



FLUXO DE POTÊNCIA VIBRATÓRIA ENTRE PLACAS RETANGULARES COM UMA VIGA NA UNIÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DA MOBILIDADE

Paulo R. O. Bonifácio

Arcanjo Lenzi

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Engenharia Mecânica

Laboratório de Vibrações e Acústica

Caixa postal 476 - 88040-900 – Florianópolis – SC,

Email : boni@emc.ufsc.br; arcanjo@emc.ufsc.br

***Resumo.** Este estudo consiste em avaliar o fluxo de energia vibratória através de duas placas retangulares acopladas com uma viga na união. O estudo é desenvolvido usando o modelo de placas finas submetidas a ondas de flexão observando o comportamento das mesmas até frequências de 1000 Hz. Os resultados são comparados com os obtidos pelo Método de Elementos Finitos avaliando os momentos fletores e a velocidade angular na união das placas, permitindo, assim, calcular o fluxo da energia vibratória ao longo da união.*

***Palavras-chave:** Acústica, Energia, Fluxo, Placas, Vibrações.*

1. INTRODUÇÃO

Sistemas estruturais que envolvem acoplamentos tipo placas e vigas estão presentes em diversos tipos de estruturas, tais como: aeroespaciais e navais, incluindo as de plataformas de prospecção e produção de petróleo. Nestes lugares, máquinas pesadas funcionam como fonte de energia vibratória que se propaga pela estrutura causando altos níveis de ruído em outras áreas, surgindo a necessidade de controle. Excitações geradas em pontos específicos dessas estruturas são facilmente transmitidas ao longo dos componentes através de vários tipos de ondas. O controle destes níveis pode ser obtido reduzindo-se o fluxo de potência transmitida aos componentes estruturais. Assim, o principal objetivo deste trabalho consiste em analisar a resposta dinâmica de placas, vibrando por ondas de flexão, usando funções de mobilidade para a determinação do fluxo de energia vibratória transmitida através das uniões e avaliar os efeitos dos principais parâmetros envolvidos.

O estudo é desenvolvido usando o modelo de placas finas submetidas a ondas de flexão observando o comportamento das mesmas até frequências de 1000 Hz, aproximadamente. Os resultados são comparados com os obtidos pelo Método de Elementos Finitos avaliando os momentos fletores e a velocidade angular na união das placas, permitindo, assim, calcular o fluxo de propagação da energia vibratória ao longo da união.

2. ANÁLISE

A análise consiste em estudar duas placas simplesmente apoiadas nas bordas e unidas com uma viga na união. Através do acoplamento surgem esforços que se distribuem através dos componentes estruturais. O estudo é aplicado ao acoplamento de duas placas retangulares, com a transmissão de energia dada apenas pelos esforços de flexão, pois, este modelo caracteriza uma grande classe de problemas práticos.

Para a análise são consideradas as seguintes hipóteses: as placas são consideradas finas; a distribuição do momento na união entre as placas é expressa de forma discreta, sendo $M(x_i)$ o momento que atua no i -ésimo segmento da união; o apoio entre as placas é considerado como apoio simples (rótula), garantindo que a energia é transferida apenas pelos esforços de flexão.

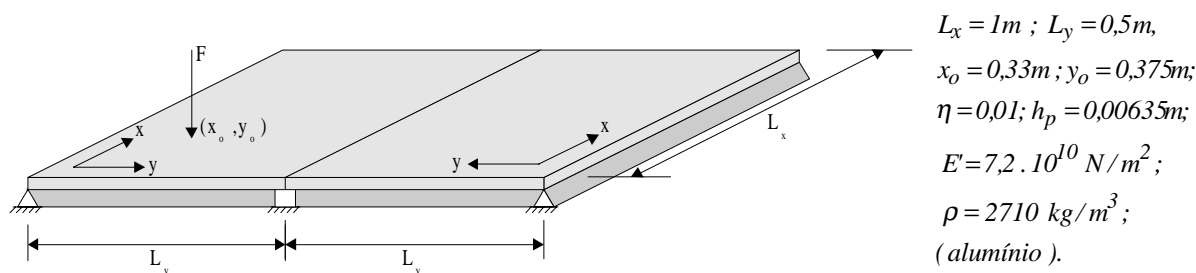


Figura 1 – Sistema com duas placas acopladas e uma viga na união

A equação de movimento por ondas de flexão de uma placa fina, excitada por uma força concentrada, é dada por (Leissa, 1969)

