



SOLUÇÃO APROXIMADA PARA A CONVECÇÃO FORÇADA TRANSIENTE COM DIFUSÃO AXIAL

Romberg R. Gondim

Universidade Federal da Paraíba, Campus I, Laboratório de Energia Solar
Cx. P. 5115 – 58051-970 – João Pessoa, PB, Brasil

Fábio de F. Cavalcante

Universidade Federal da Paraíba, Campus I, Pós Graduação em Eng. Mecânica, Laboratório de Energia Solar
Centro de Tecnologia – 58059-900 – João Pessoa, PB, Brasil

***Resumo.** Uma solução analítica aproximada para o problema de convecção forçada transiente no interior de um canal de placas paralelas, em regime laminar, é obtida através de uma transformação integral. A combinação do método da Técnica da Transformada Integral Generalizada com a Transformada de Laplace, permite a obtenção, na forma explícita, do campo de temperatura na região de entrada térmica. A solução analítica aproximada é comparada a solução completa e será usada como filtro transiente.*

***Palavras-chave:** Convecção Transiente, Transformada de Laplace, Transformada Integral, Difusão Axial*

1. INTRODUÇÃO

O surgimento do transistor no final da década de 40 permitiu o avanço de equipamentos eletrônicos e computadores, os quais se tornaram mais rápidos, menores e mais eficientes, possibilitando também um menor consumo de energia. Seu principal inconveniente é que por ser composto de semicondutores, estes só trabalham bem em temperaturas baixas; caso a temperatura se eleve muito, poderá haver a queima do equipamento. Apesar do transistor consumir menor potência em relação as válvulas, conseqüentemente menor geração de calor, com a compactação dos equipamentos eletrônicos, criou-se um aumento da potência dissipada por unidade de volume. Por causa dos fatores acima citados, gerou-se um interesse muito grande na área de processos térmicos, como por exemplo, no resfriamento de chips, com a finalidade de remover o calor gerado pelo sistema. Uma maneira de evitar a queima do equipamento, seria utilizar métodos para o resfriamento dos componentes eletrônicos através da transferência de calor por convecção.

O estudo da convecção forçada transiente tem sido objeto de interesse por parte de muitos pesquisadores, devido a sua importância prática na engenharia. Um fator importante

nesse estudo é a necessidade de soluções exatas para problemas de engenharia, cada vez mais complexos, num curto intervalo de tempo e por isto, as técnicas de aproximação numérica vem ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos clássicos uma vez que a experimentação geralmente é demorada, além do fato de ser dispendiosa e porque os métodos analíticos clássicos apresentam certas limitações.

Mais recentemente, tem-se utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada – G.I.T.T. , poderosa ferramenta de solução híbrida analítico –numérica onde a idéia básica consiste na transformação de um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias, eliminando a dependência espacial com a vantagem de não necessitar de geração de malha em relação aos métodos numéricos e de permitir um controle sobre o erro relativo dos resultados, estabelecido a priori e controlado automaticamente.

1.1 Histórico

A Técnica da Transformada Integral Generalizada - G.I.T.T. , foi introduzida com o trabalho de Ozisik & Murray (1974) , baseado na Técnica da Transformada Integral Clássica.

Um trabalho abrangente sobre a G.I.T.T. foi feito por Cotta (1993), e a sua aplicação foi dividida em diversas classes de problemas. Entre eles podemos citar: problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno (Cotta & Santos,1992), problemas com coeficientes variáveis na equação diferencial parcial (Mikhailov,1975), problemas com contornos variáveis (Aparecido & Cotta,1990), problemas que envolvem problemas auxiliares difíceis (Cotta & Ozisik,1986) e problemas não lineares (Cotta,1994).

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

É analisado um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de um duto de placas paralelas, submetido a convecção forçada transiente. Considera-se o fluido incompressível, as propriedades físicas constantes e os efeitos de dissipação viscosa, convecção livre e conjugação com a parede desprezíveis.

