

ALGORÍTMO FLEXÍVEL PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO TÉRMICA VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

Humberto Araujo Machado

Universidade Federal de Uberlândia, Departamento de Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, 2160, Campus Santa Mônica, bloco 1M
38400-089 – Uberlândia, MG, Brasil

***Resumo.** Neste trabalho, o Método de Transformação Integral Generalizada (GITT) é empregado na solução de problemas de convecção térmica com variação das propriedades termofísicas do fluido. Isso implica no aparecimento de diversos termos não-lineares cuja transformação analítica não é obtível. É apresentado um algoritmo simples que permite obter esses coeficientes numericamente, e que possibilita ainda uma grande flexibilidade na alteração das condições de contorno ou nos termos fonte das equações originais. São mostrados resultados para as equações de camada limite em escoamento compressível num canal de placas planas paralelas e para o clássico problema da cavidade quadrada, considerando todas as propriedades termofísicas como funções da temperatura, exceto a densidade.*

***Palavras-chave:** Transformação integral, Métodos híbridos, Convecção não-Boussinesq, Escoamento compressível, Propriedades variáveis*

1. INTRODUÇÃO

A Técnica de Transformação Integral Generalizada é um método de solução de equações diferenciais parciais de evolução relativamente recente (Cotta, 1993), e tem se mostrado uma alternativa aos métodos puramente discretos. Seu caráter híbrido numérico-analítico permite o controle automático de erro durante a solução das equações, o que evita a necessidade de diversas execuções do código computacional para avaliação da convergência, dispensa a geração de malha e possibilita uma fácil extensão à um maior número de dimensões envolvidas no problema.

Na GITT se alivia a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema. Para isso, escolhe-se um problema de autovalor auxiliar o mais representativo possível do problema original. Os potenciais originais são representados por um somatório infinito de produtos entre as autofunções obtidas a partir do problema auxiliar e os potenciais transformados. Ao aplicar-se a transformação, obtém-se um sistema diferencial ordinário acoplado infinito, que é truncado até uma ordem suficiente para a obtenção da solução dentro da precisão desejada. A solução do sistema é feita através de algoritmos bem estabelecidos,

com controle automático de erro, disponíveis em bibliotecas de rotinas científicas, tais como a DIVPAG (IMSL, 1989).

A aplicação tradicional do método implica em um certo esforço analítico, para se obter os coeficientes transformados relativos aos termos-fonte não lineares. Em geral, nos problemas envolvidos na geração de *Benchmarks* (Cotta, 1998) esses termos são totalmente transformáveis, e sua representação é feita na forma matricial, envolvendo tantas dimensões quantas vezes aparecerem os potenciais originais à serem transformados e suas derivadas.

Recentemente o método tem sido empregado com mais frequência em problemas relacionados a situações de engenharia, onde a modelagem envolve o aparecimento de termos complexos que não são transformáveis analiticamente. Dessa forma, a transformação integral deve ser feita numericamente, a cada passo da solução. O número de coeficientes está diretamente relacionado ao número de autovalores usados para representar o potencial original, sendo que cada coeficiente implica numa integração numérica, o que acarreta um custo computacional proibitivo, independente do método de integração empregado. Além disso, qualquer mudança nas condições de contorno ou a inclusão de outros termos-fonte nas equações do problema implica na repetição de todo o esforço analítico despendido na solução anterior, assim como severas modificações na arquitetura do programa.

Neste trabalho, é apresentado um algoritmo simples de integração numérica que contorna esta dificuldade, possibilitando modificar rapidamente as condições de contorno, termos-fonte e outras características da formulação do problema e permitindo estender a aplicação da GITT a dois problemas não lineares com termos-fonte não transformáveis analiticamente.

Inicialmente, são resolvidas as equações de camada limite e energia, num escoamento compressível permanente entre duas placas planas verticais aquecidas. O código é validado comparando-se os resultados àqueles obtidos via GITT por Figueira da Silva et al (1998), para escoamento incompressível e para diversas faixas de temperatura. A seguir, são resolvidas as equações de Navier-Stokes e energia bi-dimensionais em regime transiente aplicadas ao clássico problema da cavidade quadrada considerando todas as propriedades do fluido como funções da temperatura, exceto a densidade. O código é validado comparando-se os resultados àqueles obtidos por Leal et al (1996) via GITT, considerando propriedades do fluido constantes, para pequenas diferenças de temperatura, e a seguir estendendo-se a solução à maiores diferenças de temperatura e comparando-se os resultados àqueles obtidos para propriedades constantes.

