

## OTIMIZAÇÃO DA FORMA GEOMÉTRICA DO FILME DE ÓLEO DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS DE SAPATAS RETANGULARES

**Paulo F. Silva** (Bolsista Recém-Doutor – FAPEMIG)

**Vilmar A. Schwarz**

**José C. Dias**

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Mecânica

Cx. P. 50 - 37500-000 - Itajubá, MG, Brasil

***Resumo.** O principal objetivo do presente trabalho é otimizar a forma geométrica do filme de óleo de mancais hidrodinâmicos de sapatas retangulares em função de uma capacidade de carga máxima e analisar a influência desta na temperatura efetiva do filme de óleo. Para tal, foram analisadas as seguintes formas geométricas de filme lubrificante: polinomiais de primeiro e segundo grau, exponencial, catenoidal, cicloidal e cicloidal truncada. O efeito de sapatas com inclinação nula na saída também foi analisado, mostrando um aumento significativo na capacidade de carga para o perfil polinomial de primeiro grau. A solução da equação isotérmica de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica foi obtida através de um procedimento iterativo, levando-se em conta os efeitos das temperaturas do óleo de suprimento e de recirculação. Na simulação computacional foi utilizado o método de elementos finitos, usando-se o elemento triangular linear na discretização do domínio de solução.*

***Palavras Chaves:** Mancais de Sapatas, Otimização, Método de elementos finitos.*

### 1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo da lubrificação hidrodinâmica é separar superfícies metálicas em movimento relativo através da interposição de um filme lubrificante, cuja espessura mínima não possibilite o contato entre as superfícies, minimizando-se assim o desgaste das mesmas.

Reynolds (1886) estabeleceu em seu trabalho, os fundamentos físicos e matemáticos básicos da teoria da lubrificação hidrodinâmica. A partir da teoria clássica da lubrificação hidrodinâmica aos dias atuais, uma imensa quantidade de trabalhos foram desenvolvidos, conforme pode ser visto em Pinkus (1987) e Khonsari (1987). No entanto, poucos pesquisadores, tais como Rohde & McAllister (1976) e Bagci & Singh (1983) se preocuparam em analisar a influência da forma geométrica do filme de óleo na performance de mancais hidrodinâmicos, que é o objetivo do presente trabalho. Assim, as seguintes formas geométricas de filme de óleo de um mancal de sapatas retangulares serão analisadas: polinomiais de primeiro e segundo grau, exponencial, catenoidal, cicloidal e cicloidal truncada.

Para tanto foi desenvolvido um programa computacional para simular o comportamento operacional de mancais hidrodinâmicos de sapatas retangulares. A ferramenta matemática utilizada foi o método de elementos finitos, usando-se o elemento triangular linear na

discretização do domínio de solução. Com relação a aplicação do método de elementos finitos à lubrificação hidrodinâmica podem-se citar os trabalhos de Reddi (1969), Booker e Huebner (1972), Allaire (1985) e Silva (1993).

## 2. MODELO FÍSICO

A Fig. 1 apresenta esquematicamente as formas geométricas de filme a serem analisadas, onde  $h_0$  e  $h_1$  são respectivamente a espessura mínima e máxima do filme de óleo lubrificante, enquanto que  $L$  e  $B$  são respectivamente o comprimento e a largura da sapata, sendo  $U$  a velocidade da peça móvel.

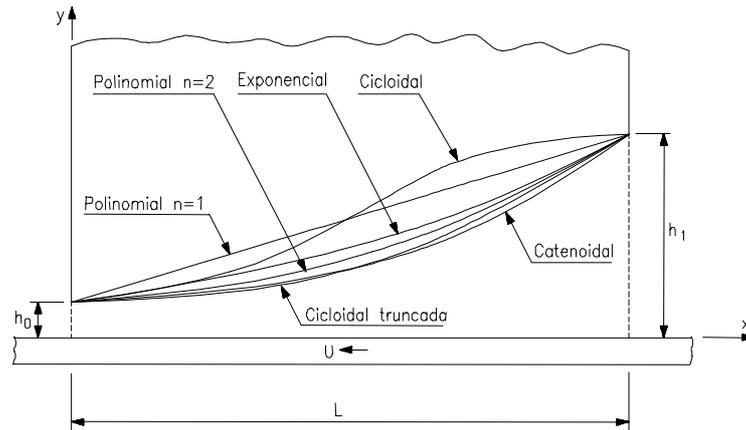


Figura 1 - Formas geométricas do perfil do filme de óleo lubrificante.

