



TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM MUDANÇA DE FASE EM GEOMETRIA AXI-SIMÉTRICA DE SÓLIDOS FINITOS.

Fábio Capelassi Gavazzi De Marco

João Batista Campos Silva

Antônio João Diniz

Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica

15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brasil

***Resumo.** A solução do problema de transferência de calor associado a aplicações de proteção térmica ablativa, é apresentado neste trabalho. O fluxo de calor transiente devido ao escoamento de alta velocidade sobre o corpo é representado por uma relação na forma exponencial. O sistema não-linear de equações diferenciais parciais, resultante da aplicação do princípio da conservação de energia, é transformado em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias através da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Os parâmetros de interesse, tais como, espessura e velocidade ablativa, são então, obtidos e comparados com aqueles apresentados na literatura.*

***Palavras-chave:** Ablação, Proteção térmica, Transferência de calor, Mudança de fase.*

1. INTRODUÇÃO

Os problemas relacionados com a transmissão de calor no escoamento ao redor de corpos que sem movem com velocidades elevadas, foram assumindo importante função, a medida que os avanços tecnológicos em determinados setores, propiciaram a possibilidade do desenvolvimento de veículos que pudessem atravessar a atmosfera, se lançar no espaço e posteriormente retornar com segurança. Um dos maiores problemas, é encontrado na reentrada atmosférica. Tal dificuldade, consiste em converter a grande quantidade de energia cinética e potencial, em uma forma de energia que não danifique o veículo e seu conteúdo. Devido às condições extremas de aquecimento aerodinâmico, a quantidade de energia envolvida em tal processo é suficiente para que ocorresse a evaporação do veículo espacial, a exemplo do que ocorre com os meteoritos quando penetram em nossa atmosfera.

O processo de ablação pode ser explicado resumidamente como uma evaporação física na superfície de uma material exposto a um gás a alta temperatura. O mecanismo de proteção térmica ablativa, não consiste apenas na absorção de calor por mudança de fase, mas também em um efluxo gasoso da superfície na camada limite aerodinâmica que envolve o corpo e,

aumenta a espessura da camada limite, reduzindo o gradiente de temperatura no gás, entre a superfície em ablação e aresta da camada limite, diminuindo assim a transferência de calor por convecção para a superfície em ablação. Devido à complexidade do problema e dificuldade de modelagem, adota-se neste trabalho uma análise simplificada na qual considera-se apenas o processo de transferência de calor e massa com mudança de fase.

Durante tal processo de transferência de calor e massa, dois períodos podem ser identificados: o período pré-ablativo e o período ablativo. No primeiro não há mudança de fase e o material é aquecido até seu ponto de fusão, já no segundo, de acordo com a hipótese de Stefan, descrita por Lacaze (1967), a massa fundida é instantaneamente removida para o ambiente.

O procedimento matemático utilizado na busca da solução exata é a Técnica da Transformada Integral Generalizada, T.T.I.G., proposta por Özisik & Murray (1974) como um método de solução para problemas de difusão linear, com condições de fronteira variáveis, facilitando consideravelmente o cálculo e proporcionando um equacionamento cuja solução pode ser obtida através de método computacional.

Ruperti & Cotta (1991), aplicaram a T.T.I.G. na análise de condução unidimensional de calor e mudança de fase em região finita, baseando-se num exemplo típico de proteção térmica em veículos espaciais.

Cotta (1986), utilizou a TTIG para obtenção dos resultados numéricos de uma solução formal completa para o problema de difusão em meio finito com fronteira móvel.

O presente trabalho baseou-se em Diniz et al. (1996), com o intuito de complementar os resultados apresentados por tal autor, assim como gerar uma discussão a respeito da influência dos parâmetros ligados com a geometria do corpo agindo sobre o fenômeno ablativo.

2. ANÁLISE

O problema trata da transferência de calor unidimensional numa casca de revolução rombuda a qual é associado um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, Anderson et al (1984). O corpo de revolução está sujeito a um fluxo de calor transiente e axi-simétrico, $Q(\tau)$, na sua superfície externa, ao passo que a sua superfície interna permanece térmicamente isolada. O fluxo de calor está orientado ao longo da coordenada ζ , a qual é medida ao longo da normal à superfície, na estação ξ considerada, como ilustrado na Fig. 1.