2. MÉTODO DE SOLUÇÃO - ALGORÍTMO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Seja um problema genérico de convecção-difusão de caráter parabólico:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = D \cdot \nabla^2 F + S(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Para simplificar, considere-se o vetor posição uma coordenada espacial unidimensional y cujo domínio seja definido de 0 a 1, em que o problema apresente caráter elíptico. Inicialmente associa-se um problema auxiliar que reproduza as condições de contorno na direção y . A solução do problema auxiliar fornece as autofunções normalizadas $Y_i(y)$ analiticamente, o que permite definir o par transformada-inversa:

$$\bar{F}_i(t) = \int_0^1 Y_i(y) F(t, y) dy \quad ; \quad F(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(y) \bar{F}_i(t) \quad (2.a-b)$$

Aplicando-se o operador integral $\int_0^1 Y_i(y) _ dy$ na equação, e levando em conta a propriedade de ortogonalidade das autofunções (Mikhailov et al, 1984), resulta em um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\frac{\partial \bar{F}_i(t)}{\partial t} = \int_0^1 Y_i(y) \left[-u \frac{\partial F}{\partial x} + D \cdot \nabla^2 F + S(x, t) \right] dy \quad (3)$$

A integração dos termos convectivo e difusivo (respectivamente o 1º e 2º dentro dos colchetes) irá resultar em coeficientes analíticos (desde que o perfil de velocidades seja integrável), obtidos a partir da substituição da Eq. (2.b) em (3). No caso do termo fonte S , se a integração analítica não for possível, será necessário integrar numericamente N coeficientes a cada passo da solução (onde N é a ordem de truncamento do sistema). Em cada coeficiente, será necessário avaliar a função F e suas derivadas, realizando o somatório de N termos a cada avaliação, acarretando um custo computacional proibitivo.

O custo computacional pode ser grandemente reduzido através da aplicação do sistema de integração apropriado. Considere-se a função:

$$\bar{F}_i(x) = \int_0^1 Y_i(y) F(t, y) dy \quad (4)$$

Segundo a regra da quadratura de Gauss, temos, para uma função genérica:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{NF} w(x_k) f(x_k) \quad (5)$$

onde w é a função peso selecionada, NF é o número de pontos de integração e x_k os pontos de Gauss correspondentes ao NF . Quando aplicados na Eq. (4), temos:

$$\int_0^1 Y_i(y) F(t, y) dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{NF} w(y_k^*) Y_i(y_k^*) F(t, y_k^*) \quad (6)$$

onde $y^* = (y + 1)/2$, $dy^* = dy/2$ transforma o domínio de (-1,1) para (0,1). Através desse procedimento, a função F é avaliada nos mesmos pontos de Gauss somente uma vez, ao passo que as autofunções são conhecidas analiticamente. Isso implica numa redução de custo computacional de N^2 para N avaliações de F , viabilizando a solução do problema.

3. CASO 1: SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

Seja o escoamento laminar bidimensional em regime permanente de um gás perfeito ao longo de um canal de placas planas paralelas verticais aquecidas à temperatura constante, com perfis de velocidade e temperatura uniformes na entrada do canal, à um baixo número de Mach. Considerando a pressão constante ao longo da coordenada y (normal às paredes), a equação dos gases perfeitos (na forma adimensional) é empregada para expressar a densidade em termos da densidade na parede e da temperatura (onde T^* é a temperatura adimensional):

$$\rho(x, y) = \frac{r'}{r} \frac{\rho_w(x)}{T(x, y)} ; r = -\frac{R\Delta T}{u_o^2} ; \Delta T = T_w - T_o ; r' = \frac{RT_w}{u_o^2} ; T = T^* + \frac{r'}{r} \quad (7.a-e)$$