Para cada uma das seis formas geométricas de filme de óleo mostradas na Fig. 1, a correspondente equação representativa da espessura,  $h(X)$ , é dada por:

- Polinomial de primeiro grau ( $n=1$ ) e de segundo grau ( $n=2$ );

$$h(X) = h_0 \left[ 1 + k \left( \frac{X}{L} \right)^n \right] \quad , \quad (1)$$

onde  $k = \frac{(h_1 - h_0)}{h_0}$  é a inclinação específica da sapata do mancal.

- Exponencial;

$$h(X) = h_0 e^{mX} \quad , \quad \text{onde, } m = (1/L) \ln(k+1). \quad (2)$$

- Catenoidal;

$$h(X) = h_0 \cosh(sX) \quad , \quad \text{onde, } s = (1/L) \cosh^{-1}(k+1). \quad (3)$$

- Cicloidal;

$$h(X) = h_0 \left[ 1 + k \left( \frac{X}{L} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi X}{L} \right) \right) \right] \quad . \quad (4)$$

- Cicloidal truncada;

$$h(X) = h_0 \left[ 1 + 2k \left( \frac{X}{2L} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi X}{L} \right) \right) \right] \quad (5)$$

É importante observar que a otimização da forma geométrica do filme de óleo será feita somente na direção do comprimento da sapata, ou seja, as formas de filme estudadas são para sapatas do tipo Michell.

Será analisada também a influência de uma região com inclinação nula na saída da sapata, em cada tipo de perfil citado acima, incluindo a determinação do seu comprimento ótimo para uma capacidade de carga máxima. A Fig. 2 apresenta a forma geométrica de uma sapata retangular, mostrando uma região com inclinação nula na saída da sapata,  $L_1$ , e uma região com inclinação diferente de zero,  $L_2$ , para o caso do perfil polinomial de primeiro grau.

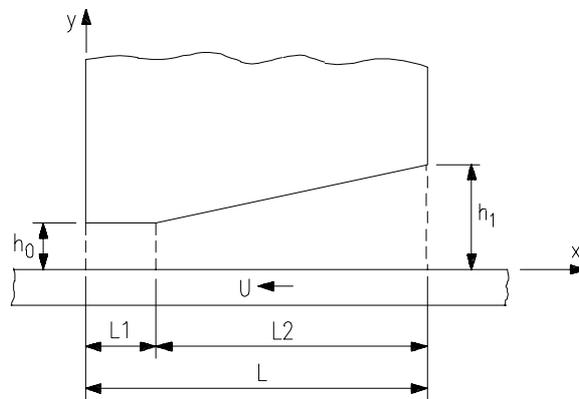


Figura 2 - Perfil de filme de óleo para uma sapata com inclinação nula na saída.

### 3. FORMULAÇÃO DO MODELO TEÓRICO

Conforme o modelo físico apresentado na Fig. 1, a equação isotérmica de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = -6U \frac{\partial h}{\partial X} \quad (6)$$

onde  $h$  é a espessura do filme de óleo,  $\mu$  é a viscosidade do óleo lubrificante e  $P$  é a pressão hidrodinâmica no filme de óleo.

Reescrevendo a Eq. (6) na sua forma conservativa tem-se,

$$\nabla \cdot \left( \frac{h^3}{12\mu} \nabla P \right) - \nabla \cdot \left( h \frac{U}{2} \right) = 0 \quad (7)$$

Para transformar a equação diferencial acima em um sistema de equações algébricas em cada elemento finito, aplicou-se o método de Rayleigh-Ritz. Este método exige que se conheça o princípio variacional que gerou a equação diferencial governante do problema. O procedimento para determinar o princípio variacional,  $I(P)$ , pode ser visto com detalhes em