$$D \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \rho h_p \omega^2 u = F \delta(x_o) \delta(y_o) \quad (1)$$

sendo D a rigidez à flexão da placa dada em função do módulo de elasticidade complexo do material; ρ , a massa específica; h_p , a espessura das placas; ω , a frequência em rad/s; u o deslocamento transversal na estrutura; F , a força de excitação; δ , a função delta indicando a excitação concentrada; x_o, y_o , as coordenadas do ponto de aplicação da força.

$$D = \frac{E h_p^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$$E = E' (1+j\eta) \quad (3)$$

sendo ν , o coeficiente de Poisson; E' , o módulo de elasticidade real; E , o módulo de elasticidade complexo; η , o fator de amortecimento da estrutura; j , a unidade imaginária.

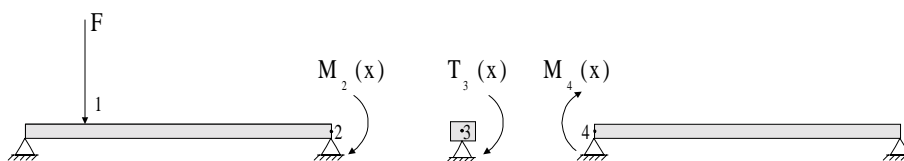
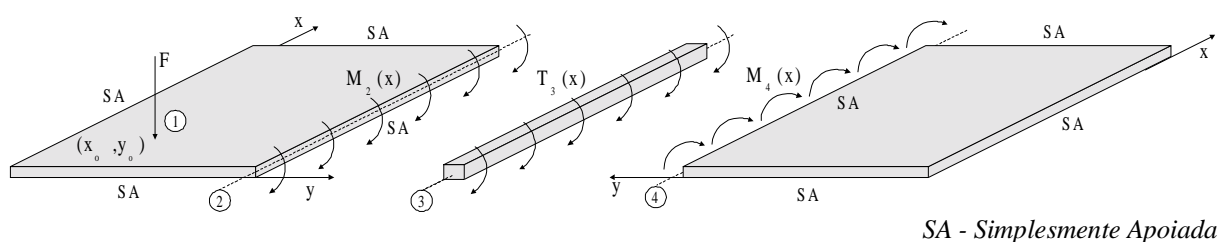


Figura 2 – Seção transversal do sistema acoplado



SA - Simplesmente Apoiada

Figura 3 – Sistema representando os esforços nas estruturas

As condições de contorno para a placa I, mostrada na Fig. 3, são:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = 0; \quad u(x, L_y) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x, L_y)}{\partial y^2} = 0$$

Assim, a resposta da placa, na forma de deslocamento, quando excitada pela força concentrada, mostrada na Fig. 3, é dada por (Graff, 1975):

$$u(x, y) = \frac{4F}{L_x L_y \rho h_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho h_p \text{sen}(k_x x_0) \text{sen}(k_y y_0)}{D (k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{j\omega t} \quad (4)$$

sendo k_x e k_y são os números de ondas para as respectivas direções x e y , dados por $k_x = m\pi / L_x$ e $k_y = n\pi / L_y$.

