

OSCILAÇÕES CAÓTICAS DE COLUNAS SOB CARGAS AXIAIS PERIÓDICAS

Saete S. de Oliveira

Paulo B. Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica - PUC-Rio

CEP 22453-900 Rio de Janeiro, RJ - FAX 5111546, E-mail: paulo@civ.puc-rio.br

Resumo. No presente trabalho é analisada a instabilidade paramétrica de colunas esbeltas submetidas a cargas axiais periódicas. A coluna é descrita pela formulação clássica de Navier, incluindo-se os efeitos da não-linearidade geométrica. As equações de movimento são obtidas utilizando-se o princípio de Hamilton, juntamente com o método de Ritz. A equação de movimento da coluna para o problema linear é uma generalização da equação de Mathieu. Sabe-se que, no espaço dos parâmetros de controle dessa equação existem regiões associadas a respostas que crescem de forma ilimitada com o tempo, conhecidas como regiões de ressonância paramétrica. Utilizando-se rotinas numéricas para integração das equações de movimento, para determinação do pontos fixos do mapa de Poincaré associado e para obtenção dos diagramas de bifurcação, obtém-se o diagrama de Strutt, que define as fronteiras das regiões de instabilidade, e identificam-se os fenômenos de bifurcação associados a estas fronteiras. A seguir, estuda-se o movimento no interior das regiões instáveis. Nota-se através dos diagramas de bifurcação que pequenas variações nos parâmetros que definem a solicitação, podem produzir mudanças significativas na resposta da coluna nas regiões instáveis, que pode apresentar oscilações de período igual ao período da força excitadora, além de oscilações sub-harmônicas de várias ordens e movimentos caóticos.

Palavras-chave: Coluna, Instabilidade paramétrica, Oscilações não-lineares, Caos.

1. INTRODUÇÃO

Colunas esbeltas sob cargas axiais variáveis com o tempo podem apresentar, para certos valores dos parâmetros de controle, vibrações laterais, fenômeno este conhecido como instabilidade paramétrica (Stoker, 1950; Bolotin, 1964). Matematicamente, o problema é descrito por equações diferenciais com coeficientes variáveis dependentes do tempo. O presente trabalho analisa o comportamento dinâmico não-linear de colunas esbeltas, com ou sem imperfeições geométricas iniciais, sob cargas axiais. Admite-se que o carregamento axial, responsável pelo aparecimento dos coeficientes variáveis com o tempo nas equações diferenciais de movimento, seja periódico, e que o amortecimento seja do tipo viscoso. Cabe ressaltar que pouco se conhece sobre os efeitos de imperfeições geométricas na instabilidade

paramétrica de elementos estruturais esbeltos, embora na prática todas as estruturas sejam imperfeitas. O estudo do efeito das imperfeições é uma das principais contribuições do presente trabalho.

O estudo da instabilidade paramétrica de colunas tem atraído a atenção de muitos pesquisadores, entretanto a maioria dos estudos está restrito à análise do problema linearizado onde se procura determinar no espaço dos parâmetros de controle as fronteiras de estabilidade (Stoker, 1950, Bolotin, 1964; Nayfeh e Mook, 1979; Soares, 1992). Sabe-se que, de um modo geral, não existem soluções analíticas exatas para as equações diferenciais não-lineares com coeficientes periódicos. Em geral, o problema não-linear é resolvido por métodos de perturbação, o que restringe a solução a pequenas perturbações, sendo esta hipótese válida apenas na vizinhança de uma solução estática conhecida (Carlson et al, 1980; Nayfeh e Mook, 1979; Zavodney et al., 1989, Soares, 1992). Entretanto os métodos de perturbação não fornecem bons resultados quando o grau de não-linearidade é elevado, quando o sistema apresenta soluções sub-harmônicas de alta ordem ou movimentos caóticos. Assim, para se analisar o comportamento dinâmico da coluna no interior da região de instabilidade, deve-se obrigatoriamente usar métodos numéricos para se conhecer a resposta do sistema. O comportamento da coluna no interior da região de instabilidade é pouco estudado, sendo esta uma outra contribuição deste trabalho.

