



UM MÉTODO HEURÍSTICO DE OTIMIZAR A FORMA DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Antonio Pedro Clapis

Universidade Federal de Uberlândia, Departamento de Engenharia Mecânica

Campus Santa Monica, Caixa Postal 593

38400 089 Uberlândia, MG, Brasil, email: apclapis@mecanica.ufu.br

Fernando Iguti

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica

Departamento de Mecânica Computacional

Campina, SP, Brasil

Resumo. *Pesquisadores tem procurado desenvolver métodos matemáticos e ou numéricos, na busca de se otimizar a configuração geométrica de elementos de uma dada estrutura. Como a análise estrutural é uma parte integrante do processo de otimização de forma, o progresso da otimização estrutural muitas vezes depende fundamentalmente do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos. Partindo-se então do pressuposto que a discretização do modelo geometricamente e fisicamente tem sentido, pode-se implementar um algoritmo iterativo de busca da forma ótima de um elemento estrutural utilizando-se um principio heurístico de desenvolvimento. Extrapola-se um método de homogeneização do erro de discretização por elementos finitos no domínio, para a homogeneização da densidade de energia de deformação por distorção (von Mises) dos elementos, onde o critério de convergência é a máxima densidade de energia de distorção. Um código numérico em linguagem Fortran F32 é implementado, o qual tem como principal característica a utilização de dois modelos estruturais com graus de liberdade bem distintos (modelo físico e modelo geométrico). No modelo geométrico efetua-se a relocação dos nós da discretização por elementos finitos, tendo como objetivo a melhor homogeneização possível da densidade de energia de deformação por distorção. A avaliação da potencialidade do método é feita através da otimização de algumas estruturas citadas na literatura. Com os resultados obtidos verifica-se a eficiência e a razão de convergência do método.*

Palavras-chave: *Método r, otimização de forma, elementos finitos, relocação nodal*

1. INTRODUÇÃO

O projeto em engenharia é um processo iterativo no qual o mesmo é continuamente modificado através da busca de um grupo de critérios implementados geralmente pelos engenheiros. Uma maneira de se fazer isto tradicionalmente é o chamado de método de

tentativa e erro, no qual o projetista usa sua experiência e intuição para conduzir as etapas de um dado projeto. A vantagem deste é que se tem a cada passo o domínio sobre a qualidade do projeto. Para o caso de problemas complexos, esta facilidade de alternativas mudanças torna-se mais difícil e, portanto neste caso, existe a necessidade de uma nova ferramenta para se orientar em uma dada modificação.

Vanderplaats (1982) afirma que a invenção básica ou o conceito do desenvolvimento é um processo criativo mas que é difícil para formalizar ou quantificar. Entretanto, continua o autor, o processo de desenvolvimento do projeto sobre o produto útil é o que se pode definir como uma otimização.

Para um projeto específico pode existir várias soluções, as quais satisfazem algumas condições impostas. No entanto a proposta do método de otimização é: em vez de se produzir simplesmente um projeto viável, determinar um ótimo entre todas as soluções possíveis. Logo surge então uma definição para um projeto de otimização: usando técnicas matemáticas determinar um projeto ótimo, o qual satisfaz um grupo de especificações definido pelo projetista.

Os problemas de otimização estrutural podem ser agrupados em três categorias: otimização dimensional, otimização topológica e otimização de forma. A dimensional determina valores para as variáveis de projeto tais como, a espessura, a área da seção transversal e o momento de inércia do componente estrutural. Durante esta otimização a forma básica permanece inalterada. A topológica, de modo grosseiro, pode-se afirmar que leva em conta a questão onde deve ou não deve existir material em determinado local. Nishiwaki (1998) utiliza este tipo de ferramenta para obter uma estrutura ótima considerando a flexibilidade da mesma. A metodologia é baseada no conceito de energia, comum para a formulação da flexibilidade e do método de homogeneização.