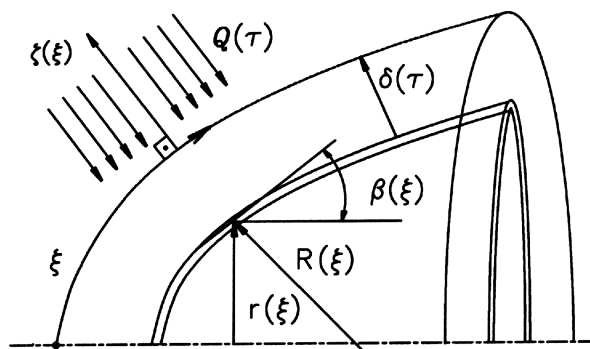


Figura 1 – Representação da geometria de revolução.

Na "Fig. 1", $\delta(\tau)$ representa a espessura da proteção térmica do corpo de revolução; $\beta(\xi)$ representa o ângulo da tangente à superfície com o eixo do corpo; $R(\xi)$ é o raio de curvatura geratriz de revolução, e $r(\xi)$ é a distância da superfície até o seu eixo de simetria.

Condutividade térmica e calor específico são considerados constantes e a temperatura inicial do corpo é T_0 . Além disso, considera-se que a condução de calor ocorre predominantemente ao longo da espessura do material. Tal se justifica pelo fato de que $\delta(\tau) / R \ll 1$.

2.1 Período pré-ablativo:

Durante o período pré-ablativo, o processo de condução de calor unidimensional e transiente é governado pela equação:

$$(1 + \zeta R(\zeta))^2 (\zeta) \frac{\partial \theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} + D(\zeta) \frac{\partial \theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} + P(\zeta, \tau), \quad (1)$$

$$\theta^*(\zeta, \tau) = \theta(\zeta, \tau) + \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \right) Q(\tau), \quad (2)$$

$$P(\zeta, \tau) = \left[- (1 + \zeta R(\zeta))^2 (\zeta, \tau) \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \right) \frac{dQ(\zeta, \tau)}{d\tau} \right] + [1 + (\zeta - 1)D(\zeta)]Q(\zeta), \quad (3)$$

$$D(\zeta) = \left[\frac{R}{1 + R\zeta} + \frac{\cos \beta}{r + \zeta \cos \beta} \right], \quad (4)$$

Com a condição inicial:

$$\theta^*(\zeta, \tau) = - \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \right) Q(\zeta), \quad 0 < \tau < \tau_f \quad \text{e} \quad 0 < \zeta < 1, \quad (5)$$

e de contorno dadas por:

$$\left. \frac{\partial \theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -Q(\tau) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad \tau > 0. \quad (6)$$

Utilizando a TTIG, Özisik e Murray (1974), definiram o seguinte par de transformada integral:

$$\tilde{\theta}_i^*(\tau) = \int_0^1 \psi_i(\zeta) \theta^*(\zeta, \tau) d\zeta, \quad (7)$$

$$\theta^*(\zeta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\zeta)}{N_i} \tilde{\theta}_i^*(\tau), \quad (8)$$

onde $\psi_i(\zeta) = \cos(\mu_i \zeta)$ e $\mu_i = i\pi$, ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) são respectivamente as auto-funções e os auto-valores. Define-se a norma das auto-funções como:

$$N_i \int_0^1 \psi_i^2(\zeta) d\zeta = \int_0^1 \cos^2(i\zeta) d\zeta . \quad (9)$$

Substituindo a Eq. (7) na Eq. (1) obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(\tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \tilde{\theta}_i^*(\tau) + g_i^*(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j^*(\tau) A_{ij}(\tau) + \int_0^1 \psi_i(\zeta) P(\zeta, \tau) d\zeta , \quad (10)$$

$$g_i^*(\tau) = \int_0^1 [\theta^*(\zeta, \tau) L \psi_i(\zeta) - \psi_i(\zeta) L \theta^*(\zeta, \tau)] d\zeta , \quad (11)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{N_j} \int_0^1 D(\zeta) \psi_i(\zeta) \frac{d\psi_j(\zeta)}{d(\zeta)} d\zeta . \quad (12)$$

Aplicando a transformada integral na condição inicial, tem-se

$$\tilde{\theta}_i^*(0) = -Q(0) \int_0^1 \left[(1 + \zeta K(\zeta)) \left(\zeta - \frac{\zeta^2}{2} \right) \cos(i\pi\zeta) \right] d\zeta . \quad (13)$$

Da solução da Eq. (10) resulta a distribuição de temperatura da fase pré-ablativa na forma:

$$\theta(\zeta, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\zeta)}{N_i} \tilde{\theta}_i^* + \left(\frac{\zeta^2}{2} - \zeta \right) Q(\tau) + \theta_{av}(\tau) , \quad (14)$$

onde $\theta_{av}(\tau)$ representa o potencial médio, definido por Mikhailov & Özisik, (1984) e Diniz et al., (1991).

