



ANÁLISE DE MECANISMOS UTILIZANDO TRANSFORMADORES CINEMÁTICOS

Jorge A. M. Góis

e-mail: jamg@epq.ime.eb.br

Clódio A. P. Sarzeto

e-mail: de4sazet@eqp.ime.eb.br

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica

Pça Gal Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro –RJ, CEP: 22290-270

Resumo. *Este trabalho objetiva explorar a técnica de transformadores cinemáticos, através de sua aplicação na análise de um modelo de suspensão veicular plana de braços paralelos. Um mecanismo pode ser constituído de um único loop cinemático ou vários, dependendo de sua forma. Tomando o conjunto de loops mínimos e independentes, cada um destes é chamado de transformador cinemático, os quais tomados em conjunto, descrevem a estrutura topológica de todo o mecanismo, podendo-se a partir daí, representá-lo em um diagrama de blocos. No método em estudo, o problema é reduzido à determinação em cada loop, de subcadeias, através de grupos de isotropia baseados em elementos geométricos, gerando um sistema de equações escalares a partir das condições de fechamento do loop. Baseado neste conceito, as equações da dinâmica do mecanismo podem ser estabelecidas de forma bastante compacta. Tal técnica mostra grande eficiência em termos computacionais em relação às técnicas iterativas, o que se pretende explorar, objetivando a geração de modelos eficientes, inclusive em tempo real, para usos diversos, em especial, sistemas de controle.*

Palavras-chave: Transformador-Cinemático, Dinâmica, Suspensão, Multi-corpos, mecanismo-plano

1. Introdução

Com o intenso uso de sistemas de controle, passou-se a necessitar de modelos de solução cada vez mais rápida, pois tais sistemas, de maneira geral, precisam de soluções das equações em tempo real, diferente dos modelos destinados apenas à análise, apontando então, para a necessidade de novas técnicas de modelagem.

A técnica dos Transformadores Cinemáticos, apresentada inicialmente por Hiller (1986), tem como objetivo a geração de modelos mais eficientes, através da abordagem da dinâmica do mecanismo pelo número mínimo de variáveis, levando à uma drástica redução do número de incógnitas. Além disso, ela também busca soluções fechadas, minimizando o uso de técnicas iterativas e portanto, o esforço computacional. Paralelamente, a sua característica de modularidade permite o trabalho separado nos diversos subsistemas, e seu posterior acoplamento.

Neste trabalho, a técnica dos Transformadores será utilizada apenas para a análise de um sistema de suspensão, o qual serve de base para o modelo de suspensão completa do veículo, devido à modularidade da técnica, bem com, dada a eficiência do modelo, para o emprego em sistemas de controle.

2. O Modelo

Com o objetivo de modelar e analisar a dinâmica vertical de uma suspensão plana de braços paralelos, foi criado um modelo reduzido de veículo, correspondente a um quarto do próprio veículo. Apresentando a estrutura básica de um mecanismo de quatro-barras, o conjunto suspensão/veículo foi ligado a um referencial inercial por meio de uma junta de translação, com finalidade de permitir apenas o movimento vertical a ser analisado, como mostra a Fig. 1, onde o corpo 1 representa o quarto de veículo, os corpos 2 e 4 são, respectivamente, os braços superior e inferior da suspensão, o corpo 3 é o suporte da roda e o 5, o corpo fixo (solo).