A seguir serão determinadas as respostas das placas mostradas nas Figs. 2 e 3, excitadas pelos momentos fletores $M(x)$ que atuam ao longo da união. As condições de contorno, neste caso são:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = 0; \quad u(x, L_y) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x, L_y)}{\partial y^2} = -\frac{M(x)}{D}$$

sendo a solução, na forma de deslocamento, proposta por (Cuschieri, 1990), dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(y) \text{sen}(k_x x) e^{j\omega t} \quad (5)$$

A função $\psi_n(y)$, que descreve a resposta generalizada da placa na direção y . É calculada através das condições de contorno em y aplicada na Eq. (1), que governa a resposta de uma placa vibrando por flexão.

$$\psi_n(y) = -\frac{M_n(x)}{4\pi f \sqrt{\rho D^*}} \left(\frac{\text{sen}(k_2 y)}{\text{sen}(k_2 L_y)} - \frac{\text{senh}(k_1 y)}{\text{senh}(k_1 L_y)} \right) \quad (6)$$

A solução, então, pode ser escrita na seguinte forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(x)}{4\pi f \sqrt{\rho h_p D}} \left(\frac{\text{sen}(k_2 y)}{\text{sen}(k_2 L_y)} - \frac{\text{senh}(k_1 y)}{\text{senh}(k_1 L_y)} \right) \text{sen}(k_x x) e^{j\omega t} \quad (7)$$

sendo

$$k_2 = \sqrt{\beta^2 - k_x^2}; \quad k_1 = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}; \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 \rho h_p}{D}$$

A equação que descreve o deslocamento angular de uma viga submetida a um esforço de torção é dada por (Meirovitch, 1964):

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

sendo c a velocidade de ondas de torção dada por

$$c = \sqrt{\frac{G J}{I}} \quad (9)$$

G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento da viga; J , o momento de inércia à torção da seção transversal da viga; I , o momento de inércia de massa por unidade de comprimento da viga (Timoshenko *et al.*, 1980).

As condições de contorno da viga se resumem à rotação nula nas extremidades

$$\theta(0) = 0; \quad \theta(L_y) = 0$$

e a solução é dada por

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_n(x)}{L_x (GJ k_x^2 - \omega^2 I)} \text{sin}(k_x x) e^{j\omega t} \quad (10)$$

sendo $T_n(x)$, o momento torçor ao longo da viga

2.1 Expressões das Mobilidades

As funções respostas em frequência, na forma de mobilidade, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, podem ser determinadas a partir dos deslocamentos das placas, obtidos na seção anterior. Com estas expressões dos deslocamentos, o campo de velocidade ao longo de toda estrutura pode ser conhecido e as funções mobilidade determinadas.

Considerando uma excitação conhecida $F(x_o, y_o)$, harmônica e de módulo unitário, pode-se determinar a expressão da mobilidade de transferência Y_{12} . Conhecendo-se a resposta da placa, dada pela Eq. (4), obtem-se:

$$Y_{12}(x) = \frac{\dot{\theta}_2(x, y)}{F(x_o, y_o)} = \frac{j 2 f}{\rho h_p L_x L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \text{sen}(k_x x_o) \text{sen}(k_y y_o)}{(f_{n,m}^2 - f^2)} \text{sen}(k_x x) \quad (11)$$

sendo $f_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h_p}} (k_x^2 + k_y^2)$ e f , a frequência em Hz.

Esta mobilidade relaciona a velocidade angular na linha de união provocada pela excitação pontual atuando na placa I, como vista na Fig. 2.

A mobilidade que relaciona o deslocamento angular, na linha de união, causado pelo momento distribuído é dada por (Cuschieri, 1996)

$$Y_{44} = \frac{\dot{\theta}_2(x)}{M(x)} = -\frac{j}{4\sqrt{\rho h_p D}} \sum_{n=1}^{\infty} [\text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_x x)] \frac{\partial \psi_n(y)}{\partial y} \quad (12)$$

O momento generalizado é descrito por uma aproximação numérica, sugerido por (Bonifácio, 1998)

$$M_n = \sum_{i=1}^{NI} M(x_i) \text{sen}[k_x x_i] \quad (13)$$

NI representa o número de discretizações na união e $M(x_i)$, o momento que atua em cada segmento da união de acordo com a discretização.

A mobilidade de uma viga submetida a um momento torçor distribuído é:

$$Y_{33} = j 2 \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_x x)}{GJ k_x^2 L_x - \omega^2 I L_x} \quad (14)$$

2.2 Esforços na união das placas pelo Método da Mobilidade

Com a superposição dos efeitos de cada esforço, força de excitação e momento fletor distribuído na união das placas, consegue-se obter a resposta do problema completo. Este procedimento, proposto por (Gorman, 1976), combina as soluções independentes de cada esforço tornando possível a obtenção da solução do sistema acoplado com a simples superposição dos efeitos.