O sistema em estudo é constituído por um duto de placas paralelas infinitas na largura, de comprimento L^* , no interior do qual escoam um fluido newtoniano. O sistema assim definido está inicialmente em equilíbrio térmico a uma temperatura T_o . É então provocada uma perturbação em degrau na temperatura de entrada do fluido no canal, T_e . As paredes são sólidas, impermeáveis e são mantidas à temperatura T_o . O escoamento é laminar e completamente desenvolvido, ocorrendo na direção x sendo simétrico em relação a y , conforme mostrado na fig. 1.

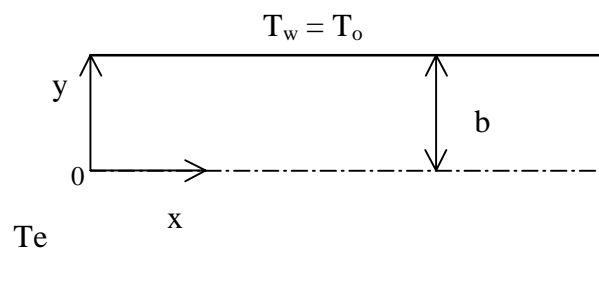


Figura 1 – Representação do problema

2.1 Adimensionalização do Problema

Considerando os grupos adimensionais:

$$x = \frac{x^*/b}{\text{Re Pr}} = \frac{x^*}{b \text{ Pe}}; \quad y = \frac{y^*}{b}; \quad u = \frac{u^*}{4 u_{av}}; \quad t = \frac{\alpha t^*}{b^2}; \quad L = \frac{L^*/b}{\text{Re Pr}};$$

$$T = \frac{T^* - T_0}{T_e - T_0}; \quad \text{Re} = \frac{u_{av} 4b}{\nu}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}; \quad \text{Pe} = \text{Re Pr} = \frac{u_{av} 4b}{\alpha} \quad (1)$$

onde T^* representa o campo de temperatura, u^* a velocidade longitudinal, α a difusividade térmica, x^* a coordenada longitudinal, y^* a coordenada transversal e t^* o tempo.

O problema é definido matematicamente pela equação:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} + u(y) \cdot \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$0 < y < 1, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$T(x,y,0) = 0, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3)$$

$$T(0,y,t) = 1, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (5)$$

$$T(x,1,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (6)$$

$$T(L,y,t) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (7)$$

onde Re, Pr, e Pe representam os números de Reynolds, Prandtl e Peclet, u_{av} , a velocidade média (Mikhailov & Özisik, 1984) e ν , a viscosidade cinemática do fluido.

Pode-se obter uma solução analítica aproximada, através do uso combinado da Transformação de Laplace Clássica e da Técnica da Transformada Integral Generalizada.

3. TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Transformada de Laplace

Inicialmente, seguindo as idéias encontradas em (Guedes, Cotta & Brum, 1989), aplica-se a Transformada de Laplace sobre a variável tempo:

$$s \tilde{\theta}(x,y) + u(y) \frac{\partial \tilde{\theta}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x,y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x,y)}{\partial x^2},$$

$$0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (8)$$

$$\tilde{\theta}(0, y) = 1/s \quad , \quad 0 < y < 1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (10)$$

$$\tilde{\theta}(x, 1) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (11)$$

$$\tilde{\theta}(L, y) = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (12)$$

onde $\tilde{\theta}(x, y)$ é a Transformada de Laplace do potencial $T(x, y, t)$.

3.2 Técnica da Transformada Integral Generalizada

Para a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada, inicialmente define-se um problema de autovalor auxiliar:

$$\frac{d^2 \tilde{Y}_g(y)}{dy^2} + \beta_g^2 \tilde{Y}_g(y) = 0 \quad 0 < y < 1 \quad (13)$$

$$\frac{d\tilde{Y}_g(0)}{dy} = 0 \quad (14)$$

$$\tilde{Y}_g(1) = 0 \quad (15)$$

onde \tilde{Y}_g e β_g são as autofunções normalizadas e os autovalores, respectivamente, dadas por:

$$Y_g(y) = \cos(\beta_g y) \quad (16)$$

$$\beta_g = (g - 0.5) \pi \quad , \quad g = 1, 2, \dots \quad (17)$$

A norma, Y_g e a propriedade de ortogonalidade são respectivamente:

$$NY_g = \int_0^1 Y_g^2(y) dy = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\int_0^1 \tilde{Y}_g(y)\tilde{Y}_h(y)dy = \delta_{gh} \quad \text{onde,} \quad \begin{cases} \delta_{gh} = 1 & , \quad g = h \\ \delta_{gh} = 0 & , \quad g \neq h \end{cases} \quad (19)$$