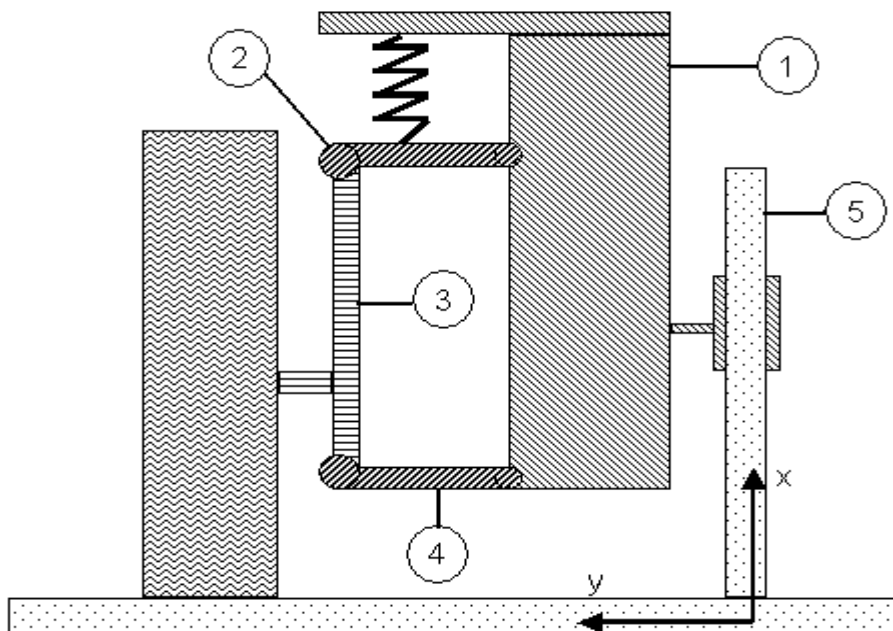


Figura 1 – Modelo reduzido de veículo

Dessa forma, o conjunto é constituído de quatro juntas de revolução, uma de translação e um elemento de ligação representado pelo conjunto mola-amortecedor, e subordinado aos pesos dos corpos e à força de contato roda/piso.

3. Técnica dos Transformadores Cinemáticos

3.1 Equações da Dinâmica

As equações da dinâmica para sistemas multi-corpos são obtidas a partir das equações de Newton-Euler para cada corpo rígido, utilizando o Princípio de D’Alambert para eliminação das forças internas do sistema, chegando à forma abaixo

$$\sum_{i=1}^{N_B} \left[(\Xi_i \cdot \dot{s}_i + b_i) - w_i^e \right]^T \cdot \delta s_i = 0 \quad (1)$$

onde N_B é o número de corpos do mecanismo, s_i é o vetor de posição e orientação de um referencial fixo no centro de massa do corpo i em relação ao referencial inercial, Ξ_i é o tensor de inércia do mecanismo, contendo então as massas e momentos de inércia de cada corpo, b_i representa os efeitos das forças de Coriolis e centrípeta de cada corpo, w_i^e as forças externas aplicadas (pesos, efeitos do conjunto mola-amortecedor e do pneu), δs_i os deslocamentos virtuais.

Os deslocamentos virtuais devem ser admissíveis, ou seja, compatíveis com as restrições cinemáticas do problema, podendo-se, na maioria dos sistemas, escrever uma relação de dependência entre eles. A fim de reduzir a dimensão do conjunto de deslocamentos, e portanto do sistema da Eq. (1), é introduzido um conjunto de variáveis independentes q e suas variações δq , relacionados com o conjunto completo de deslocamentos virtuais por

$$\delta s = J \cdot \delta q \quad (2)$$

onde J é a matriz jacobiana do sistema. Estendendo a relação da Eq. (2) para velocidades e acelerações, e substituindo na Eq. (1), chega-se a

$$M(q) \cdot \ddot{q} + B(q, \dot{q}) = Q(q, \dot{q}) \quad (3)$$

onde:

$$\begin{aligned} M(q) &= \sum_{i=1}^{N_B} J_i^T \cdot \Xi_i \cdot J_i \\ B(q, \dot{q}) &= \sum_{i=1}^{N_B} J_i^T \cdot (\Xi_i \cdot J_i \cdot \dot{q} + b_i) \\ Q(q, \dot{q}) &= \sum_{i=1}^{N_B} J_i^T \cdot w_i^e \end{aligned} \quad (4)$$

A dimensão do sistema de equações reduz-se então a do vetor q , composto pelas variáveis livres. No caso do modelo em estudo, passa-se de um sistema de 15 equações e 15 incógnitas para um com 2 equações e 2 incógnitas.

