



FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE CÁLCULO DE PLACAS LAMINADAS DE MATERIAL COMPOSTO

Philippe R. B. Devloo

Francisco A. Menezes

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Estruturas
Cx. Postal 6021 – CEP13083-970 – Campinas, SP, Brasil

Cedric M. A. A. Bravo

Universidade Estadual de Campinas, Prog. de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Cx. Postal 6122 - 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Resumo. O artigo trata da formulação e implementação do cálculo de placas laminadas de material composto. A modelagem é baseada no desenvolvimento de um elemento finito de placa espessa, onde a superfície de referência não precisa coincidir com a superfície que passa pela sua espessura média. A simulação é feita pela sobreposição de vários elementos como os acima referidos, cada um representando a contribuição de uma das camadas da placa laminada, possibilitando a determinação aproximada da matriz de rigidez e do vetor de cargas de um elemento finito multi-camadas para a análise de placas anisotrópicas. Foi utilizado o ambiente de programação simbólica Mathematica para a obtenção das matrizes de rigidez. A interação entre o programa Mathematica e o programa C++, onde a formulação foi implementada, deu agilidade e confiabilidade à programação. A implementação computacional permite o estudo de problemas estruturais envolvendo o uso de placas multi-camadas anisotrópicas, de emprego cada vez mais freqüente em engenharia civil, mecânica e aeroespacial. Alguns resultados já obtidos são mostrados, para efeito de comparação.

Palavras-chave: placas multi-camadas, laminado composto, placas

1. INTRODUÇÃO

O estudo de placas laminadas formadas por várias camadas é de interesse prático da engenharia, pois o seu uso tem se intensificado nos últimos tempos com a utilização de materiais compostos. As camadas que compõem a placa podem ter propriedades elásticas diferentes ou mesmo suas fibras serem dispostas em direções diferentes, dando um caráter anisotrópico para a placa.

A formulação obtida foi implementada num ambiente computacional de programação científica orientada a objetos denominado PZ (Devloo 1992, Devloo 1997), em desenvolvimento.

vimento no Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp, sob a coordenação do primeiro autor, o qual possibilita a análise de problemas de placas através do Métodos dos Elementos Finitos, via processo dos deslocamentos.

2. OBJETIVOS

O objetivo principal é mostrar a formulação desenvolvida para a simulação de placas espessas multi-camadas e sua implementação num programa de elementos finitos.

A matriz de rigidez do elemento de placa é formada pela superposição das matrizes de rigidez de cada camada que o constitui. As expressões dos coeficientes de rigidez das submatrizes de contribuição de cada camada são extensas e foram obtidas com o auxílio do programa Mathematica (Adamchik 1993).

O elemento finito proposto pode ser formado de várias camadas superpostas, de propriedades diferentes, de tal modo que o plano de flexão do elemento não tem necessidade de coincidir com a superfície média da placa.

3. HIPÓTESES

As principais hipóteses admitidas nesta formulação foram:

1. O estudo do elemento finito de placa foi tratado como um problema de elasticidade plana onde foram aplicadas as simplificações do estado plano de tensões. A lei constitutiva admitida foi a de regime elástico linear com pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