2. FORMULAÇÃO

2.1 Funcional de Energia Não-Dimensional

Os funcionais de energia e as equações de movimento foram deduzidas para a coluna do modelo ilustrado na Fig. 1, onde $W(x,t)$ é o deslocamento transversal da coluna, P_0 , a parcela constante e $P(t)$, a parcela variável do carregamento axial, x , a coordenada axial e t , o tempo. Considera-se a coluna com uma imperfeição geométrica inicial descrita por uma função $W_0(x)$, como mostra a Fig. 2. As imperfeições geométricas são consideradas como de pequena magnitude e podem ser matematicamente modeladas como uma perturbação na solução da estrutura perfeita. Neste caso, o deslocamento total com relação a configuração de uma coluna perfeita e indeformada é dado por:

$$W_t(x,t) = W_0(x) + W(x,t) \quad (1)$$

onde, como mostra a Fig.2, W_t é o deslocamento total medido com relação à coluna perfeita.

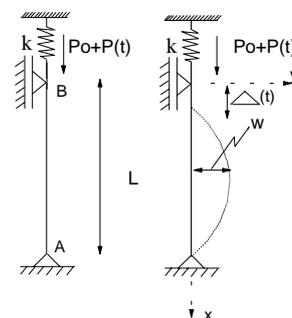


Figura 1- Coluna biarticulada com carregamento axial periódico.

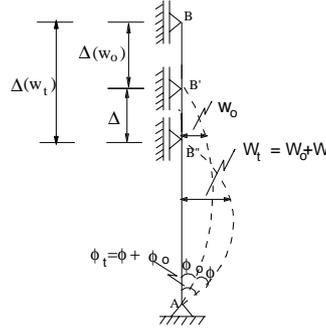


Figura 2- Coluna com imperfeição geométrica.

Para facilitar a análise paramétrica, utilizam-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad w = \frac{W}{L} \quad \tau = \frac{\rho A_s L^4}{EI} \quad \eta = \frac{KL^3}{EI} \quad \delta_1 = \frac{P_o L^2}{EI} \quad \delta_2 = \frac{P_i L^2}{EI} . \quad (2)$$

Considerando-se o material elástico e linear e utilizando-se a formulação clássica de Navier (Bazant e Cedolin, 1991), obtém-se o seguinte funcional para a coluna imperfeita

$$\begin{aligned} L_p = & \frac{1}{2} \tau \int_0^1 w_{,t}^2 d\xi - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(w_{,\xi\xi}^2 + w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{,\xi\xi}^2 w_{,\xi}^4 + w_{o,\xi}^2 w_{,\xi\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{o,\xi}^4 w_{,\xi\xi}^2 + \frac{1}{4} w_{,\xi}^4 w_{o,\xi\xi}^2 \right. \\ & + w_{,\xi}^3 w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} + w_{,\xi}^3 w_{o,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} + 2w_{,\xi} w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi} + w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 w_{,\xi\xi}^2 + \frac{3}{2} w_{,\xi}^2 w_{,\xi\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi}^4 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi\xi} \\ & + w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 w_{o,\xi\xi}^2 + w_{,\xi\xi} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi\xi} + 2w_{,\xi}^3 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi} w_{o,\xi\xi} + 2w_{,\xi\xi} w_{,\xi} w_{o,\xi} w_{o,\xi\xi} + \frac{5}{2} w_{,\xi}^2 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi}^2 w_{o,\xi\xi} \\ & \left. + w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 w_{,\xi\xi} w_{o,\xi\xi} \right) d\xi - \frac{\eta}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{2} w_{,\xi}^2 + w_{,\xi} w_{o,\xi} + \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 + \frac{1}{2} w_{,\xi}^3 w_{o,\xi} + \frac{3}{4} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 \right) d\xi \right]^2 \\ & + (\delta_1 + \delta_2 \cos(\Omega t)) \int_0^1 \left(\frac{1}{2} w_{,\xi}^2 + \frac{1}{8} w_{,\xi}^4 + w_{,\xi} w_{o,\xi} + \frac{1}{2} w_{,\xi}^3 w_{o,\xi} + \frac{3}{4} w_{,\xi}^2 w_{o,\xi}^2 + \frac{1}{2} w_{,\xi} w_{o,\xi}^3 \right) d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

