COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS LINEARES DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES MISTAS UTILIZANDO APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS

Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto
Marcelo Guimarães Alves
Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica
Avenida Presidente Antônio Carlos 6627 – Campus Universitário – 31.270.901
Belo Horizonte, MG, Brasil
e-mail: utsch@vesper.demec.ufmg.br

RESUMO. *Apresenta-se um procedimento para a solução numérica de problemas de controle ótimo com restrições mistas e desigualdades no controle utilizando aproximações quadráticas para as variáveis de estado. O problema analisado aplica-se ao planejamento econômico ótimo. Para que o problema parametrizado pudesse ser colocado na forma da programação linear, preservando a sub-otimalidade das soluções numéricas utilizou-se um critério de suficiência para a positividade de funções quadráticas. Com a nova metodologia, o problema parametrizado continua na forma da programação linear, fornecendo soluções sub-ótimas. Resultados obtidos indicam superioridade do procedimento em relação a outro proposto anteriormente que utilizava aproximações lineares para o estado.*

Palavras-chave: *Controle ótimo, Otimização, Maximização da capacidade produtiva.*

1. INTRODUÇÃO.

Este trabalho trata da solução numérica de problemas lineares de controle ótimo com restrições mistas no estado e no controle, e restrições de desigualdade no controle, uma classe de problemas investigados anteriormente por estudiosos soviéticos (Bierger (1973), Dyukalov (1975a, 1975b, 1976) e Ilyutovich (1980)).

Este tipo de problema tem sido estudado no campo do planejamento econômico ótimo, onde o problema de otimização é formulado como um problema de controle ótimo (Dubovskii et al., 1972) obtido a partir de modelo dinâmico contínuo no tempo desenvolvido por (Leontief, 1953).

Não obstante ser o problema de controle ótimo de estrutura linear, é difícil o seu tratamento analítico (Rosa, 1994, Cap.6), sobretudo se considerarmos a possibilidade de descontinuidades no controle, normalmente presentes nesta classe de problemas, as quais podem ocorrer em vários pontos ao longo da solução ótima. Isto reforça a importância do desenvolvimento de um procedimento para a solução numérica deste tipo de problema.

Em (Pinto e Rosa(1994) e Rosa(1994)), descreve-se um procedimento baseado na aplicação do Método dos Elementos Finitos onde, inicialmente, fraciona-se o domínio do problema original para, em seguida, sobre cada intervalo de tempo, adotar aproximações polinomiais, para as variáveis de estado e de controle. Adotando-se aproximações lineares para o estado chega-se a um problema de programação matemática na forma da programação linear. Demonstra-se a sub-otimalidade da solução numérica, ou seja, o fato de que as soluções numéricas obedecem rigorosamente todas as restrições do problema original.

A maior dificuldade ao se aplicar o procedimento desenvolvido em (Rosa, 1994) é o fato do problema de programação linear ter a tendência de possuir muitas variáveis e muitas restrições para se obter resultados com boa precisão.

No presente artigo, apresenta-se um procedimento alternativo para a solução do problema tratado em (Rosa, 1994) onde, no lugar de aproximações lineares, adota-se aproximações quadráticas para o estado.

O principal desafio para o tratamento proposto é que, na forma parametrizada, o problema deixa de ser um problema de programação linear. A quebra da estrutura linear aparece especificamente no tratamento das restrições mistas, as quais implicam em desigualdades sobre parábolas sobre intervalos estabelecidos. Esta dificuldade é contornada através da adoção de condições suficientes para a positividade de parábolas sobre intervalos pré-estabelecidos (Pinto, 1998). A principal característica destas condições suficientes é que elas são lineares nos coeficientes da parábola e restringem relativamente pouco em relação às condições necessárias e suficientes.

Com a utilização das condições suficientes, o problema assume a forma da programação linear sem que as soluções numéricas percam a característica de sub-otimalidade (Rosa, 1994).