Uma importante classe de problemas na otimização estrutural é a otimização de forma, o qual se baseia na seleção de parâmetros geométricos da estrutura. Estes parâmetros geométricos os quais podem modificar-se durante os passos do projeto, são chamados de variáveis de projeto ou variáveis de forma; os quais controlam a forma dos contornos internos e externos dos modelos. Dois termos são freqüentemente usados em otimização: a função custo ou objetivo e as funções de restrições.

A função objetivo pode ser por exemplo o peso, a mínima concentração de tensão, a mínima energia de deformação, etc. As restrições são definidas por todas as especificações que o projeto deve satisfazer. Como exemplo, as tensões em uma dada estrutura não devem exceder a tensão de escoamento.

Visto que a forma das estruturas está continuamente mudando no processo de sua otimização, deve-se ter as seguintes preocupações nas mudanças do contorno: como manter uma adequada malha de elementos finitos, como aumentar a precisão na análise de sensibilidade, como impor restrições corretas e como utilizar métodos de otimização adequados.

Logo existe um grande interesse nos desenvolvimentos de projetos em engenharia, principalmente Mecânica e Aeroespacial, na resolução do problema de otimização em que a forma da fronteira do domínio é também uma incógnita. Beneficiando-se das técnicas e do desenvolvimento que se tem verificado na programação matemática, nos métodos de representação gráfica e modelagem geométrica e nos programas de elementos finitos, muitos pesquisadores tem abordado o tema em questão.

O problema de otimização de forma de estruturas linearmente elásticas, utilizando o método dos elementos finitos (FEM), está intimamente ligado a uma aplicação típica de métodos de malhas adaptativas. Esta interligação deve ocorrer principalmente em pontos de concentrações de tensões, onde o uso de uma malha uniforme geralmente ocasiona uma forma ótima que fisicamente não tem sentido Kikuchi (1987).

Utilizando-se do processo de tentativa e erro (método heurístico), o qual tem como característica não ser totalmente matemático, propõe-se um novo método de otimização da forma de componentes estruturais baseado na realocação dos nós da discretização via elementos finitos. O critério para realocar os nós é baseado na homogeneização da densidade de energia de deformação por distorção.

Como os elementos triangulares têm um papel importante nos métodos adaptativos pois permitem uma interpolação polinomial completa e, portanto, oferecem certas vantagens sobre os elementos quadrilaterais os quais empregam polinomiais com termos parasíticos, Serpa (1991) e Zienkiewicz (1971); uma eficiente formulação do elemento é particularmente importante em problemas onde muitas malhas são geradas na busca da solução de um problema específico de estado plano de tensões.

2. OTIMIZAÇÃO DE FORMA

2.1 Critério da Densidade da Energia de Deformação por Distorção

De acordo com o desenvolvimento encontrado em Chen (1982), pode-se expressar a tensão octaédrica em termos das tensões normais da seguinte maneira:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1)$$

Para o estado plano de tensões, Fig. 1, onde $\sigma_z = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, a Eq. 1 fica

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)} \quad (2)$$

O critério da máxima densidade de energia de distorção, equivalente ao critério de von Mises, estabelece que a densidade de energia de deformação distorcional, no ponto mais crítico de uma peça, não deve exceder a densidade de energia de deformação distorcional no limite elástico, no ensaio de tração (ou compressão). A densidade de energia de deformação total U_0 pode ser dividida em duas partes: uma que causa a mudança volumétrica U_V e a outra que causa a distorção U_D , ver Boresi (1992). Em termos das tensões principais infinitesimais a densidade de energia de deformação pode ser escrita como:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (3)$$