Silva (1993). A solução da eq. (7) é equivalente à minimização do princípio variacional,  $I(P)$ , o qual é dado por

$$I(P) = \iint_D \left( \frac{h^3}{24\mu} \nabla P - h \frac{U}{2} \right) \nabla P \, dD + \int_S Q P \, dS \quad , \quad (8)$$

onde  $Q$  é a vazão,  $D$  é o domínio a ser estudado e  $S$  é o contorno do domínio, o qual é dividido em  $S_p$  (contorno onde a pressão é especificada) e  $S_q$  (contorno onde a vazão é especificada). Assim, as condições de contorno tomam a seguinte forma geral;

$$P = P(X, Z) \quad \text{em} \quad S_p \quad , \quad (9)$$

$$Q = q \hat{n} = \left( \frac{h^3}{12\mu} \nabla P - h \frac{U}{2} \right) \hat{n} \quad \text{em} \quad S_q \quad . \quad (10)$$

onde  $q$  é a vazão por unidade de comprimento e  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal a  $S$ .

A distribuição de pressão, a espessura do filme de óleo e as velocidades no interior de cada elemento do domínio de solução são calculadas em função dos valores nodais e das funções de interpolação locais,  $N$ , conforme as equações a seguir:

$$P(X, Z) = \sum_{i=1}^r N_i P_i = [N_i] \{P_i\} \quad , \quad (11)$$

$$h(X, Z) = \sum_{i=1}^r N_i h_i = [N_i] \{h_i\} \quad , \quad (12)$$

$$U(X, Z) = \sum_{i=1}^r N_i U_i = [N_i] \{U_i\} \quad , \quad (13)$$

onde,  $r$ , é o número de nós de cada elemento. As simbologias  $[ ]$  e  $\{ \}$  representam respectivamente matrizes linha e coluna.

A Fig. 3 mostra a discretização do domínio de solução, utilizando-se do elemento triangular linear, destacando o uso de um grau de refinamento maior nas regiões onde o gradiente de pressão é mais acentuado.

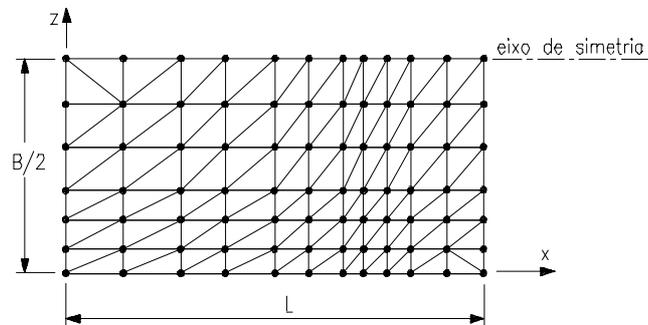


Figura 3 - Discretização do domínio de solução.

Substituindo-se as Eqs. (11), (12) e (13) na Eq. (8) obtém-se:

$$I(P)_{(e)} = \frac{1}{2} [P] [Kp] \{P\} + [P] \{q\} - [P] [KU] \{U\} \quad , \quad (14)$$

onde os coeficientes das matrizes de fluidez de cada elemento  $KP_{ij}^{(e)}$ ,  $KU_{ij}^{(e)}$  e  $q_i^{(e)}$  são dadas respectivamente por:

$$KP_{ij}^{(e)} = \iint_D \frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} \right) dD \quad , \quad (15)$$

$$KU_{ij}^{(e)} = \iint_D h \left( \frac{\partial N_i}{\partial X} N_j \right) dD \quad . \quad (16)$$

$$q_i^{(e)} = \int_{S_q} Q N_i dS \quad . \quad (17)$$

Para minimizar o princípio variacional dado pela Eq. (8), basta minimizar as  $N_e$  integrais  $I(P)_{(e)}$  dadas pela Eq. (14), o que resulta na seguinte equação matricial:

$$[K] \{P\} = \{Q\} \quad , \quad (18)$$

onde  $[K]$  é a matriz de fluidez global,  $\{P\}$  é o vetor de pressões nodais e  $\{Q\}$  é o vetor das vazões globais. O processo de reunião das matrizes de fluidez de cada elemento, para obter as matrizes de fluidez globais, pode ser visto com detalhes em Silva (1993).

Introduzindo-se as condições de contorno de pressão e de fluxo na Eq. (18), resolve-se o sistema de equações resultante obtendo-se assim, as pressões e as vazões em todos os pontos nodais. Solucionada a equação de Reynolds, determinam-se alguns parâmetros resultantes de interesse na presente análise.

