COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

CRITÉRIO DE RAYLEIGH APLICADO À SISTEMAS PROPULSIVOS

Carlos E. R. Salles
INPE - Laboratório Associado de Combustão e Propulsão
Rod. Presidente Dutra, Km 40
12630-000 Cachoeira Paulista - SP - Brasil
FEG - Faculdade de Engenharia Mecãnica de Guaratinguetá - SP
João A. de Carvalho Jr
FEG - Faculdade de Engenharia Mecãnica de Guaratinguetá - SP
Rua ,
CEP Guaratinguetá - SP - Brasil
Jean L. Paile
Hispano Suiza do Brasil Ltda
INPE - Banco de Ensaios para Propulsores de Satélites
Rod. Presidente Dutra, Km 40
12630-000 Cachoeira Paulista - SP - Brasil

Resumo. *Instabilidades de combustão em motores a propulsão a jato podem ser evitadas com a ajuda de um trabalho tedioso experimental e teórico. Este trabalho apresenta uma interpretação do critério de Rayleigh aplicado a sistemas propulsivos. A energia adicionada ao campo acústico é a energia liberada pelos processos de combustão. Esta análise propõe uma formulação explicita do critério de Rayleigh para analisar as flutuações de pressão em câmara de combustão.*

Palavras-chave: *Rayleigh, Instabilidades, Combustão*

1. INTRODUÇÃO

Lord Rayleigh (1878, 1945), no seu livro sobre a Teoria do Som,, afirma :

"If heat be periodically communicated to, and abstracted from, a mass of air vibrating in a cylinder bounded by a piston, the effect produced will depend upon the phase of the vibration at which the transfer of heat takes place. If heat be given to the air at the moment of greated condensation, or be taken from it at the moment greatest rarefaction, the vibration is encouraged. On the other hand, if heat be given at the moment of greatest rarefaction, or abstracted at the moment of greatest condensation, the vibration is discouraged."

Isto implica que o processo de combustão deveria exibir uma taxa oscilatória de liberação de calor quando sujeito a variações periódicas de pressão; então, a amplificação das oscilações de pressão devido ao processo de adição de calor ocorrerá se o máximo ou o mínimo da taxa de liberação de calor ocorrer durante as fases de compressão ou rarefação destas oscilações de pressão, respectivamente.

Assim, Rayleigh fornecia as bases físicas para a produção do som pela adição de calor, seu critério, foi, e é, freqüentemente evocado para explicar o aparecimento de vibrações acústicas devido a adição de calor.

Putnan (1964) é um dos pioneiros a formular matematicamente este critério, numa forma linearizada para uma grande variedade de problemas práticos. Zinn (1986) em seu livro sobre combustão pulsante também apresenta uma derivação deste principio. Nas ultimas décadas, problemas sérios têm ocorrido devido a presença de oscilações de pressão em câmaras de combustão de sistemas propulsivos, como pode ser constatado nos trabalhos de Culick (1973, 1987), Harrje e Reardon (1972), Guffin et al. (1996) e muitos outros. Existem muitos exemplos nos quais as vibrações atingem amplitudes que podem comprometer o desempenho de tais sistemas e, em algumas situações levando a completa destruição do sistema propulsivo.

A fonte de energia para tais movimentos é a energia liberada pelos processos de combustão. Este critério pode ser ilustrado, pela descrição de Wood, figura abaixo, onde é mostrado que o efeito da adição de calor instantânea pode ser relacionado a um aumento instantâneo na amplitude da pressão.