Com manipulações matemáticas apropriadas a Eq. (3) nos fornece

$$U_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \quad (4)$$

onde $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ é o módulo volumétrico e $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de cisalhamento. O primeiro membro da Eq. (4), corresponde a densidade de energia de deformação associada a mudança pura de volume. O segundo termo é a densidade de energia de distorção:

$$U_D = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12 G} \quad (5)$$

A densidade de energia de deformação por distorção pode ser escrita como,

$$U_D = \frac{3(1+\nu)}{2 E} \tau_{oct}^2 \quad , \quad (6)$$

onde para a máxima energia de distorção no estado uniaxial de tensão, Fig 1, tem-se:

$$U_{D_{max}} = \frac{\sigma_{yp}^2}{6G} \quad \text{ou} \quad U_{D_{max}} = \frac{\tau_{yp}^2}{2G} \quad (7)$$

onde

σ_{yp} = tensão de escoamento no teste uniaxial

τ_{yp} = tensão de escoamento no teste de torção

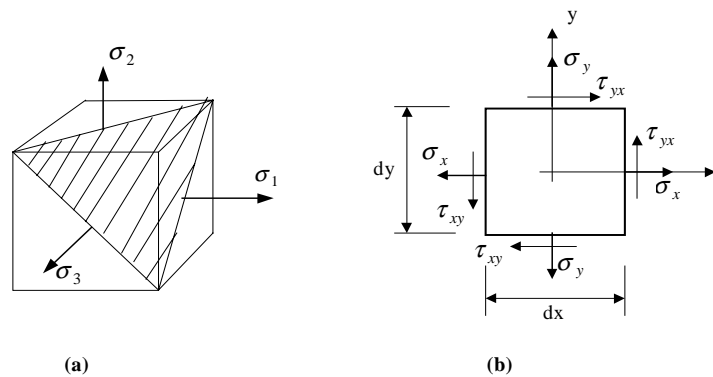


Figura 1 - Elementos representando o estado de tensão de um ponto: (a) elemento original com um dos planos octaédricos, (b) estado plano de tensões

2.2 Algoritmo Proposto

Baseando-se no significado da palavra heurístico, conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas, ou seja um método intuitivo é proposto um método de otimização de forma com base na homogeneização da densidade de energia de distorção dos elementos finitos.

Clapis (1999) apresenta o desenvolvimento do vetor equivalente de erro de discretização de um modelo de elementos finitos, considerando-se que o erro é uma pressão negativa agindo no elemento triangular linear. No caso os nós são deslocados com o objetivo de se otimizar a malha de discretização.

De maneira análoga considera-se a densidade de energia de distorção como uma pressão hidrostática agindo nos lados do triângulo, no sentido de diminuir-se a área do mesmo. Assim é de se esperar que os elementos com menor energia migrem para as áreas onde as densidades de energia são maiores. O critério de otimalidade é o da máxima densidade de energia de deformação por distorção pré fixada pelo projetista.

Considere-se U_D^e como uma pressão agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura. O vetor das forças nodais equivalentes, $\{D\}_e$, para um elemento triangular linear é dado por,

$$\{D\}_e = U_D^e \begin{Bmatrix} Y_{32} \\ -X_{32} \\ -Y_{31} \\ X_{31} \\ Y_{21} \\ -X_{21} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Da superposição dos vetores $\{D\}_e$ para todos os elementos obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global, $\{D\}_G$. A direção $\{d\}_0$ do movimento dos nós pode ser obtido de,

$$[K]_0 \{d\}_0 = \{D\}_G \quad (9)$$

onde $[K]_0$ é uma matriz de “rigidez” escalonada obtida do modelo geométrico discretizado.

Portanto, $\{d\}_0$, passa a ser uma “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade de energia de distorção,

$$\underset{\alpha}{\text{MINIMIZAR}} \left\| \{D(\{x\} + \alpha\{d\}_0)\} \right\| \quad (10)$$

Como com a mudança da forma da estrutura, a distribuição da densidade de energia de distorção também se altera, o processo de busca é realizado iterativamente com a análise do modelo físico discretizado.