onde δ_2 é o parâmetro adimensional da amplitude da parcela variável do carregamento axial, τ , o parâmetro adimensional do peso específico da coluna, Ω , a frequência da excitação e ω , a frequência natural do sistema.

2.2 Equações de Movimento

O campo de deslocamentos da coluna foi aproximado por uma função do tipo

$$w(\xi, t) = \sum_{m=1}^n f_m(t) \text{sen}(m\pi\xi). \quad (4)$$

onde $f_m(t)$ são as amplitudes que se procura determinar e m é o número de graus de liberdade. De forma similar, a imperfeição geométrica inicial pode ser descrita pela seguinte série de Fourier:

$$w_o(\xi) = \sum_{k=1}^p f_{ok} \text{sen}(k\pi\xi). \quad (5)$$

sendo p o número de termos necessários para descrever as imperfeições da coluna e f_{ok} as amplitudes modais que são parametrizadas em relação ao comprimento da coluna, ou seja, $f_{ok} = F_{ok}/L$. No presente trabalho utilizou-se o método de Ritz e o princípio de Hamilton para se chegar às bem conhecidas equações de Lagrange do movimento.

Caso Linear

O sistema apresentado no presente trabalho é governado por uma equação que, a menos das não-linearidades, pode ser reduzida à forma:

$$f_1''(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)f_1(t) = 0. \quad (6)$$

Esta equação, foi deduzida por Mathieu em 1868. A equação de Mathieu tem sido bastante estudada e as regiões de estabilidade, em que a solução é limitada, e de instabilidade, regiões em que a solução cresce indefinidamente, estão completamente determinadas para todos os valores dos parâmetros δ e ε (Nayfeh e Mook, 1979). A representação destes pontos no plano $\delta - \varepsilon$ é conhecida como Diagrama de Strutt.

Equação Não-Linear de Movimento

A equação de movimento da coluna com um grau de liberdade está expressa em (7). A equação linear de movimento e a equação de Duffing da coluna com um grau de liberdade são casos particulares desta equação. As equações do modelo com vários graus de liberdade e usadas também no presente trabalho podem ser encontradas em Oliveira (1998). Não são aqui apresentadas por falta de espaço.

$$\begin{aligned} f_1''(t) + \frac{c}{\tau} f_1'(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (\pi^2 - \delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_1(t) + \frac{\pi^2}{\tau} (-\delta_1 - \delta_2 \cos(\Omega t)) f_{01} + \frac{9\pi^6}{16\tau} \left(\pi^2 + \frac{2}{3}\eta \right) f_{01}^4 f_1(t) \\ + \frac{3\pi^4}{2\tau} \left(\pi^2 - \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{3}\eta - \frac{3}{4}\delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01}^2 f_1(t) + \frac{\pi^4}{2\tau} \left(\pi^2 - \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{3}{4}\delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_1(t)^3 \\ + \frac{9}{128\tau} \eta \pi^8 f_{01}^6 f_1(t) + \frac{9}{4\tau} \pi^4 \left(\pi^2 - \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{3}\eta - \frac{1}{2}\delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01} f_1(t)^2 + \frac{315}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01}^3 f_1(t)^4 \\ + \frac{27\pi^6}{16\tau} \left(\pi^2 + \frac{2}{3}\eta \right) f_{01}^3 f_1(t)^2 + \frac{81}{256\tau} \eta \pi^8 f_{01}^5 f_1(t)^2 + \frac{15\pi^6}{8\tau} \left(\pi^2 + \frac{7}{10}\eta \right) f_{01}^2 f_1(t)^3 \\ + \frac{\pi^4}{2\tau} \left(-\frac{3}{4}\delta_1 - \frac{3}{4}\delta_2 \cos(\Omega t) \right) f_{01}^3 + \frac{153}{256\tau} \eta \pi^8 f_{01}^4 f_1(t)^3 + \frac{15\pi^6}{16\tau} \left(\pi^2 + \frac{3}{4}\eta \right) f_{01} f_1(t)^4 \\ + \frac{3\pi^6}{16\tau} \left(\pi^2 + \frac{3}{4}\eta \right) f_1(t)^5 + \frac{189}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01}^2 f_1(t)^5 + \frac{63}{512\tau} \eta \pi^8 f_{01} f_1(t)^6 + \frac{9}{512\tau} \eta \pi^8 f_1(t)^7 = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