Conhecido o campo de temperatura na fase pré-ablativa, procede-se a solução da fase ablativa, a qual envolve a determinação da posição do contorno em movimento. A posição é definida pela espessura $\delta(\tau)$ do material não fundido e o seu movimento define a velocidade de ablação $V(\tau)$, que é identificada pela equação de restrição de acoplamento do balanço energético.

2.2 Período Ablativo

A equação que define esta fase, na forma adimensional, com a nova coordenada espacial, $\zeta^* = 1 - \zeta$, e a posição da fronteira $\zeta_f^*(\tau) = 1 - \delta(\tau)$, é dada por:

$$Z^2(\zeta^*) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \tau}(\zeta^*, \tau) = \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \zeta^{*2}}(\zeta^*, \tau) + \left[\frac{R}{1 + R\zeta^*} + \frac{\cos \beta}{r + \zeta^* \cos \beta} \right] \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \tau}(\zeta^*, \tau), \quad (15)$$

com as seguintes condições inicial e de contorno, respectivamente:

$$\hat{\theta}(\zeta^*, \tau) = \theta(\zeta^*, \tau) - 1, \quad \tau = \tau_f; \quad (16)$$

onde τ_f é o instante que determina o início da fusão.

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}(\zeta^*, \tau)}{\partial \zeta^*} \right|_{\zeta^* = 0} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial \hat{\theta}(\zeta^*, \tau)}{\partial \zeta^*} \right|_{\zeta^* = \zeta_f^*(\tau)} = 0. \quad (17)$$

O balanço de energia na fronteira fornece a equação:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \zeta^*}(\zeta^*, \tau) - v \frac{d\zeta_f^*(\tau)}{d\tau} = Q(\tau), \quad (18)$$

onde v é o inverso do número de Stefan.

Para aplicar a T.T.I.G., adota-se o seguinte problema auxiliar de autovalor transiente, Cotta, (1993):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^{*2}}(\zeta^*, \tau) + \lambda^2 \phi(\zeta^*, \tau) = 0, \quad (19)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \phi(\zeta^*, \tau)}{\partial \zeta^*} \right|_{\zeta^* = 0} = 0 \quad e \quad \left. \phi(\zeta^*, \tau) \right|_{\zeta^* = \zeta_f^*(\tau)} = 0. \quad (20)$$

Da solução do problema auxiliar de autovalor obtém-se as auto-funções e os autovalores, como seguem:

$$\phi_i(\zeta^*, \tau) = \cos(\lambda_i \zeta^*) \quad \text{e} \quad \lambda_i(\tau) = \frac{(2i-1)\pi}{2\zeta_f^*(\tau)} \quad (i=1, 2, 3, \dots) . \quad (21)$$

Das propriedades de ortogonalidade obtém-se a norma da auto-função:

$$N_i(\tau) = \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} \cos^2[\lambda_i \zeta^*] d\zeta^* = \frac{\zeta_f^*(\tau)}{2} . \quad (22)$$

Define-se uma autofunção normalizada:

$$K_i(\zeta^*, \tau) = \phi_i(\zeta^*, \tau) N_i(\tau)^{-1/2} . \quad (23)$$

O par transformada integral e transformada inversa é definido por:

$$\tilde{\theta}_i(\tau) = \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} K_i(\zeta^*, \tau) \hat{\theta}(\zeta^*, \tau) d\zeta^* , \quad (24)$$

$$\hat{\theta}(\zeta^*, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\zeta^*, \tau) \tilde{\theta}_i(\tau) . \quad (25)$$

