

## SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA DA CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE PARA NÚMERO DE REYNOLDS TENDENDO A ZERO

### **Jesús S. Pérez Guerrero**

Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN/COREJ  
Rua General Severiano 90  
22294-900- Rio de Janeiro - RJ – Brasil  
[jperez@cnen.gov.br](mailto:jperez@cnen.gov.br)

### **Rogério Ramos**

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES  
29060-970 - Vitória - ES – Brasil  
[rogerio@ltdc.com.ufrj.br](mailto:rogerio@ltdc.com.ufrj.br)

### **Luiz C. G. Pimentel**

Departamento de Meteorologia  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ  
21945-970- Rio de Janeiro - RJ – Brasil  
[pimentel@ltdc.com.ufrj.br](mailto:pimentel@ltdc.com.ufrj.br)

**Resumo.** *Escoamentos lentos são típicos em casos onde a viscosidade é muito alta. Nestes casos o número de Reynolds tende a zero e as equações de Navier-Stokes são simplificadas para uma estrutura linear, denominada na literatura como problema de Stokes. Quando usada uma formulação em termos da função corrente para uma geometria bidimensional, as equações de Navier-Stokes se transformam no problema biarmônico.*

*O problema da cavidade com tampa deslizante é um problema teste comum para comparação entre diferentes metodologias numéricas. No caso do número de Reynolds tendendo a zero, a literatura é pobre em soluções analíticas que possam ser usadas como referência.*

*No presente trabalho a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), por sua natureza analítica, transforma a equação diferencial parcial num sistema de equações diferenciais ordinárias, que pode ser resolvido analiticamente através da solução de um autossistema. A solução analítica formal e resultados para a função corrente em diferentes posições da cavidade são ilustradas.*

**Palavras-chave:** Problema de Stokes, Solução analítica, Transformação Integral

## 1. INTRODUÇÃO

O problema da cavidade com tampa deslizante é um clássico teste de interesse permanente na solução computacional das equações de Navier-Stokes, que permite fazer comparações qualitativas e quantitativas entre os diferentes métodos numéricos. Quando os termos viscosos são dominantes, os termos de inércia são depreciados e a equação adota uma estrutura linear, que é conhecida na literatura como “ Problema de Stokes” (Schlichting, 1968).

Nos últimos anos a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), devido a sua característica semi-analítica, que possibilita um rígido controle do erro durante o processo de solução de equações diferenciais parciais lineares e não lineares, tem se mostrado uma ferramenta poderosa, fundamentalmente na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor (Cotta, 1992, Cotta e Mikhailov, 1997, Cotta, 1998). Este método híbrido tem como princípio a representação de potenciais em uma base de autofunções provenientes de um problema de autovalor associado. A partir da propriedade de ortogonalidade que as autofunções cumprem, o problema original pode ser integrado numa das direções permitindo-se relaxar o problema diferencial parcial transformando-o num sistema diferencial ordinário, reduzindo o número de variáveis independentes. Tradicionalmente a aplicação da GITT, na sua concepção híbrida, deve ser implementada em conjunto à técnicas numéricas para a solução de sistemas diferenciais ordinários. No entanto, para sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes é bastante conhecida na literatura (Kreyszig, 1993; Willy e Barret, 1985) a obtenção de soluções analíticas via representação do potencial como uma combinação linear de soluções independentes, sendo estas expressas em termos de uma base de autovetores e autovalores da matriz relacionada ao sistema diferencial ordinário.

Uma série de trabalhos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), em conjunto com o método descrito acima, tem sido apresentado na literatura para solução de problemas diferenciais do tipo parabólico (Cotta, 1992), permitindo obter soluções formalmente analíticas. Apesar da maior divulgação deste procedimento para solução de problemas de valor inicial, ele pode ser estendido para o caso de problemas diferenciais do tipo elíptico.

A solução do problema de Stokes para o caso do problema da cavidade com tampa deslizante tem sido resolvida por Pérez Guerrero e Cotta (1992) na concepção híbrida numérica-analítica da GITT. Gaskell et al (1991) apresentou uma solução analítica para o problema, sendo que as bases utilizadas na expansão do potencial eram extremamente elaboradas, dificultando a generalização do procedimento para outras situações, como por exemplo, a modificação das condições de contorno do problema.