Soluções obtidas para um problema resolvido em (Rosa, 1994), mostradas no presente trabalho, indicam que, com o novo procedimento, pode-se obter melhores precisões tendo-se que resolver problemas de programação linear significativamente menores.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o problema de controle ótimo de

$$\text{Maximizar} \qquad l = c^T x(T) \tag{1}$$

sujeito a

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \qquad \tau \in [0,T]; \tag{2}$$

$$Mu(\tau) - x(\tau) \le 0, \qquad \tau \in [0,T]; \tag{3}$$

$$u(\tau) \ge 0, \qquad \tau \in [0,T]; \tag{4}$$

sendo $x(0) = x^0 \ge 0$ e T dados, onde $x(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1(\cdot);\dots;x_n(\cdot)]^T$ denota o vetor de estado, $u(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [u_1(\cdot);\dots;u_n(\cdot)]^T$ o vetor de controle, e M uma matriz $n \times n$ de coeficientes.

Trata-se de um problema linear de controle ótimo com restrições mistas (3) e desigualdades no controle (4).

Como hipóteses para o Problema acima, considera-se: i) As variáveis de estado $x_i(\cdot)$ $(i = 1,\dots,n)$ são funções contínuas para $\tau \in [0,T]$; ii) As variáveis de controle $u(\cdot)$ $(i = 1,\dots,n)$ são funções contínuas por partes para $\tau \in [0,T]$.

3. FRACIONAMENTO DO PROBLEMA

Para a solução numérica do Problema (1)–(4) através de uma parametrização do estado e do controle, inicialmente, fraciona-se o intervalo $[0,T]$ em N sub-intervalos, definindo-se vetores de estado e de controle particulares para cada sub-intervalo.

Estes vetores locais são tratados como variáveis independentes umas das outras, exceto por condições de continuidade a serem respeitadas sobre as junções dos sub-intervalos.

Com este objetivo, reescreve-se o Problema (1)–(4) na seguinte forma fracionada:

$$\text{Maximizar} \quad l = c^T x^N(T), \tag{5}$$

sujeito a

$$\dot{x}^e(\tau) = u^e(\tau), \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\dots,N; \tag{6}$$

$$Mu^e(\tau) - x^e(\tau) \le 0, \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\dots,N; \tag{7}$$

$$u^e(\tau) \ge 0, \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\dots,N; \tag{8}$$

$$x^{e+1}(t_e) = x^e(t_e), \qquad e = 1,\dots,N; \tag{9}$$

denotando N o número de subdivisões do intervalo $[0,T]$, onde

$$t_e \stackrel{\Delta}{=} e\frac{T}{N}, \qquad \Delta t_e = \frac{T}{N}; \qquad e = 1,\dots,N; \tag{10}$$

$$x^e(\tau) = x(\tau), \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\dots,N; \tag{11}$$

$$u^e(\tau) = u(\tau), \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \qquad e = 1,\dots,N; \tag{12}$$

$$u^e(t_e) = u^+(t_e), \qquad e = 0,1,\dots N-1; \tag{13}$$

sendo $u^e(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [u_1^e(\cdot);\dots;u_n^e(\cdot)]^T$, e $x^e(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} [x_1^e(\cdot);\dots;x_n^e(\cdot)]^T$.

Observe que as restrições (9) aparecem no Problema (5)–(13) para garantir a continuidade do estado através dos instantes t_e $(e = 1,\dots,N;)$, denominados "junções dos elementos".

4. APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DINÂMICAS.

Para parametrizar o Problema (5)–(13), dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos, os vetores de estado são aproximados através das expressões quadráticas:

$$\hat{x}_i^e(\tau) = \alpha_i^e \phi_1^e(\tau) + \beta_i^e \phi_2^e(\tau) + X_i^{e-1} \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1,\dots,N; \quad i = 1,\dots,n; \tag{14}$$

onde:

$$\phi_1^e(\tau) = \Delta t_e\left(\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)^2\right), \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e]; \qquad (15)$$

$$\phi_2^e(\tau) = \left(\frac{\Delta t_e}{2}\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)^2\right), \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e]; \qquad (16)$$

onde α_i^e, β_i^e e X_i^{e-1} representam parâmetros a serem determinados. É possível verificar que:

$$\alpha_i^e = \dot{x}^e(t_{e-1}); \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (17)$$

$$\beta_i^e = \dot{x}^e(t_e); \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (18)$$

$$X_i^{e-1} = x_i^e(t_{e-1}) \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (19)$$