O par de Transformação Integral é obtido pela aplicação do operador $\int_0^1 \tilde{Y}_j(y)dy$ no potencial $\tilde{\theta}(x, y)$ expandido em autofunções, obtendo-se o par:

$$\bar{\theta}_i(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y)\tilde{\theta}(x, y)dy, \quad \text{TRANSFORMADA} \quad (20)$$

$$\tilde{\theta}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y)\bar{\theta}_i(x), \quad \text{INVERSA} \quad (21)$$

Para a transformação integral da equação diferencial parcial e suas condições de contorno (Eqs 8-12), multiplica-se cada termo pela autofunção, $\tilde{Y}_i(y)$, e integra-se ao longo da direção y: Observando a Eq. Inversa (21) e aplicando a Eq. Transformada (20), obtém-se:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\theta}_i(x)}{dx^2} - \sum_{j=1}^{\infty} A1_{ij} \frac{d \bar{\theta}_j(x)}{dx} - (s + \beta_i^2) \bar{\theta}_i(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (22)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = \frac{\bar{f}_i}{s} \quad (23)$$

$$\bar{\theta}_i(L) = 0 \quad (24)$$

onde

$$A1_{ij} = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) u(y) dy \quad (25)$$

e

$$\bar{f}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy, \quad (26)$$

O objetivo aqui é obter uma solução analítica aproximada que funcione como filtro na solução de formulações mais gerais. Sendo assim, adotou-se a solução de menor ordem (lowest order solution), desprezando os elementos não diagonais na matriz de coeficientes acima. O sistema desacoplado aproximado é dado por:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\theta}_{\ell_i}(x)}{dx^2} - A1_{ii} \frac{d \bar{\theta}_{\ell_i}(x)}{dx} - (s + \beta_i^2) \bar{\theta}_{\ell_i}(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (27)$$

$$\bar{\theta}_{\ell_i}(0) = \frac{\bar{f}_i}{s} \quad (28)$$

$$\bar{\theta}_{\ell_i}(L) = 0. \quad (29)$$

onde o efeito do campo de velocidade não uniforme é representado pelos elementos diagonais, $A1_{ii}$.

O sistema diferencial ordinário representado pelas Eqs (27-29) tem como solução:

$$\bar{\theta}_{\ell_i}(x) = C1.e^{\lambda_1 x} + C2.e^{\lambda_2 x} \quad (30)$$

onde

$$\lambda_{1,2} = \frac{Pe^2 A1_{ii} \pm \sqrt{Pe^4 A1_{ii}^2 + 4Pe^2(s + \beta_i^2)}}{2} \quad (31)$$

Aplicando a condição de contorno (28) na Eq.(30) e observando a Eq.(29), considerando que $\lambda_2 < 0$, encontra-se que:

$$\bar{\theta}_{\ell_i}(x) = \frac{\bar{f}_i}{s} \exp \left[\left(\frac{Pe^2 A1_{ii} - \sqrt{Pe^4 A1_{ii}^2 + 4Pe^2(s + \beta_i^2)}}{2} \right) x \right] \quad (32)$$

