



## ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL ADAPTATIVA DE COMPONENTES MECÂNICOS

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior, M. Sc.**

Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET/PR), Av. Sete de Setembro nº 3165, CEP: 80230-901, Curitiba, Paraná, Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea (NuPES), e-mail: claudio@nupes.cefetpr.br

**Edison da Rosa, Dr. Eng.**

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Campus Universitário, Trindade, Caixa Postal 476, CEP: 88010-970, Florianópolis, Santa Catarina, Grupo de Análise de Tensões (GRANTE), e-mail: darosa@emc.ufsc.br

***Resumo.** O trabalho proposto trata da análise de confiabilidade estrutural de componentes mecânicos. Na análise consideram-se as incertezas associadas ao sistema físico, atribuindo às variáveis de projeto modelos probabilísticos. Desta forma quantifica-se a probabilidade de falha do componente em análise, obtendo-se suas configurações críticas. A escolha do critério de falha define a superfície de estado limite separando os campos de falha e segurança. Para definição da função de falha nas aplicações propostas, foi desenvolvido um código computacional para análise de confiabilidade estrutural, um interpretador simbólico, para leitura da função de falha. Na determinação da probabilidade de falha emprega-se o método dos momentos, com aproximação de primeira ordem aliado às técnicas de superfície de resposta. As implementações citadas permitiram a realização de uma análise de confiabilidade adaptativa pela utilização das informações geradas nas iterações anteriores, reduzindo o esforço computacional para obtenção da solução.*

***Palavras Chaves:** Método dos momentos, Superfície de resposta, Confiabilidade adaptativa*

### 1. INTRODUÇÃO

Na tarefa de projeto existem incertezas intrínsecas nos modelos de simulação, nas propriedades dos materiais empregados e na solicitação. As dispersões nestas variáveis podem ser tratadas para representar realisticamente a resposta do sistema e a variabilidade de natureza aleatória. Na metodologia clássica de projeto não faz parte dos procedimentos convencionais a avaliação rigorosa das incertezas pertinentes às variáveis de projeto.

O cerne da confiabilidade estrutural apoia-se no enfoque probabilístico dado à atividade de análise de projeto. A performance da estrutura é avaliada por um parâmetro, definido em geral pela margem de segurança, que dependerá, na maioria dos casos, implicitamente das variáveis associadas às características do fenômeno físico.

As principais questões da teoria de confiabilidade estrutural, estão na seleção do modo de falha pertinente, na identificação das variáveis físicas relevantes, na escolha do comportamento probabilístico adequado às variáveis e determinação da probabilidade de falha. Em virtude da análise de confiabilidade estrutural ser uma ferramenta relativamente nova e pouco difundida na atividade de análise de projeto, percebe-se uma carência de informações probabilísticas com relação à descrição do comportamento das dispersões

envolvidas. Neste trabalho assume-se que o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é representado pela funções densidade de probabilidade normal.

O objetivo desse trabalho é a determinação da confiabilidade em termos da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind (Hohenbichler & Rackwitz, 1981) para componentes mecânicos avaliados segundo um modo de falha. Foi necessário o desenvolvimento de uma formulação para tratar o problema de confiabilidade estrutural, utilizando o método dos momentos (Shinozuka, 1983), com aproximações de primeira ordem da superfície de estado limite e da probabilidade de falha. O tratamento probabilístico do vetor de projeto (Der Kiureghian & Liu, 1986) e (Ditlevsen, 1981) baseou-se nas informações obtidas pelos momentos de primeira e segunda ordem das variáveis de projeto. No estabelecimento da solução empregaram-se algoritmos de busca (Der Kiureghian & Liu, 1991) onde utilizou-se uma regra para o ajuste automático do tamanho do passo. As técnicas para aproximação da superfície de estado limite foram utilizadas a partir das informações geradas no processo de estabelecimento da solução, com a finalidade de se realizar uma análise de confiabilidade adaptativa (Madsen, 1988). Um código computacional foi desenvolvido, **CRA – Components Reliability Analisys**, onde foram implementados os métodos e técnicas mencionadas para a solução dos problemas propostos, possibilitando avaliar a formulação e a metodologia empregada.