As equações adimensionais em formulação de função corrente são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + 2 \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \\ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{Gr^*}{Re^2} \left(\frac{r'}{r} \rho_w \right)^2 \frac{1}{T^3} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} + 3 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y=0: \quad \psi &= 0 \quad ; \quad \psi_{yy} = 0 \quad ; \quad T_y^* = 0 \\ y=1: \quad \psi &= 1 \quad ; \quad \psi_y = 1 \quad ; \quad T^* = r'/r \\ x=0: \quad \psi &= y \quad ; \quad T^* = 1 + r'/r \end{aligned} \quad (10.a,f)$$

onde a função corrente é definida em termos dos componentes da velocidade e do volume específico V como $v = -V\partial\psi/\partial x$ e $u = V\partial\psi/\partial y$. As adimensionalizações usadas são baseadas nas grandezas avaliadas na seção de entrada do canal e no meio espaço entre as placas, y_0 . $Gr^* = gy_0^3 \nu^{-2}$ é o número de Grashoff modificado para escoamento compressível. O sistema é completado obtendo-se uma equação para ρ_w , aplicando-se a Eq. (8) em $y = 1$:

$$\frac{d\rho_w}{dx} = -\frac{Gr^*}{Re^2} \frac{\rho_w}{r'} + \frac{1}{Re} \frac{1}{r' \rho_w} \left[\frac{2r}{r'} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right]_{y=1} \quad (11)$$

Para a seleção do problema auxiliar apropriado, é empregado um filtro para homogeneizar as condições de contorno da função corrente, $\psi(x, y) = \psi_F(y) + \psi^*(x, y)$, que corresponde ao perfil de velocidade do escoamento totalmente desenvolvido.

Os problemas auxiliares selecionados para a função corrente e temperatura são o problema bi-harmônico de 4ª ordem e o problema de Sturm-Liouville de 2ª ordem respectivamente, com as condições de contorno apropriadas. Uma vez obtidos os autovalores e autofunções, os potenciais originais são expressos em termos dos potenciais transformados:

$$\Psi_i(x) = \int_0^1 Y_i(y) \psi^*(x, y) dy \quad ; \quad \psi^*(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(y) \Psi_i(x) \quad (12.a,b)$$

$$\theta_i(x) = \int_0^1 \bar{Y}_i(y) T^*(x, y) dy \quad ; \quad T^*(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{Y}_i(y) \theta_i(x) \quad (13.a,b)$$

O sistema de equações diferenciais parciais definido pelas Eqs. (8,9,11) é transformado pela aplicação dos operadores integrais $\int_0^1 Y_i(y) _ dy$ na Eq. (8) e $\int_0^1 \bar{Y}_i(y) _ dy$ na Eq. (9), resultando no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\sum_{k=1}^{NC} A_{ik}(x) \frac{d\Psi_k}{dx} + \sum_{k=1}^{NT} B_{ik}(x) \frac{d\theta_k}{dx} = D_i(x) \quad i = 1,2,3,\dots,NC \quad (14.a)$$

$$\sum_{k=1}^{NC} A_{ik}^*(x) \frac{d\Psi_k}{dx} + \sum_{k=1}^{NT} B_{ik}^*(x) \frac{d\theta_k}{dx} = D_i^*(x) \quad i = 1,2,3,\dots,NT \quad (14.b)$$

$$A_{ik}(x) = \int_0^1 Y_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} Y_k'' - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} Y_k - 2 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} Y_k - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} Y_k \right) dy \quad (14.c)$$

$$B_{ik}(x) = \int_0^1 Y_i \left[2 \frac{1}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \bar{\Gamma}_k + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \bar{\Gamma}_k' \right] dy \quad (14.d)$$

$$D_i(x) = \frac{1}{\rho_w} \int_0^1 Y_i \left[2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \frac{d\rho_w}{dx} + \int_0^1 Y_i \left[\frac{Gr^*}{Re^2} \left(\frac{r'}{r} \rho_w \right)^2 \frac{1}{T^3} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy \quad (14.e)$$

$$+ \int_0^1 Y_i \left[\frac{1}{Re} \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 3 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} \right] dy$$

Os coeficientes $A_{ik}^*(x)$, $B_{ik}^*(x)$ e $D_i^*(x)$ podem ser obtidos analiticamente a partir das Eqs. (12,13). As condições iniciais são obtidas aplicando-se os operadores integrais nas respectivas variáveis. Os somatórios são truncados num sistema matricial representado como $A(\mathbf{Y})d\mathbf{Y}/dx = \mathbf{D}(\mathbf{Y}, x)$, onde o vetor \mathbf{Y} tem as primeiras NC posições ocupadas por Ψ_i ($i=1,2,\dots,NC$), e as seguintes NT posições por θ_i ($i=1,2,\dots,NT$), e a última por ρ_w . A solução é otimizada empregando-se o procedimento adaptativo para a redução gradativa da ordem de truncamento (Cotta, 1993,1998).