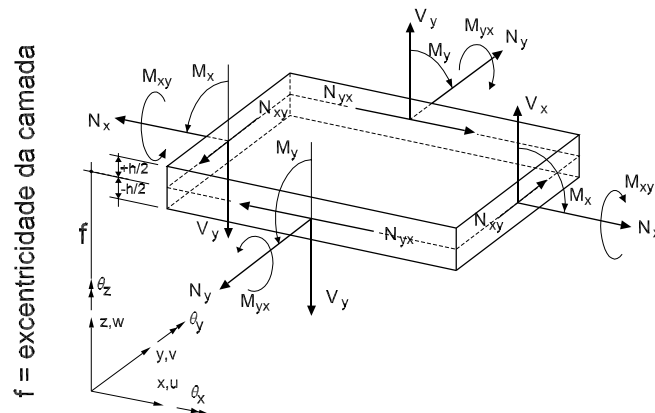


Figura 1: Esforços e Deslocamentos positivos num ponto da placa

2. A placa foi admitida espessa, obedecendo a teoria de Reissner-Mindlin (Reissner 1945). A formulação admite deformação cisalhante de primeira ordem (FSDT - *first-order shear deformation*). No estudo cinemático da placa admite-se que uma linha reta, perpendicular ao plano da placa, é inextensível, permanecendo reta após a deformação, sofrendo uma rotação tal que não fica obrigatoriamente perpendicular à tangente da superfície deformada. As variáveis deslocamentos em cada ponto da placa, contidos no plano de referência são as translações $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e $w = w(x, y)$ e as rotações $\theta_x = \theta_x(x, y)$, $\theta_y = \theta_y(x, y)$ e $\theta_z = \theta_z(x, y)$, positivos conforme Fig.1. Um ponto genérico P está contido numa camada i de espessura h_i ,

cujo plano médio está a uma distância f_i do plano de referência. Os deslocamentos do ponto P valem:

$$u_P = u(x, y) - \theta_x(z + f) \quad (1)$$

$$v_P = v(x, y) + \theta_y(z + f) \quad (2)$$

$$w_P = w(x, y) \quad (3)$$

$$\theta_{x_P} = \theta_x(x, y) \quad (4)$$

$$\theta_{y_P} = \theta_y(x, y) \quad (5)$$

$$\theta_{z_P} = 0 \quad (6)$$

Ao se admitir rotação constante para todas as camadas existirá uma inconsistência no cálculo de deformações e tensões nas superfícies de separação entre as camadas. Os erros de aproximação devido à inconsistência comentada tem se mostrado tolerável. No futuro espera-se poder incorporar na formulação uma variação das rotações de uma camada para outra, conforme artigo recente de Qi and Knight (Knight 1997).

3. Em cada ponto de integração, contido num lado do elemento finito, define-se um sistema de referência $Oa_1a_2a_3$ tal que a_1 e a_2 estão contidos no plano da placa e a_1 dá a orientação do lado, conforme Fig.2.

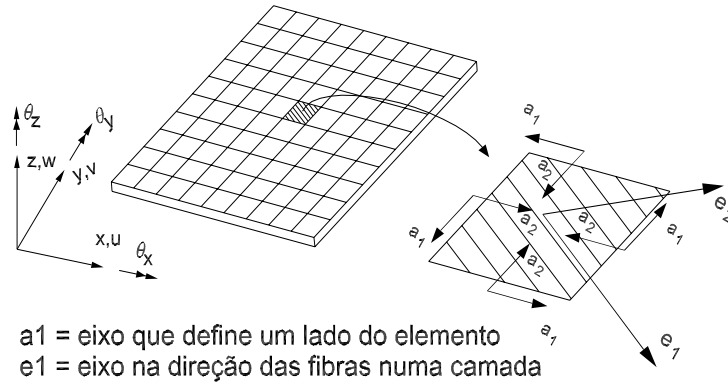


Figura 2: Eixos para orientação do lado e direção das fibras num elemento

4. Admite-se que cada camada tenha propriedades ortotrópicas em relação a duas direções. No plano médio de cada camada define-se um sistema de referência tri-ortogonal $Oe_1e_2e_3$, tal que os eixos e_1 e e_2 estejam nas direções de ortotropia do material da camada. A direção e_1 é designada no trabalho com “*direção das fibras*”. Os parâmetros elásticos: módulos de elasticidade longitudinal E_1 e E_2 , coeficientes de Poisson ν_1 e ν_2 e módulos de elasticidade transversal G_{12} , G_{13} e G_{23} de uma camada são relativos a e_1 , e_2 e e_3 . Devido à hipótese (1) e à ortotropia foram impostas condições indicadas a seguir, conforme (Lekhnitskii 1981):

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (7)$$

$$E_1\nu_2 = E_2\nu_1 \quad (8)$$

4. FORMULAÇÃO

Apresenta-se a seguir, de forma sucinta, a formulação deduzida para o elemento de placas laminadas multi-camadas, admitindo-se estado plano de tensões.