### 3.1 Vazão

O valor das vazões, ou seja, dos fluxos globais,  $Q_i$ , em cada nó do contorno do domínio de solução, mostrado na Fig 3, é determinado como o fluxo que entra ou sai através de um elemento de área, o qual corresponde a soma das metades adjacentes ao nó em questão. Assim, a vazão lateral,  $Q_l$ , a vazão de saída,  $Q_s$ , e a vazão total,  $Q_t$ , no mancal são determinadas somando-se as suas respectivas vazões nodais.

### 3.2 Força de Atrito e Perda de Potência

A força de atrito,  $F_a$ , no mancal foi calculada da seguinte forma:

$$F_a = \sum_{e=1}^{N_e} F_{a(e)} \quad , \quad (19)$$

onde  $F_{a(e)}$  é a força de atrito em cada elemento, a qual é dada por

$$F_{a(e)} = \int_s \left( \frac{h}{2} \frac{\partial P}{\partial X} + \mu \frac{U}{h} \right) dS \quad . \quad (20)$$

Utilizando-se as Eqs. (11), (12) e (13), a Eq. (20) toma a seguinte forma:

$$F_{a(e)} = \frac{\{h_i\}\{P_j\}}{2} \int_{S(e)} [N_i] \frac{\partial [N_j]}{\partial X} dS + \mu \frac{\{U_i\}}{\{h_i\}} \int_{S(e)} [N_i] [N_j] dS \quad . \quad (21)$$

A perda de potência por atrito fluido,  $H_f$ , é dada por

$$H_f = F_a U \quad . \quad (22)$$

### 3.3 Elevação de Temperatura

A elevação de temperatura,  $\Delta T$ , foi calculada conforme as considerações propostas por Raimond e Boyd (1958), resultando:

$$\Delta T = \frac{H_f}{\rho C_p Q_t \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Q_l}{Q_t} \right)} \quad . \quad (23)$$

Conforme a discussão feita por S. M. Rohde no trabalho de Bagci & Singh (1983), para que os parâmetros resultantes de uma simulação numérica de mancais hidrodinâmicos sejam representativos é fundamental que os efeitos térmicos não sejam desprezados, pois há uma grande dependência entre a viscosidade do lubrificante e a temperatura. Assim, no presente trabalho foi utilizado um procedimento iterativo, cujo critério de parada é a convergência da temperatura efetiva do filme de óleo. Este método consiste basicamente em adotar uma temperatura de mistura inicial,  $T_{mist}$ , e uma temperatura efetiva inicial,  $T_{ef}$ , e em função desta determinar a viscosidade efetiva,  $\mu_{ef}$ , a qual é calculada através da equação de Walther (ASTM), isto é:

$$\mu_{ef} = -0,6 + 10^{10(K \log T_{ef} + K^2)} \quad . \quad (24)$$

Com base nesta viscosidade efetiva soluciona-se a equação isotérmica de Reynolds e determina-se a elevação de temperatura,  $\Delta T$ , de posse da qual, determina-se a temperatura de recirculação,  $T_{rec}$ , dada por

$$T_{rec} = T_{mist} + \Delta T \quad . \quad (25)$$

De posse da temperatura de recirculação, determina-se a nova temperatura de mistura, a qual é dada por

$$T_{mist} = \frac{Q_{rec} T_{rec} + Q_l T_s}{Q_t} \quad , \quad (26)$$

onde  $Q_{rec}$  é a vazão de recirculação e  $T_s$  é a temperatura do óleo de suprimento.

De posse da nova temperatura de mistura determina-se a nova temperatura efetiva,  $T_{ef}$ , a qual é determinada usando-se a relação clássica de Raimond e Boyd (1958);

$$T_{ef} = T_{mist} + 0,5\Delta T \quad . \quad (27)$$

Este procedimento é repetido várias vezes, até que o mancal entre em regime, ou seja, até a convergência da temperatura efetiva.