Pretende-se difundir a análise de confiabilidade estrutural, mostrando as suas aplicações e potencialidades, tornando a sua prática um procedimento na análise de projetos. Citam-se os desenvolvimentos realizados em elementos finitos estocásticos (Kleiber & Hien, 1992), no qual está incorporado, na sua formulação, o modelamento das incertezas como campos randômicos.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS MOMENTOS

O problema de confiabilidade estrutural resume-se em minimizar a distância entre o ponto de projeto, sobre a superfície de estado limite e a origem do espaço normal padrão. O ponto de projeto é a configuração que o vetor de projeto assume, em termos de suas componentes, no qual está associada a maior probabilidade de falha. O estabelecimento do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind pode ser formulado como um problema de otimização, cuja a função objetivo

$$g(u^*) = 0 \quad (1)$$

sujeito a

$$\min \|\beta_{HL}\| \quad (2)$$

Pela análise dos trabalhos de (Ang & Tang, 1984), (Bjerager, 1990), (Der Kiureghian, Lin & Hwang, 1987), (Enevoldsen, 1994) e (Shinozuka, 1983) pode-se concluir que a abordagem empregada pelo método dos momentos apresenta procedimentos que ao longo da evolução dessa técnica tornaram-se etapas essenciais na sua formulação:

- Transformação das variáveis de projeto.
- Processo de busca do ponto de projeto.
- Determinação da probabilidade de falha.
- Análise de confiabilidade adaptativa.

## 2.1 Transformação das variáveis de projeto

As variáveis de projeto representam as características geométricas do componente, propriedades mecânicas dos materiais utilizados e a intensidade do carregamento, sendo que o comportamento probabilístico desses parâmetros pode ser caracterizado por funções densidade de probabilidade, objetivando melhorar a representação das dispersões inerentes, ao vetor de projeto.

A solução do problema de confiabilidade estrutural é estabelecida num espaço onde o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é caracterizado por uma função densidade de probabilidade normal padrão conjunta. As transformações aplicadas nas variáveis de projeto permitem operar com um vetor randômico de projeto normal e componentes correlacionadas (Der Kiureghian & Liu, 1986) e (Ditlevsen, 1981). A transformação que leva às variáveis do espaço de projeto para o espaço normal padrão é representada da seguinte forma,

$$U = J\{X - \mu_x\} \quad (3)$$

onde  $\{X - \mu_x\}$  é o vetor que representa a translação no espaço normal padrão,  $\mu_x$  é o vetor média equivalente e  $J$  é a matriz jacobiano, que realiza a rotação dos eixos no espaço normal equivalente, sendo definida por

$$J = \Gamma(\Sigma_X)^{-1} \quad (4)$$

sendo  $\Sigma_X$

$$\Sigma_X = [\sigma_{ij}]_{n \times n} \quad (5)$$

e

$$\sigma_{ij} = \sigma_{xi} \delta_{ij} \quad (6)$$

A matriz,  $\Gamma = L^{-1}$  é uma matriz triangular inferior, obtida da decomposição de Choleski da matriz de correlação  $C$ . A transformação aplicada às variáveis de projeto deve ser atualizada a cada iteração, pela modificação dos parâmetros das funções densidade de probabilidade normal equivalente das variáveis de projeto.

## 2.3 Processo de busca do ponto de projeto

A escolha da técnica de otimização dependerá de critérios baseados nas propriedades de convergência local e global, na capacidade de resolver problemas não convexos e da taxa de convergência. Os algoritmos de otimização diferem, basicamente, pelas regras de busca do ponto de projeto e ajuste do tamanho do passo. O algoritmo **HL-RF** (Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler), proposto inicialmente por (Rackwitz & Fiessler, 1978), tem mostrado-se eficiente em relação aos critérios de seleção, além de comportar na sua estrutura informações sobre a função densidade de probabilidade das variáveis de projeto. A seqüência de pontos é estabelecida por,

$$u^{k+1} = \frac{[\nabla g(u^k)u^k - g(u^k)]}{|\nabla g(u^k)|^2} \nabla g(u^k)^T \quad (7)$$