Aplicando a T.T.I.G. nas Eqs. (15) e (19) obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} Z^2(\zeta^*) d\zeta^* \frac{d\tilde{\theta}_j}{d\tau} + \lambda_i^2(\tau) \tilde{\theta}_i(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{\theta}_j(\tau) = 0 , \quad (26)$$

onde $Z^2(\zeta^*) = 1 + (1-\zeta^*) K(\zeta^*)$. Para $i \neq j$, tem-se:

$$A_{ij}(\tau) = \frac{(2i-1)\pi}{\zeta_f^{*2}(\tau)} \frac{1}{\zeta_f^*(\tau)} \frac{d\zeta_f^*(\tau)}{d\tau} B^{**} + \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} D(\zeta^*) \text{sen}(\zeta^*) \text{cs}(\zeta^*) d\zeta^* , \quad (27)$$

$$B^{**} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\zeta_f^*(\tau)} Z^2(\zeta^*) \zeta^* \operatorname{sen}[(I-J)\zeta^*] d\zeta^* \right] + \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} Z^2(\zeta^*) \zeta^* \operatorname{sen}[(I+J)\zeta^*] d\zeta^* , \quad (28)$$

$$\text{com } I = (2j-1)[2\zeta_f^{*2}(\tau)]^{-1} \quad \text{e} \quad J = (2j-1)[2\zeta_f^{*2}(\tau)]^{-1} . \quad (29)$$

Para $i = j$, tem-se:

$$A_{ij}(\tau) = \zeta_f^{*-2}(\tau)(2j-1)\pi \left[\frac{1}{\zeta_f^*(\tau)} \frac{d\zeta_f^*(\tau)}{d\tau} B^{***} + \frac{1}{2} \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} D(\zeta^*) \operatorname{sen}(2I\zeta^*) d\zeta^* \right] , \quad (30)$$

$$B^{***} = \int_0^{\zeta_f^*(\tau)} Z^2(\zeta^*) \operatorname{sen}(2I\zeta^*) d\zeta^* , \text{ para } i, j = 1, 2, 3, \dots . \quad (31)$$

A condição inicial é obtida substituindo a Eq.(24) nas Eqs.(14) e (17):

$$\tilde{\theta}_i(\tau_f) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{(2j-1)} \left[(\theta_{av}(\tau_m) - 1) + \frac{Q(\tau_f)}{2} \left(1 - \frac{2^3}{(2i-1)^2} \right) \right] \right\} + W , \quad (32)$$

$$W = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \frac{(2i-1)(-1)^{i+1}}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \hat{\theta}_r^*(\tau) \frac{(-1)^r}{(2i-1)^2 - 4r^2} \right\} . \quad (33)$$

A Eq. (18), que representa a velocidade ablativa, é escrita na forma transformada, como segue:

$$\frac{d\zeta_f^*}{d\tau} = \frac{Q(\tau)}{v} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2v} \left[\frac{1}{\zeta_f^*(\zeta)} \right]^{3/2} \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1) \tilde{\theta}_i^*(\tau) (-1)^{i+1} . \quad (34)$$

A Eq. (26) e a Eq. (34) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas cuja solução fornece o perfil de temperatura no sólido, a profundidade ablativa $\delta(\tau)$, do material fundido e a velocidade de ablação:

$$V(\tau) = \frac{d\zeta_f^*(\tau)}{d\tau} . \quad (35)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A utilização do fluxo de calor na forma exponencial, fundamentou-se no trabalho de Zien (1977), que empregou o Método Integral do Momento- θ para tratar a transferência de calor por ablação com fluxos de calor em termos de $Q \sim t^m$ e $Q \sim e^t$, constatando que tais fluxos simulam mais realisticamente o fenômeno da ablação do que o fluxo uniforme de calor.

Os resultados numéricos foram obtidos da solução do sistema de equações (26) e (34) truncados em um número finito de equações, através da rotina DGEAR da Biblioteca IMSL (1979). Em todos os casos analisados considerou-se os seguintes parâmetros físicos: tempo característico $t_c = 10s$; tempo de referência $t_r=100s$; tempo de referência adimensional, $\tau_r = t_c/t_r = 10$ e inverso do número de Stefan $v=1$. Esses valores foram definidos por Chung & Hsiao (1985), e utilizados no presente trabalho com o objetivo de comparar os resultados obtidos. Os resultados são apresentados em função da diferença de tempo dimensional, $t-t_f$, onde t_f representa o instante em que se inicia a fusão do material e t um instante de tempo dimensional qualquer.

