COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

O ENSINO DA DINÂMICA NO BRASIL NO FINAL DO SÉCULO

Roberto A. Tenenbaum
Departamento de Engenharia Mecânica, COPPE Universidade Federal do Rio de janeiro
e-mail: roberto@serv.com.ufrj.br

Resumo. *Faz-se um apanhado das características desejáveis para o ensino da Dinâmica nesse final de século. Apontam-se os requisitos básicos para um curso com bom aproveitamento, levando-se em consideração os desafios que o engenheiro mecânico terá pela frente e que inclui dificuldades tais como modelar um sistema com vários graus de liberdade, projetar um manipulador mecânico, controlar ativamente a suspensão de um veículo etc. Apresenta-se um histórico, particularmente no que toca a livros texto, desde a década de cinqüenta até os nossos dias, mostrando-se a inadequação da maioria dos textos disponíveis para um ensino moderno e atual. Em seguida, é proposta uma abordagem consistente visando uma formação ao mesmo tempo abrangente e sintética, que reformula os cursos convencionais em Dinâmica. Essa proposta se apóia, naturalmente, em um livro texto, sendo apresentadas e comentadas algumas das inovações metodológicas nele inseridas. A importância da notação, do formalismo e da seqüência de introdução dos tópicos é abordada resumidamente, concentrando-se a atenção nas vantagens em relação aos cursos clássicos em Dinâmica.*

Palavras-chave: *Dinâmica, Mecânica clássica, Ensino de engenharia*

1. INTRODUÇÃO

Hoje, já quase dobrando o cabo do milênio, a sociedade dita civilizada se vê às voltas com uma aparente contradição que muito inquieta algumas cabeças pensantes: como compreender e dominar a complexidade crescente do saber científico sem perder de todo a simplicidade que nos aproxima da sabedoria. Desejamos saber cada vez mais e mais, numa corrida vertiginosa, e, simultaneamente, buscamos a pureza do simples. Reduzindo de muitas ordens de grandeza a dimensão dessa questão sem, entretanto, abrandar a dicotomia, encontramos no ensino da engenharia e, em particular, no da engenharia mecânica, a mesma indagação mal disfarçada a nos desafiar: como treinar adequadamente o estudante de modo a torná-lo apto a resolver problemas de engenharia cada vez mais complexos sem que ele perca a visão de conjunto que, justamente, lhe permite a mobilidade e o pensamento criativo. A Dinâmica, que juntamente com o Cálculo e a Termodinâmica constitui pedra fundamental da formação do engenheiro mecânico, precisa ser apresentada ao estudante de um modo cada vez mais criativo e participativo de modo a induzí-lo a, por um lado, buscar por conta própria alternativas para a solução de problemas e, por outro, a construir uma síntese cada vez mais completa dos princípios que norteiam essa solução.

Não se concebe, atualmente, um curso de Dinâmica que pretenda fornecer uma base sólida, sem três requisitos fundamentais: um docente capacitado, um livro texto consistente e atual e um suporte didático que inclua uma pequena bancada experimental e pelo menos um programa de simulação capaz de lidar com sistemas dinâmicos simples. Dos três pressupostos, o mais importante ainda é, do nosso ponto e vista, o docente experiente e interessado não só em transmitir conhecimentos mas, acima de tudo, presidir o processo de estruturação conceitual na matéria. Esta última afirmação é, sem sombra de dúvida, válida para qualquer assunto, mas no ensino da Dinâmica adquire singular significado dados a densidade conceitual e o potencial de aplicação que essa disciplina possui. Não faz parte do escopo deste artigo analisar a importância da formação e experiência do professor no ensino da Dinâmica. Nem tampouco discutir a excelência, ou não, de programas de simulação disponíveis atualmente para o ensino da matéria. Nesse particular, encontram-se atualmente programas de diversos níveis, alguns com fins meramente didáticos, demonstrativos, como o Interactive Physics (1996), e outros, profissionais, adequados à manipulação algébrica e montagem das equações de movimento de sistemas mais complexos, como é o caso do Mechanica Motion (1994). Aqui nos interessa, antes, discutir como, ao nosso ver, deve a disciplina ser apresentada ao estudante de modo a proporcionar o que consideramos essencial, ou seja, uma base teórica sólida, um domínio amplo do assunto e uma capacitação efetiva na técnica de resolução de problemas.