3.2 Loops Cinemáticos

Mecanismos complexos podem ser vistos como constituídos por um conjunto de cadeias cinemáticas simples. Tomando o caso geral das cadeias fechadas (pois uma aberta pode ser fechada pela introdução de uma junta fictícia com 6 graus de liberdade, ou 3 no caso plano), deve-se então selecionar um conjunto de *loops* que forme uma base descrevendo a topologia do sistema, a qual pela análise do grafo equivalente terá dimensão

$$N_L = N_G - N_B + 1 \quad (5)$$

onde N_G é o número de juntas no mecanismo, sendo, segundo Gondran (1984), a Eq. (5) válida tanto para casos planos como espaciais, independente do tipo de junta. Os componentes

desta base serão então chamados de Transformadores Cinemáticos, funcionando como blocos de equações cinemática não-lineares, interligados por relações lineares entre suas variáveis de entrada e saída, permitindo representar o sistema em um Diagrama de Blocos.

3.3 Seleção da Base de Ciclos Mínimos

Para o mecanismo da suspensão, com 5 corpos e 5 juntas, haverá apenas 1 transformador, sendo, para sua seleção, seguido o processo descrito por Kecskeméthy (1997), a saber:

- Montar um grafo equivalente ao mecanismo, cujo conjunto de vértices $K = \{k_i\}$ representa os corpos e as arestas $E = \{e_{ij}\}$, as juntas ligando os corpos k_i e k_j , e o tamanho de cada aresta é proporcional ao número de graus de liberdade da junta correspondente. Seguindo a numeração dos corpos apresentada na Fig (1), tem-se na Fig (2) o grafo da suspensão.

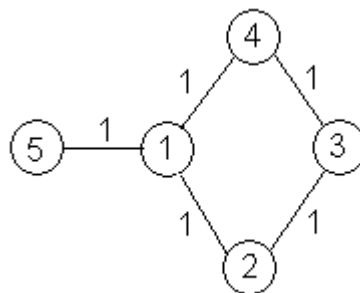


Figura 2 – Grafo da Suspensão

- A seguir encontra-se os caminhos mínimos p_{ij} entre cada par de vértices (k_i, k_j), onde o comprimento do caminho é dado pela soma dos comprimentos das arestas que o compõem.
- De posse dos caminhos, são montados os ciclos mínimos c_{ijk} passando por cada par de vértice k_k e aresta e_{ij} , com i e j diferentes de k . As conexões são feitas através dos caminhos mínimos, na forma

$$c_{ijk} = p_{ki} \cup e_{ij} \cup p_{jk} \quad (6)$$

- Ciclos degenerados, isto é, aqueles que partilham outros vértices além daquele de conexão, devem ser excluídos, assim como os repetidos. No caso da suspensão, isto excluirá todos os ciclos compostos por e_{15} , de maneira que o transformador correspondente ao mecanismo específico da suspensão será independente do restante do sistema, caracterizando a modularidade.
- Os ciclos são então ordenados de maneira crescente e seleciona-se o menor conjunto com N_L ciclos independentes. O conjunto é dito independente se nenhum ciclo pode ser formado a partir operações lineares sobre os outros. No caso da suspensão o conjunto de ciclos mínimos é um conjunto unitário, $C = \{c_{123}\}$.

3.4 Cinemática da Cadeia

Como estabelecido por Hiller (1988), dentro do *loop*, a cinemática é descrita por meio de um conjunto N_G^e coordenadas relativas β_i nas juntas, sendo então o número de graus de liberdade internos dado por:

$$f_L = N_G^e - R \quad (7)$$

onde R é igual a 6 para sistemas espaciais e 3 para planos. A partir de Eq. (7) fica claro que existem R coordenadas dependentes no *loop*, podendo-se então extrair R equações escalares da forma $g'(\beta) = 0$. Objetivando diminuir o número dessas equações, usa-se o artifício de abrir a cadeia em dois segmentos (superior e inferior), retirando-se um par de juntas chamado par característico, eliminando do equacionamento as incógnitas relativas a estas juntas. Assim reduz-se para

$$h = R - (f_{G_i} + f_{G_j}) \quad (8)$$

a quantidade de equações implícitas, onde f_{G_i} e f_{G_j} são o número de graus de liberdade das juntas retiradas, vê-se então que pode-se minimizar o núcleo de implícito pela escolha adequada do par característico.