O objetivo do presente trabalho é a obtenção de uma solução formalmente analítica do problema de Stokes para um escoamento dentro de uma cavidade com tampa deslizante, combinando o uso da GITT com a estratégia de solução de equações diferenciais ordinárias via autovalores e autovetores. A presente alternativa facilita a implementação do procedimento utilizando uma base difusiva associada ao problema original, sendo as autofunções uma combinação de funções trigonométricas e hiperbólicas, podendo ser facilmente modificadas para atender condições de contorno mais genéricas. Outro aspecto relevante da presente abordagem é que as soluções são exatas para qualquer ordem de truncamento do sistema infinito, devido a natureza da solução adotada, permitindo analisar a convergência dos campos originais em sua forma mais completa.

## 2. ANÁLISE

Considera-se uma cavidade quadrada com tampa superior deslizante e velocidade constante, onde um fluido newtoniano e incompressível escoar em regime laminar. Na modelagem matemática do fenômeno considera-se regime permanente sendo a geometria do problema, bidimensional.

O problema de Stokes representado em termos adimensionais da função corrente, recai no problema biharmônico:

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (1.a)$$

onde  $\nabla^4()$  é o operador biharmônico, definido como:

$$\nabla^4() \equiv \frac{\partial^4()}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4()}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4()}{\partial y^4} \quad (1.b)$$

sujeito as seguintes condições de contorno:

$$\psi(0, y) = 0 \quad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = 0 \quad \psi(1, y) = 0 \quad \frac{\partial \psi(1, y)}{\partial x} = 0 \quad (1.c-f)$$

$$\psi(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \psi(x, 1) = 0 \quad \frac{\partial \psi(x, 1)}{\partial y} = 1 \quad (1.g-j)$$

A solução da eq. (1) tem sido dada por Pérez Guerrero e Cotta, (1992). O problema auxiliar apropriado foi de quarta ordem, definindo o seguinte espectro de autofunções:

$$X_i(x) = \begin{cases} \frac{\cos \mu_i(x-1/2)}{\cos(\mu_i/2)} - \frac{\cosh \mu_i(x-1/2)}{\cosh(\mu_i/2)}, & i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sin \mu_i(x-1/2)}{\sin(\mu_i-1/2)} - \frac{\sinh \mu_i(x-1/2)}{\sinh(\mu_i/2)}, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (2)$$

As autofunções consideradas em (2) estabelecem uma estrutura que classifica os casos ímpares e pares, permitindo assim distinguir funções pares e ímpares nos coeficientes integrais referente ao processo de transformação integral. Os autovalores,  $\mu_i$ , são calculados a partir da equação transcendental:

$$\cos \mu_i \cosh \mu_i = 1 \quad (3)$$

É possível demonstrar que as autofunções dadas em (2) apresentam norma unitária, e que a propriedade de ortogonalidade é definida por:

$$\int_0^1 Y_i Y_j dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (4)$$

O par de transformada-inversa, é logo definido como:

$$\bar{\psi}_i(y) = \int_0^1 X_i(x) \psi(x, y) dy, \text{ transformada} \quad (5.a)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(x) \tilde{Y}_i(y), \quad \text{inversa} \quad (5.b)$$

Como mostrado por Pérez Guerrero e Cotta (1992), a transformação integral da equação biharmônica dada em (1) recai no seguinte sistema diferencial ordinário acoplado:

$$\frac{d^4 \bar{\phi}_i}{dy^4} = -\mu_i^4 \bar{\phi}_i - 2 \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} \frac{d^2 \bar{\phi}_j}{dy^2} \quad (6.a)$$

com condições de contorno:

$$\bar{\phi}_i(0) = 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{\phi}_i(0)}{dy} = 0 \quad ; \quad \bar{\phi}_i(1) = 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{\phi}_i(1)}{dy} = f_i \quad (6.b-e)$$

sendo que o coeficientes integrais são dados por:

$$D_{ij} = \int_0^1 X_i \frac{d^2 X_j}{dx^2} dx \quad (7.a)$$

$$f_i = \int_0^1 X_i dx \quad (7.b)$$

Na solução do sistema diferencial ordinário (6) se evidencia uma maior rigidez para crescentes ordens de truncamento do sistema. Por este motivo seria necessário utilizar subrotinas matemáticas apropriadas para casos rígidos, como a BVFPD da biblioteca científica IMSL (1995). Entretanto, dado que o sistema é linear com coeficientes constantes, uma solução analítica formal pode ser obtida por meio de um sistema algébrico ao se considerar a teoria de autovalores e autovetores de matrizes (Kreuzig, 1993).