2. HISTÓRICO DA DISCIPLINA

Sem sombra de dúvida, a Dinâmica é uma disciplina quase que inteiramente tratável de um ponto de vista puramente racional. Com efeito, desde os trabalhos de Newton, Euler, Lagrange e D'Alembert tem-se a teoria dinâmica da mecânica tal como a conhecemos hoje. Ensiná-la, contudo, permanece um desafio, talvez justamente pela sua densidade conceitual.

A rigor, o segundo princípio de Newton resume toda a essência da Dinâmica. Se tomarmos as contribuições de Euler, especialmente no tratamento da dinâmica do corpo rígido, temos a mecânica de Newton-Euler, fechada, completa, perfeita, por assim dizer. Incluindo os trabalhos de Lagrange e D'Alembert, chegamos à Mecânica Analítica que, a rigor, não introduz conceitos verdadeiramente novos mas apresenta um formalismo matemático que propicia o tratamento de sistemas multicorpos com a eliminação automática, como é sabido, das forças de vínculo presentes e cuja determinação, na maioria das vezes, não é necessária. Kane (1972) introduziu algumas novidades tais como o conceito de taxas parciais de variação de posição e de orientação, que aperfeiçoa e formaliza ainda mais a técnica da Mecânica Lagrangeana. Por apresentar conceitos um tanto obscuros do ponto de vista conceitual e intuitivo (embora inteiramente rigorosos) sua técnica divide até hoje a opinião dos especialistas.

Todos sabem que uma base sólida na mecânica de Newton-Euler é condição necessária para se dominar com desenvoltura os métodos da Mecânica Analítica. Não é à toa, portanto, que esta só é abordada em detalhe em cursos pós-graduados, enquanto aquela é a abordagem preferencial em cursos de graduação. Métodos da Mecânica Analítica podem ser introduzidos de passagem, por exemplo, em um curso de Vibrações

Mecânicas, como uma forma rápida de se montar as equações de movimento, mas a solução de problemas de dinâmica de sistemas multicorpos requer um curso formal do método lagrangeano ou do método de Kane (1985).

Foi buscando preparar engenheiros mecânicos aptos a dominar a dinâmica, em especial a técnica de solução de problemas que, na década de sessenta, começaram a surgir excelentes textos americanos tais como o Huang (1967), o Beer (1972), o Hibbeler (1974) e o Meriam (1975), entre outros. Esses textos, todos com características similares, apostavam na filosofia do aprendizado pela repetição e pelo exercício. Assim é que a teoria, ou seja, a conceituação, não é abordada com o devido cuidado, apresentando diversas imprecisões, ao passo que o conjunto de exercícios propostos é excepcionamente abrangente e completo chegando a ser repetitivo, deixando enorme tarefa para o estudante. Analisando-se com atenção o conteúdo de cada um desses livros, observa-se que a opção metodológica, praticamente idêntica em todos eles, é sempre de partir do particular para o geral, do simples para o complexo, do plano para o espaço. Trata-se de uma opção, portanto, deliberada e certamente de acordo com a visão metodológica dominante nas universidades americanas na década de cinqüenta. É curioso notar, entretanto, que um livro bem mais recente (Riley, 1996), com uma apresentação gráfica primorosa a quatro cores, tem estrutura conceitual praticamente idêntica à de seus predecessores, somente com uma roupagem estética muito mais atraente, bem ao gosto dos critérios vigentes de mercado.