O código é validado comparando-se os resultados obtidos por Figueira da Silva et al (1998) para o caso incompressível com aqueles obtidos para $\Delta T = 1,5 K$ para o ar, que segundo Gray e Giorgini (1976) encontram-se ainda dentro do limite de validade da hipótese de Boussinesq. A Tabela 1 mostra a convergência dos resultados para o fluxo mássico no centro do canal e temperatura média da mistura em função das ordens de truncamento das expansões em comparação com os resultados *Benchmark* obtidos via hipótese de Boussinesq, para $Ra^* = 10^5$, $Gr = 17361$ e $Re = 186,34$, os quais apresentam boa concordância.

Tabela 1. Temperatura média da mistura e ψ_y em $y = 0$ ao longo do canal para $\Delta T = 1,5 K$; Comparação entre modelos compressível e hipótese de Boussinesq

$x^* \setminus NC/NT$	5/5	10/10	15/15	20/20	Boussinesq
Temperatura média da mistura					
0,0008	0,9553	0,9564	0,9561	0,9566	0,9571
0,0060	0,8624	0,8635	0,8641	0,8643	0,8648
0,0260	0,6614	0,6626	0,6631	0,6632	0,6634
0,0300	0,6297	0,6319	0,6312	0,6314	0,6315
0,0400	0,5574	0,5585	0,5588	0,5590	0,5590
0,0432	0,5364	0,5374	0,5377	0,5379	0,5378
0,1170	0,2438	0,2442	0,2442	0,2443	0,2438
0,3000	0,0524	0,0525	0,0525	0,0524	0,0523
0,6000	0,0052	0,0053	0,0053	0,0052	0,0053
1,0000	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0003

$X^* \setminus NC/NT$	5/5	10/10	15/15	20/20	Boussinesq
	ψ_y , em $y=0$				
0,0008	9,945	1,042	1,050	1,053	1,064
0,0060	1,028	1,041	1,043	1,044	1,051
0,0260	0,5994	0,6047	0,6055	0,6061	0,6086
0,0300	0,5226	0,5270	0,5276	0,5281	0,5296
0,0400	0,3965	0,3988	0,3988	0,3989	0,3984
0,0432	0,3767	0,3785	0,3784	0,3785	0,3773
0,1170	0,8161	0,8159	0,8155	0,8158	0,8118
0,3000	1,356	1,356	1,355	1,356	1,354
0,6000	1,486	1,486	1,486	1,486	1,486
1,0000	1,499	1,499	1,499	1,499	1,499

A Fig. 1 mostra os resultados para diversas diferenças de temperaturas impostas entre o fluido na entrada do canal e as paredes, onde $\Delta T = 30$ K é considerado o limite teórico previsto da aproximação de Boussinesq (Gray et al,1976). É possível notar que as quantidades relacionadas ao escoamento mostram uma discrepância maior do que os perfis de temperatura.