Logo o algoritmo proposto terá os seguintes passos:

- (1) implementação do modelo físico,
- (2) resolução do modelo físico,
- (3) implementação do modelo geométrico (função das variáveis da forma),
- (4) otimização da forma,
- (5) repete-se de (2) a (4) até a convergência

3. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

3.1 Placa tracionada

A Fig. 2 mostra, devido a sua simetria, somente um quarto do modelo físico de uma placa de espessura 1 mm submetida à tração de 125 N/mm², com módulo de elasticidade $E=2,1 \times 10^5$ N/mm² e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. O domínio foi discretizado com 348 elementos triangulares lineares e 201 nós. O deslocamento inicial na extremidade da placa obtido pelo modelo proposto é de 0.0476 mm, sendo o mesmo obtido analiticamente pela expressão:

$$u_x = \frac{PL}{EA}, \quad (11)$$

onde P é a carga aplicada total (5000 N), L é o comprimento da viga (80 mm) e A é a área da seção transversal (40 mm²).

Utilizou-se como critério de parada a máxima densidade de energia de deformação por distorção do elemento a qual, depende somente das características do material e, no caso fixado em 0,330.

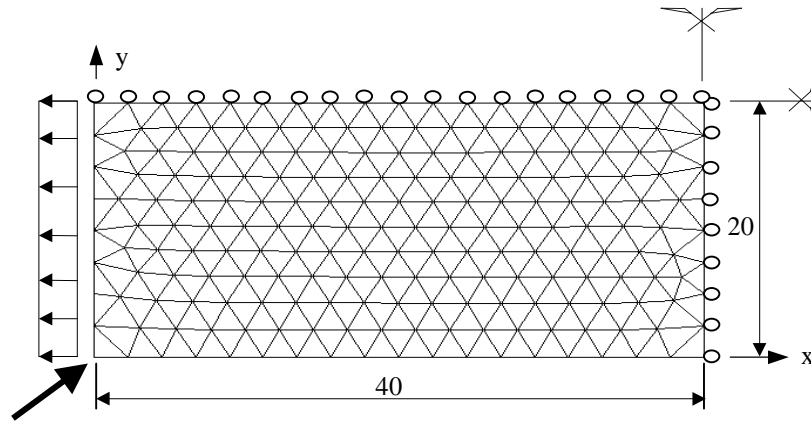


Figura 2 - Malha e condições de contorno do modelo físico de um quarto da placa tracionada

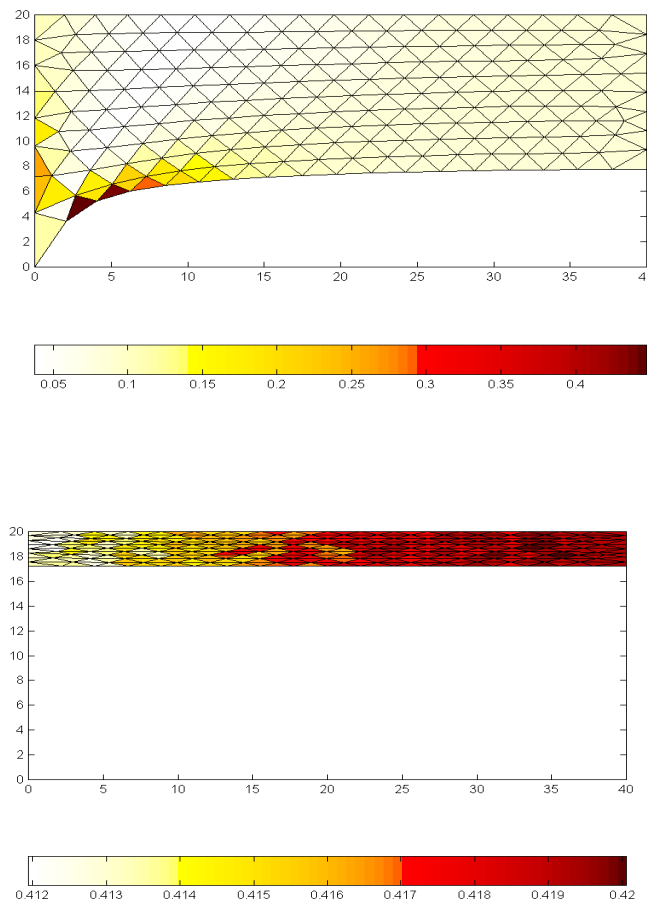


Figura 3 - Formas otimizadas da placa tracionada com duas condições geométricas distintas