Nenhum desses textos aborda com precisão, por exemplo, o conceito de velocidade angular, definindo-a como a taxa de variação de um ângulo que mede a orientação de um corpo que se move em movimento plano e, posteriormente, generalizando esse conceito de um modo obscuro para o caso de movimento geral de corpo rígido. Somente textos mais avançados, como o Kane (1985) e o Woodhouse (1987), definem velocidade angular de um corpo rígido de modo apropriado. A própria demonstração da existência do vetor velocidade angular é elegante porém sobredeterminada em Kane (um autor particularmente rigoroso no formalismo). Uma alternativa de prova foi sugerida por Martins (1981), demasiado complexa, contudo, para ser absorvida por estudantes de graduação, e outra, proposta por Tenenbaum (1993), igualmente elegante e corrigindo a sobredeterminação presente na demonstração de Kane, com a vantagem adicional de ser assimilável por estudantes desse nível de formação. Outro exemplo notável de tema muito mal abordado pelos textos americanos é a conceituação de choque. Com efeito, situações de impacto só podem ser tratadas com mais rigor numa abordagem propagatória, mas mesmo a modelagem a parâmetros concentrados é confusa, quando não ambígua nesses livros. Uma abordagem bem mais consistente encontra-se, por exemplo, em Sampaio (1995) e em Cataldo (1999).

Aqui no Brasil, raras foram as iniciativas de se elaborar textos de mecânica. Uma dessas iniciativas, digna de nota, foi o gigantesco trabalho do professor Fonseca (1967), que escreveu um livro em quatro volumes sobre mecânica clássica, dois deles dedicados à Dinâmica. Embora ainda se preste como fonte de consulta, dada a sua completude, esse texto adota uma metodologia ainda mais antiquada que os citados autores americanos, tendo sido trocado por estes nos anos setenta. (A primeira edição dos volumes do professor Fonseca data de 1959.) Recentemente, foi lançado o livro *Dinâmica* do professor Tenenbaum (1997), que propõe uma mudança radical na abordagem adotada para o ensino dessa disciplina, revalorizando o texto e o rigor na formulação dos conceitos fundamentais, buscando a clareza, apresentando uma notação consistente e, mais que tudo, propondo algumas novidades metodológicas que serão objeto da análise a seguir.

3. UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM METODOLÓGICA

Vamos aqui introduzir algumas considerações a respeito da técnica usualmente utilizada na análise, no equacionamento e na solução de um problema de dinâmica. A partir daí, a abordagem metodológica da disciplina fica melhor definida. Partindo dos modelos básicos, é necessário, em primeiro lugar, identificar o objeto de estudo como uma partícula, como um sistema discreto de partículas, como um sistema envolvendo partículas e corpos, como um corpo, como um corpo rígido ou como um sistema de corpos rígidos. Em segundo lugar, precisamos conhecer o referencial a partir do qual será observado o movimento desse objeto. Em seguida, é preciso definir quantas coordenadas são necessárias para caracterizar completamente a evolução temporal do objeto de estudo, ou seja, para definir o seu movimento no referencial escolhido. O primeiro passo, então, será identificar as forças — e, eventualmente, os torques — que atuam sobre o objeto. Feito isso, o próximo passo será a redução desse sistema de forças e torques a um ponto previamente escolhido. Em se tratando de um sistema ou corpo, esse ponto poderá ser o centro de massa, um ponto fixo no referencial, ou ainda um outro ponto que se torne mais conveniente naquele caso específico. O passo seguinte para a resolução de um problema de dinâmica é a análise cinemática do objeto em estudo. Esta consiste em expressar, em termos das coordenadas escolhidas, velocidades angulares e acelerações angulares dos corpos e dos referenciais intermediários, quando for o caso, e velocidades e acelerações das partículas ou dos pontos de interesse. A próxima etapa, no caso de o objeto de estudo constituir uma partícula, é a montagem das equações de movimento. A integração dessas equações fornecerá a solução final para o problema dinâmico, qual seja, a evolução temporal das coordenadas que descrevem o movimento da partícula no referencial escolhido. Quando o objeto de estudo constitui um sistema de partículas, o procedimento de análise é o mesmo, com a diferença, somente, de que as equações e os métodos utilizados devem ser generalizados para um sistema. Formas integrais para essas equações, tais como o balanço de energia, poderão ser utilizadas, freqüentemente com vantagem. Finalmente, quando o objeto de estudo é um corpo rígido ou um sistema de corpos rígidos, um passo a mais deve ser considerado. A inércia de um corpo é um pouco mais complexa do que a inércia de uma partícula. Com efeito, a inércia de uma partícula é caracterizada pela sua *massa*, uma vez que uma partícula só tem movimento de translação, ao passo que um corpo rígido, apresentando movimento de translação e de rotação, tem, além da inércia de translação, uma propriedade inercial característica da rotação, que é seu *tensor de inércia*. Assim, para a análise dinâmica de um corpo rígido, além da consideração do sistema de forças e torques aplicados e do estudo da sua cinemática, será necessário determinar suas propriedades de inércia, antes de se estabelecerem as equações de movimento.