Com este objetivo é necessário escrever o sistema diferencial de quarta ordem (6), num outro de primeira ordem. Assim a seguinte regra recursiva é adotada:

$$w_i = \bar{\phi}_i \quad ; \quad w_{i+N} = \frac{d\bar{\phi}_i}{dy} \quad ; \quad w_{i+2N} = \frac{d^2 \bar{\phi}_i}{dy^2} \quad ; \quad w_{i+3N} = \frac{d^3 \bar{\phi}_i}{dy^3} \quad (8.a-d)$$

onde  $i=1, \dots, N$  ; sendo  $N$  a ordem de truncamento do sistema. Desta forma se obtêm o seguinte sistema de primeira ordem:

$$\frac{dw_{i+3N}}{dy} = -\mu_i^4 w_i - 2 \sum_{j=1}^N D_{ij} w_{j+2N} \quad (9.a)$$

$$w_i(0) = 0 \quad ; \quad w_{i+N}(0) = 0 \quad ; \quad Y_i(1) = 0 \quad ; \quad w_{i+N}(1) = f_i \quad (9.b-e)$$

O sistema (6), pode ser representado em forma compacta através da seguinte equação:

$$w' = A w \quad (10)$$

onde os elementos da matriz  $A$  são o jacobiano do vetor  $w$ .

A solução do sistema homogêneo definido pela eq.(10) é dada pela seguinte combinação linear:

$$w_i = \sum_{j=1}^{4N} c_j X_{ij} e^{\lambda_j y}, \quad i=1, \dots, 4N \quad (11)$$

onde  $X_{ij}$  e  $\lambda_j$  são respectivamente os autovetores e autovalores associados a matriz  $A$ ; e  $c_j$  são constantes que serão determinadas a partir das condições de contorno (9.b-e). A solução do sistema diferencial ordinário (9.a) necessita apenas da determinação dos autovalores e autovetores da matriz  $A$ , assim como na solução de um sistema algébrico para determinação das constantes  $c_j$ .

Para propósitos computacionais a expressão (11) não é bem definida numericamente, por este motivo, é melhor rescrevê-la de forma apropriada para processamento computacional:

$$w_i = \sum_{j=1}^{4N} \alpha_j X_{ij} e^{\lambda_j (y-1)}, \quad \text{Real}(\lambda_j) \geq 0 \quad \text{ou}, \quad (12.a)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{4N} \alpha_j X_{ij} e^{\lambda_j (y+1)}, \quad \text{Real}(\lambda_j) < 0, \quad i=1, \dots, 4N \quad (12.b)$$

Neste caso os valores de  $\alpha_j$  são calculados resolvendo o sistema algébrico resultante das condições de contorno (9.b-e).

### 3. RESULTADOS

A simetria das condições de contorno ao longo da direção axial, eq.(1.c-f), exige que se obtenham soluções triviais dos campos transformados nos modos pares. Desta forma o número de termos efetivos que representam a serie (5.b), é dada apenas pelo número de modos ímpares.

Os autovalores e autofunções associados a matriz  $A$  foram calculados usando a subrotina EVCRG da biblioteca numérica IMSL (1995), enquanto a solução do sistema algébrico complexo, para determinação do vetor  $\alpha$ , foi feita através da subrotina LSACG (IMSL, 1995).

A seqüência de convergência da função corrente é ilustrada na Tab.1, tanto na posição central como próximo as paredes da cavidade. Para uma ordem de truncamento de  $N=31$  pode-se estabelecer pelo menos quatro dígitos significativos para representação da função corrente na proximidade do vértice superior da cavidade. O tempo de processamento, usando um microcomputador Pentium II-266 foi de 2 segundos no caso de  $N=31$ , sendo este um aspecto importante da presente abordagem, permitindo minimizar o tempo de processamento em relação a uma estratégia numérica de solução.

Na Tab. 2 é apresentada a taxa de convergência numa posição próxima do vértice inferior. Nesta região a taxa de convergência do processo de solução é mais lenta em relação as região central da cavidade. Os maiores gradientes que ocorrem próximo as superfícies

sólidas, certamente são os responsáveis por este comportamento. Neste caso com 31 termos no truncamento da série (5.b) confirmam-se 3 dígitos significativos numa ordem de grandeza tão pequena como 1.E-6. A captura do vórtice é dada com pelo menos 4 termos na expansão de autofunções proposta.

Um aspecto importante a ressaltar é que a taxa de convergência do presente procedimento é inalterada em relação ao procedimento desenvolvido por Pérez Guerrero e Cotta(1992), uma vez que ambos procedimentos de obtenção dos campos transformados apresentam um controle preestabelecido do erro e uma mesma base de autofunções para a expansão do potencial função corrente.