A Fig. 3 apresenta as formas ótimas de um quarto do modelo da estrutura para dois casos diferentes de restrições, quanto as variáveis de forma nos modelos geométricos. A diferença está somente em liberar ou não o nó do canto inferior esquerdo, destacado na Fig.2, fazendo com que as tensões variem ao longo do comprimento quando o mesmo está travado e, as tensões permaneçam constantes quando o citado nó esteja livre para realocar-se.

De acordo com os resultados observa-se que o modelo proposto se comportou muito bem pois a forma otimizada, de acordo com os critérios estabelecidos, convergiu para uma geometria que fisicamente era de se esperar.

3.2 Placa quadrada com furo

Placa quadrada com um furo quadrado no centro, submetida a um carregamento distribuído de tração nas direções x e y, com magnitudes iguais a 30 N/mm^2 , conforme mostra a Fig. 4. Devido a simetria do problema utilizou-se apenas um quarto da placa, com uma discretização de 84 elementos triangulares lineares sob análise no estado plano de tensões. Outros dados utilizados: $E=2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0,3$ e $t=1,0 \text{ mm}$. Neste caso a malha foi gerada de modo condizente com o fluxo de tensões a fim de se fazer um cheque do comportamento da adaptividade na região onde se queira otimizar a forma.

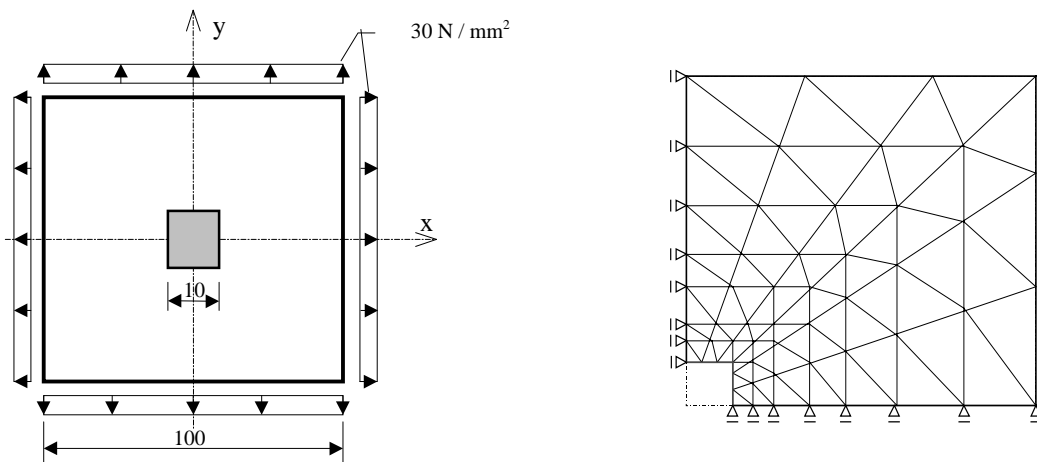


Figura 4 - Parâmetros geométricos e físicos da placa e modelo físico discretizado