### 3.4 Capacidade de Carga

A capacidade de carga,  $W$ , do mancal foi calculada da seguinte forma;

$$W = \sum_{e=1}^{N_e} W_{(e)} \quad , \quad (28)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos do sistema e  $W_{(e)}$  é a capacidade de carga de cada elemento, a qual é dada por

$$W_{(e)} = \int_A [N_i] \{P_i\} dX dZ \quad . \quad (29)$$

## 4. RESULTADOS E COMENTÁRIOS

Os resultados do presente trabalho foram obtidos com base no seguinte exemplo numérico:

- sapata retangular  $B/L=1$ , sendo  $B=L=200$  mm;
- espessura mínima do filme de óleo,  $h_0=0.060$  mm;
- velocidade de deslizamento,  $U=9$  m/s;
- óleo lubrificante, ISO100;
- temperatura de suprimento,  $T_s=35$  °C;
- temperatura efetiva inicial,  $T_{ef_i}=45$  °C;
- densidade do óleo,  $\rho=870$  kg/m<sup>3</sup>;
- calor específico do óleo lubrificante,  $C_p=1925000$  J/kg°C.

Simulou-se computacionalmente o comportamento do mancal especificado acima para várias inclinações específicas,  $k$ , e para cada uma das formas geométricas do filme de óleo, definidas anteriormente. As Figs. 4 e 5 mostram a variação da capacidade de carga em relação a inclinação específica, para as diferentes formas geométricas de filme de óleo.

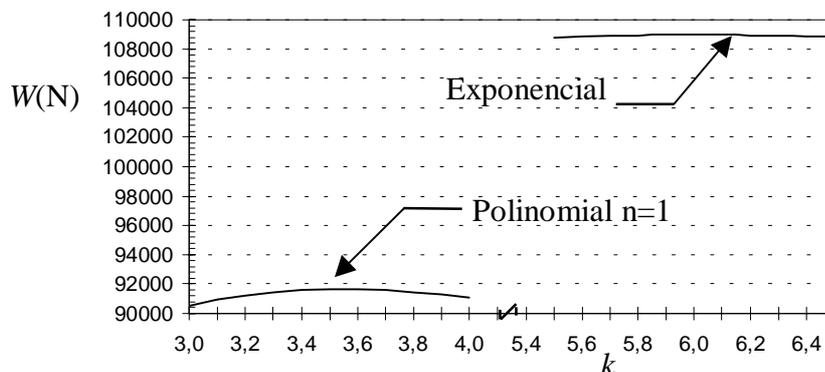


Figura 4 - Variação da capacidade de carga,  $W$ , em relação à inclinação específica,  $k$ .

Pode-se observar na Fig. 4 que o perfil exponencial resulta em uma maior capacidade de carga em relação ao perfil convencional (polinomial  $n=1$ ) e que cada tipo de perfil possui uma inclinação específica ótima. A Fig. 5 apresenta o comportamento de outros tipos de perfis de filme de óleo, os quais conforme pode-se observar proporcionam capacidades de carga superiores aos mostrados na Fig. 4.

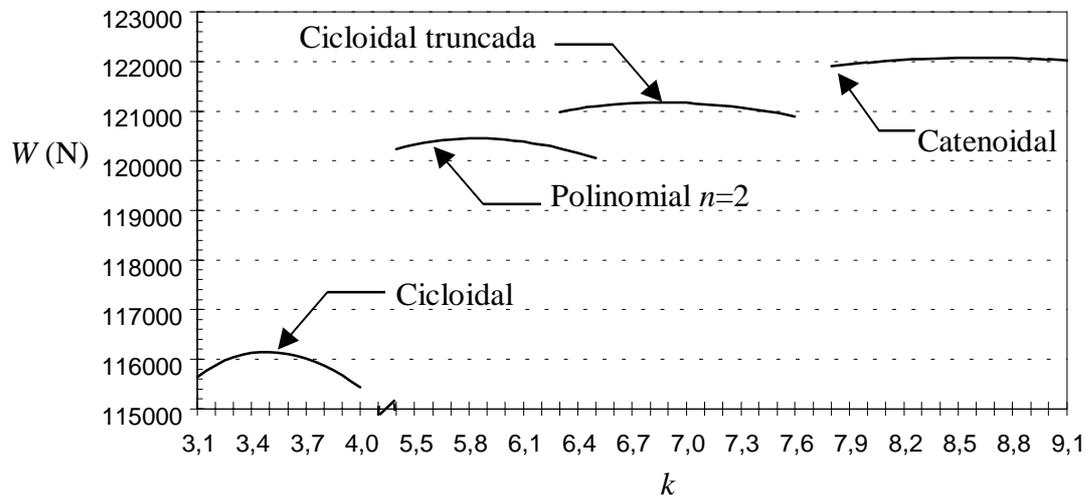


Figura 5 - Variação da capacidade de carga,  $W$ , em relação à inclinação específica,  $k$ .