3.3 Potencial Original

Para a recuperação da temperatura original, utiliza-se a fórmula da inversa, Eq. (21), onde se aplica a solução obtida, Eq.(32):

$$\bar{\theta}_{\ell}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{f}_i \exp \left[\frac{Pe^2 A1_{ii} x}{2} \right] \frac{1}{s} \exp[-Pe x \sqrt{s - a_i}] \quad (33)$$

onde,

$$a_i = - \left(\frac{Pe^2 A1_{ii}^2}{4} + \beta_i^2 \right) \quad (34)$$

Observando-se que a inversão da Transformada de Laplace é dada por:

$$\theta_{\ell}(x, y, t) = L^{-1}(\bar{\theta}_{\ell}(x, y)) \quad (35)$$

e aplicando-se a Eq.(33), obtém-se:

$$\theta_{\ell}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{f}_i \exp\left[\frac{Pe^2 A_{1ij} x}{2}\right] L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \exp[-Pe x \sqrt{s-a}]\right\} \quad (36)$$

onde, considerando:

$$H(s) = \frac{1}{s} \exp[-Pe x \sqrt{s-a}] \quad (37)$$

aplica-se o Teorema da Convolução

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (38)$$

e tem-se:

$$h(t) = L^{-1}(H(s)) = \frac{Pe x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1.5}} \exp\left[a_i \tau - \frac{(Pe x)^2}{4\tau}\right] d\tau \quad (39),$$

que aplica-se à Eq. (36) para se obter:

$$\theta_{\ell}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{f}_i \int_0^t \left(\frac{Pe x}{2\sqrt{\pi} \tau^{1.5}} \exp\left[\frac{Pe^2 A_{1ij} x}{2} + a_i \tau - \frac{(Pe x)^2}{4\tau}\right] \right) d\tau \quad (40)$$

3.4 Temperatura Média

A temperatura média de mistura, na sua forma adimensionalizada, fornece a seguinte expressão aproximada:

$$\theta_{av}(x, t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_i \left(\bar{f}_i - \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) y^2 dy \right) \left(\int_0^t \frac{Pe x}{\tau^{1.5}} \exp\left[\frac{Pe^2 A_{1ij} x}{2} + a_i \tau - \frac{(Pe x)^2}{4\tau}\right] d\tau \right) \quad (41)$$

4. RESULTADOS E ANÁLISE

O código computacional foi elaborado no Fortran Powerstation. Para o cálculo dos coeficientes nas integrações numéricas foi adotado o erro relativo de 10^{-6} , e optou-se pela subrotina DQDAG disponível na biblioteca IMSL (1989). Observa-se no cálculo da integral no tempo, para $x = 0$, uma singularidade devido a presença desta variável no numerador da Eq.(41). Então buscou-se a convergência para valores decrescentes de x , tendendo-se a zero.

Os tempos adimensionais adotados foram 0,005; 0,010; 0,030 e 0,050 e os resultados são comparados com os obtidos da solução completa via GITT com filtro permanente

(Gondim, 1997). Nas figuras 1,2 verifica-se uma sobreposição das soluções, aproximada e completa, para números de Peclet pequenos. À medida que este cresce, observa-se um aumento da disparidade das curvas mas, conservando as características gerais do fenômeno estudado, capturando com razoável adequação as posições e comportamentos das frentes térmicas, a partir da perturbação na entrada do canal. Estas características indicam esta solução como um melhor filtro da solução geral do que aquele de difusão pura permanente utilizado em Gondim (1997).