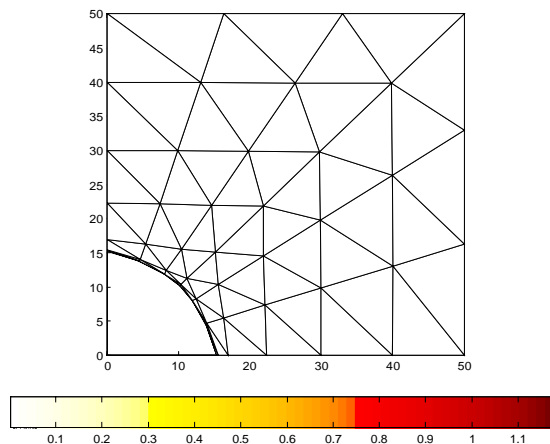


Figura 5 - Forma otimizada na região do furo

Na montagem do modelo geométrico, no contorno, todos os nós são livres para moverem-se em pelo menos uma direção, exceto os nós do contorno do furo, os quais são livres nas direções x e y . Estas novas condições de contorno são impostas com o objetivo de se otimizar a forma na região da concentração de tensões. Sabe-se que a forma ótima para o carregamento em questão, considerando placa infinita, é circular, enquanto se as cargas forem diferentes nas direções x e y a nova forma passa a ser uma elipse, Zhao (1990).

Observa-se, na Fig. 5, que realmente após 50 iterações a forma do furo quadrado passa para aproximadamente um círculo, convergindo para a parada devido a distorção dos elementos na região do furo.

3.3 Viga em balanço

A Fig. 6(a) mostra as dimensões e as condições de carregamento de uma viga engastada com um momento fletor M , aplicado à extremidade livre da barra com o valor de 300 KN mm. A mesma foi analisada sob o estado plano de tensões com o domínio discretizado em 340 elementos triangulares lineares, Fig. 6(b). Foram considerados dois tipos de modelos geométricos liberando ou não liberando as variáveis de forma na extremidade fixa, conforme.

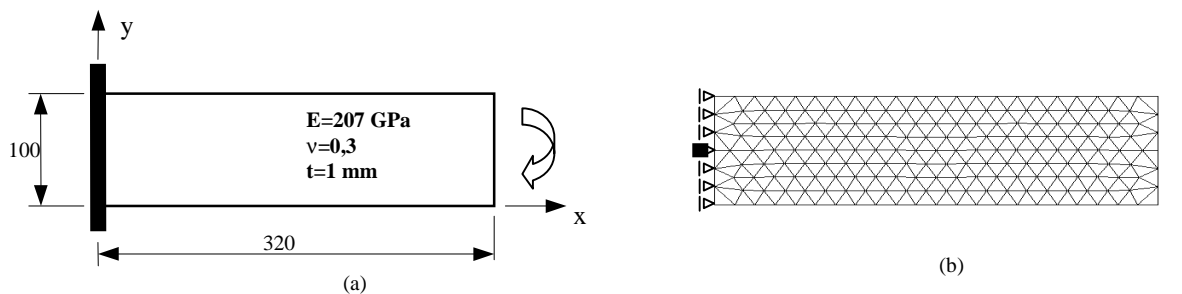


Figura 6 – (a) Viga em balanço com momento na extremidade, (b) Modelo físico discretizado.

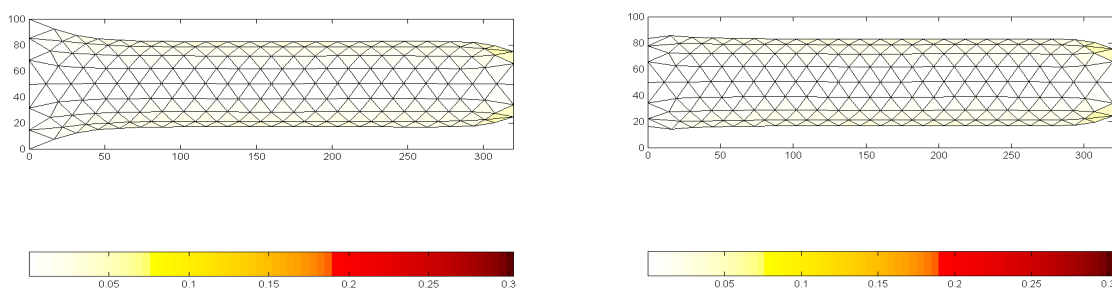


Figura 7 - Duas formas otimizadas da viga em balanço

Após os dois processamentos, observou-se que o critério de parada sendo a máxima densidade de energia de deformação por distorção dos elementos, leva-nos as duas forma otimizadas apresentadas na Fig. 7. Como o momento aplicado é constante ao longo do comprimento da viga, é de se esperar que a forma ótima seja uma seção transversal constante

observando-se que isto realmente ocorre para o modelo proposto.