Pode-se concluir das Figs. 4 e 5 que o perfil de filme de óleo que proporciona a maior capacidade de carga ao mancal de sapatas retangulares é o perfil catenoidal.

A Tabela 1 apresenta os valores das inclinações específicas ótimas para cada tipo de perfil e o correspondente valor máximo da capacidade de carga.

Tabela 1. Valores ótimos da inclinação específica para uma capacidade de carga máxima e correspondentes temperaturas efetivas de operação.

Forma geométrica do filme	Valores ótimos de $k$	Capacidade de Carga, $W$ , em (N)	Incremento de carga em %	Temperatura efetiva, $T_{ef}$ , em $^{\circ}C$
Polinomial $n=1$	3,6	91653,02	0,00	44,7
Exponencial	6,0	108964,40	18,9	43,1
Cicloidal	3,5	116147,20	26,7	44,5
Polinomial $n=2$	5,9	120446,60	31,4	43,6
Cicloidal truncada	6,9	121174,20	32,2	43,7
Catenoidal	8,6	122075,90	33,2	43,0

Pode-se observar na Tabela 1, que ao usar um perfil catenoidal obtem-se um incremento de capacidade de carga da ordem de 33,2 % em relação ao perfil definido por uma polinomial de primeiro grau. Observe também que à medida que a capacidade de carga aumenta, o mancal passa a operar a uma temperatura efetiva menor.

Conforme a discussão feita por S. M. Rohde no trabalho de Bagci & Singh (1983), a implementação de um loop térmico na solução da equação de Reynolds conduz a resultados bem diferentes dos obtidos através da solução puramente isotérmica.

A Fig. 6 apresenta o comportamento da temperatura efetiva em função da variação da inclinação específica, para cada tipo de perfil. Pode-se observar nesta figura que a temperatura efetiva em um mancal de sapatas retangulares decresce continuamente à medida que a inclinação específica aumenta.

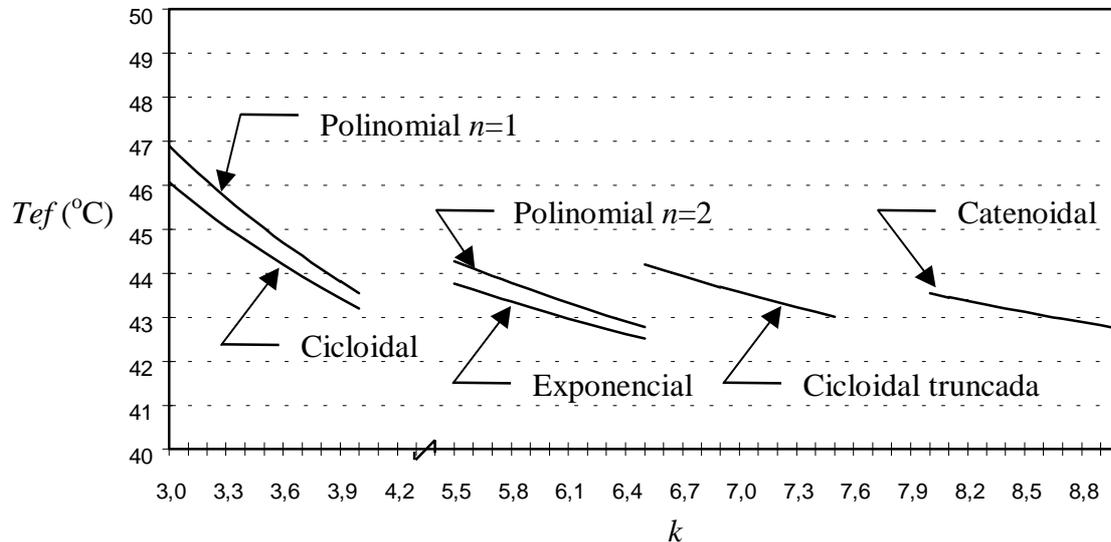


Figura 6 - Comportamento da temperatura efetiva,  $T_{ef}$ , em relação à inclinação específica,  $k$ .