3.1 Notação

Um dos grandes trunfos de qualquer disciplina repousa justamente na notação utilizada; esta influencia a tal ponto a compreensão, que uma notação inadequada ou imprecisa pode tornar o tema de que trata ininteligível.

Quando vamos escolher uma notação, estamos sempre face a um dilema, a rigor, insuperável. Dois atributos fundamentais de uma notação são, por sua própria natureza, contraditórios. Por um lado, ela deve contemplar o máximo de informação possível de modo a evitar possíveis ambigüidades. Por outro, deve primar pela simplicidade. A experiência tem mostrado que uma notação mais completa e explícita é facilmente assimilável e ajuda o estudante a compreender determinadas nuanças que se tornariam difíceis com o uso de uma notação simplificada.

A notação proposta compreende cinco elementos básicos, sendo quatro deles opcionais, segundo o caso. O primeiro elemento é a *letra* que designa uma determinada grandeza. Assim, se queremos designar a massa de um corpo ou de uma partícula, adotaremos a notação m. Toda grandeza *escalar* será então notada por uma letra em tipo itálico. Quando tem-se uma grandeza *vetorial*, o tipo utilizado passa a ser o negrito.

Os outros quatro elementos que compõem (no máximo) a notação aparecem como subscrito (índice) ou superscrito (expoente) do elemento principal. O índice denota, usualmente, um *componente* ou um *numeral*. Assim, se $\mathbf{F}$ é uma força aplicada (um vetor), o *componente* da força na direção de um eixo cartesiano, digamos, o eixo x, será notado como $\mathbf{F}_x$ (um vetor) ou, em se tratando do *componente escalar* do vetor, como F_x (um escalar). Por outro lado, se estamos falando das n partículas de um sistema, suas massas serão notadas por $m_1, m_2, \ldots, m_n$. O superscrito ou expoente é utilizado para especificar a quem a grandeza em questão se refere. Assim, $\mathbf{v}^P$ designa a velocidade da partícula P e $\mathbf{G}^C$ designa o vetor quantidade de movimento do corpo C. Quando precisamos designar claramente o vetor posição de um ponto Q para um ponto P, adotaremos a notação $\mathbf{p}^{P/Q}$, que se lê: vetor posição de P *com respeito a* Q. Neste último exemplo surgiu um novo elemento na notação; ambos, P e Q, têm uma posição de índice superior, ou expoente, com relação ao elemento básico que designa a grandeza, sendo que um elemento posiciona-se *sobre* o traço de fração, enquanto o outro situa-se *sob* o mesmo. A terminologia acompanha a notação; é a posição de P (de quem se fala) com respeito a Q (com respeito a quem se fala), ou seja, um vetor posição de Q para P.