Com a finalidade de aumentar a convergência global do algoritmo se introduziu uma função mérito para monitorar a seqüência de convergência do método, passando a ser conhecido como HL-RFM (Der Kiureghian & Liu, 1991). A função mérito possui mínimo global no ponto de projeto

$$m(u^{k+1}) = \frac{1}{2} \left| u^{k+1} - \frac{\nabla g(u^k) u^k}{|\nabla g(u^k)|^2} \right|^2 + \frac{1}{2} g(u^k)^2 \quad (8)$$

No HL-RFM, a atualização do vetor de projeto, é dada pela seguinte expressão

$$u_f^{k+1} = u^{k+1} + p d^k \quad (9)$$

onde,  $p$  é o parâmetro que determina o tamanho do passo

$$p = \{p \in \mathbb{R}^n; 0 \leq p \leq 1\} \quad (10)$$

sendo  $d^k$  o vetor que determina a direção de pesquisa, definido por

$$d^k = \frac{[\nabla g(u^k) u^k - g(u^k)] \nabla g(u^k)^T - u^k}{|\nabla g(u^k)|^2} \quad (11)$$

a solução é estabelecida a partir das informações geradas por meio das simulações do comportamento da superfície de estado limite e do vetor gradiente.

O tamanho do passo é determinado pelas restrições impostas no seu domínio de existência e do comportamento da função de mérito.

$$p = 1 - \frac{1}{\exp \left( \left| \frac{-g(u^k)}{|\nabla g(u^k)|} \right| \right)} \quad (12)$$

A medida que o resíduo diminui ocorre o aumento da eficiência em relação ao HL-RF. A viabilidade da análise de confiabilidade está associada, diretamente, com a capacidade de convergência do algoritmo. A qualidade dos resultados dependerá da ordem exigida na aproximação da superfície de estado limite e na determinação da probabilidade de falha.

## 2.4 Determinação da probabilidade de falha

Na aproximação de primeira ordem, o comportamento da superfície de estado limite é modelado por hiperplanos, sendo que a probabilidade de falha depende apenas da norma do vetor de projeto no ponto de projeto (Hasofer & Lind, 1974).

$$P_f = \Phi(\beta_{HL}) \quad (13)$$

Essa aproximação fornece resultados satisfatórios quando a superfície de estado limite é topologicamente regular nas vizinhanças do ponto de projeto.

## 2.5 Análise de confiabilidade adaptativa

Quando o comportamento da superfície de estado limite é conhecida em termos das variáveis de projeto o ponto de projeto é determinado com eficiência. Porém na maioria das aplicações de engenharia não é possível estabelecer pelos processos analíticos conhecidos o comportamento estrutural em relação as componentes do vetor de projeto. Como o método de busca do ponto de projeto baseia-se nas informações obtidas pelos gradientes de uma função implícita, serão necessárias algumas simulações da superfície de estado limite, para definição do vetor gradiente, encarecendo o processo solução.

Estabelecido o processo adaptativo, as informações adicionais para a análise proposta são provenientes da superfície de estado limite aproximada. Esse procedimento caracteriza a análise de confiabilidade adaptativa, com o objetivo de ponderar a relação entre o esforço computacional e a qualidade dos resultados obtidos, durante a evolução do processo.

Na análise de confiabilidade adaptativa foram utilizadas as técnicas de superfície de resposta (Lumb & Li, 1985) para modelar os comportamentos da superfície de estado limite e do vetor gradiente. A aproximação da superfície de estado limite e das componentes do vetor gradiente no ponto de projeto são modeladas, respectivamente por

$$\bar{g}(X) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad (14)$$

$$\bar{g}_{,j}(X) = a_0 + b_j X_j + c_j X_j^2 \quad (15)$$

A técnica dos mínimos quadrados (Bucher & Bourgund, 1989) foi utilizada para estabelecer os parâmetros das aproximações propostas. Conforme novos pontos de projeto são determinados, ocorre a atualização do comportamento das aproximações pelo estabelecimento dos parâmetros das Equações (14) e (15). Dessa forma, as soluções obtidas dependerão do desvio observado entre os comportamentos assumido e real da superfície de estado limite e do vetor gradiente.