Na união das placas deve-se obedecer às seguintes condições físicas, obtidas a partir da continuidade dos deslocamentos angulares nas uniões

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_4; \quad Y_{12} F + Y_{22} M_2 = Y_{44} M_4 \quad (15)$$

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4; \quad Y_{33} T_3 = Y_{44} M_4 \quad (16)$$

sendo $\dot{\theta}_i$ a velocidade angular na união na linha i , mostrada na Fig. 3.

Do equilíbrio de esforços na união, tem-se

$$M_2 + M_4 + T_3 = 0 \quad (17)$$

Forma-se assim um sistema de equações, expresso em forma matricial

$$[Y_{22} Y_v^{-1} Y_{44} + 2Y_{22}] M_4 = Y_{12} F \quad (18)$$

Através deste sistema de equações pode-se determinar M_4 , momento que atua na união, responsável pela potência vibratória transmitida. Com o conhecimento deste momento pode-se determinar o espectro de potência transferida.

Para as estruturas acopladas desta maneira, com a aplicação de uma força de excitação concentrada, as expressões para as potências de entrada e transmitida, sugerida por (Cremer *et al.* 1973), podem ser computadas por:

$$P_e = \frac{1}{2} Re \left\{ F(f) \dot{u}^*(x_o, y_o, f) \right\} \quad (19)$$

$$P_{trans} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NI} Re \left\{ M(x_i) \dot{\theta}^*(x_i, f) \right\} \quad (20)$$

sendo $F(f)$, o espectro de freqüência da força; * representa a grandeza complexa conjugada; P_e , a potência vibratória de entrada; P_{trans} , a potência vibratória transferida.

2.3 Resultados

Nesta análise, o sistema dado pela Eq. (18), resultou da discretização da união em 25 segmentos, ou seja, 25 valores de momento foram obtidos ao longo da união para a banda de freqüência, o que foi considerado suficiente para a análise na faixa de freqüência de interesse, atendendo aos critérios para descrever o comprimento de onda das estruturas em toda banda de freqüências.

Os momentos ao longo da união e as velocidades angulares na linha de união entre as placas estão mostrados na Fig. 4 e Fig. 5, respectivamente, considerando a união entre as placas sem viga. Os resultados foram obtidos em toda faixa de freqüência do sistema, porém nas figuras estão mostrados apenas os resultados para quatro freqüências de ressonância onde estão sendo comparados com os obtidos pelo Método de Elementos Finitos.

Para o cálculo do espectro de potência transferida é necessário que este sistema consiga descrever a distribuição dos esforços na união para cada freqüência, tornando-se necessário resolvê-lo para cada freqüência discreta na faixa de interesse.

Nas comparações mostradas na Fig. 6, estão os resultados do espectro da potência vibratória de entrada e transferida até 1000Hz, para o acoplamento sem viga, considerando apenas um apoio simples na união entre as placas. Verifica-se a boa precisão do Método da Mobilidade através da comparação com os resultados obtidos pelo Método de Elementos Finitos, os quais apresentam ótima concordância em toda a faixa de freqüências analisada.

Os resultados do Método de Elementos Finitos (MEF) foram obtidos, também, para uma discretização de 25 divisões na linha de união, usando elementos de placa bilinear e considerando-se uma força de excitação harmônica de amplitude unitária (1N) aplicada na placa I.