As equações características são obtidas a partir de condições de fechamento do *loop* (Kecs kemethy, 1992), estabelecidas por intermédio dos elementos de isotropia (${}_U\lambda_i$ e ${}_L\lambda_i$). Estes são invariantes geométricos, dependentes do tipo de par característico tomado, que devem manter-se em ambos os segmentos gerando equações da forma:

$$g_i'(\beta) = {}_U\lambda_i - {}_L\lambda_i = 0, \quad i=1, \dots, h \quad (9)$$

As coordenadas eliminadas do núcleo implícito podem ser calculadas por equações complementares obtidas de forma recursiva. As R equações ficam então divididas em um núcleo implícito (característico) e uma parte recursiva (complementar).

$$g'(\beta) = \begin{bmatrix} g_{char}(\beta) \\ g_{comp}(\beta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

As coordenadas independentes podem ser obtidas diretamente do vetor de entradas q através das matrizes de seleção H e V' , sendo o sistema completo da forma:

$$g(\beta, q) = \begin{bmatrix} H \cdot \beta - V' \cdot q \\ g'(\beta) \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Derivando-se a Eq. (11) em relação ao tempo é obtida a equação de velocidades da cadeia em coordenadas relativas.

$$J_\beta \cdot \dot{\beta} = V \cdot \dot{q} \quad (12)$$

onde J_β é a matriz Jacobiana da cadeia em coordenadas relativas, ou seja

$$J_\beta = \frac{\partial g}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} H \\ J_{\beta'} \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} V' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

E, derivando novamente em relação ao tempo, tem-se a equação de aceleração:

$$J_{\beta} \cdot \ddot{\beta} + \dot{J}_{\beta} \cdot \dot{\beta} = V \cdot \ddot{q} \quad (14)$$

3.5 Cinemática Global

Encontradas as coordenadas relativas e suas derivadas temporais como descrito no item anterior, deve-se transformá-las para coordenadas absolutas, através de expressões explícitas para posição, e uma matriz de transformação T para velocidades, chegando assim à Jacobiana para coordenadas absolutas:

$$\dot{s}_i = T_i \cdot \dot{\beta}_i = T_i \cdot J_{\beta_i} \cdot \dot{q} = J_i \cdot \dot{q} \quad (15)$$

Tomando então as matrizes J_i de cada cadeia, forma-se a Jacobiana global do sistema (Hiller, 1994) como uma matriz diagonal por blocos, permitindo, a partir da Eq. (1), obter a Eq. (3).

4. Resultados Numéricos

Foram executadas simulações do modelo gerado pela Técnica dos Transformadores Cinemáticos (TTC), programado no pacote numérico *MatLab*®, versão 5.1, da *Math Works Inc.*, tendo seus resultados comparados àqueles obtidos pelo programa *Cinem* (Imai,1992), que utiliza a técnica do número máximo de coordenadas. Cada programa utilizou os parâmetros internos necessários a atingir o resultado desejado, sendo ambos executados em um computador pessoal *Pentium*®, de 233 MHz, com 128 MB de memória RAM.

