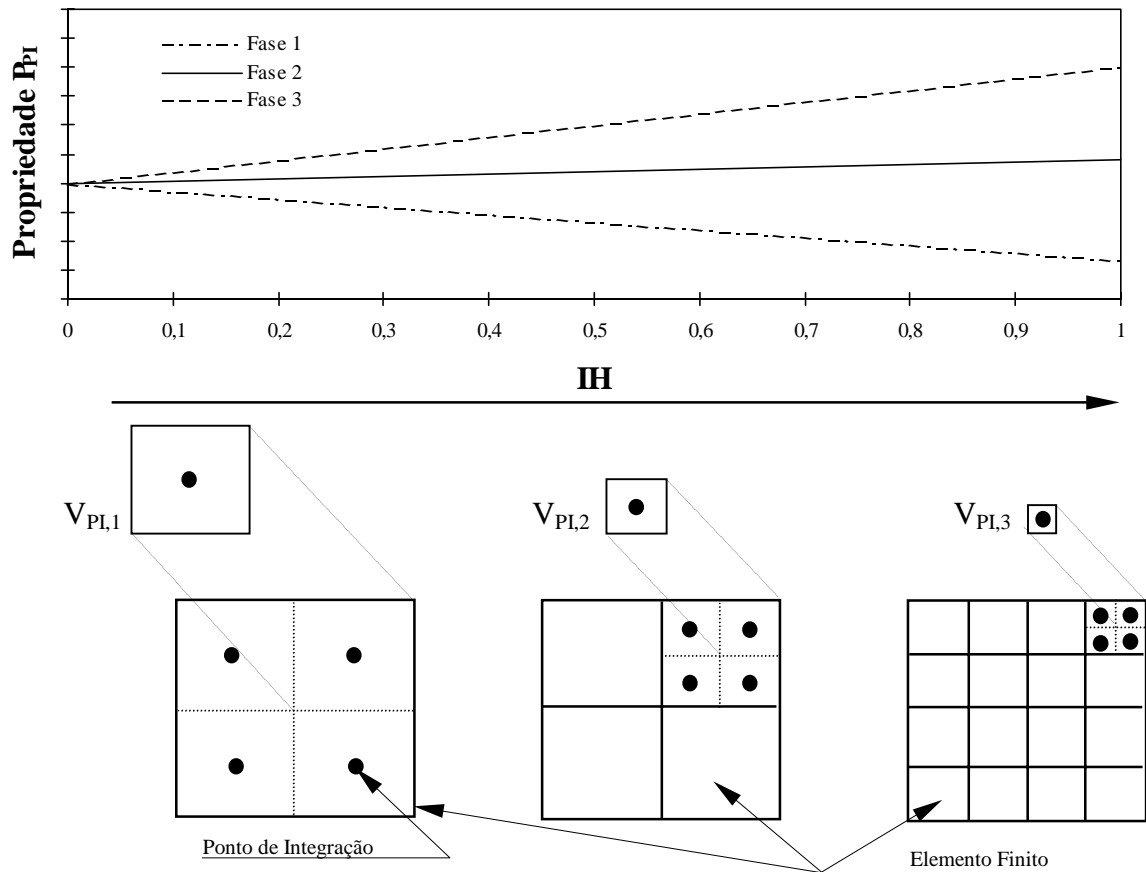


Figura 2 - Características do modelo proposto para efeito de tamanho e heterogeneidade.

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Flexão em Três Pontos em Vigas de Concreto

Uma viga de concreto de dimensões 90 x 36 x 36 mm, com um entalhe de 2.5 mm de abertura e 6 mm de extensão, é tomada como referência para estudo da heterogeneidade e do efeito de escala no ensaio de flexão em três pontos. A discretização em elementos finitos de quatro nós, em estado plano de tensões, com 4 pontos de integração é mostrada na Figura 3.