Um outro aspecto importante com relação à geometria do filme de óleo é o efeito causado, na performance de um mancal, pela existência de uma região com inclinação nula na saída da sapata. A Tabela 2 apresenta o comprimento ótimo desta região em porcentagem do comprimento da sapata,  $L$ , a capacidade de carga, o incremento de capacidade de carga em relação ao perfil sem a região de inclinação nula e a correspondente temperatura efetiva para cada tipo de perfil.

Tabela 2. Valores ótimos da região de inclinação nula, para uma capacidade de carga máxima e correspondentes temperaturas efetivas de operação.

Forma geométrica do filme	Comprimento ótimo, $Ll$ , em % de $L$	Capacidade de Carga, $W$ , em (N)	Incremento de capacidade de carga em %	Temperatura Efetiva, $T_{ef}$ , em °C
Polinomial $n=1$	15,0	122154,00	33,3	45,6
Exponencial	13,0	127113,50	16,6	44,4
Cicloidal	3,5	117239,10	0,9	44,8
Polinomial $n=2$	5,5	123860,60	2,8	44,2
Cicloidal truncada			não há incremento	
Catenoidal	4,5	124037,20	1,6	43,6

Pode-se observar na Tabela 2, que o perfil de filme de óleo que apresenta maior ganho de capacidade de carga é o perfil polinomial de primeiro grau (33,3 %). Outro perfil que apresenta um ganho significativo de capacidade de carga é o perfil exponencial. O perfil de forma cicloidal truncada não apresenta ganho na capacidade de carga.

## ***Agradecimentos***

Os autores querem agradecer o apoio da **FAPEMIG** - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – através do Projeto TEC-855/97 ao qual os autores estão envolvidos, incluindo a concessão de uma bolsa de Recém-Doutor ao primeiro autor.

## **REFERÊNCIAS**

- Allaire, P. E. et alli, 1985, A pressure-parameter method for finite-element solutions of Reynolds equation, ASLE Trans., Vol. 28, 2, pp. 150-158.
- Bagci, C. & Singh, A. P., 1983, Hydrodynamic lubrication of finite slider bearings: Effect of one dimensional filme shape, and their computer aided optimum designs, Trans. ASME, Vol. 105, pp. 48-66.
- Booker, J. F. & Huebner, K. H., 1972, Aplication of finite elemente methods to lubrication: engineering approach, ASME Trans., pp. 313-323.
- Khonsari, M. M., 1987, A review of thermal effects in hydrodynamic bearings, part 1: Slider and thrust bearings, Trans. ASLE, Vol. 30, pp. 19-25.
- Pinkus, O., 1987, The Reynolds centecimal: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrication, Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 109, pp. 1-20.
- Reynolds, O., 1886, On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 177, pp. 157-234.
- Rohde, S. M. & McAllister, G. T., 1976, On the optimization of fluid film bearings, Proceeding of the Roy. Soc. of London, A.351, pp. 481-497.
- Reddi, M. M., 1969, Finite element solution of the incompressible lubrication problem, ASME Trans., july, pp. 524-533.
- Raimondi, A. A. & Boyd, J., 1958, A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design, part 1,2 and 3, ASLE Trans., Vol. 1, pp. 159-209.
- Silva, P. F., 1993, Análise preditiva do comportamento operacional de mancais radiais de deslizamento, Dissertação de Mestrado, EFEI, Itajubá-MG.

## **OPTIMIZATION OF THE OIL FILM SHAPE OF RECTANGULAR HYDRODYNAMIC SLIDER BEARINGS**

**ABSTRACT.** *The aim of this paper is the optimization of the oil film shape of rectangular hydrodynamic slider bearings, looking for the maximum load carrying capacity; the corresponding effective oil film temperature is simultaneously analysed. The study was directed to the following oil film shapes: first and second degree polinomials, exponential, catenoidal, cycloidal and truncated cycloidal. The effect of providing the shoes with a plane region (parallel to the moving part) at the leaving edge was also investigated and showed a significant increase in the load carrying capacity for the first degree polynomial oil film shape (tapered flat-face). The Reynold's equation for the hydrodynamic lubrication was solved simultaneously with an iterative procedure taking into account the effects of both the temperatures of the supplied and recirculated oil. For the numerical solution the finite element method was applied, by using linear triangular element for discretizing the solution dominium.*

**KEY WORDS:** *Slider bearing, Optimization, Oil film shape, Finite element method.*