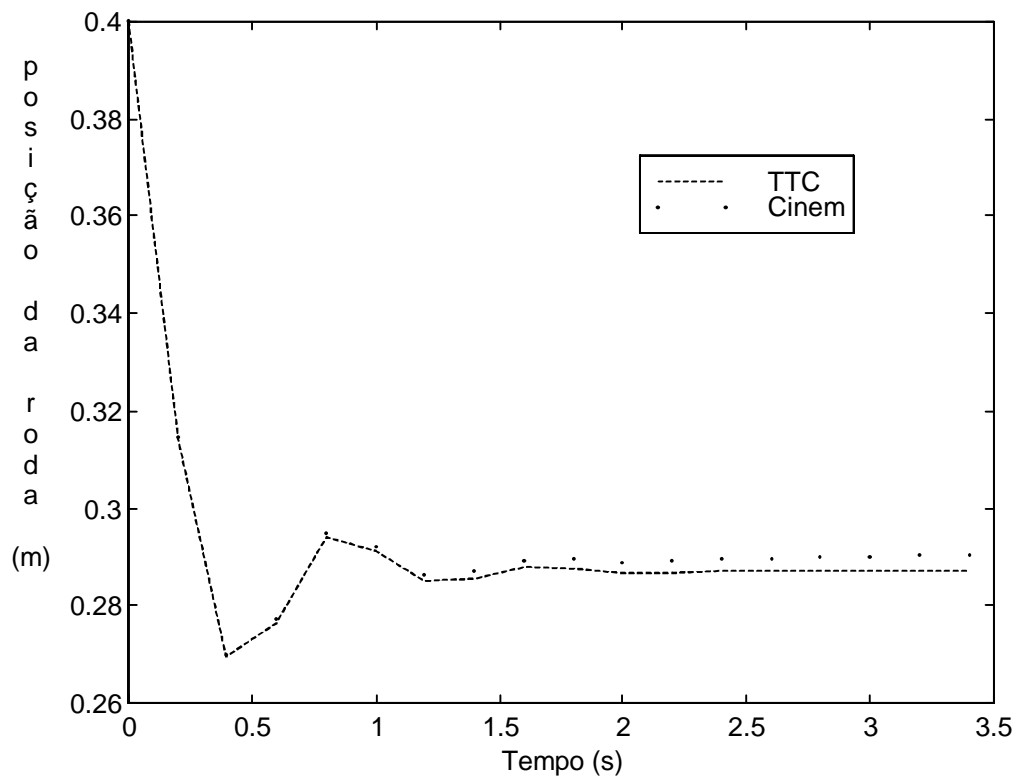


Figura 3 – Posição vertical absoluta da roda

Foi feita uma primeira simulação, sem forças externas e com condição inicial de deslocamento nula. Isto significa que não há força de contato roda/piso, o veículo é mantido fixo, ficando a roda solta no espaço, sujeita apenas ao seu peso e à própria suspensão. O tempo de processamento no programa *MatLab*® foi de 0,77s para um período simulado de 3,5s enquanto no programa *Cinem* foi de 13,8s, fornecendo os resultados mostrados na Fig (3)

Numa segunda simulação foi introduzido o forçamento externo na forma de um pulso de força de 1kN durante 0.3s, após 1s de simulação. Com condição inicial nula para posição, foi simulado um período de 10s, obtendo os tempos de processamento de 9,46s no *MatLab*® e 73,89s no *Cinem*, obtendo os resultados mostrados na Fig. (4).