	EFEITOS	
Fase entre o calor fornecido e a pressão	**Amplitude**	**Frequência**
1. Em fase	**aumenta**	**nenhum**
2. Fases opostas	**diminui**	**nenhum**
3. Quarto de período antes	**nenhum**	**aumenta**
4. Quardo de período depois	**nenhum**	**diminui**

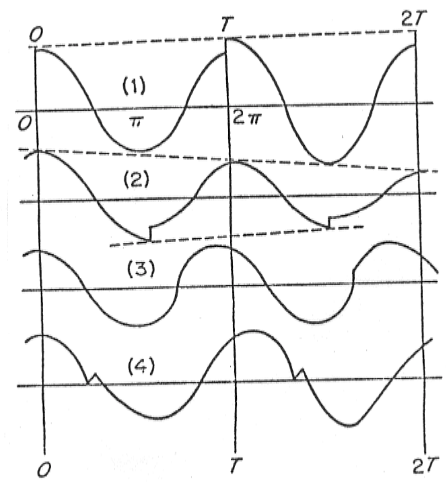

Figura 1 - Efeitos da diferença de fase entre a adição de calor e a pressão

Este critério, pode ser apresentado na forma heurística, como:

$$\int_V \int_0^T \{p(x,t)\,Q(x,t)\,dt\,dV\} > \int_V \int_0^T \sum L_i(x,t)\,dt\,dV \qquad (1)$$

O lado esquerdo representa a energia mecânica total fornecida à oscilação pelos processos de adição de calor durante um ciclo. O lado direito, representa a energia total dissipada pela oscilação durante um período. Portanto, a amplitude da onda aumentará, num dado sistema, quando a desigualdade expressa pela Eq. (1) acima for satisfeita.

A fonte de energia para as oscilações de pressão dentro de uma câmara de combustão de um motor foguete é a energia liberada pelos processos de combustão. Também, escoamentos turbulentos em torno de obstáculos podem formar grandes vórtices e gerar ondas acústicas e, sofrer a influência simultânea dos processos de combustão.

2. EQUAÇÕES.

As equações de conservação com termos fontes podem ser escritas como:

$$\partial\rho / \partial t + u.\nabla\rho = W \quad (2)$$

$$\rho\,\partial u / \partial t + \rho\, u.\nabla u = -\nabla p + F \quad (3)$$

$$\partial p / \partial t + \gamma p\nabla.u = -u.\nabla p + P \quad (4)$$

onde:

$$W = w_S - \rho\nabla.u \quad (5)$$

$$F = F_S - u\, w_S \quad (6)$$

$$P = R / C_V\left(Q_S - u.F_S + w_S u^2 / 2\right) \quad (7)$$

Nestas equações, ρ, p, u são a densidade, pressão e velocidade da fase gás; w_S, F_S, Q_S são as fontes de massa, momentum, e energia da fase gás; , F_S e Q_S geralmente incluem contribuições associadas com a adição de massa. A energia interna do gás foi assumida como $e = C_V T$. Utilizando-se o método das pequenas perturbações nas equações de conservação, pode-se obter a equação da onda para as flutuações de pressão:

$$\nabla^2 p' - \left(1/a^2\right)\partial^2 p' / \partial t^2 = -\left(1/a^2\right)\left(R / C_V\right)\partial Q' / \partial t + g \quad (8)$$

A função g representa todas as influências outras do que a adição de calor, por exemplo, efeitos viscosos; interação do escoamento com o campo acústico; influência de fases condensadas no escoamento dos gases; variações espaciais nas propriedades do escoamento; e variações na velocidade do som.

A Eq. (8), esta sujeita a seguinte condição de contorno não homogênea:

$$\hat{n}.\nabla_{p'} = -f \quad (9)$$

Os modos acústicos ψ_n de uma câmara que tem a mesma forma do combustor, porém, limitada por paredes rígidas podem ser obtidos através da solução do problema de auto valores:

$$\nabla^2\psi_n + k_n^2\psi_n = 0 \quad (10)$$

$$\hat{n}.\nabla\psi_n = 0 \quad (11)$$

onde $k_n = \omega_n / a$ é o número de onda para o n-ésimo modo com freqüência ω_n. Assumindo-se que os modos são ortogonais, teremos:

$$\int_V \psi_m \psi_n dV = \delta_{mn} E_n^{\ 2} \tag{12}$$

onde

$$E_n^{\ 2} = \int_V \psi_n^{\ 2} dV \tag{13}$$

Multiplicando-se a Eq. (8) por ψ_n e a Eq. (10) por p', subtraindo-se o resultado e integrando-se no volume da câmara; depois, utilizando-se do teorema de Green e substituindo-se as condições de contorno (9) e (11), obtemos:

$$\left(d^2/dt^2 + \omega_n^{\ 2}\right)\int_V \psi_n p' dV = -a^2 \left\{-\left(1/a^2\right)\left(R/C_V\right)\int_V \psi_n \partial Q'/\partial t\, dV + \int \psi_n g\, dV + \oiint \psi_n f\, dS\right\} \tag{14}$$

onde dS é o elemento de área da superfície. Fazendo-se uma expansão do campo de pressão em termos dos modos normais com amplitudes em função do tempo, teremos:

$$p' = \bar{p} \sum \eta_i(t) \psi_n(r) \tag{15}$$

Substituindo-se (15) em (14) e utilizando-se a propriedade de ortogonalidade das funções ψ_n, obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias para a amplitude, isto é:

$$d^2\eta_n/dt^2 + \omega_n^{\ 2}\eta_n = F_n^{\ Q} + F_n^{\ e} \tag{16}$$

O primeiro termo do lado direito contem apenas a influência explicita do processo de adição de calor e, o segundo, contém todos os outros efeitos, incluindo-se os processos não lineares e a influência da fronteira:

$$F_n^{\ Q} = \left(R/C_V\right)/\left(\bar{p}E_n^{\ 2}\right)\int_V \psi_n \partial Q'/\partial t\, dV \tag{17}$$

e

$$F_n^{\ e} = -\left(a^2/\bar{p}E_n^{\ 2}\right)\left\{\int_V \psi_n g\, dV + \oiint \psi_n f\, dS\right\} \tag{18}$$

Então, o campo não estacionário na câmara de combustão pode ser representado por uma coleção de osciladores não lineares acoplados. O deslocamento do n-ésimo oscilador representa a amplitude do n-ésimo modo acústico. Em condições gerais a força total pode ser escrita na forma:

$$F_n = F_n^{\ Q} + F_n^{\ e} = -\sum_{i+1}^{\infty}\left[D_{ni}\dot{\eta}_i + E_{ni}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{nij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j + B_{nij}\eta_i\eta_j\right] \tag{19}$$

Os termos diagonais da parte linear fornece a constante de crescimento e o desvio da freqüência:

$$\alpha_n = -(1/2)D_{nn}$$

$$\tag*{(20)$_{a,b}$}$$

$$\theta_n = (1/2)\left[E_{nn} - D_{nn}^{\ 2}\right]/\omega_n \approx (1/2)E_{nn}/\omega_n$$

Esta aproximação é válida para muitas aplicações práticas. Na ausência de acoplamento ($D_{ni} = E_{ni} = 0$ para $i \neq n$) a amplitude do n-ésimo oscilador será:

$$\eta_n(t) - \eta_{n\theta}\, e^{\alpha n} \operatorname{sen}\left[(\omega_n + \theta_n)t + \varphi_n\right] \tag{21}$$

onde φ_n e $\eta_{n\theta}$ são constantes. Dependendo dos processos que são levados em consideração as forças F_n poderão conter termos não lineares em adição aos termos que aparecem na Eq. (19). Assim, pode-se acomodar aproximações para os processos que ocorrem num combustor real. Nesta análise vamos concentrar atenção apenas as influências do processo de adição de calor, então, a Eq. (16) torna-se:

$$d^2\eta_n / dt^2 + \omega_n^{\ 2}\eta_n = F_n^{\ Q} \tag{22}$$

A energia do oscilador é $\varepsilon_n = \left(\dot{\eta}_n^{\ 2} + \omega_n^{\ 2}\eta_n^{\ 2}\right)/2$ e taxa na qual a energia aumenta devido a ação de $F_n^{\ Q}$ é $F_n^{\ Q}\dot{\eta}_n$. Portanto a variação de energia em um período $\tau_n = 2\pi/\omega_n$ é:

$$\Delta\varepsilon_n(t) = \int_t^{t+\tau_n} F_n^{\ Q}\dot{\eta}_n\, dt \tag{23}$$