Para garantir a satisfação exata da Eq. (2), o vetor de controle é aproximado como sendo a derivada do estado, conforme segue :

$$\hat{u}_i^e(\cdot) = \left\lfloor \alpha_i^e \dot{\phi}_1^e(\tau) + \beta_i^e \dot{\phi}_2^e(\tau) \right\rfloor \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (20)$$

onde :

$$\dot{\phi}_1^e(\tau) = \left(1 - \left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)\right), \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e]; \qquad (21)$$

$$\dot{\phi}_2^e(\tau) = \left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right), \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e]. \qquad (22)$$

De acordo com as expressões anteriores, e considerando a Eq. (10), tem-se:

$$x_i^e(t_{e-1}) = X_i^{e-1}; \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (23)$$

$$x_i^e(t_e) = \frac{T}{2N}\alpha_i^e + \frac{T}{2N}\beta_i^e + X_i^{e-1}; \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (24)$$

$$u_i^e(t_{e-1}) = \alpha_i^e; \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (25)$$

$$u_i^e(t_e) = \beta_i^e \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (26)$$

Os valores de X_i^e devem ser obtidos recursivamente por:

$$X_i^0 = x_i^0, \qquad X_i^e = \frac{T}{2N}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right) + X_i^{e-1}, \quad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1,..,n; \qquad (27)$$

o que leva a seguinte expressão,

$$X_i^e = \frac{T}{2N}\sum_{j=1}^{e}\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + x_i^0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Considerando as expressões (14) a (28), e que as aproximações (14) a (16) e (20) a (22) garantem automaticamente a satisfação exata da Eq. (6), o Problema (5)–(13), assume a forma :

$$\text{Maximizar} \quad l = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \left(\alpha_i^N \phi_1^N(T) + \beta_i^N \phi_2^N(T) + X_i^{N-1}\right)\right), \tag{29}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\left(\alpha_j^e \dot{\phi}_1^e(\tau) + \beta_j^e \dot{\phi}_2^e(\tau)\right)\right) - \left(\alpha_i^e \phi_1^e(\tau) + \beta_i^e \phi_2^e(\tau) + X_i^{e-1}\right) \le 0,$$

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{30}$$

$$\alpha_i^e \dot{\phi}_1^e(\tau) + \beta_i^e \dot{\phi}_2^e(\tau) \ge 0 \qquad \tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{31}$$

$$X_i^e = \frac{T}{2N}\sum_{j=1}^{e}\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + x_i^0 \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{32}$$

As expressões (32) podem ser substituídas na Eq. (29) e na Eq. (30), fornecendo, após algumas manipulações, a seguinte reformulação do Problema (29)–(32):

$$\text{Maximizar} \quad l = \sum_{i=1}^{n}\left(c_i \frac{T}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + x_i^0\right), \tag{33}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\alpha_j^e\right)\left(1 - \left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\beta_j^e\right)\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right) - \alpha_i^e \Delta t_e\left(\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)^2\right)$$

$$-\beta_i^e\left(\frac{\Delta t_e}{2}\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)^2\right) - X_i^{e-1} \le 0$$

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{34}$$

$$\alpha_i^e\left(1 - \left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right)\right) + \beta_i^e\left(\frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}\right) \ge 0$$

$$\tau \in [t_{e-1}, t_e], \quad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Os parâmetros X_i^{e-1} podem ser obtidos a posteriori utilizando as relações recursivas:

$$X_i^{e-1} = \frac{T}{2N}\sum_{j=1}^{e-1}\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + x_i^0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{36}$$