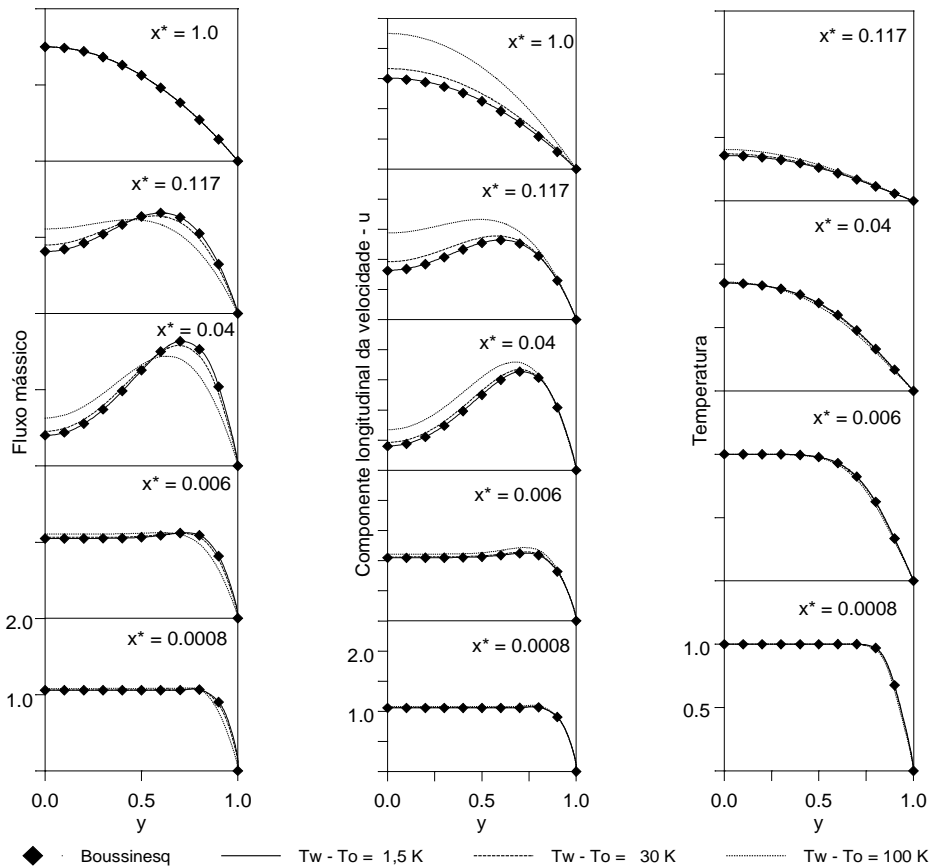


Figura 1. Distribuição dos perfis de fluxo mássico (ψ_y), velocidade e temperatura ao longo do canal para diversas diferenças de temperatura em comparação com a hipótese de Boussinesq

4. CASO 2: SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E ENERGIA EM UM FLUIDO COM PROPRIEDADES VARIÁVEIS

A seguir está representada a forma bi-dimensional transiente das equações de Navier-Stokes e energia em formulação de função corrente aplicada ao problema da cavidade

quadrada com as paredes horizontais isoladas, as laterais sob uma diferença de temperatura constante e propriedades do fluido variáveis, exceto a densidade no termo da força de corpo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y} = Pr_0 \left[\mu \nabla^4\psi + 2 \frac{\partial\mu}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. 2 \frac{\partial\mu}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right) \right] - Ra_0 Pr_0 \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 C p_0} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x=0: \quad T=1; \quad \psi=\psi_y=0 \quad , \quad x=1: \quad T=0; \quad \psi=\psi_y=0 \\ y=0: \quad T_y=0; \quad \psi=\psi_y=0 \quad , \quad y=1: \quad T_y=0; \quad \psi=\psi_y=0 \end{aligned} \quad (17.a-h)$$

A função corrente é definida por $v = -\psi_x$ e $u = \psi_y$ as condições iniciais são $T(x,y,0) = 0$ e $\psi(x,y,0) = 0$. As adimensionalizações empregadas foram baseadas em grandezas estimadas à temperatura inicial e na dimensão da cavidade. As condições de contorno da temperatura são homogeneizadas através do filtro $T(x,y,t) = T^*(x,y,t) + T_F(x)$, onde $T_F(x) = 1 - x$.

Os problemas auxiliares selecionados são idênticos aos aplicados às equações de camada limite, adaptados às novas condições de contorno e aplicados às direções x e y , que resultam nos pares transformada-inversa:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{i\ell}(t) = \int_0^1 \int_0^1 Y_\ell(y) X_i(x) \psi(x,y,t) dx dy; \quad \psi(x,y,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} Y_\ell(y) X_i(x) \bar{\Psi}_{i\ell}(t) \\ \bar{\theta}_{pr}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \Gamma_r(y) \phi_p(x) T^*(x,y,t) dx dy; \quad T^*(x,y,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \Gamma_r(y) \phi_p(x) \bar{\theta}_{pr}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Uma vez aplicados os operadores integrais, obtém-se o sistema diferencial transformado:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{ijlm} \frac{d\bar{\Psi}_{jm}(t)}{dt} = F_{i\ell}(t) \quad ; \quad \frac{d\bar{\theta}_{pr}(t)}{dt} = G_{pr}(t) \quad (19.a,b)$$