## 3. RESULTADOS

Com o objetivo de verificar, comprovar e avaliar a eficiência da formulação apresentada, propõe-se a resolução de dois exemplos apresentados em (Maymon, 1993) e (Maymon, 1994), utilizando o código computacional desenvolvido.

### 3.1 Exemplo 1

A viga engastada representada na Figura 1 possui comprimento  $l$ , seção transversal retangular com largura  $b$  e altura  $h$ , é solicitada por uma carga distribuída uniforme  $q$ .

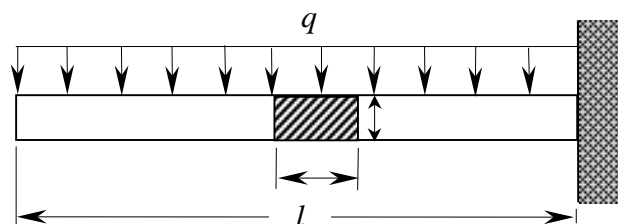


Figura 1 - Viga engastada, com carga distribuída.

Admite-se que a falha ocorre na extremidade engastada da viga. O critério de falha é dado pela seguinte relação mostrada na Equação (16),

$$g(X) = \sigma_{ESC} - \frac{3qL^2}{bh^2} = X_5 - \frac{3X_1 X_2^2}{X_3 X_4^2} \quad (16)$$

Tabela 1. Variáveis randômicas e seus parâmetros estatísticos.

$X_i$	Variável	Média ( $\mu_{Xi}$ )	Desvio Padrão ( $\sigma_{Xi}$ )
$X_1$	$q$ (N/m)	1128,15	32,6673
$X_2$	$L$ (m)	0,6	0,006
$X_3$	$b$ (m)	0,04	0,0012
$X_4$	$h$ (m)	0,01	0,0003
$X_5$	$\sigma_{ESC}$ (MPa)	360	30

A utilização dos métodos convencional e modificado para a busca do ponto de projeto conduziram aos mesmos resultados, conforme mostrado na Tabela 2.

Tabela 2. Resumo dos resultados.

Aplicativo	Método	$\beta_{HL}$	$P_f$
Formulação analítica (Maymon, 1993)	FORM	1,3212923	0,093202
PROBAN(Maymon, 1993)	FORM	1,2796330	0,100337
	SORM	1,2594190	0,103940
	MC (5000)	1,3000000	0,096800
CRA	FORM – HLRF	1,2796300	0,100339
	FORM - HLRFM	1,2796300	0,100339

A medida que aumenta-se a precisão o número de iterações para o algoritmo convencional de busca do ponto de projeto aumenta, enquanto para o modificado diminui, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 2.

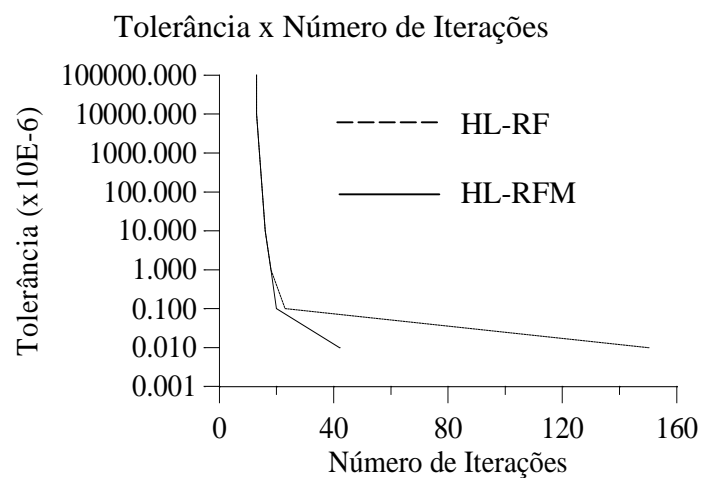


Figura 2 – História da convergência.

Em determinadas regiões do gráfico a eficiência dos algoritmos se alternam um pouco em função do grau de não linearidade da função de estado limite e conseqüentemente a oscilação do tamanho do passo.