Por outro lado, pode-se definir

$$\xi_e = \frac{\tau - t_{e-1}}{\Delta t_e}, \qquad e = 1, \ldots, N. \tag{37}$$

Substituindo a Eq. (37) nas Eqs. (34) a (36) e efetuando pequeno algebrismo, obtem-se:

$$\text{Maximizar} \qquad l = \frac{T}{2N}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N} c_i\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + c_i x_i^0\right), \tag{38}$$

sujeito a

$$a_{i_e^i}^e.\xi_e^{\ 2} + b_i^e.\xi_e + c_i^e \le 0 \qquad \xi_e \in [0\,,\,1], \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{39}$$

$$\alpha_i^e\left(1-\xi_e\right) + \beta_i^e \xi_e \ge 0 \qquad \xi_e \in [0\,,\,1], \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{40}$$

onde:

$$a_i^e = \frac{T}{2N}\left(\alpha_i^e - \beta_i^e\right), \tag{41}$$

$$b_i^e = -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\alpha_j^e\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\beta_j^e\right) - \alpha_i^e\frac{T}{N}, \tag{42}$$

$$c_i^e = \sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\alpha_j^e\right) - \frac{T}{2N}\sum_{j=1}^{e-1}\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) - x_i^0 . \tag{43}$$

Uma condição necessária e suficiente para que a Eq. (40) seja respeitada (Rosa, 1994) é que

$$\alpha_i^e \ge 0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{44}$$

$$\beta_i^e \ge 0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Por outro lado, condições necessárias e suficientes sobre a_i^e, b_i^e e c_i^e para que a Eq. (39) seja respeitada são não lineares e relativamente complexas. Entretanto, em (Pinto,1998) demonstra-se que, uma condição suficiente para que a Eq.(39) seja respeitada é que valham simultaneamente:

$$c_i^e \le 0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{46}$$

$$a_i^e + b_i^e + c_i^e \le 0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{47}$$

$$b_i^e + 2\,c_i^e \le 0 \qquad e = 1, \ldots, N; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{48}$$

Considerando as Eqs. (44) a (48), o Problema (38)−(43), pode ser reescrito como :

$$\text{Maximizar} \qquad l = \frac{T}{2N}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N} c_i\left(\alpha_i^j + \beta_i^j\right) + c_i x_i^0\right), \tag{49}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}.\alpha_j^e\right) - \frac{T}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \le x_i^0 \;; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{50}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}.\beta_j^e\right) - \frac{T}{2N}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right) - \frac{T}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \le x_i^0 \;;$$

$$e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}.\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right)\right) - \Delta t_e.\alpha_i^e - \frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \le 2x_i^0 \;;$$

$$e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{52}$$

$$\alpha_i^e \ge 0\;; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{53}$$

$$\beta_i^e \ge 0; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{54}$$

Os valores do estado e do controle em cada elemento podem ser calculados a posteriori recursivamente por:

$$x_i^e\left(t_e\right) = \frac{T}{2N}\sum_{e=1}^{n}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right) + x_i^0 \;; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{55}$$

$$u_i^e\left(t_{e-1}\right) = \alpha_i^e; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{56}$$

$$u_i^e\left(t_e\right) = \beta_i^e; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{57}$$

O Problema (49)−(54), com pequenas manipulações, pode ser colocado na forma padrão da programação linear, sendo possível resolvê-lo pelo algoritmo Simplex Revisado .

5. EXEMPLO NUMÉRICO.

Para ilustrar o desenvolvimento descrito anteriormente, considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\text{Maximizar} \qquad l = 100x_1\left(T\right) + x_2\left(T\right) \tag{58}$$

sujeito a

$$\dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau) \quad , \qquad \tau \in [0,4]; \tag{59}$$

$$\dot{x}_2(\tau) = u_2(\tau), \qquad \tau \in [0,4]; \tag{60}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} \qquad \tau \in [0,4]; \tag{61}$$

$$u_1(\tau) \geq 0, \qquad \tau \in [0,4]; \tag{62}$$

$$u_2(\tau) \geq 0, \qquad \tau \in [0,4]; \tag{63}$$

com $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 2$ e T = 4.