Há ainda um quinto elemento na notação que está reservado aos *referenciais*. Assim, por exemplo, a velocidade de um ponto P com respeito a Q em um referencial $\mathcal{R}$ será notada por ${}^{\mathcal{R}}\mathbf{v}^{P/Q}$. O referencial, portanto, aparece como um índice superior *esquerdo*, na notação. Como dissemos no início, nem toda notação requer o uso dos cinco elementos. A velocidade angular de um corpo C em um dado referencial $\mathcal{R}$ é designada por ${}^{\mathcal{R}}\boldsymbol{\omega}^C$, requerendo somente três elementos; a velocidade (absoluta) de um ponto P em um referencial $\mathcal{R}$ é notada por ${}^{\mathcal{R}}\mathbf{v}^P$, exigindo também três elementos. Já o componente na direção x do vetor quantidade de movimento angular de um corpo C com respeito a um ponto O em um referencial $\mathcal{R}$ será notado por ${}^{\mathcal{R}}\mathbf{H}_x^{C/O}$, com tudo a que tem direito.

A notação descrita resumidamente acima é suficientemente consistente, completa, e de fácil manuseio, sendo uma adaptação — e um aperfeiçoamento — da notação proposta por Kane (1972). Essa notação permite uma absoluta inambigüidade e favorece a identificação, por parte do estudante, de que propriedade dinâmica se está tratando e, particularmente no que toca a referenciais móveis, prepara o caminho para lidar com mais naturalidade de sistemas multicorpos.

3.2 Vetores e momentos

Usualmente, vetores e momentos são tratados no curso de Estática, onde se aprende a lidar com forças e torques. Duas razões há para abordar esse tema na disciplina de Dinâmica. A primeira delas se deve ao fato de que, usualmente, as forças de contacto, provenientes dos vínculos mecânicos, são modeladas naquele curso quase sempre tendo em vista uma situação de equilíbrio. O estudante não se habitua ali a modelar reações de vínculo em condições de movimento. Resulta daí, por exemplo, que situações que envolvem forças de atrito, são modeladas erroneamente pelo aluno. É necessário portanto generalizar a modelagem de vínculos de sorte a compreender indistintamente situações de equilíbrio ou de movimento. A experiência mostra que a melhor forma de fazê-lo é adotar o *engaste* ou *solda* como vínculo de referência, apresentando três componentes de força e três de torque, e, a partir deste, estabelecer os outros modelos pela liberalização progressiva de deslocamentos e rotações. Dessa maneira, o aluno torna-se habilitado a montar corretamente o chamado diagrama de corpo livre, sem o qual a solução de um problema dinâmico estará irremediavelmente comprometida.

A segunda razão é mais profunda e introduz algumas pequenas novidades metodológicas. Quando se define um sistema de vetores, o mais adequado é considerá-lo um conjunto composto por n vetores deslizantes de mesma dimensão física, $\mathbf{v}_i$, associados respectivamente às retas suporte $r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, e m vetores livres $\mathbf{M}_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$, todos com dimensão de momento de um vetor da categoria dos vetores $\mathbf{v}_i$. (Não nos esqueçamos de que vetores vinculados são um caso particular de vetores deslizantes e que, portanto, parte ou mesmo a totalidade dos vetores $\mathbf{v}_i$ acima poderá constituir-se de vetores vinculados.) Partindo dessa definição, em que um sistema de vetores é um conjunto não homogêneo (há vetores de duas dimensões físicas), podemos tratar, por exemplo, forças e torques com igual "status". Além disso, outros sistemas de vetores como, por exemplo, os vetores quantidade de movimento de um sistema de partículas (vetores a elas vinculados) e suas quantidades de movimento angular com respeito a um dado ponto (vetores livres com dimensão de momento dos anteriores) podem ser assimilados igualmente no mesmo conceito. Definindo-se então *resultante* de um sistema de vetores $\mathcal{V}$ como

$$\mathbf{R}(\mathcal{V}) \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i. \tag{1}$$

e seu momento resultante com respeito a um dado ponto O como

$$\mathbf{M}^{\mathcal{V}/O} \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}^{\mathbf{v}_i/O} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{M}_j \tag{2}$$