Substituindo-se a Eq. (17) e integrando-se por partes, obtemos:

$$\Delta\varepsilon_n(t) = (R/C_V)/\left(\bar{p}E_n^{\ 2}\right)\int_V \left\{\left[Q'\dot{\eta}_n\right]_t^{t+\tau_n} - \int_t^{t+\tau_n} \ddot{\eta}_n Q'\, dt\right\}\psi_n\, dV$$

Se o sistema executa um movimento periódico o termo entre colchetes se anula. Na integral tomando-se $\ddot{\eta}_n = -\omega_n^{\ 2}\eta_n$ e, lembrando que $(R/C_V) = \gamma - 1$ e $p_n = p\eta_n(t)\psi_n(r)$ que representa a dependência temporal da pressão para o n-ésimo modo, teremos:

$$\Delta\varepsilon_{n(t)} = (\gamma - 1)\left(\omega_n^{\ 2}/E_n^{\ 2}\right)\int_V dV \int_t^{t+\tau_n} (p_n/\bar{p})(Q'/\bar{p})\, dt \tag{24}$$

Esta Eq. (24) representa explicitamente o critério de Rayleigh e pode ser aplicada a problemas lineares para as quais a liberação de calor Q' pode ser expressa como uma superposição linear de contribuições associadas com cada um dos modos normais. Neste caso $\Delta\varepsilon_n(t)$ é independente da amplitude e depende apenas da freqüência e da configuração do n-ésimo modo. Note que $\Delta\varepsilon_n(t)$ tem dimensões de s^{-2} devido a definição de $\varepsilon_n(t)$ para o oscilador descrito pela Eq. (22). Se $\Delta\varepsilon_n(t) > 0$, então o processo de adição de calor tende a excitar o n-ésimo modo. No caso especial no qual as flutuações são harmônicas e as flutuações na taxa de adição de calor são proporcionais às flutuações de pressão, a menos de um tempo de atraso independente da posição, pode-se demonstrar este critério. Assumindo-se que:

$$Q' = Q_0\psi_n\left(\varepsilon\,\eta_n + \delta\dot{\eta}_n\right) \tag{25}$$

então, se $\delta = 0$, Q' estará inteiramente em fase com a pressão se $\varepsilon > 0$ e, fora de fase se $\varepsilon < 0$. A derivada temporal da Eq. (25) é aproximadamente:

$$\partial Q'/\partial t = Q_0 \psi_n (\varepsilon \dot{\eta}_n + \delta \ddot{\eta}_n) \approx Q_0 \psi_n \left(\varepsilon \dot{\eta}_n - \delta \omega_n{}^2 \eta_n\right) \tag{26}$$

A Eq. (22) para η_n, torna-se:

$$\ddot{\eta}_n - (R/C_V)(Q_0/\overline{p})\varepsilon \dot{\eta}_n + \omega_n{}^2 \left[1 + (R/C_V)(Q_0/\overline{p})\delta\right]\eta_n = 0 \tag{27}$$

Para a qual a solução é dada pela Eq. (21) com:

$$\alpha_n = (1/2)(R/C_v)(Q_0/\overline{p})\varepsilon$$
$$\theta_n = (1/2)(R/C_v)(Q_0/\overline{p})\delta \tag{28}_{a,b}$$

Então, o movimento é linearmente instável se $Q_0 \varepsilon > 0$. Substituindo-se a Eq. (25) na Eq. (24), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_n &= (\gamma - 1)\overline{p} Q_0 \omega_n{}^2 / E_n{}^2 \int \psi_n{}^2 dV \int_t^{t+\tau_n} \eta_n (\varepsilon \eta_n + \delta \dot{\eta}_n) dt \\ &= (\gamma - 1)\overline{p} Q_0 \omega_n{}^2 \left\{ \int_t^{t+\tau_n} \eta_n{}^2 dt + \delta / 2 \left[\eta_n{}^2\right]_t^{t+\tau_n} \right\} \end{aligned} \tag{29}$$