4.1 Camada paralela ao plano xy com as fibras alinhadas com o eixo x

Deformações:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + (z + f) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + (z + f) \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \theta_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + (z + f) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - (z + f) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Tensões:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_x(\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ \frac{E_y(\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{1 - \nu_x \nu_y} \\ 0 \\ G_{xz} \varepsilon_{xz} \\ G_{yz} \varepsilon_{yz} \\ G_{xy} \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Em problemas de engenharia é comum adotar como deformações de cisalhamento γ_{xz} , γ_{yz} e γ_{xy} que valem respectivamente o dobro das deformações de cisalhamento ε_{xz} , ε_{yz} e ε_{xy} , calculadas conforme equações 10. Aqui optou-se por não adotar essa prática. Chama-se a atenção do leitor, então, para os valores dos módulos de elasticidade transversais a serem adotados, que devem ser o dobro dos valores adotados na prática.

Esforços solicitantes: Levando em conta os efeitos de flexão e os efeitos de membrana, os esforços solicitantes: forças normais N_x , N_y , e N_{xy} ; forças cortantes V_x e V_y ; momentos de flexão M_x , M_y e M_{xy} , cujos sentidos positivos estão indicados na Fig.1, são apresentados nas equações 11 à 13.

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad \text{e} \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (11)$$

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \tau_{xz} dz \quad \text{e} \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \tau_{yz} dz \quad (12)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f) \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f) \sigma_y dz \quad \text{e} \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z + f) \tau_{xy} dz \quad (13)$$

A constante k que aparece nas integrais das equações 12 é adotada para corrigir as diferenças entre a atual distribuição de tensão devido à força cortante e aquela da teoria de primeira ordem. No trabalho foi adotado $k = \frac{5}{6}$. Os momentos M_x e M_y são denominados

momentos fletores e M_{xy} é designado momento volvente. Na programação, um momento fletor $M_z = hS\varepsilon_z$ que tende a zero, embora não esteja no contexto da formulação da placa paralela do eixo xy , foi introduzido prevendo futuros desenvolvimentos.

Princípio dos Trabalhos Virtuais: A expressão referente ao PTV é escrita a partir dos esforços solicitantes e do carregamento aplicado na superfície e no contorno. Assim o PTV envolve trabalho virtual dos esforços internos e trabalho virtual das forças externas (sobre o corpo e no contorno). A parcela do trabalho virtual interno pode ser calculada como na equação 14:

$$W_{\text{int}} = \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + V_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \theta_y \right) + \right. \quad (14)$$

$$\left. V_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_x \right) + M_x \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} - M_y \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} \right) \right] dx dy$$

Chamando o integrando da equação 14 de $\Delta \mathbf{W}$ escreve-se:

$$W_{\text{int}} = \int_A \Delta \mathbf{W} \quad (15)$$

As variáveis deslocamentos e as suas variações podem ser agrupadas em forma de vetores de dimensões 6×1 , aqui denotados \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$. Os termos do integrando da equação do PTV podem ser agrupados em termos dos vetores \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$, conforme equação 16. A expressão do trabalho virtual interno W_{int} é bilinear em relação a $\left(\delta \mathbf{u}, \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right)$ e $\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right)$. As matrizes de ordem 6×6 da equação 16 podem ser calculadas conforme indicado na Tabela 1.

$$W_{\text{int}} = \int_A \left[\left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right)^T \mathbf{K}_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial y} \right)^T \mathbf{K}_{yy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right)^T \mathbf{K}_{xy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \right. \quad (16)$$

$$\left. \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right)^T \mathbf{K}_{yx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}_{0x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right)^T \mathbf{B}_{x0} \mathbf{u} + \right.$$

$$\left. (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}_{0y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial y} \right)^T \mathbf{B}_{y0} \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{B}_{00} \mathbf{u} \right] dx dy$$