(observe que essa definição não é usual), fica fácil e absolutamente trivial se lidar com sistemas mistos de vetores. Ainda mais, se os vetores $\mathbf{v}_i$ forem forças (e, naturalmente, os vetores $\mathbf{M}_j$ forem torques), a redução desse sistema ao par (misto) $\{\mathbf{R}(\mathcal{V}), \mathbf{M}^{\mathcal{V}/O}\}$ fica natural. pois esse par é representativo de um sistema também misto. Por outro lado, se os vetores $\mathbf{v}_i$ forem quantidades de movimento (e, naturalmente, os vetores $\mathbf{M}_j$ forem quantidades de movimento angular) o vetor $\mathbf{R}(\mathcal{V})$ será a quantidade de movimento do corpo ou sistema de partículas e o vetor $\mathbf{M}^{\mathcal{V}/O}$ será sua quantidade de movimento angular com respeito ao ponto O. A grande vantagem desse tratamento unificado é introduzir precocemente o conceito de quantidade de movimento e de quantidade de movimento angular de um sistema dinâmico e evidenciar sua reprentatividade dinâmica.

Mais adiante, quando forem introduzidas as equações de movimento para um sistema dinâmico, mostrar-se-á que o segundo princípio de Newton generaliza-se do seguinte modo: a derivada temporal da resultante de um sistema é igual à resultante do outro, ou seja, $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$, onde $\mathbf{G}$ é a quantidade de movimento do sistema ou corpo e $\mathbf{F}$ é a resultante das forças; e a derivada temporal do momento resultante com respeito a um ponto especial O (que poderá ser o centro de massa) também é igual ao momento resultante com respeito ao mesmo ponto do outro, ou seja, $\dot{\mathbf{H}}^{S/O} = \mathbf{M}^{\mathcal{V}/O}$, onde $\mathbf{H}^{S/O}$ é o vetor quantidade de movimento angular do sistema $\mathcal{S}$ com respeito a O.

3.3 Cinemática

Em cinemática, o aspecto fundamental a considerar é a noção de *referencial*. Uma vez bem estabelecido esse conceito, o universo passa a ser tratado como uma grande obra de relojoaria onde ninguém é absoluto (relatividade galileana) e todos se movem em relação a outrem. É de suma importância que o conceito de velocidade angular de um corpo C em relação a um referencial $\mathcal{R}$, ${}^{\mathcal{R}}\boldsymbol{\omega}^{C}$, seja compreendido simultaneamente como seu conceito usual de variação da atitude do corpo com respeito ao referencial mas também como operador diferencial para qualquer vetor fixo no corpo, ou seja,

$$ {}^{\mathcal{R}}\boldsymbol{\omega}^{C}\times = \frac{{}^{\mathcal{R}}d}{dt}. \tag{3} $$

A partir desse conceito, todas as expressões cinemáticas para o movimento do corpo rígido são facilmente deduzidas. O movimento em referenciais móveis fica explícito e os teoremas cinemáticos para o ponto são também obtidos a partir daquela relação básica. Com essa unidade, o estudante pode se aventurar sem susto por temas mais elaborados como a teoria do rolamento e a análise cinemática de mecanismos e sistemas multicorpos. É nesse ponto que se pode introduzir uma discussão cinemática sobre sistemas holonômicos e não holonômicos.