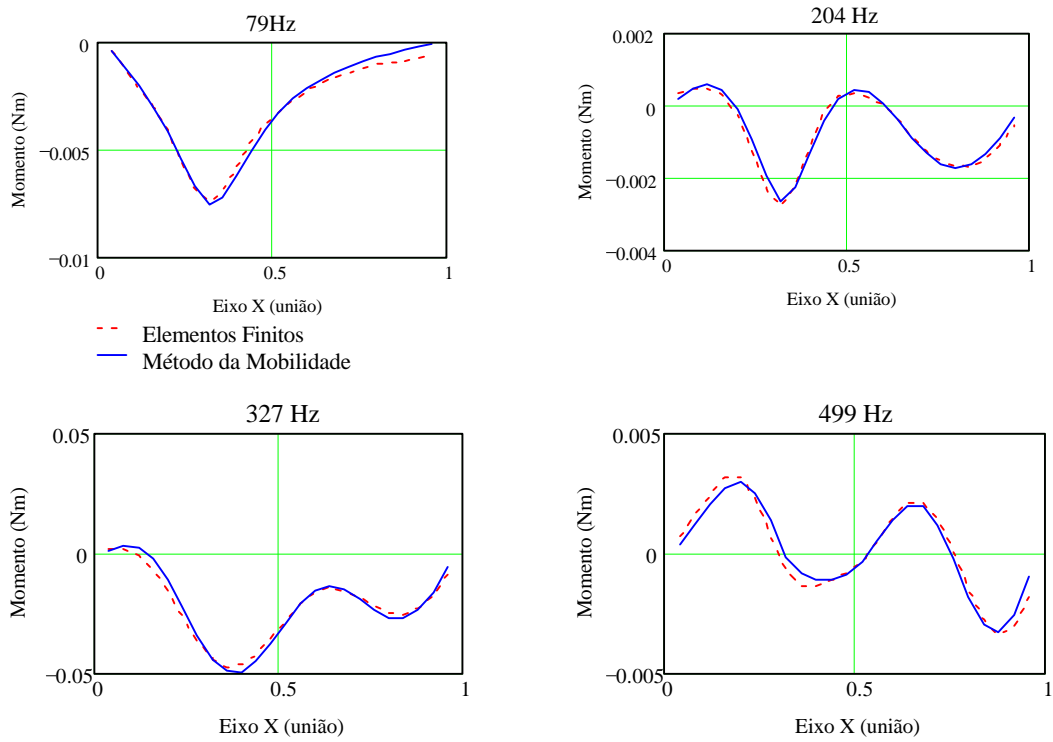


Figura 4 - Distribuição do momento fletor na união

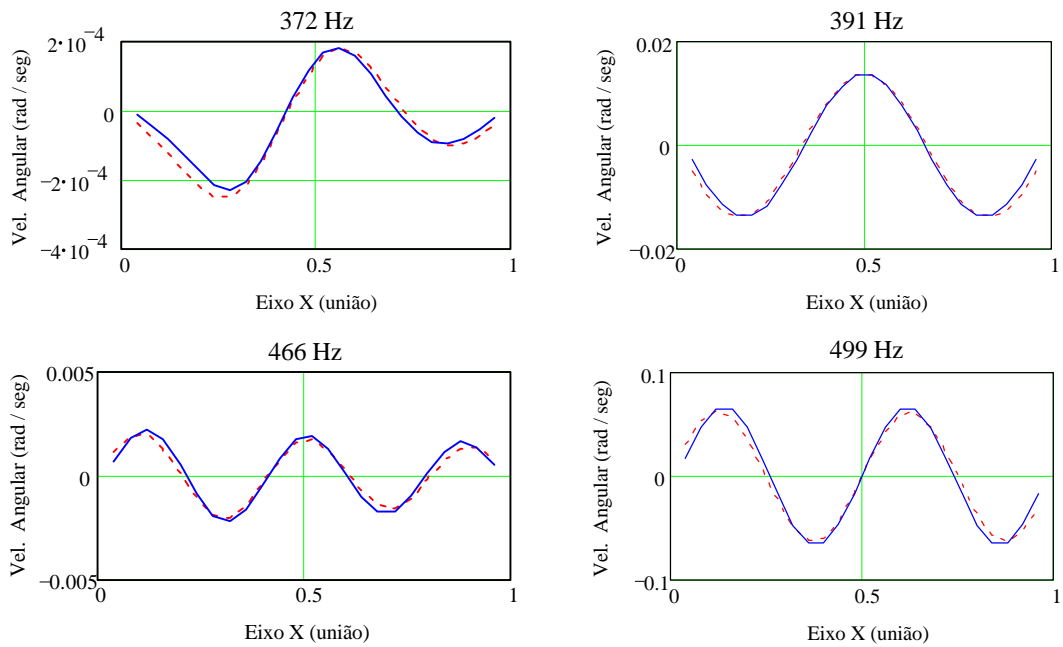


Figura 5 - Distribuição da velocidade angular ao longo da união

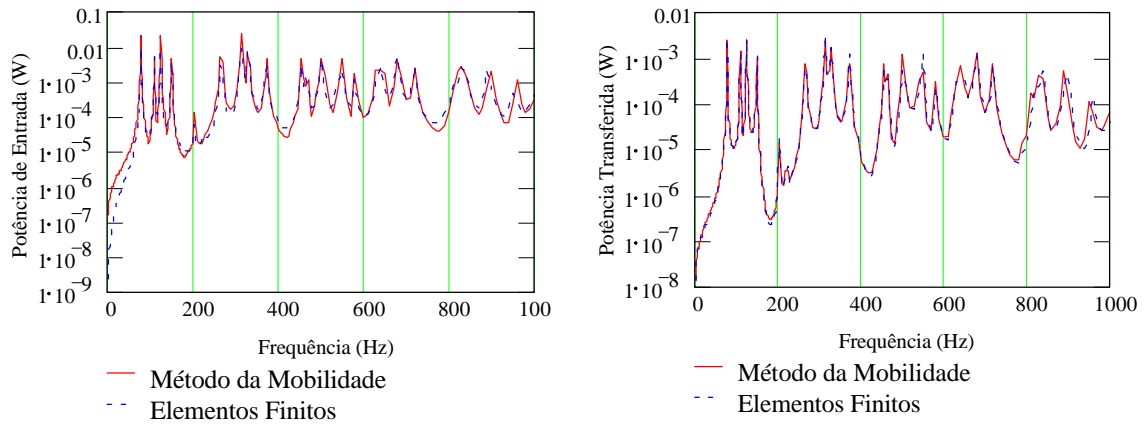


Figura 6 – Potência de Entrada e Transferida através do acoplamento, sem viga na união

A Figura 7 mostra os resultados do fluxo de potência ao longo da união, ainda sem viga na união, descrevendo o perfil do fluxo de potência vibratória que atinge a segunda estrutura e indicando a região onde o fluxo é máximo para uma dada frequência de ressonância. Estes resultados estão mostrados apenas para quatro frequências de ressonâncias do sistema.