Tabela 1: Forma das matrizes 6×6 da expresso do trabalho virtual interno

$\mathbf{K}_{xx} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right) \partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)}$	$\mathbf{K}_{yy} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial y} \right) \partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)}$	$\mathbf{K}_{xy} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} \right) \partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)}$
$\mathbf{K}_{yx} = \mathbf{K}_{xy}^T$	$\mathbf{B}_{0x} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial (\delta \mathbf{u}) \partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)}$	$\mathbf{B}_{x0} = \mathbf{B}_{0x}^T$
$\mathbf{B}_{0y} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial (\delta \mathbf{u}) \partial \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)}$	$\mathbf{B}_{y0} = \mathbf{B}_{0y}^T$	$\mathbf{B}_{00} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{W}}{\partial (\delta \mathbf{u}) \partial (u)}$

4.2 Camada paralela ao plano xy com as fibras não alinhadas com o eixo x

Neste caso é necessário definir o vetor e_1 , na direção das fibras, o vetor e_2 , perpendicular a e_1 , e os vetores a_1 e a_2 , que definem o lado do elemento, conforme ilustrado na Fig.2. As componentes desses vetores em relação a x,y,z são:

$$\begin{cases} e_1 = (e_{00}, e_{01}, e_{02}) \\ a_1 = (a_{00}, a_{01}, a_{02}) \end{cases}, \quad \begin{cases} e_2 = (e_{10}, e_{11}, e_{12}) \\ a_2 = (a_{10}, a_{11}, a_{12}) \end{cases} \quad (17)$$

As propriedades elásticas E_1, E_2, G_{12}, ν_1 e ν_2 devem ser medidas em relação a direção do vetor e_1 (que define as fibras), G_{13} e G_{23} devem ser medidas na direção da espessura.

As variáveis cinemáticas em relação aos eixos e_1 e e_2 são $u_n, v_n, w_n, \theta_{n1}$ e θ_{n2} . Inclui-se também a variável $\theta_{n3} = 0$ por interesse para próximos desenvolvimentos. Desse modo as expressões para deformações, tensões e esforços solicitantes, em relação aos eixos e_1 e e_2 são análogas às já apresentadas em relação aos eixos x e y (vide equações 9 a 13). A partir delas pode-se escrever o trabalho virtual dos esforços internos:

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{int}} = \int_A \left[N_1 \frac{\partial \delta u_n}{\partial e_1} + N_2 \frac{\partial \delta v_n}{\partial e_2} + N_{12} \left(\frac{\partial \delta u_n}{\partial e_2} + \frac{\partial \delta v_n}{\partial e_1} \right) + V_1 \left(\frac{\partial \delta w_n}{\partial e_1} + \delta \theta_{n2} \right) + \right. \\ \left. V_2 \left(\frac{\partial \delta w_n}{\partial e_2} - \delta \theta_{n1} \right) + M_1 \frac{\partial \delta \theta_{n2}}{\partial e_1} - M_2 \frac{\partial \delta \theta_{n1}}{\partial e_1} + M_{12} \left(\frac{\partial \delta \theta_{n2}}{\partial e_2} - \frac{\partial \delta \theta_{n1}}{\partial e_1} \right) \right] de_1 de_2 \end{aligned} \quad (18)$$

Os deslocamentos \mathbf{u} , descritos nas direções globais x,y e as suas variações podem ser expressos com respeito às direções a_1, a_2 . Os termos da equação do PTV (equação 18) podem ser agrupados a partir dos deslocamentos \mathbf{u} e suas variações $\delta \mathbf{u}$, escritos termos de a_1, a_2 .