$$\begin{aligned} F_{i\ell}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x} + Pr_0 \left[\mu \nabla^4\psi + 2 \frac{\partial\mu}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial\mu}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right) \right] - Ra_0 Pr_0 \frac{\partial T}{\partial x} \right\} dy dx \end{aligned} \quad (19.c)$$

$$G_{pr}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_p(x) \tilde{\Gamma}_r(y) \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 C p_0} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dy dx \quad (19.d)$$

onde o coeficiente E_{ijlm} é obtido analiticamente. O problema bidimensional é otimizado através do *procedimento adaptativo* associado à *redução de índices e seleção de autovalores* utilizada por Leal et al (1999).

As propriedades como funções da temperatura foram as sugeridas por Zhong et al (1985):

$$\begin{aligned} \mu(T) &= 14,58 \times 10^{-7} T^{1,5} / 1104 + T \quad ; \quad k(T) = 2,6483 \times 10^{-3} T^{1,5} / T + 245,4 \times 10^{-4} T^{-1/2} ; \\ C_p(T) &= 989824 - 0,3316T + 0,2025 \times 10^{-3} T^2 \end{aligned} \quad (20.a-c)$$

O algoritmo de integração foi testado comparando-se os resultados com aqueles obtidos através da rotina DTWODQ (IMSL, 1989), também baseada na Quadratura de Gauss, que permite o controle automático de erro. O caso teste foi $Ra = 10^4$, com $\Delta T \ll 1$ (dentro do limite de Boussinesq). O sistema foi resolvido para baixa precisão (10^{-3} na DIVPAG e 10^{-4} na DTWODQ), com 30 termos em cada expansão para $t = 0,01$. A Tabela 2 mostra os resultados em função do número de pontos de Gauss usados no algoritmo flexível. Foi observada uma redução no tempo de CPU da ordem de 200 vezes.

Tabela 2 – Convergência das expansões em função do número de pontos de Gauss usados, para $Ra = 10^4$, erro relativo de 10^{-3} , $t=0,01$, $NV=NT=30$.

x	y	NF=5	NF=10	NF=15	NF=20	NF=25	NF=30	DTWODQ
Função corrente								
0,1	0,1	-0,39544	-0,33208	-0,33361	-0,33369	-0,33369	-0,33369	-0,33369
0,1	0,5	-0,93331	-0,92622	-0,96822	-0,96753	-0,96752	-0,96752	-0,96752
0,1	0,9	-0,44778	-0,34332	-0,35108	-0,35116	-0,35116	-0,35116	-0,35116
0,5	0,1	0,03685	-0,17172	-0,14627	-0,14684	-0,14684	-0,14684	-0,14684
0,5	0,5	0,53133	-1,28504	-0,76328	-0,76886	-0,76885	-0,76885	-0,76885
0,5	0,9	0,00955	-0,19343	-0,15683	-0,15741	-0,15741	-0,15741	-0,15741
0,9	0,1	0,04024	-0,01327	-0,00790	-0,00817	-0,00817	-0,00817	-0,00817
0,9	0,5	0,49565	-0,05889	-0,05731	-0,05940	-0,05939	-0,05939	-0,05939
0,9	0,9	0,05094	-0,00714	-0,00592	-0,00620	-0,00620	-0,00620	-0,00620
Temperatura								
0,1	0,1	0,26062	0,43263	0,42821	0,42831	0,42831	0,42831	0,42831
0,1	0,5	0,28556	0,47609	0,47607	0,47606	0,47606	0,47606	0,47606
0,1	0,9	0,30865	0,52360	0,52973	0,52961	0,52961	0,52961	0,52961
0,5	0,1	-0,00224	0,02864	0,00176	0,00168	0,00168	0,00168	0,00168
0,5	0,5	0,00555	0,02141	0,00072	0,00073	0,00073	0,00073	0,00073
0,5	0,9	0,01184	0,01516	-0,00082	-0,00073	-0,00073	-0,00073	-0,00073
0,9	0,1	0,00119	-0,0039	0,00038	0,00039	0,00039	0,00039	0,00039
0,9	0,5	0,00293	-0,00257	-0,00026	-0,00028	-0,00028	-0,00028	-0,00028
0,9	0,9	0,00427	-0,0008	0,00024	0,00021	0,00021	0,00021	0,00021
CPU (s)		46,79	149,07	268,62	480,17	737,03	1075,17	197718,3