Tabela 1. Convergência da função corrente

N	x=0,1 y=0,1	x=0,1 y=0,5	x=0,1 y=0,9
<b>3</b>	2,293026E-4	7,586559E-3	2,698251E-2
<b>7</b>	2,083886E-4	7,472125E-3	3,087440E-2
<b>11</b>	2,092529E-4	7,468731E-3	3,056242E-2
<b>15</b>	2,091088E-4	7,467792E-3	3,050156E-2
<b>19</b>	2,091269E-4	7,467694E-3	3,047655E-2
<b>23</b>	2,091323E-4	7,467700E-3	3,046418E-2
<b>27</b>	2,091293E-4	7,467718E-3	3,045713E-2
<b>31</b>	2,091336E-4	7,467748E-3	3,045384E-2
N	x=0,5 y=0,1	x=0,5 y=0,5	x=0,5 y=0,9
<b>3</b>	3,080580E-3	5,929063E-2	7,424001E-2
<b>7</b>	3,069255E-3	5,897856E-2	7,235312E-2
<b>11</b>	3,068456E-3	5,895427E-2	7,226982E-2
<b>15</b>	3,068388E-3	5,895071E-2	7,226535E-2
<b>19</b>	3,068406E-3	5,895020E-2	7,226535E-2
<b>23</b>	3,068429E-3	5,895026E-2	7,226552E-2
<b>27</b>	3,068447E-3	5,895042E-2	7,226563E-2
<b>31</b>	3,068461E-3	5,895057E-2	7,226570E-2

Tabela 2. Convergência da função corrente numa região de vórtice

N	x=3,333E-2 y=3,333E-2
<b>3</b>	1,156482E-6
<b>7</b>	-1,432362E-6
<b>11</b>	-1,928064E-6
<b>15</b>	-2,020408E-6
<b>19</b>	-2,031064E-6
<b>23</b>	-2,027900E-6
<b>27</b>	-2,027900E-6
<b>31</b>	-2,023462E-6

A simetria do problema pode ser claramente apreciada no gráfico das isolinhas da função corrente (fig.1). Nela se mostra a presença de dois vórtices localizados nos vértices inferiores da cavidade, de comprimento aproximado de 0,08 unidades. Sendo que o valor máximo da função corrente na cavidade é de 1,00081 , localizado em  $y=0,765$  e  $x=0,5$ .