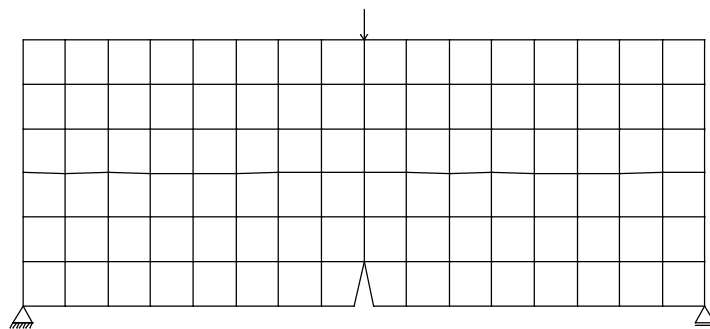


Figura 3 - Malha de elementos finitos utilizada no exemplo.

Um modelo constitutivo de dano distribuído é utilizado (Pitangueira, 1998). Tal modelo supõe conhecidas as seguintes propriedades mecânicas capazes de descrever relações tensão-

deformação uniaxiais: Módulo de Elasticidade Inicial (E_0); Módulo de Elasticidade do ramo descendente para compressão bi-linear (E_2); Resistência limite em compressão (f_c); Resistência limite em tração (f_t); Energia de fratura por unidade de volume (g_f); Coeficiente de Poisson (ν). A mistura heterogênea para o concreto é a citada em Pitangueira (1998), composta de 30% de Agregado, 55% de Matriz e 15% de Interface, com as propriedades da Tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades das fases e da mistura adotadas no exemplo.

Fase	f_c (MPa)	f_t (MPa)	ν	E_0 (MPa)	E_2 (MPa)	g_f (MPa)
Matriz	48.0	3.4	0.2	3.2e4	-3.2e3	1.81e-3
Agregado	80.0	16	0.2	1.0e5	-1.0e4	1.28e-2
Interface	13.0	2.0	0.2	1.7e4	-1.7e3	1.18e-3
Mistura	40.0	3.8	0.2	4.4e4	-4.4e3	1.64e-3

Tomando-se o volume amostral dos pontos de integração do menor elemento finito como referente a heterogeneidade máxima ou à viga de menor dimensão ($IH \approx 1.0$ ou $V_{CB} \approx V_{PI}$), a variação do volume amostral (V_{CB}) permite analisar o problema para diferentes índices de heterogeneidade ou, equivalentemente, a diferentes tamanhos estruturais. Considerando a carga de referência $P_0 = -1.0$ kN, a análise não-linear da viga foi feita utilizando-se o método de controle de deslocamentos generalizados (Yang & Shieh, 1990), com o parâmetro generalizado de deslocamentos obtido a partir de um fator de carga externa inicial de 0.005.