Para pequenos valores de α_n, a primeira integral é aproximadamente $\tau_n / 2$ e, o segundo termo é desprezível, levando à formula:

$$\Delta\varepsilon_n = \pi(\gamma - 1)\overline{p} Q_0 \omega_n \varepsilon \tag{30}$$

Portanto, $\Delta\varepsilon_n$ será positivo se $Q_0 \varepsilon > 0$ requerendo que uma parte da adição de calor esteja em fase com as flutuações de pressão, como ditado pelo critério de Rayleigh. Se o critério for satisfeito, então, pelas equações $(28)_{a,b}$ α_n será positivo e as flutuações no processo de adição de calor tende a fazer com que o sistema seja linearmente instável.

A geração de ondas acústicas pela adição de calor é essencialmente devido a trabalho $p - V$. Os gases quentes se expandem e realizam trabalho durante o processo no meio a sua volta.

3. CONCLUSÕES.

No projeto de sistemas propulsivos devemos ser capazes de prevenir a combustão instável pois, quando elas ocorrem aumenta a transferência de calor para as paredes da câmara podendo causar sérios problemas. Também, um problema menos drástico seria a perda de desempenho do sistema, levando, em muitas situações, ao comprometimento da missão por ele desempenhada. Para que o critério de Rayleigh possa ser aplicado eficientemente a sistemas propulsivos, são necessários, também, trabalhos experimentais visando o conhecimento do campo de pressões dentro da câmara de combustão, da acústica do combustor para que possamos projetar um sistema de injeção apropriado para que a desigualdade que aparece na Eq. (1) não seja cumprida. Atualmente, com o desenvolvimento da área de controle, desenvolve-se sistemas ativos que agem diretamente no campo acústico, visando eliminar estas perturbações de pressão.

4. REFERÊNCIAS

Culick, F. E. C., 1973, The Stability of one-dimensional motions in a Rocket Motor, Combustion Science and Technology, vol. 7, pp. 165-174.

Culick, F. E. C., 1987, A note on Rayleigh´s Criterion, Combustion Science and Technology, vol. 56, pp. 159-166.

Harrje, D. T.& Reardon, F. H, 1972, Liquid Propellant Rocket Combustion Instability, National Aeronautics and Space Administration, NASA SP-194.

Guffin, R. G., Poulin, E. J., Daily, W. J., 1996, Effect of Energy Release on Combustion Instability, Meeting of the Western States Section, The Combustion Institute, Tempe, AZ, marco de 11 a 12.

Putnam, A.ª A., 1964, General consideration of Autonomous Combustion Oscilations, capitulo F, Non-stead Flame propagation, Markstein G. F., editor, The MacMillan Co., N.Y..

Rayleigh, L., 1878, The Explanation of certain Acoustical Phenomena, Royal Institution Proceedings, vol. VIII, pp.,536-542.

Rayleigh, L., 1945, The Theory of Sound, Dover Publication, N. Y..

Zinn, B. T., 1986, Pulsating Combustion, capítulo 2, Advanced Combustion Methods, Weinberg, editor, Academic Press, London.

TITLE: RAYLEIGH´S CRITERION APPLIED TO PROPULSION DEVICES

ABSTRACT: Combustion instability in the combustion chamber of jet propulsion system can be prevented with tedious experimental and theorical approaches. This work presents an interpretation of the Rayleigh criterion applied to propulsion devices. The energy added to the acoustic field is the energy released by combustion processes. This analysis proposes one explicit formulation of Rayleigh´s criterion to analyze the pressure oscillations in combustion chamber.

KEYWORDS: Rayleigh, Instability, Combustion