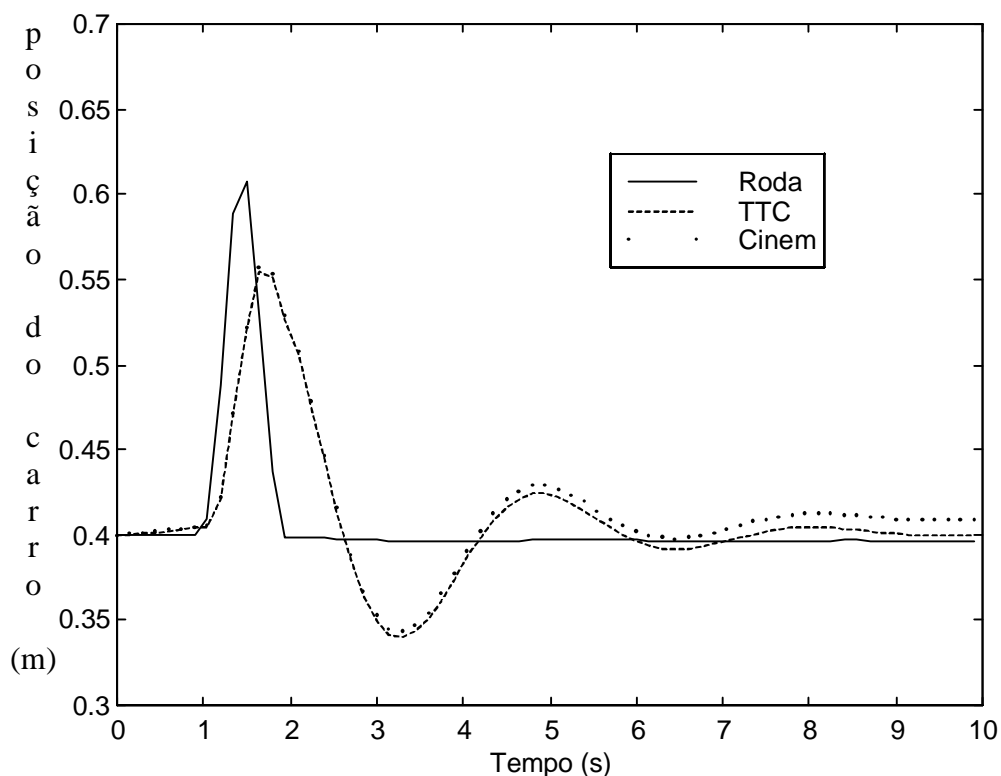


Figura 4 – Posição vertical absoluta do veículo

Como esperado, a técnica dos transformadores mostrou-se mais eficiente que técnicas pela abordagem do número máximo de coordenadas, como a utilizada no programa *Cinem*. Isto porque por a TTC consegue em vários casos (como neste), evitar o aparecimento de equações implícitas, não havendo necessidade do uso de métodos iterativos, proporcionando também uma drástica redução do sistema diferencial a ser integrado, com já mostrado.

É importante ressaltar que os modelos gerados foram capazes de executar a simulação em tempo real, mesmo para um período relativamente longo. Desse modo, o trabalho na geração e implementação do modelo apesar de grande, é compensado pela sua eficiência.

REFERÊNCIAS

GONDRAN, M.; MINOUX, M. 1984, *Graphs and Algorithms*, John Wiley & Sons, Nova Iorque.

- HILLER, Manfred; KECSKEMETHY, Andrés; WOERNLE, Cristoph, 1986, A Loop-Based Kinematical Analises of Complex Mechanisms, ASME, Paper 86-DET-184.
- HILLER, Manfred; WOERNLE, Cristoph. The Characteristic Pair of Joints - An Effective for Inverse Kinematc Problem of Robots, 1988, Proceedings of the Internacional Conference on Robotics and Automation, IEEE.
- HILLER, Manfred; KECSKEMETHY, Andrés, 1994, Kinematics and Dynamics of Multi-Body Mechanical Systems, Cap. 3, 6, Proceedings of CISM, Udine.
- IMAI, Ávaro K., 1992, Progrma para Simulação de Mecanismos – Cinem, Projeto de Fim de Curso, IME.
- KECSKEMETHY, Andrés; HILLER, Manfred, 1992, Automatic Closed-Form Kinematics-Solutions for Recursive Single-Loop Chains, Flexible Mechanism, Dynamics, and Analysis, ASME, Vol. 47.
- KECSKEMETHY, Andrés; HILLER, Manfred; KRUPP, T., 1997, Symbolic Prossecing of Multiloop Mechanism Dynamics Using Closed-Form Kinematics Solutions, Multibody Systems Dynamics 1: 23-45.
- SARZETO, Clódio A. P.; 1995, Transformadores Cinemáticos para Mecanismos Básicos, Anais COBEM/CIDIM.

Title

MECHANISMS ANALYSIS BY KINEMATICAL TRANSFORMERS

Abstract: The aim of this paper is to explore the Kinematical Transformers technique, applying it to a planar parallel arms wheel suspension of a vehicle model. One, or many kinematical loops, may constitute a mechanism, depending on its particular shape. In the set of minimal independent loops, each element is called kinematical transformer, and such a set describes the topological structure of the whole mechanism, making possible its representation as a block-diagram. In this method, the problem is reduced to the determination in each loop of sub-chains by means of isotropy groups, based on geometrical elements, creating a system of scalar equations derived from its closure condition. Based on this concept, the dynamical equations of the mechanism may be established in a compact form. Such a technique shows greater computational efficiency when compared to iterative techniques.

Key words: Kinematical-Transformer, Dynamics, Suspension, Multi-body, planar-mechanism