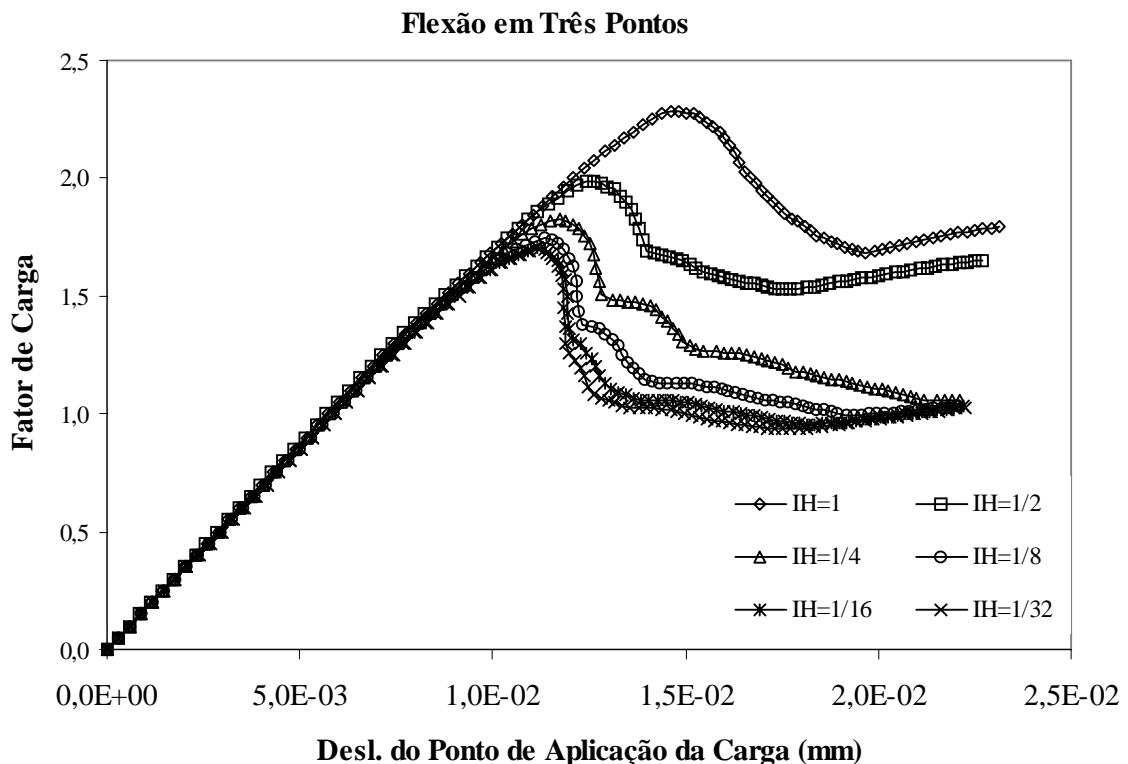


Figura 4 - Trajetórias de equilíbrio do ensaio de flexão em três pontos.

Admitindo-se uma tolerância para a convergência de 10^{-4} , foram utilizados 1000 passos para obtenção das trajetórias de equilíbrio para os diferentes índices de heterogeneidade. A

Figura 4 mostra os gráficos fator de carga x deslocamento do ponto de aplicação da carga. Em tais gráficos, somente 100 dos 1000 passos estão representados, agrupados a cada 10 incrementos.

A Figura 4 mostra que o efeito de tamanho e heterogeneidade está satisfatoriamente representado para o ensaio de flexão. A observação dos ramos descendentes das curvas obtidas, indica um comportamento mais frágil para estruturas maiores e, portanto mais homogêneas (IH próximos de 0.0). Por outro lado, para valores de IH próximos de 1.0, representativos de estruturas menores e, portanto, mais heterogêneas, os ramos descendentes apresentam inclinações mais suaves, indicando um comportamento mais dúctil. Também quanto ao aspecto do efeito de escala ligado à redução da tensão limite com o aumento do tamanho estrutural, as curvas da Figura 4, apresentam resultados qualitativamente satisfatórios, como se pode observar pela redução do valor máximo do fator de carga, quando se diminui o índice de heterogeneidade. É importante lembrar, entretanto, que, em termos quantitativos, este aspecto está relacionado com a distribuição aleatória dos constituintes pelo domínio do problema. Assim, cada nova simulação, é uma nova representação de uma realização da trajetória de equilíbrio. Portanto, resultados distintos serão obtidos, a cada nova representação da heterogeneidade da mistura.

5.2 Compressão Diametral em Cilindros de Concreto

Neste exemplo, os efeitos de escala e heterogeneidade são estudados num ensaio de compressão diametral de um cilindro de concreto com 75 mm de raio e 100 mm de altura, com uma trinca central inicial.

Assumindo a condição de simetria, apesar do caráter heterogêneo do material, somente metade da peça foi discretizada. Utilizaram-se elementos finitos de quatro nós, em estado plano de tensões, com 4 pontos de integração, como mostra a Figura 5.

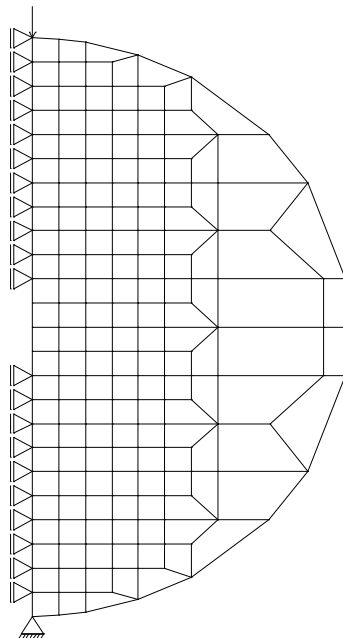


Figura 5 - Malha de elementos finitos utilizada no exemplo.