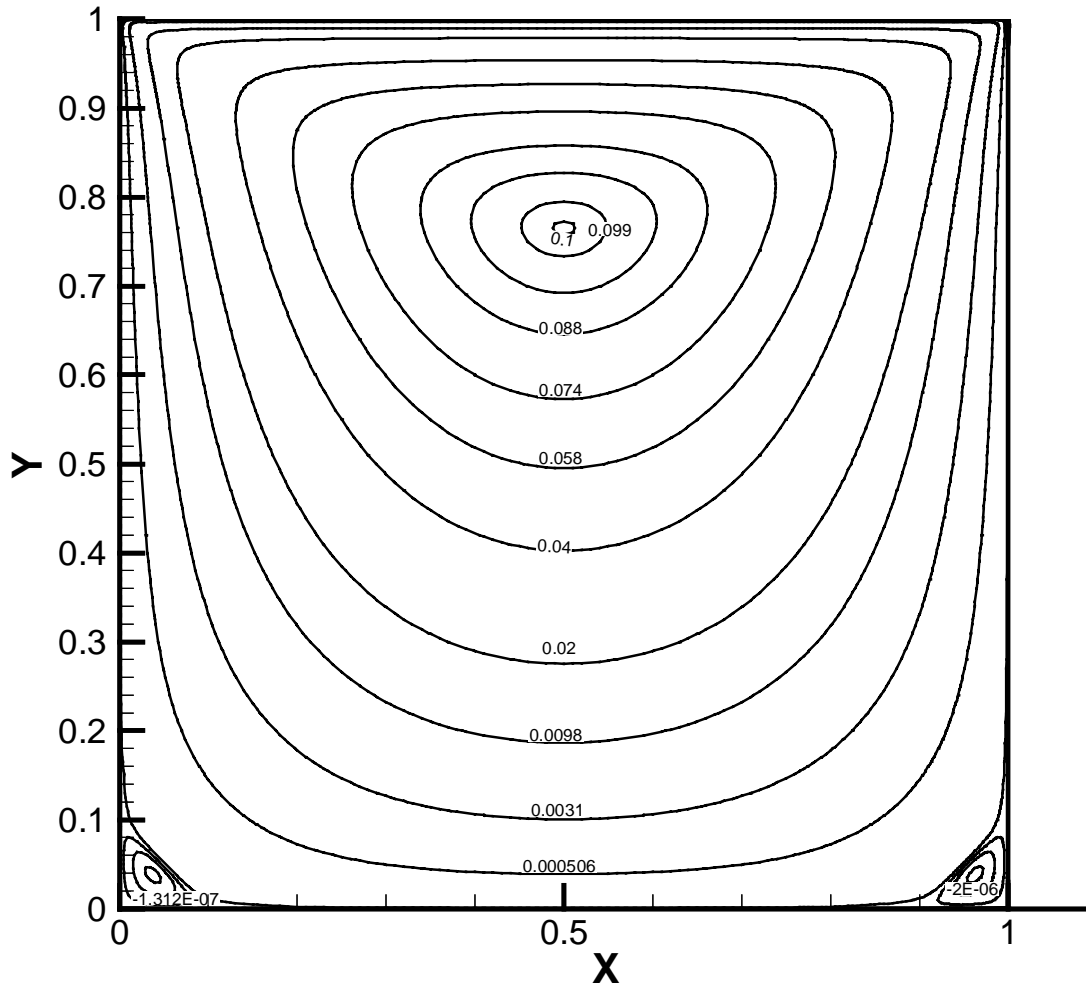


Figura 1. Curvas de nível da função corrente

#### 4. CONCLUSÕES

Uma solução analítica formal para o problema de Stokes, no problema da cavidade com tampa deslizante, tem sido estabelecida ao se utilizar a Técnica da Transformada Integral Generalizada. A natureza analítica da técnica (GITT) possibilitou adotar uma solução via autosistema para o sistema diferencial transformado, possibilitando determinar a solução exata do problema biharmônico.

A extensão do presente procedimento em outros problemas lineares de natureza elíptica, pode ser adotada sobretudo para obter-se resultados de comparação (“*benchmark*”). O baixo custo computacional da presente alternativa sugere que sua aplicação para casos de engenharia é de grande relevância.

## REFERÊNCIAS

- Cotta R.M., 1993, Integral transforms in computational heat and fluid flow, CRC Press, Boca Raton, Fl .
- Cotta R.M. e M. D. Mikhailov, 1997, Heat Conduction , John Wiley.
- Cotta R.M., Editor, 1998, The integral transform method in thermal and fluids science and engineering ”, Begell House, Inc.
- Gaskell, P.H., Savage, M.D., and Thomsom, H.M., 1991, Creeping flow: novel analytic and finite element solutions", Proc.7th Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Standford, CA, Pineridge Press, July, Vol. 2, pp. 1743-1753
- IMSL Library, 1995, Fortran Powerstation Issue, Microsoft.
- Kreyszig E.,1993, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley.
- Pérez Guerrero J.S. e Cotta, R.M., 1992, Integral transform method for Navier-Stokes equations in stream-function only formulation, Int. J. Meth. in Fluids, vol. 15, pp. 399-409
- Schlichting H., 1968, Boundary Layer Theory, Mc Graw-Hill, NY.
- Wyllie C.R., Barret L.C., 1985, Advanced Engineering Mathematics, Mc Graw-Hill.



# **ANALYTICAL SOLUTION OF THE LID DRIVEN CAVITY PROBLEM FOR REYNOLDS NUMBER TENDING TOWARDS ZERO**

**SUMMARY.** *Very slow flow are typical for case where the viscosity is very high. In this case the asymptotic Reynolds number is zero and the Navier-Stokes equation are simplified to linear form, denominated in the literature as Stokes problem. When used the stream-function only formulation in a bi-dimensional geometry, the Navier-Stokes equation turn in the biharmonic problem.*

*The lid driven cavity problem is a common theoretical test problem for comparison of different numerical methods. In the case of Reynolds number tending towards zero and rectangular geometry the literature is poor in analytical solutions that can be used as benchmark.*

*In the present work, the Generalised Integral Transform Technique(GITT), for your nature analytic, transform the partial differential equation in a ordinary differential equation system, which maybe solved analytically via eigensystem strategy.*

*Formal analytical solution and results for the streamfunction in different positions of the cavity are illustrated.*

**Keywords:** *Stokes Problem, Integral Transform*