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} = \int_A \left[\left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_1} \right)^T \tilde{\mathbf{K}}_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_2} \right)^T \tilde{\mathbf{K}}_{yy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_2} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_1} \right)^T \tilde{\mathbf{K}}_{xy} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_2} + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_2} \right)^T \tilde{\mathbf{K}}_{yx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_1} + (\delta \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{B}}_{0x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_1} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_1} \right)^T \tilde{\mathbf{B}}_{x0} \mathbf{u} + \right. \\ \left. (\delta \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{B}}_{0y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a_2} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial a_2} \right)^T \tilde{\mathbf{B}}_{y0} \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u})^T \tilde{\mathbf{B}}_{00} \mathbf{u} \right] de_1 de_2 \end{aligned} \quad (19)$$

As matrizes de ordem 6×6 da equação 19 podem ser calculadas de modo semelhante ao mostrado na tabela 1. No entanto é mais interessante calcular essas matrizes da forma que segue:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{xx} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{K}_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} + \mathbf{K}_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \right) \mathbf{R} \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{yy} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{K}_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} + \mathbf{K}_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} \right) \mathbf{R} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{xy} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{K}_{xx} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} + \mathbf{K}_{yy} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{xy} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{yx} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} \right) \mathbf{R} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{yx} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{K}_{xx} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} + \mathbf{K}_{yy} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{xy} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} + \mathbf{K}_{yx} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} \right) \mathbf{R} \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{0x} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{B}_{0x} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} + \mathbf{B}_{0y} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \right) \mathbf{R} \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{x0} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{B}_{x0} \frac{\partial a_1}{\partial e_1} + \mathbf{B}_{y0} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \right) \mathbf{R} \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{0y} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{B}_{0x} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} + \mathbf{B}_{0y} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \right) \mathbf{R} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{y0} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{B}_{x0} \frac{\partial a_2}{\partial e_1} + \mathbf{B}_{y0} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \right) \mathbf{R} \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{00} = \mathbf{R}^T (\mathbf{B}_{00}) \mathbf{R} \quad (28)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação dos eixos x, y, z para os eixos e_1, e_2, e_3 e as derivadas parciais são os cossenos diretores entre os vetores a_1, a_2 e os vetores e_1 e e_2 .

Matriz de Rigidez do Elemento Finito: A matriz de rigidez do elemento finito de placa pode ser obtido pela integração numérica da equação 19, onde \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$ são discretizados através das funções de forma geradas segundo o método dos elementos finitos.

5. EXEMPLOS

A formulação foi testada com diversas situações de vinculação, de carregamentos e de relações altura/espessura. Foram testadas placas multi-camadas com suas fibras em orientações diferentes. Apesar de não mostrado nos exemplos que seguem, nas simulações realizadas foram utilizados tanto elementos triangulares como quadriláteros.

5.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo é o de uma placa espessa ortotrópica quadrada, simplesmente apoiada em todo o contorno, de relação lado/espessura $\frac{a}{h} = 10$.

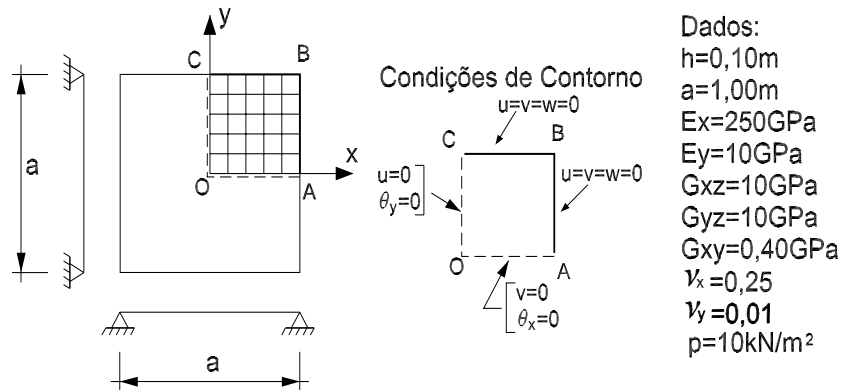


Figura 3: Dados da placa simétrica apoiada em todo o contorno do exemplo 1

Devido à dupla simetria da estrutura e do carregamento analisou-se apenas 1/4 da placa. Os parâmetros elásticos, valor do carregamento aplicado por unidade de área e

as condições de contorno estão indicados na Fig.3. O valor teórico da flecha máxima é $0,06540m$. Na Tabela 2 são mostrados os valores de flecha máxima obtidas com o programa *PZ* para várias discretizações. Os valores encontrados foram sensivelmente melhores do que os obtidos por (Sedano 1998) utilizando um elemento triangular proposto por (Kasmatka 1994).