O modelo constitutivo, a mistura heterogênea, o método e os parâmetros de controle são os mesmos do exemplo anterior. A carga de referência usada foi $P_0 = -30$ kN.

A Figura 6 mostra os gráficos fator de carga x deslocamento do ponto de aplicação da

carga, para diferentes índices de heterogeneidade.

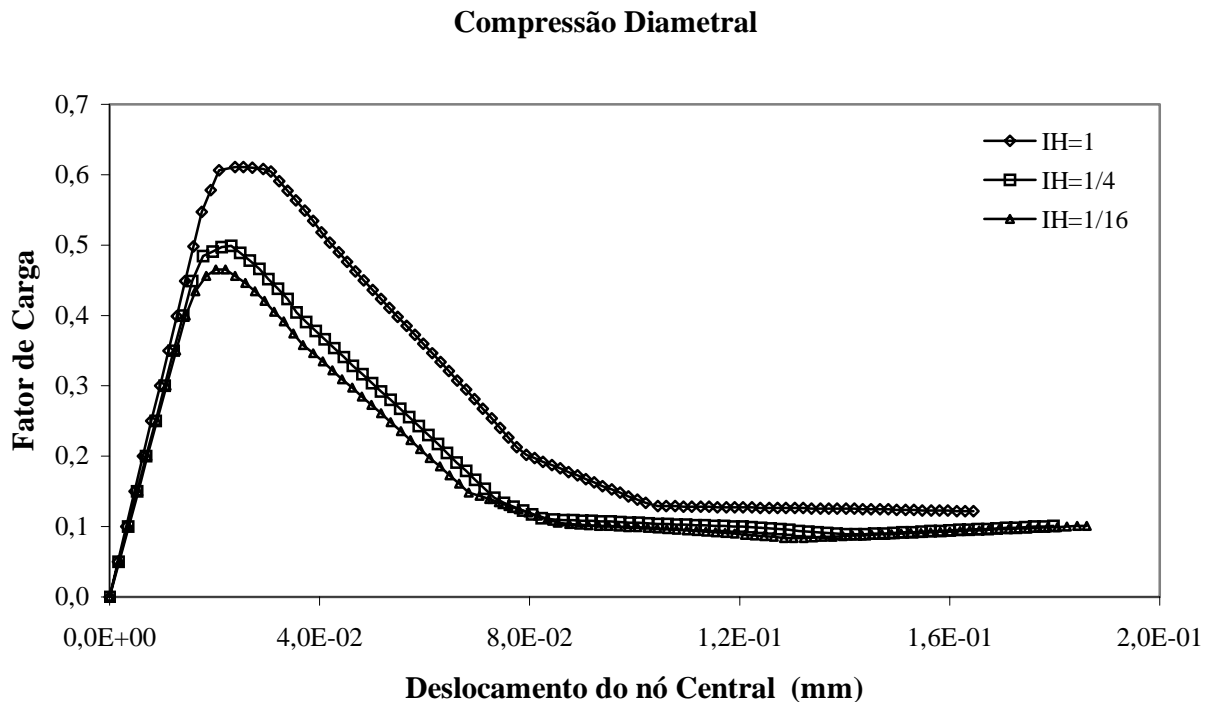


Figura 6 - Trajetórias de equilíbrio para o ensaio de compressão diametral.