Com a aplicação das aproximações quadráticas para $x_1(\tau)$ e $x_2(\tau)$, conforme as Eqs. (14) a (16), e lineares para $u_1(\tau)$ e $u_2(\tau)$, conforme as Eqs. (20) a (22), após as manipulações descritas anteriormente, chega-se ao seguinte problema de programação linear:

$$\text{Maximizar} \qquad l = \frac{T}{2N}\left(\sum_{e=1}^{n} 100\left(\alpha_1^e + \beta_1^e\right) + 100x_1^0 + \sum_{e=1}^{n}\left(\alpha_2^e + \beta_2^e\right) + x_2^0 \right) \tag{64}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\alpha_j^e\right) - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \leq x_i^0 \; ; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{65}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\beta_j^e\right) - \frac{2}{N}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right) - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \leq x_i^0 \; ;$$

$$e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{66}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e\right)\right) - \frac{4}{N}\alpha_i^e - \frac{4}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\alpha_i^k + \beta_i^k\right) \leq 2x_i^0 \; ;$$

$$e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{67}$$

$$\alpha_i^e \geq 0 \; ; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n; \tag{68}$$

$$\beta_i^e \geq 0; \qquad e = 1, \ldots, N; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{69}$$

O Problema (64)–(69) foi resolvido para N = 1, 2, 4, ... , 256 utilizando o método Simplex Revisado.

A Figura 1 apresenta as trajetórias sub-ótimas no plano de fase. Note que as trajetórias são quase coincidentes a partir de N=32.

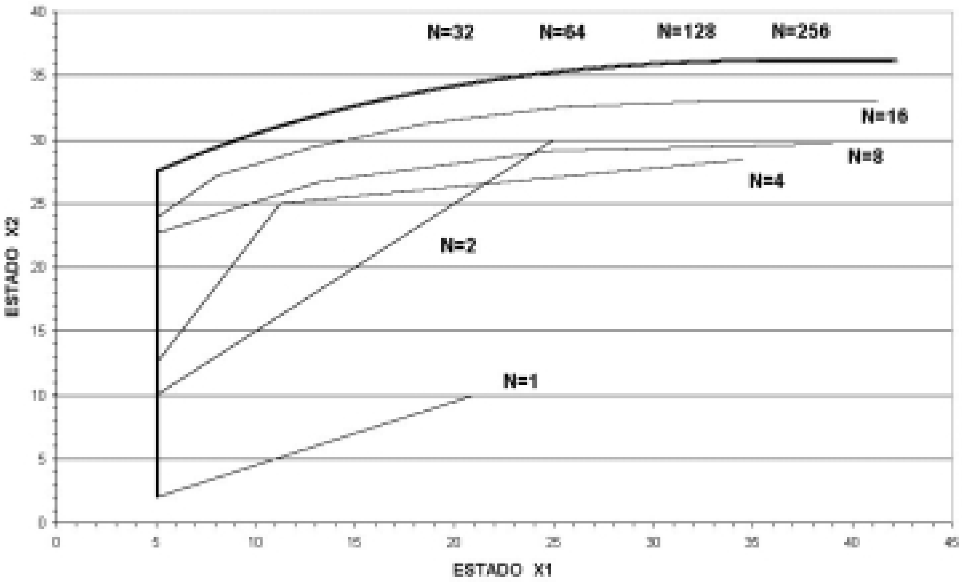

Figura 1 – Trajetórias ótimas no plano de fase.

A Tabela 1 apresenta os valores da função custo, o número de restrições e o número de variáveis para cada valor de N, tanto aqueles obtidos por (Rosa, 1994) utilizando aproximações lineares, quanto os obtidos usando-se aproximações quadráticas conforme descrito no presente trabalho. Para comparação, o valor ótimo analítico da função custo também é apresentado.