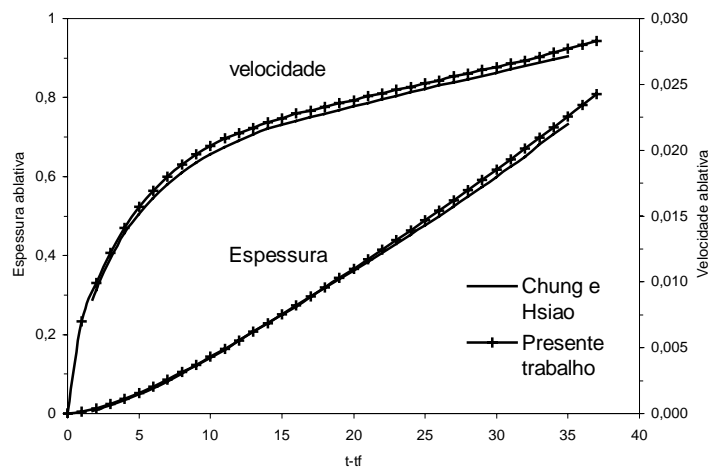


Figura 2 – Resultados para a geometria de revolução quando aproximado pela placa.

A Fig. 2 apresenta o caso em que a geometria de revolução no limite foi aproximada por uma placa, ou seja, $\beta(\xi)=0$, $R(\xi)=0$ e $r(\xi)=1000$. Para tal caso o tempo adimensional do início da ablação foi calculado e igual a $\tau_f=6,68$, valor esse que se aproxima de $\tau_f=6,50$ obtido por Chung & Hsiao (1985), para uma placa finita. A concordância entre os resultados é muito boa como pode ser verificado pela análise da Fig. 2.

Uma vez verificado o procedimento de cálculo para o caso da placa plana, aplicou-se o mesmo ao corpo de revolução. Considerou-se $r(\xi)=3$, $\beta(\xi)=20,0^\circ$ e $R(\xi)=0,03$. A influência de dois fluxos de calor: $Q1 = -\tau^2 + 5\tau$ e $Q2 = e^{(-\tau^2+2\tau)}$, impostos no contorno, sobre a velocidade e espessura ablativa, pode ser verificada na Fig. 3. Observa-se que o fluxo de calor exponencial tem um efeito muito mais significativo sobre a velocidade da fronteira ablativa do que sobre a espessura de material ablativo. O uso do fluxo de calor na forma de $Q2$, busca simular o fluxo de calor encontrado em condições reais de reentrada de veículos espaciais na atmosfera.

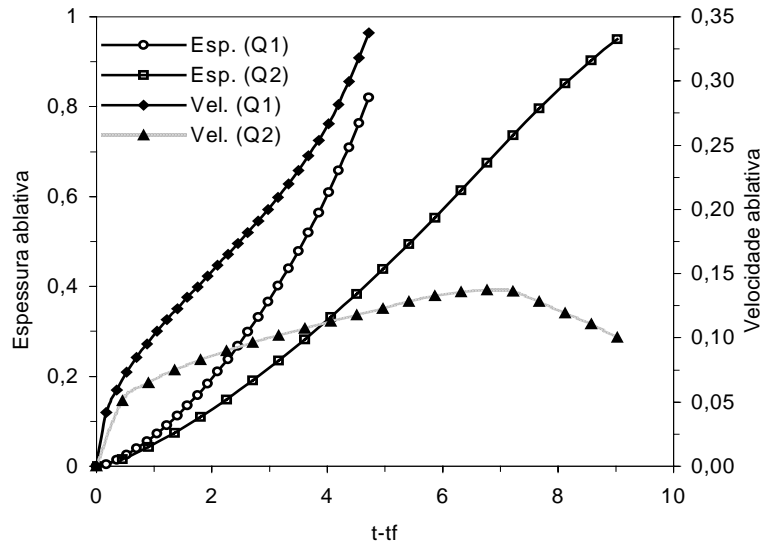


Figura 3 – Influência do fluxo de calor na velocidade e espessura ablativas.

As curvas mostradas na Fig. 4, mostram a distribuição de temperatura nas fases pré-ablativa e ablativa, quando a geometria de revolução é aproximada por uma placa plana. Nota-se que a curva que representa a distribuição de temperatura quando se inicia o período ablativo, onde $\tau = \tau_f$, a distribuição de temperatura, em toda a espessura de material ablativo, já apresenta valores próximos a $\theta = 1$, que é o valor na fronteira.