### 3.2 Exemplo 2

Uma haste de seção transversal  $X_2$  é solicitada por uma carga axial  $X_1$ . A falha é caracterizada quando a tensão axial atuante é maior que a tensão de escoamento  $X_3$ .

$$g(X) = X_3 - \frac{X_1}{X_2} \quad (17)$$

As variáveis de projeto são normais e correlacionadas,  $\mu_X = \{1000 \ 2 \ 600\}$  e  $\sigma_X = \{33 \ 0,1 \ 20\}$  cuja matriz de correlação é dada por,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabela 3. Resultados para o caso n° 2 em termos do ponto de projeto e índice de confiabilidade de Hasofer-Lind.

Tipo de Análise	$X_1$ *(N)	$X_2$ *(m <sup>2</sup> )	$X_3$ *(MPa)	$\beta_{HL}$	$P_f$	$N_I$
Adaptativa (CRA)	1007,33	1,78771	563,515	3,16670	0,0007780	16
Não Adaptativa (CRA)	1008,39	1,79246	562,573	3,16776	0,0007682	10
Referência (Maymon, 1994)	1008,01	1,79354	562,014	3,16804	0,0007674	16

Na análise de confiabilidade realizada para os casos citados utilizou-se o HL-RF. As componentes do gradiente da superfície de estado limite não apresentam o mesmo comportamento para os esquemas adaptativo e não adaptativo, porém a resposta em termos de índice de confiabilidade apresenta resultados satisfatórios, conforme mostrado na Figura 3.

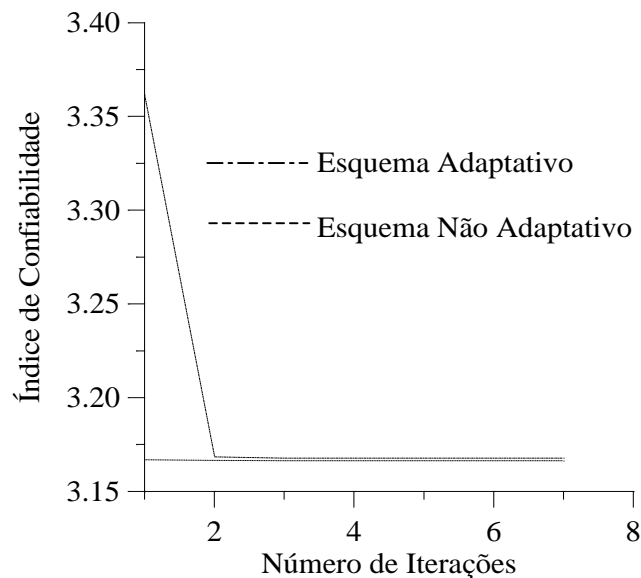


Figura 3 – Comportamento do índice de confiabilidade, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

O número de iterações foi maior para o esquema adaptativo, porém é importante mencionar que apenas algumas avaliações utilizaram as informações geradas pela superfície de estado limite real. Nas iterações posteriores as informações foram geradas por uma superfície de estado limite aproximada, conduzindo às seguintes conclusões:

- A eficiência dessa metodologia está relacionada com o grau de não linearidade do problema.
- Para problemas de primeira ordem mostrou-se eficiente, porém observa-se que as avaliações baseadas nas informações das componentes do vetor gradiente da superfície de estado limite no ponto de projeto, apresentam desvio significativo com relação ao comportamento das informações obtidas da superfície de estado limite real.
- Baseado nos erros observados nas informações de primeira ordem, obtidas da superfície de estado limite aproximada, qualquer informação de ordem superior obtida dessa superfície não será confiável em termos de resultados.

#### **4. CONCLUSÕES**

Nas últimas décadas as linhas de pesquisa que investigam a análise de confiabilidade estrutural receberam um novo impulso, em virtude do desenvolvimento de técnicas novas, suportadas pelo aumento da capacidade computacional. Esforços estão sendo realizados no desenvolvimento de novas formulações para tratar de forma consistente as dificuldades na implementação de ferramentas de análise probabilística nos códigos convencionais de projeto.