O limite de aplicabilidade da aproximação de Boussinesq, sugerido pelo mesmo autor é dado por $\theta_0 = 0,0244 Ra^{0,243}$, onde $\theta_0 = (T_h - T_c)/T_c$. O fluido usado foi ar, com $Pr = 0,71$, e três números de Rayleigh foram testados: $Ra = 10^3, 10^4$ e 10^5 . Os valores de θ_0 usados para cada Ra são 0,1307, 0,2288, 0,4030 (respectivamente), que correspondem aos limites teóricos previstos pela fórmula anterior, 0,0101 (baixo ΔT para todos os casos e 0,5 ($Ra = 10^3$ e 10^4) e 0,8 ($Ra = 10^4$) nos casos fora do limite teórico citado. Os casos foram rodados para uma tolerância de 10^{-4} , 120 termos em cada expansão e $NF = 40$. Na Fig. 2 observam-se os resultados dos perfis de temperatura em $y = 0,5$ e Nu local na parede quente para cada Ra . Em $\theta_0 = 0,0101$, os resultados praticamente correspondem àqueles preditos pela hipótese de Boussinesq, obtidos por Leal et al (1999) via GITT. À medida que θ_0 aumenta, é observado um deslocamento nas curvas da temperatura. No caso do número de Nusselt, observa-se uma variação de maior ordem e uma mudança apreciável na forma dos perfis.

Todos os casos foram executados num computador PC Pentium 266 MHz, em linguagem FORTRAN.