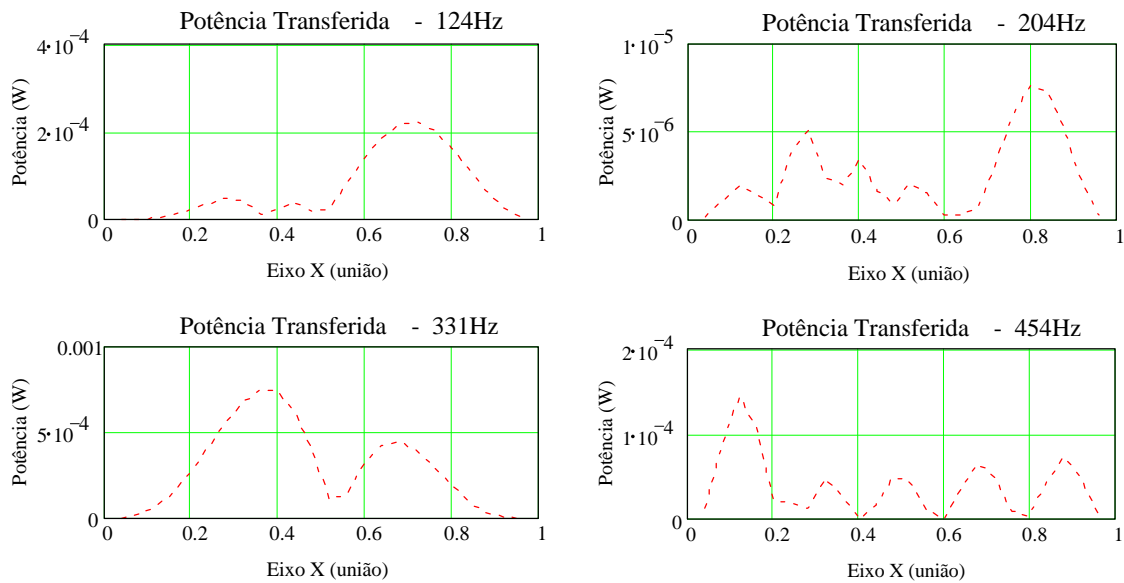


Figura 7 – Distribuição da transferência de potência ao longo da união, sem viga na união, para as frequências de ressonâncias indicadas

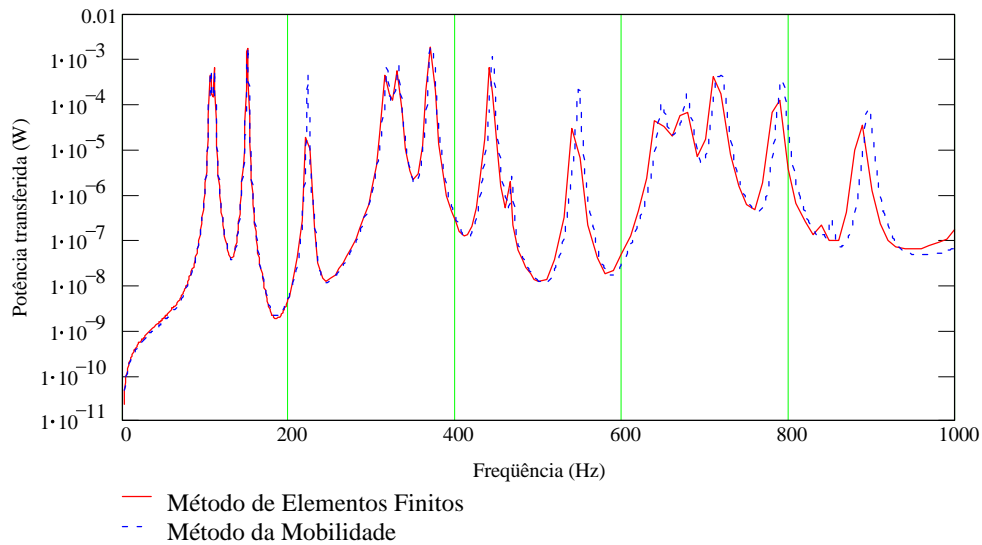


Figura 8 - Potência transferida com uma viga quadrada na união; altura da viga = 0.05m;