Para a representação da heterogeneidade deste exemplo, ocorreu uma diminuição da tensão limite com o aumento do tamanho estrutural, como pode ser observado nas curvas da Figura 6 acima. Evidências experimentais mostram que este comportamento é realmente verificado, para cilindros de pequenos diâmetros, aparecendo um comportamento reverso para cilindros de grandes diâmetros (Sabnis & Mirza, 1979). Quanto à expectativa de comportamento mais frágil para estruturas mais homogêneas e de comportamento mais dúctil para estruturas mais heterogêneas, nada se pode afirmar no caso aqui apresentado, uma vez que os ramos descendentes das trajetórias de equilíbrio obtidas são aproximadamente paralelos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um modelo para consideração dos efeitos de tamanho e heterogeneidade, via método dos elementos finitos, que se baseia na aleatoriedade da ocorrência de fases sólidas no volume estrutural, bem como nas diferenças das respostas constitutivas associadas à diferentes tamanhos estruturais foi apresentado. Realizou-se também um estudo das evidências experimentais do efeito de tamanho em estruturas de concreto, bem como dos modelos teóricos usados para descrevê-lo. A apreciação deste estudo e da utilização do modelo proposto no exemplo analisado, permite as conclusões a seguir.

As evidências experimentais do efeito de tamanho em estruturas de concreto permitem dizer que o fenômeno é devido principalmente à natureza heterogênea do material e à existência de uma dimensão caracterizadora da região danificada, que acompanha o processo de fraturamento da estrutura.

O modelo proposto para tratamento da heterogeneidade e do efeito de tamanho introduz

estes aspectos na análise de estruturas, via método dos elementos finitos, de forma simples, ao contrário do que propõe outros modelos extremamente detalhistas que tornam o uso proibitivo. O modelo permite examinar o efeito de tamanho sem redefinição da malha de elementos finitos, variando-se um parâmetro do modelo, o volume da célula básica.

A influência do efeito de tamanho observada experimentalmente no ensaio de flexão, tanto em relação à resistência como em relação à ductilidade, é satisfatoriamente representada com o uso do modelo. No caso do ensaio de compressão diametral a influência do tamanho estrutural na resistência também foi satisfatoriamente representada.

REFERÊNCIAS

- Bazant, Z. P. & Oh, B. H. (1983) - Crack Band Theory for Fracture of Concrete, *Matériaux et Constructions*, Vol. 16, No. 93, pp. 155-177.
- Chang, T. P. & Shieh, M. M. (1996) - Fracture Properties of Lightweight Concrete, *Cement and Concrete Research*, Vol. 26, No. 2, pp. 181-188.
- Gettu, R., Bazant, Z. P. e Karr, M. E. (1990) - Fracture Properties and Brittleness of High-Strength Concrete, *ACI Materials Journal*, Vol. 87, Nov-Dez, pp. 608-618.
- Hillerborg, A., Modéer, M. e Peterson, P. (1976) - Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Finite Mechanics and Finite Elements, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782.
- Kaplan, M. F. (1961) - Crack Propagation and the Fracture of Concrete, *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 58, no. 11, pp. 591-609.
- Pitangueira, R. L. S. (1998) - Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Sabnis, G. M. & Mirza, S. M. (1979) - Size Effects in Model Concrete, *Journal of Structural Division (ASCE)*, Vol. 106, No. ST6, pp.1007-1020.
- Vonk, R. A. (1993) - A Micro-mechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression, *Heron*, Vol. 38, No. 3, pp. 1-94.
- Yang, Y. B. & Shieh, M. S. (1990) - Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points, *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116.

NUMERICAL MODELING OF SIZE EFFECT IN STRUCTURES OF HETEROGENEOUS MATERIAL

Summary. *A finite element model for nonlinear analysis of structures prone to brittle collapse is presented. The model introduces the heterogeneity in simplified manner using a three phase basic cell. The basic cell constitutive response is obtained with a statistical model. Such a model combine stress-strain relations of each phase with a stress-strain relation of the composite solid. The size of a basic cell (function of the structural size) and the volume ratio of the each phase in the mixture are required information for the simulation of equilibrium paths. It is shown that the experimental results of size effect in three-point bending and brazilian split-cylinder tests are satisfactorily verified by the proposed model, in a computationally efficient and simple manner.*

Keywords: *Brittle material, Size effect, Finite elements, Heterogeneity*