5.2 Exemplo 2

O segundo exemplo trata de uma placa anisotrópica quadrada indicada na Fig.4, formada por 3 camadas cujas fibras estão dispostas em direções diferentes. A placa é simplesmente apoiada em todo o contorno. Cada camada têm espessura $h = 0,10m$ de modo que a espessura total vale $h_T = 0,30m$. As fibras de cada camada estão dispostas formando ângulos de $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ em relação ao eixo x . Os lados da placa têm dimensão $a = 10m$. O carregamento atuante é uma carga uniformemente distribuída, perpendicular ao plano da placa, de valor $p = 100kN/m^2$. As propriedades elásticas de cada camada são iguais entre si e estão indicadas na Fig.4.

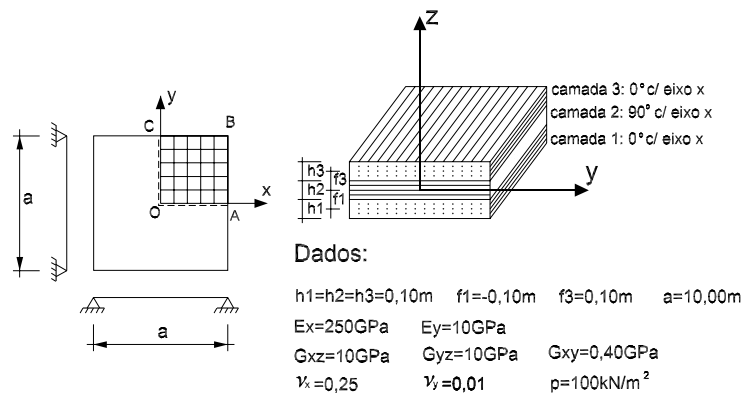


Figura 4: Dados da placa multi-camada apoiada no contorno do exemplo 2

Cada camada tem comportamento ortotrópico. Apesar de multi-camada a placa apresenta dupla simetria. Analisou-se apenas 1/4 da placa utilizando elementos quadriláteros. As condições de vinculação utilizadas são as mesmas do exemplo anterior.

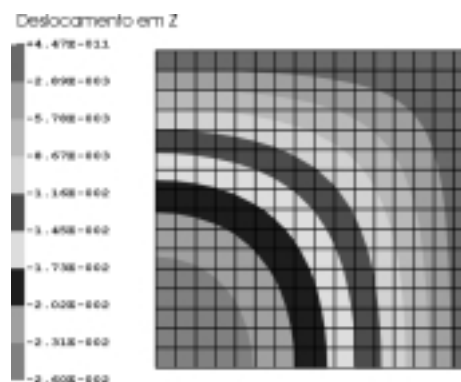


Figura 5: Deslocamentos verticais em 1/4 da placa do exemplo 2

Na Fig.5 apresenta-se uma vista dos deslocamentos verticais, em metros, de 1/4 da camada média da placa. A flecha calculada no ponto central da camada média da placa está mostrada na Tabela 3 para diversas discretizações e diversos graus de interpolação.