Ding (1987), fazendo uso de uma comparação entre as otimizações de forma e dimensional avaliou um exemplo bastante semelhante, onde o mesmo otimizou a forma fixando regiões da estrutura bidimensional que deverão possuir espessuras otimizadas.

4. CONCLUSÕES

Como contribuição principal propôs-se um método de relocação de nós usado para otimização de malhas, baseado no critério de homogeneização de erro de discretização, para também otimizar a forma do componente estrutural sendo que, agora, o método adaptativo se baseia na homogeneização da densidade de energia de distorção entre os elementos.

A otimização de forma está interligada ao método adaptativo de otimização de malha, ao ponto de se concluir que de nada adianta aumentar a discretização das malhas de elementos finitos, sem um critério de otimalidade das mesmas, como por exemplo, seguir o fluxo de tensões caso este seja mais ou menos conhecido.

REFERÊNCIAS

Boresi A. P., Schmidt R. J., Sidebottom O. M., “Advanced Mechanics of Materials”, fifth edition, John Wiley & Sons, 1992.

Clapis A. P., “Um método heurístico de otimização de forma de componentes estruturais no estado plano de elasticidade linear”, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1999.

Ding Y., “Shape optimization of two-dimensional elastic structures with optimal thicknesses for fixed parts”, Computers & Structures, vol. 27, No. 6, pp. 729-743, 1987.

Kikuchi N. and Torigaki T., “Adaptative finite element methods in Computer Aided Engineering”, 9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Florianópolis, SC, 1987.

Nishiwaki S., Frecker M. I., Min S., Kikuchi N., “Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method”, Int. J. Numer. Meth. Engng., 42, 535-559 (1998).

Serpa L. A., “Otimização de malhas de elementos finitos pelo método da relocação dos nós na elasticidade linear”, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1991.

Vanderplaats G. N., “Structural optimization – Past and Future”, AIAA journal, vol 20, nº 7, July, 1982.

Wai-Fah Chen, A. F. Saleeb, “Constitutive Equations for Engineering Materials”, John Wiley & Sons, vol. 1: Elasticity and Modeling, 1982.

Zhao Z., “Shape design sensitivity analysis and optimization using the boundary element method”, Thesis submitted for the Degree of the Doctor of Philosophy of the Council for National Academic Awards, Computacional Mechanics Institute, Wessex Institute of Technology, Southampton, september, 1990.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. and Too J. M., “Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells”, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 275-290, 1971.

Abstract. *Researchers have sought to develop mathematical methods and/or numerical methods to optimize the geometric configuration of a structure. Structural analysis is part of the process of shape optimization and in our approach its depends on the development of an adequate finite element model. Assuming that the geometrical and physical discretization of the model is established, it is possible to implement an interactive algorithm to seek the optimal shape of a structural component using a heuristic principle. A balancing method to the error of each element in the plane stress state is extrapolated. This method is used to balance the energy of distortion deformation function (von Mises) of each element and the criterion to*

stop the extrapolation is the maximum distortion energy function in the uniaxial tension test. A numerical code using Fortran F32 language is implemented. The main characteristic of this code is the execution of two distinct structural modules (physical and geometric model). In the geometric model the nodes are reallocated considering the homogenization the distortion deformation energy density per element. The potentiality of the proposed method is evaluated through some examples from the literature. With the results the efficiency and the convergence of the method are checked.