3.4 Propriedades de inércia

Este é um ponto delicado, que merece o melhor da nossa atenção. A *massa* é a propriedade de inércia de translação de um corpo; indica, como estabelece o segundo princípio de Newton, a resistência que o corpo oferece em se acelerar sob a ação de uma dada força resultante. A inércia de rotação, contudo, é muito mais complexa, consistindo em uma propriedade *tensorial*. O tensor de inércia de um corpo com respeito a um dado ponto reúne, portanto, toda informação relativa à resistência oferecida pelo corpo em modificar seu estado de movimento angular, qualquer que seja a direção do torque resultante aplicado. Há inúmeras vantagens, de ordem prática e conceitual, em se dar um tratamento tensorial formal ao conceito de inércia de rotação de um corpo. Mais ainda, quando da introdução do teorema de transposição de tensores de inércia, aparece o tensor de inércia do centro de massa. Por essa razão, considero mais do que interessante a introdução do tensor de inércia de uma partícula P com respeito a um ponto O, definido por

$$ \mathbb{I}^{P/O} \rightleftharpoons (p^2 \mathbb{1} - \mathbf{p}\otimes\mathbf{p})m, \tag{4} $$

onde p é o módulo do vetor $\mathbf{p}$, posição da partícula com respeito a O, $\mathbb{1}$ é o tensor identidade e $\mathbf{p}\otimes\mathbf{p}$ é o produto tensorial de $\mathbf{p}$ por $\mathbf{p}$. Esta definição, aparentemente esdrúxula, pode ser facilmente interpretada em termos das noções usuais de segundo momento de massa e permite uma seqüência elegante de definições secundárias de vetor de inércia de uma partícula P com respeito a um ponto para uma dada direção $\mathbf{a}$,

$$ \mathbf{I}_{a}^{P/O} \rightleftharpoons \mathbb{I}^{P/O}\cdot\mathbf{a}, \tag{5} $$

de momento de inércia de uma partícula P com respeito a um ponto O para uma dada direção $\mathbf{a}$,

$$ I_{aa}^{P/O} \rightleftharpoons \mathbf{I}_{a}^{P/O}\cdot\mathbf{a}, \tag{6} $$

e de produto de inércia de uma partícula P com respeito a um ponto O para duas direções arbitrárias **a** e **b**,

$$I_{ab}^{P/O} \rightleftharpoons \mathbf{I}_{a}^{P/O} \cdot \mathbf{b}. \tag{7}$$

Esta última expressão é particularmente interessante pois evidencia que produto de inércia não é necessariamente definido para eixos mutuamente ortogonais.

Fixadas as idéias básicas relativas às propriedades de inércia de uma partícula, as definições correspondentes para sistemas discretos de partículas e para corpos contínuos são meras extensões daquelas por meio de somatórios ou integrais. A importância do centro de massa mais uma vez se evidencia a partir da dedução da relação de transposição de tensores de inércia,

$$\mathbb{I}^{C/O} = \mathbb{I}^{C/C^*} + \mathbb{I}^{C^*/O}, \tag{8}$$

onde $\mathbb{I}^{C/O}$ é o tensor de inércia de um corpo C com respeito a um ponto O, $\mathbb{I}^{C/C^*}$ é o tensor de inércia de C com respeito a seu centro de massa e $\mathbb{I}^{C^*/O}$ é o tensor de inércia do centro de massa com respeito a O, da qual resultam as correspondentes relações de transposição para vetores, momentos e produtos de inércia. Finalmente, resolve-se o problema de autovalores e autovetores para o tensor de inércia, conduzindo às direções principais de inércia e aos momentos principais de inércia, como é usual.

4 CONCLUSÕES

A questão colocada na introdução deste trabalho parece parcialmente respondida. A melhor maneira de oferecermos aos nossos estudantes uma visão da dinâmica abrangente, sintética, aerofotográfica e, simultaneamente, os habilitarmos com poderosas ferramentas de análise, modelagem, equacionamento e resolução de problemas é seguirmos uma proposta metodológica que não pulverize o assunto mas, antes, encare os temas em toda a sua generalidade, porém com as ferramentas adequadas a lidar com essa generalidade. Para tal, foram propostas algumas opções metodológicas renovadoras que tratam os conceitos de modo amplo, sempre do geral para o particular, mas introduzindo o método matemático para tratá-los adequadamente.