Tabela 2: Resultados para o exemplo 1

Flecha no centro da placa ortotrópica simplesmente apoiada nos contornos Valor Teórico ($f_{max}=0,06540$ m)			
Número Elementos	Grau Polinômio	Número Equações	Flecha (m)
1	3	96	0,06622
	4	150	0,06504
	5	216	0,06532
4	2	150	0,05719
	3	222	0,06610
	4	390	0,06513
	5	616	0,06536
16	2	102	0,06562
	3	798	0,06596
	4	1446	0,06521
	5	2286	0,06538
64	2	1398	0,06520
	3	3246	0,06596

Tabela 3: Resultados para o exemplo 2

Flecha no centro da placa laminada formada por 3 camadas			
Número Elementos	Grau Polinômio	Número Equações	Flecha (m)
1	3	96	0,02623
	4	150	0,02593
	5	216	0,02599
4	2	150	0,02595
	3	294	0,02598
	4	486	0,02600
	5	726	0,02602
16	2	486	0,02598
	3	1014	0,02601
	4	1734	0,02603
	5	2646	0,02503
64	2	1734	0,02603

6. CONCLUSÕES

O elemento de placa multi-camada formulado apresentou bons resultados nos testes realizados. O elemento leva em conta o efeito do cisalhamento, de acordo com a teoria clássica de Reissner-Mindlin, sendo adequado para placas espessas. O elemento não tem apresentado o conhecido efeito de travamento (*shear-locking*), pelo efeito da força cortante, quando se usa a formulação para a análise de placas finas. Isso tem sido conseguido utilizando-se polinômios de interpolação de alta ordem.

Os esforços, tensões e deformações são calculados em cada camada, em relação ao plano de referência, possibilitando a verificação de valores locais de tensões limites ou valores de resistência última para o material de cada camada.

O ambiente de programação científica PZ, utilizado para a implementação é aberto e receptivo a aperfeiçoamentos na modelagem do elemento apresentado. Em trabalhos em desenvolvimento pretende-se utilizar o elemento proposto também para a aproximação de cascas multi-camadas. Em trabalhos futuros tem-se como meta modificar o modelo cinemático para possibilitar rotações diferentes em cada camada, para compatibilizar as deformações nas superfícies de separação entre as camadas.

REFERÊNCIAS

- Abdala F^o, J. E., 1995, “*Elemento finito simples para placas laminadas de material composto*”, CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia.
- Adamchik et alii, 1993, “*Guide to Standard Mathematica Packages*”, 3ed., Wolfram Research, Inc., London, UK.
- Devloo, P. R. B. & Alves F^o, J. S. R., 1992, “*On the development of a finite element program based on the object oriented programming philosophy*”, First European Conference on Numerical Methods in Engineering, Brussels, pp 43-48, Belgium.
- Devloo, P. R. B., 1997, “*PZ: an object oriented environment for scientific programming*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **N150**, p133-153.
- Lekhnitskii, S. G., 1981, “*Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*”, Mir Publisher, Moscow, URSS.
- Kasmatka, J. B., 1994, “*An accurate shear-deformable six-node triangular plate element for laminated composite structures*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. **37**, p431-455.
- Knight Jr, Norman F. and Qi, Yunqia, 1997, “*Restatement of first-order shear-deformation theory for laminated plates*”, International Journal of Solids Structures vol. **34**, p481-492.
- Menezes, F. A., Shlessarenko F^o, L. & Devloo, P. R. B., 1997, “*Extensão da teoria de Reissner-Mindlin para cascas*”, XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos-SP, Brasil.
- Menezes, F. A., Shlessarenko F^o, L. & Devloo, P. R. B., 1998, “*Tridimensional Analysis of Buildings Using an Oriented Object environment*”, IV WCCM - World Congress of Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina.
- Reddy, J. N., 1983, “*An Introduction to the Finite Element Method*”, McGraw-Hill International Editions, McGraw-Hill series in Mechanics Engineering, 2d. edition, ISBN 0-07-112799-2, Singapore.
- Reissner, E., 1945, “*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*”, Journal of Applied Mechanics, vol. **12**, p69-73.
- Tapia, L. G. S., 1998, “*Análise de Placas Laminadas de Materiais Compostos pelo Método dos Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil da Unicamp, Campinas, SP, Brasil.
- Shlessarenko F^o, 1997, “*Análise tridimensional de edifícios por elementos finitos utilizando a programação orientada a objetos*”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Campinas SP, Brasil, 165p.