Tabela 1. Comparativo utilizando-se aproximações lineares e quadráticas

Número Elementos	Aproximações Lineares			Aproximações Quadráticas		
	Nº Variáveis	Nº Restrições	Função Custo	Nº Variáveis	Nº Restrições	Função Custo
1	2	2	1302.00	4	6	2110.00
2	4	4	1655.50	8	12	2530.00
4	8	8	2110.50	16	24	3481.56
8	16	16	2683.14	32	48	3929.97
16	32	32	3247.92	64	96	4161.17
32	64	64	3674.18	128	192	4238.21
64	128	128	3944.93	256	384	4258.26
128	256	256	4097.90	512	768	4263.56
256	512	512	4179.74	1024	1536	4264.97
Analítica			4265.47			4265.47

Nota-se claramente a superioridade dos resultados obtidos pelo procedimento aqui apresentado, comparando-se tanto o número de variáveis quanto o número de restrições necessários para se obter uma dada precisão.

6. CONCLUSÃO

Apresentou-se um novo procedimento para a solução numérica de problemas lineares de controle ótimo com restrições mistas e desigualdades no controle. O procedimento baseia-se na aplicação de aproximações quadráticas para o estado, do tipo elementos finitos.

Através da utilização de critérios de suficiência para a positividade de funções quadráticas foi possível enquadrar o problema parametrizado na forma da programação linear sem destruir a sub-otimalidade das soluções numéricas.

Um exemplo resolvido mostra que a nova metodologia é significativamente superior a outra proposta anteriormente, fornecendo soluções melhores para um número menor de parâmetros a determinar e de restrições a serem respeitadas.

REFERÊNCIAS

Birger, E.S. e Charnyi, V.I., A Numerical Method for the Solution of a Linear Dynamics Optimization Problem with a Free Rigth End , Autom. Remote Control, Vol. 34, pp. 1941- 1944, 1973.

Dubovskii, S.V., et al, Construction of na Optimal Economic Plan, Autom. Remote Control, Vol. 33, pp. 1336-1349, 1972.

Dyukalov, A.N., Na Optimality Test in Linear Dynamic Problems of Economic Planning I, Autom. Remote Control, Vol. 36, pp. 1460-1470, 1975a.

Dyukalov, A.N., Optimality Feature in Linear Dynamic Problems of Economic Planning II, Autom. Remote Control, Vol.36, pp. 1867-1877, 1975b.

Dyukalov, A.N., An Optimality Criterion in Linear Dynamic Optimal Control Problems with Mixed Constraints, Computational Math. And Math. Phys., Vol. 16, pp. 31-47, 1976.

Ilyutovich, A.E., Piece-Wise Continuous Solutions of Linear Dynamic Problems in Economic Planning I, Autom. Remote Control, Vol.41, pp. 501-508, 1980.

Leontief, W., et al, Studies in the Structure of the American Economy, Oxford University Press, New York, 1953.

Pinto, R.L.U. de F., Rosa, J.B., Solução Numérica de Problemas Lineares de Controle Ótimo com Restrições Mistas e Desigualdades no controle via Método dos Elementos Finitos, Anais do III Congresso de Eng. Mecânica Norte Nordeste, Vol. 1, pp.9-12, Belém, brasil, 1994.

Pinto, R.L.U. de F., Condições suficientes para a positividade de quadráticas sobre intervalos finitos, Notas pessoais, Dep. Eng. Mecânica, Univ. Federal de Minas Gerais, MG, Brasil, 1998.

Rosa, J.B., Solução Numérica de Problemas Lineares de Controle Ótimo com Restrições Mistas e Desigualdades no Controle via Método dos Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado, Univ. Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 1994.

NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH MIXED CONSTRAINTS USING QUADRATIC APPROXIMATIONS

Abstract. *A procedure for numerical solution of linear optimal control problems with mixed constraints and control inequalities based on state quadratic approximations is presented. The problem studied applies to optimal economic planning. To conform the manipulated problem to linear programming preserving the sub-optimality feature of numerical solutions, a suficient criterion to preserve positivity of quadratic functions was used. Results indicate a superiority of the proposed method compared with a previous one based on linear approximations.*

Key words: *Optimal control, Optimization, Production capacity maximization.*