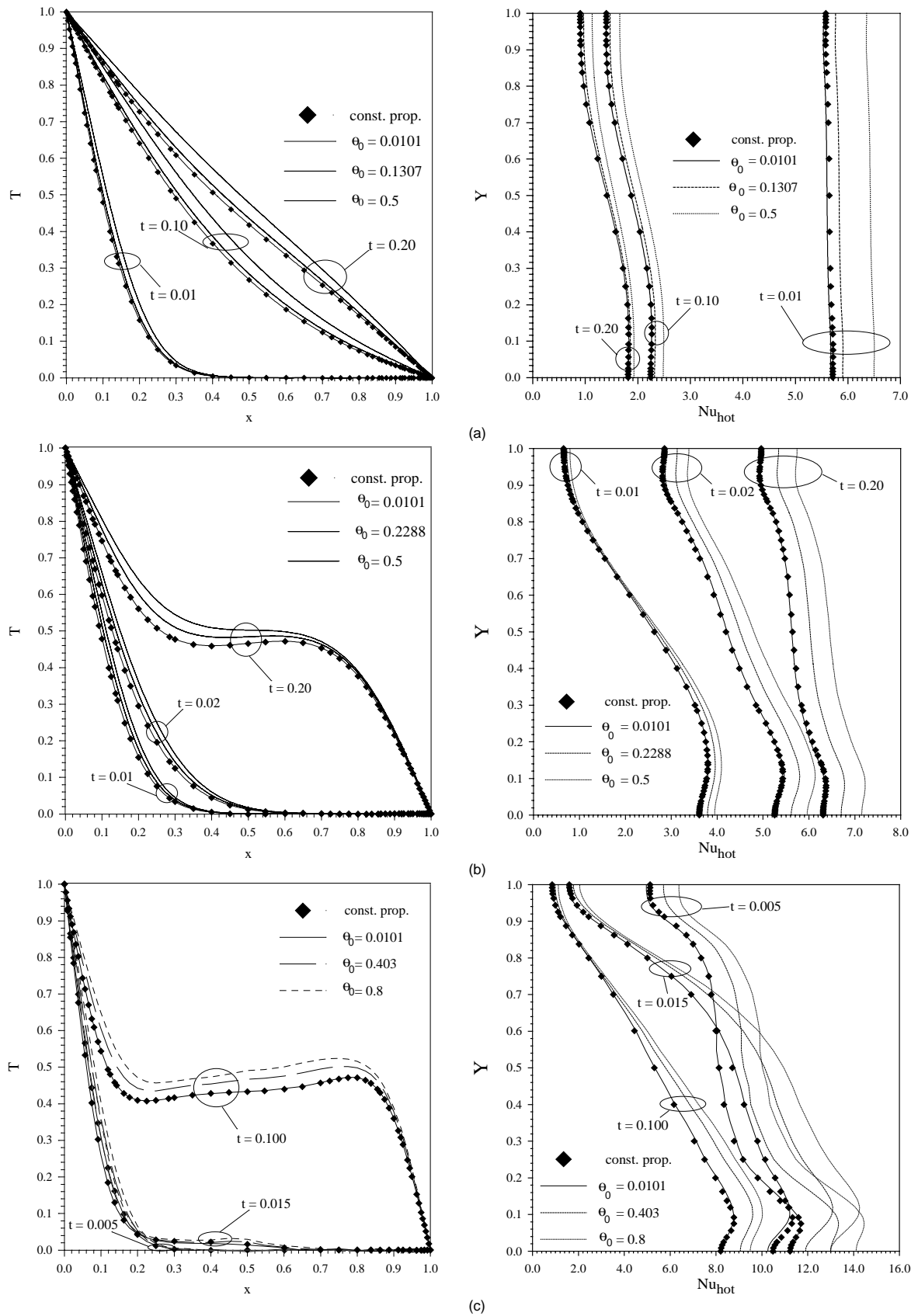


Figura 2 – Comparação do perfil de temperatura em $y = 0,5$ e número de Nusselt local ao longo da parede quente da cavidade em diferentes tempos para propriedades constantes e variáveis. (a) $Ra = 10^3$, (b) $Ra = 10^4$ e (c) $Ra = 10^5$.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi proposto um algoritmo simples de integração numérica de coeficientes aplicado à GITT, que permite a solução de problemas de convecção-difusão em cuja formulação se encontram termos não transformáveis analiticamente, assim como uma enorme flexibilidade na alteração de parâmetros da formulação do problema. Foram testadas as soluções das equações de camada limite no escoamento compressível a baixo número de Mach num canal vertical com paredes aquecidas e do clássico problema da cavidade quadrada com uma diferença de temperaturas constante imposta entre as paredes verticais, considerando todas as propriedades do fluido variáveis. Em ambos os casos, o programa foi validado via comparação com resultados previstos pela hipótese de Boussinesq em situações menos críticas. O algoritmo viabilizou as soluções, e foram obtidos tempos de processamento até 200 vezes menores, em comparação com o processo convencional de aplicação da GITT.

REFERÊNCIAS

- Cotta, R. M., 1993, Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Cotta, R. M., 1998, the Integral Transform method in thermal and Fluids Science and Engineering, Begell House, New York.
- Figueira da silva, E., Cotta, R. M., 1998, Mixed Convection Within Vertical Parallel-Plates: - Hybrid Solution by Integral Transforms, Numerical Heat Transfer, part B-Fundamentals, em impressão.
- Gray, D. D., Giorgini, A., 1976, The Validity of The Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, pp. 545-551.
- IMSL Library, 1989, MATH/LIB., Houston, Texas.
- Leal, M. A., Pérez Guerrero, J. S. e Cotta, R. M., 1999, Natural Convection Inside Two-Dimensional Cavities: - The Integral Transform Method, Comm. Num. Meth. Eng., vol. 15.
- Mikhailov, M. D., Özisik, M. N., 1984, Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, Jhon Wiley, New York.
- Zhong, Z. Y., Yang, K. T. e Lloyd, J. R., 1985, Variable Property Effects in Lminar Natural convection in a Square Enclosure, J. Heat Transfer, vol. 107, pp. 103-138.

A FLEXIBLE ALGORITHM FOR THERMAL CONVECTION PROBLEMS VIA INTEGRAL TRANSFORMS

Abstract. *The Generalized Integral Transform Technique (GITT) is employed to solve convection-diffusion problems in fluids with variable physical properties. In this case, some strong non-linear terms are observed in the formulation, where the analytical transform is not possible. A simple algorithm is presented, which allows to obtain the coefficients numerically and permits a great flexibility in changing boundary conditions and source terms of the original equations. Results for the compressible boundary layer equations in a parallel plate channel flow and for the classical lid-driven flow in a square cavity with all the properties as functions of the temperature (except the density) are shown.*

Key-words: *Integral transforms, Hybrid methods, Non-Boussinesq convection, Compressible flow, Variable properties*