O ajuste automático do passo utilizado no estabelecimento do ponto de projeto se mostrou eficiente nos problemas em que foi empregado, pelo uso de informações disponíveis durante o processo solução e influenciou diretamente sobre a taxa de convergência do algoritmo, oferecendo uma ferramenta adicional, na determinação da probabilidade de falha.

A análise de confiabilidade adaptativa mostrou-se uma estratégia atraente pela redução do esforço computacional. A eficiência dependerá da técnica de superfície de resposta utilizada e da família de funções para modelar o comportamento da superfície de estado limite. As aplicações foram sobre uma superfície de estado limite previamente definida, o esquema adaptativo aplicou-se efetivamente, após uma determinada quantidade de informações, para simular o comportamento do problema físico.

#### **REFERÊNCIAS**

- Ang A. H-S. and Tang W. H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design Volume II Decision, Risk And Reliability, John Wiley & Sons, 1984.
- Bjerager P., On Computation Methods For Structural Reliability Analysis, Structural Safety, Vol. 9, pp 79-96, 1990.
- Bucher C. G. and Bourgund U., A Fast And Efficient Response Surface Approach For Structural Reliability Problems, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 115, No. 3, pp. 447-463, March, 1989.
- Der Kiureghian, Lin H. Z. and Hwang S. J., Second - Order Reliability Aproximations, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 113, No. 8, pp 1208-1225, August, 1987.
- Der Kiureghian A. and Liu P. L., Structural Reliability Under Incomplete Probability Information, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. , No. 1, pp 85-103, January, 1986.
- Der Kiureghian A. and Liu P. L., Optimization Algorithms For Structural Reliability, Structural Safety, Vol. 9, pp 161-177, 1991.



- Ditlevsen O., Principle of Normal Tail Approximation, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 107, No EM6, pp 1191-1207, December, 1981.
- Enevoldsen I., Sensitivity Analysis of Reliability - Based Optimal Solution, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 120, No. 1, pp 198 - 205, January, 1994.
- Hasofer A. M. and Lind N. C., Exact and Invariant Second - Moment Code Format, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 100, No EM1, pp 111 -121, February, 1974.
- Hohenbichler M. and Rackwitz R., Non-Normal Dependet Vectors in Structural Safety, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 107, No EM6, pp 1227-1237, December, 1981.
- Kleiber M. and Hien T. D., The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation, John Wiley & Sons, 1992.
- Lumb P. and Li S. K., Reliability Analysis By Numerical Integration And Curve Fitting, Structural Safety, 3 (1985), pp. 29-36.
- Madsen O. H., Omission Sensitivity Factors, Structural Safety, Vol. 5, pp 35-45, 1988.
- Maymon G., Probability of Failure of Structures Without a Closed - Form Failure Function, Computers & Structures, Vol. 49, No. 2, pp. 301-313, 1993.
- Maymon G., Direct Computation of the Design Point of a Stochastic Structure Using a Finite Element Code, Structural Safety, Vol. 14, pp 185-202, 1994.
- Rackwitz R. and Fiessler B., Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences, Computers & Structures, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.
- Shinozuka M., Basic Analysis of Structural Safety, Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol. 109, No 3, pp.700-740, March, 1983.

#### **ANALYSIS OF RELIABILITY STRUCTURAL ADAPTIVE OF MECHANICALS COMPONENTS UTILIZING ANALYSIS OF SENSITIVITY**

**Abstract:** *The proposed work deals with structural reliability of mechanical components. In this analysis the uncertainty associated with the physical system are taken into account, conferring probabilistic modes to the design variables. In this manner the failure probability of the component analyzed is quantified, obtaining its critical configurations. The choice of the failure criterion defines the limit state surface, detaching the fields of failure and safety. To the definition of the failure function in the proposed applications, a symbolic interpreter to read it was implemented in the computational code developed to structural reliability. The moment's method with first order approximation is used in the determination of the failure probability, together to response surface technique. The implementations quoted allowed the realization of an adaptive reliability analysis using the information produced in the precedents iterations, decreasing the computational effort in the obtainment of the solution.*

**Keywords:** *Moments method, Response surface, Adaptative reliability analisys*