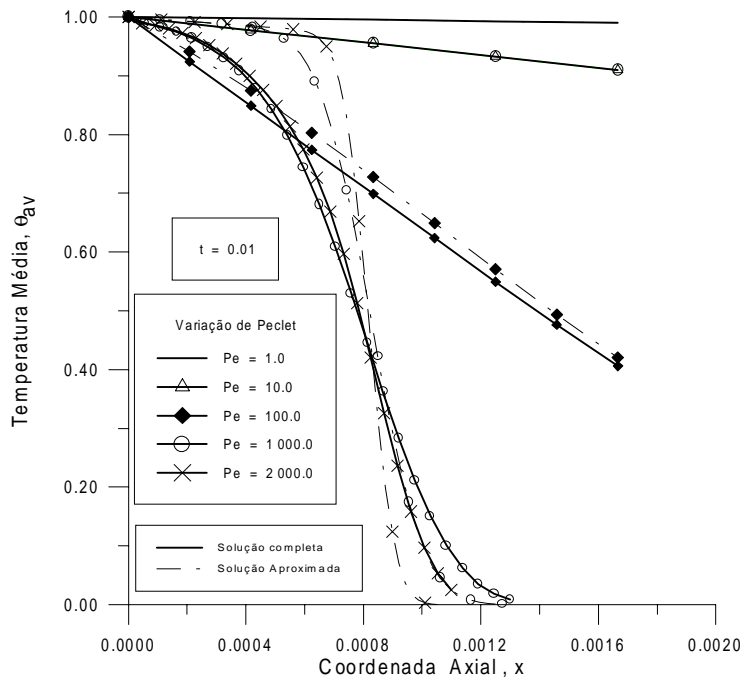


Figura 1 - Comparação das temperaturas médias das soluções completa e aproximada, para $t = 0.01$.

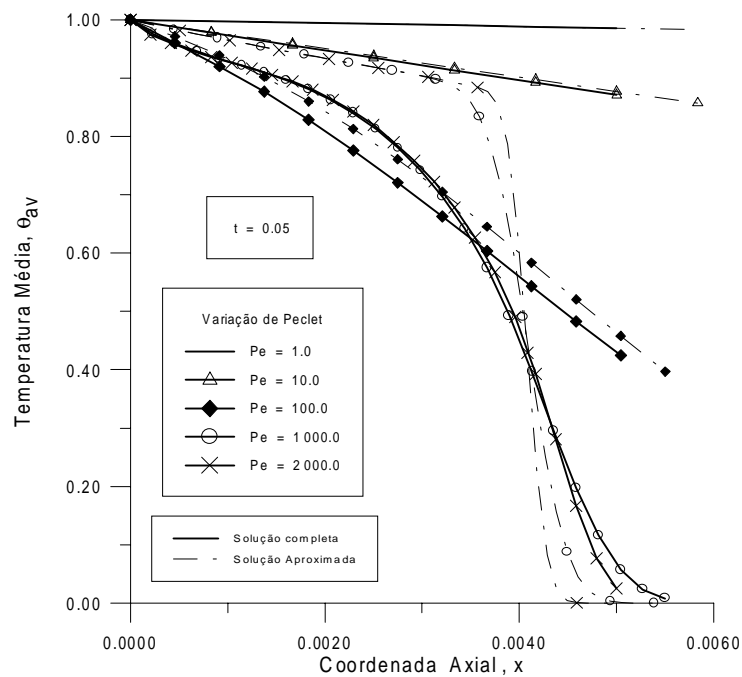


Figura 2 - Comparação das temperaturas médias das soluções completa e aproximada, para $t = 0.05$.

Nas Tabelas 1 e 2 abaixo verifica-se a convergência da solução aproximada para número de termos igual ou menor a 10 na precisão requerida.

Tabela 1 - Comportamento da convergência da temperatura média transiente, $\theta_{av}(x,t)$, em várias posições, x, ao longo do canal, através da solução mista Laplace/GITT, para **Pe = 1** e **L = ∞**.

Nº de Peclet	tempo (t)	x	Números de Termos				
			3	5	10	15	20
1.0	0.005	.0104167	.9157	.9162	.9163	.9163	.9163
		.0520833	.6005	.6008	.6008	.6008	.6008
		.0937500	.3471	.3472	.3472	.3472	.3472
		.1354167	.1749	.1750	.1750	.1750	.1750
		.1770833	.0763	.0763	.0763	.0763	.0763
	0.010	.0187500	.9820	.8925	.8926	.8926	.8926
		.0937500	.5033	.5035	.5035	.5035	.5035
		.1687500	.2304	.2305	.2305	.2305	.2305
		.2437500	.0839	.0839	.0839	.0839	.0839
		.3187500	.0239	.0239	.0239	.0239	.0239
	0.030	.0291667	.8989	.8993	.8994	.8994	.8994
		.1458333	.5381	.5382	.5382	.5382	.5382
		.2625000	.2742	.2742	.2742	.2742	.2742
		.3791667	.1169	.1169	.1169	.1169	.1169
		.4958333	.0412	.0412	.0412	.0412	.0412
	0.050	.0333333	.9068	.9072	.9072	.9072	.9072
		.1666667	.5754	.5755	.5755	.5755	.5755
		.3000000	.3239	.3239	.3239	.3239	.3239
		.4333333	.1595	.1595	.1595	.1595	.1595
		.5666667	.0679	.0679	.0679	.0679	.0679

Tabela 2 - Comportamento da convergência da temperatura média transiente, $\theta_{av}(x,t)$, em várias posições, x, ao longo do canal, através da solução mista Laplace/GITT, para **Pe = 2000.0** e **L = ∞**.