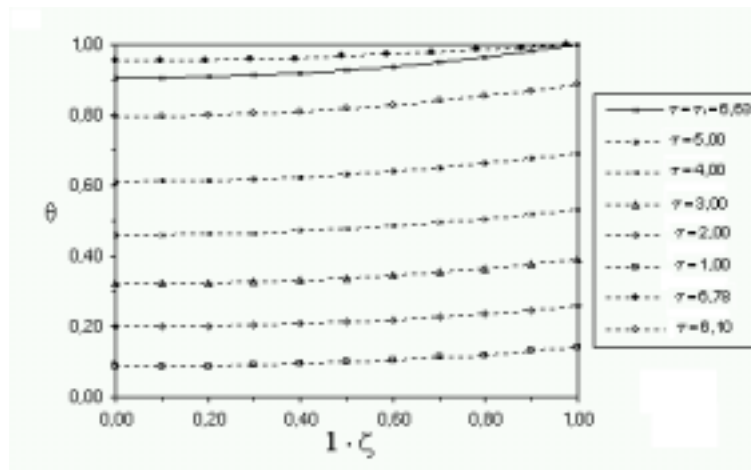


Figura 4 – Distribuição de temperatura para o fluxo de calor $Q = 0,1e^{(\tau/\tau_r)}$.

4. CONCLUSÃO

A técnica utilizada possibilitou a transformação de um sistema de equações diferenciais parciais acopladas num sistema infinito de equações ordinárias acopladas que pode ser resolvido facilmente através de rotinas do IMSL (1979), truncado-se o último sistema num número finito de equações diferenciais ordinárias de acordo com a precisão que se deseja na

solução. A validade do desenvolvimento analítico, obtendo-se uma solução exata, é demonstrada na Figura 2, pela boa concordância dos resultados do presente trabalho com resultados de Chung & Hsiao (1985).

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pela concessão da bolsa, processo 180253 / 99-9.

REFERÊNCIAS

- Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., 1984, Computational fluids mechanics and heat transfer, Ed. Mc Graw-Hill, New York.
- Chung, B. T. F., and Hsiao, J. S., 1985, Heat transfer with ablation in a finite slab subjected to time-variant heat fluxes, AIAA Jornal, vol. 23, número 1, pp. 145-150.
- Cotta, R. M., 1993, Integral transforms in computational heat And fluid, CRC Press, Inc.2000 Corporete Blvd, N.N. Boca Raton, Florida, U.S..
- Cotta, R. M., 1986, Diffusion in media with prescribed moving boundaries: application to metaloxidation at high temperature, II Latin American Congress of Heat and Mass Transfer, São Paulo, vol. 1, pp. 502-513.
- Diniz, A. J., Maia, C. R. M. e Zapparoli, E. L., 1996, Solução analítica para problemas de transferência de calor com mudança de fase em geometria axi-simétrica, VI-ENCIT, Florianópolis, Santa Catarina.
- IMSL Library, 1979, GNB Building, 7500 Ballaire, Edition 7, Blod Houston, Texas 77036.
- Lacaze, H., 1967, La protection thermique par ablation, Doc-Air-Espoce, no. 105, Jecillet.
- Mikhailov, M. D., and Özisik, M. N., 1984, Unified analyses and solutions of heat and mass diffusion, John Willey & Sons, New York.
- Özisik, M. N. & Murray, R. L., 1974, On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters, J. Heat Transfer, vol. 96, pp. 48-51.
- Rupert Jr. N. J. and Cotta, R. M., 1991, Heat conduction with ablation in multilayered media, XI COBEM, São Paulo.
- Zien, T. F., 1977, Study of heat conduction with phase transformation using an intergral method, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Thermophysics of Spacecraft and Outer Planet Entry Probes, vol. 56, pp. 87-111.

HEAT TRANFER WITH PHASE CHANGE IN AXISIMETRICAL GEOMETRY OF FINITE SOLID

Abstract. *The solution of heat transfer problem with ablation is presented in this work. The nonlinear system of partial differential equations is transformed to an infinity coupled system of ordinary differential equations by application of the Generalized Integral Transform Technique. Results for the ablation depth and the speed of the moving boundary are presented and compared with results obtained by different techniques presented in the literatur.*

Keywords: *Ablation, Heat protection, Heat transfer, Phase change.*