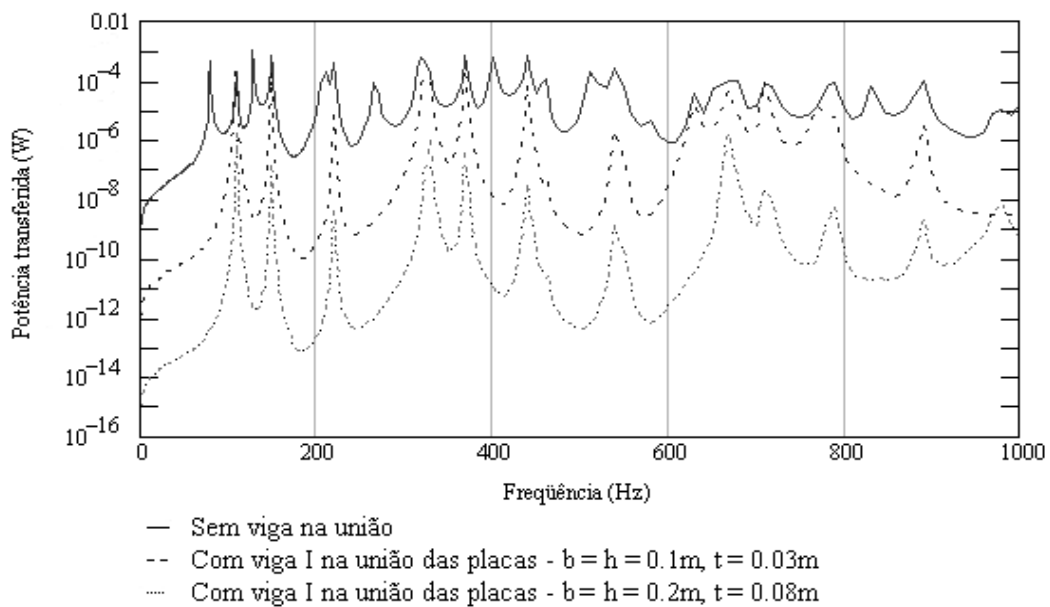


Figura 9 – Potência transferida com uma viga I na união. Sendo que b, h e t representam os parâmetros da seção transversal da viga, altura da alma, largura da aba e espessura da viga, respectivamente

Com a introdução de uma viga entre as placas ocorre um aumento da rigidez do sistema, mudando as ressonâncias do mesmo, e diminuindo as amplitudes da resposta. As Figuras 8 e 9 mostram os espectros de potência transferida entre as placas, com uma viga quadrada e viga I na união das placas, respectivamente, e comparados com os resultados obtidos por MEF. A Figura 9, mostra o espectro, para uma viga I na união, e neste a viga possui uma seção transversal que aumenta consideravelmente a rigidez do sistema, proporcionando um número reduzido de ressonâncias no espectro de potência, diminuindo também, a amplitude da

potência transferida em toda faixa de frequências. Estes resultados mostram claramente a influência de uma viga na resposta do sistema

3. CONCLUSÕES

Esta metodologia permite o cálculo do fluxo de energia entre placas, com ou sem vigas na união entre elas, para uma ampla faixa de frequência. Trata-se de uma alternativa ao método de Elementos Finitos que apresenta limitações quando aplicado a estruturas tipo placas, para uma ampla faixa de frequências.

A metodologia apresentada mostra-se viável para análises do fluxo de energia em estruturas navais e aeroespaciais para faixas que incluem as altas frequências. Pode-se, assim, determinar os parâmetros relacionados à análise Estatística Energética (SEA), quando aplicada a estas estruturas.

REFERÊNCIAS

- Bonifácio, P. , 1998, Análise do Fluxo de Energia Vibratória entre Placas Retangulares Simplesmente Apoiadas pelo Método da Mobilidade, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC.
- Cuschieri, J. M., 1990, Structural power Flow analysis using a mobility approach of an L-shaped plate, J. Acoust. Soc. Am., Vol 87, No. 3, pg 1159.
- Cuschieri, J. M., 1996, In-Plane and out-of-plane waves power transmission through an L-plate junction using the mobility power flow approach, J. Acoust. Soc. Am, Vol 100, Pt. 1, pg 857.
- Cremer, L., Heckl, M. and Ungar, E. E., 1973, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin.
- Gorman, D. J., 1976, Free Vibration Analysis of Plates by The Method of Superposition, Journal of Sound and Vibration, Vol. 49(4), 453 – 467.
- Graff, K. F., 1975, Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications, Inc., New York.
- Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, Ohio State University, Columbus, Ohio, Nasa SP – 160.
- Meirovitch, L., 1964, Analytical Methods in Vibrations, Fred Landis.
- Timoshenko, S. P. & Goodier, S. N. , 1980, Teoria da Elasticidade, Guanabara Dois, Rio de Janeiro RJ.

VIBRATORY ENERGY FLOW BETWEEN TWO PLATES WITH A BEAM AT THE JOINT BY MOBILITY METHODS

Abstract. This work describes an analysis by the mobility approach of the vibratory energy flow between two plates with a beam at the joint. Results for moments, angular displacements and power flow distribution through the joint are analyzed. Comparison with results obtained by the Finite Elements Method showed good agreement.

Key-words: Mobility , Vibration, Plate, Power, Flow.