Nº de Peclet	tempo t	x	Números de Termos				
			3	5	10	15	20
2000.0	0.005	.0000292	.9982	.9987	.9988	.9988	.9988
		.0001458	.9941	.9945	.9945	.9945	.9945
		.0002625	.9875	.9877	.9878	.9878	.9878
		.0003792	.7192	.7192	.7192	.7192	.7192
		.0004958	.0421	.0421	.0421	.0421	.0421
	0.010	.0000458	.9976	.9981	.9982	.9982	.9982
		.0002292	.9912	.9915	.9916	.9916	.9916
		.0004125	.9849	.9851	.9851	.9851	.9851
		.0005958	.9755	.9757	.9757	.9757	.9757
		.0007792	.6837	.6837	.6837	.6837	.6837
	0.030	.0001458	.9941	.9945	.9945	.9945	.9945
		.0007292	.9742	.9743	.9743	.9743	.9743
		.0013125	.9553	.9553	.9553	.9553	.9553
		.0018958	.9349	.9349	.9349	.9349	.9349
		.0024792	.3665	.3665	.3665	.3665	.3665
	0.050	.0002083	.9919	.9923	.9923	.9923	.9923
		.0010417	.9640	.9640	.9640	.9640	.9640
		.0018750	.9377	.9378	.9378	.9378	.9378
		.0027083	.9128	.9128	.9128	.9128	.9128
		.0035417	.8851	.8851	.8851	.8851	.8851

REFERÊNCIAS

- Aparecido, J.B. & Cotta, R.M., 1990, Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts, Computational Mech., V. 6, pp. 93-100.
- Cotta, R.M. & Özisik, M.N., 1986, Laminar Forced Convection in Ducts with Periodic Variation of Inlet Temperature, Int. J. Heat & Mass Transfer, V. 29, n° 10, pp. 1495-1501.
- Cotta, R.M. & Santos, C.A.C., 1992, Transient Diffusion Problems with Time-Dependent Boundary Condition Coefficients, J. Eng. Physics, V. 61, n° 5, pp. 1411-1418.
- Cotta, R.M., 1993, Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC Press, Boca Raton, Fl.
- Cotta, R.M., 1994, The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method, 10th International Heat Transfer Conference, Invited Lecture, August, Brighton, UK, V.1, pp.43-60.
- Gondim, R.R., 1997, Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial: Solução Via Transformada Integral, D.Sc. Tese, Unuversidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE-PEM, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Guedes, R.O.C., Cotta, R.M. & Brum, N.C.L., 1989, Conjugated Heat Transfer in Laminar Flow Between Parallel-Plates Channels, Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Dezembro, Rio de Janeiro, pp. 285-288.
- IMSL Library, Math/Lib., Houston, Texas, 1989.
- Mikhailov, M.D., 1975, On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient, Int. J. Heat & Mass Transfer, V. 18, pp. 334-345.
- Mikhailov, M.D & Özisik, M.N., 1984, Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, John Wiley, New York.
- Özisik, M.N. & Murray, R.L., 1974, On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters, ASME J. Heat Transfer, V. 96, pp. 48-51.

APPROXIMATE SOLUTION FOR TRANSIENT FORCED CONVECTION WITH AXIAL DIFFUSION

Abstract. *An approximate analytical solution for transient laminar forced convection inside a parallel plates channel is obtained through integral transformation. The combination of the Generalized Integral Transform Technique and Laplace Transforms allows for obtaining the temperature field in explicit form, within the thermal entrance region. The approximate analytical solution is compared to the exact solution and is proposed as a transient filter for future developments.*

Keywords: *Transient Convection, Laplace Transform, Integral Transforms, Axial Diffusion*