O engenheiro do próximo século terá em mãos um ferramental de cálculo matemático por meio de computadores digitais insuspeito há poucos anos atrás. Esse ferramental permitirá a solução de problemas muito mais complexos e a obtenção de predições muito mais exatas para problemas relativamente simples. Mas, ao contrário do que pode supor uma análise mais superficial da questão, esse engenheiro precisará de uma base conceitual extremamente sólida e geral das disciplinas básicas — como é o caso da Dinâmica — para poder tirar pleno proveito do potencial computacional que terá a seu dispor.

Para aqueles que ainda temem introduzir a Dinâmica em nível um pouco mais avançado (note-se que ainda estamos falando da mecânica de Newton-Euler) com receio de confundir os estudantes, temos para contra-argumentar uma prática de 25 anos de ensino com excelentes resultados. Buscamos demonstrar aqui a importância da notação, do formalismo consistente, da seqüência de introdução dos temas, muitas das vezes invertendo as ordenações convencionais, da escolha criteriosa dos exemplos, entre outros.

A abordagem metodológica aqui proposta dilui a clássica contraposição entre *formação* e *informação*, substituindo o *ou* pelo *e*.

REFERÊNCIAS

Beer, F. P. and Johnston, Jr, E. R., 1972, Vector Mechanics for Engineers: Dynamics, 2^{nd} ed., McGraw-Hill, New York.

Cataldo, E. and Sampaio, R., 1999, Comparing some models of collisions between rigid bodies, Proceedings VI Pan-American Congress of Applied Mechanics, January, 4–8 Vol 8, pp 1301–1304 .

Fonseca, A., 1967, Curso de Mecânica, IV Volumes, 3^a ed., Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.

Hibbeler, R. C., 1974, Engineering Mechanics: Dynamics, Macmillan, New York.

Huang, T. C., 1967, Engineering Mechanics: Dynamics, Addison-Wesley, Reading, MA. Interactive Physics 3.02, 1996, Summit Software.

Kane, T. R., 1972, Dynamics, 2^{nd} ed., Stanford University, Stanford.

Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill, New York.

Martins, L. C. and Soares, P. P. M., 1981, O vetor velocidade angular via um problema de minimização, Rev. Br. C. Mec., V III, N^o 1, pp 41–43, Rio de Janeiro.

Meriam, J. L., 1975, Dynamics, SI Version, 2^{nd} ed., Wiley, New york.

Mechanica Motion 2.0, 1994, Rasna corp.

Riley, W. F. and Sturges, L. D., 1996, Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley, New York.

Sampaio,R. and Tavares Jr., H.M., 1995, Dynamics of systems of rigid multibodies with shocks, Proceedings VI Symp. Dynamic Probl. Mech., March 6-10, Vol 1, pp 247.

Tenenbaum, R. A., 1993, About the angular velocity of a rigid body in a reference frame, Rev. Br. C. Mec., Vol XV, N^o 3, pp 281–285, Rio de Janeiro.

Tenenbaum, R. A., 1997, Dinâmica, Editora da UFRJ, Rio de Janeiro.

Woodhouse, N. N. J., 1987, Introduction to Analytical Dynamics, Claredon, Oxford.

TEACHING DYNAMICS IN BRASIL AT THE END OF THE CENTURY

Abstract. *The desirable features for the teaching of Dynamics in the end of this century are discussed. The basic requirements for a good course are pointed out considering the challenges that a mechanical engineer will have to deal with, including the modeling of a system with many degrees of freedom, the design a robot arm, the active control of a motor vehicle, and so on. A brief history of the development of textbooks in this century is presented with comments about the teaching philosophy underneath. In the following, the proposal for a deep and more complete approach, looking towards the future is presented based, naturally, in a specific textbook. The importance of the notation, the formalism, and the order of introduction of the subjects is discussed, and some small novelties in the methodology are reported.*

Keywords: *Dynamics, Classical mechanics, Teaching of dynamics*