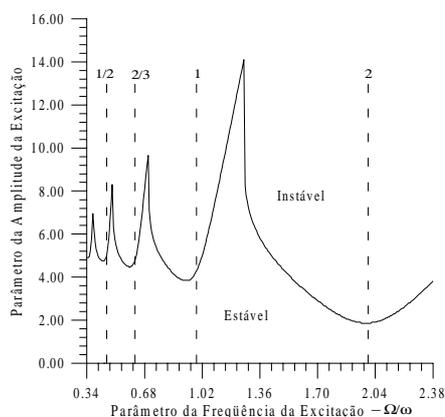
Para a resolução numérica do sistema de equações lineares e não-lineares, com ou sem imperfeição geométrica inicial, utilizou-se o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem, implementado em Fortran para um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Implementou-se ainda um algoritmo para traçar as seções de Poincaré e diagramas de bifurcação, para determinar os valores de transição da estabilidade para a instabilidade no

espaço dos parâmetros de controle e para a verificação da influência da imperfeição geométrica inicial nas amplitudes do sistema no regime permanente.

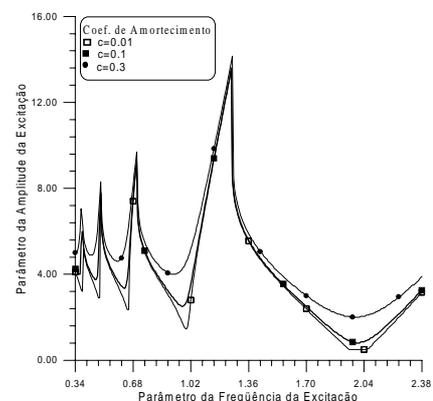
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Diagramas de Estabilidade da Coluna e Influência do Amortecimento Viscoso

Na análise de problemas de instabilidade paramétrica, o primeiro passo é a determinação das fronteiras de estabilidade. A Figura 3.a mostra as curvas de transição da coluna. As condições iniciais para o deslocamento e velocidade foram consideradas $x_o = 0.001$ para o deslocamento e $y_o = 0$ para a velocidade. O efeito do amortecimento viscoso é o de afastar as regiões de instabilidade do eixo horizontal e diminuir sensivelmente as regiões de instabilidade, como ilustra a Fig. 3.b.



a) Diagrama de estabilidade.

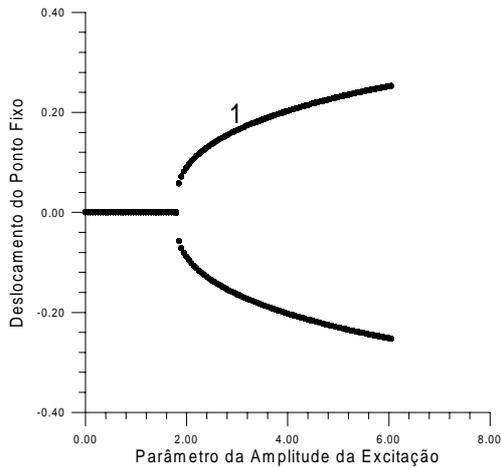


b) Efeito do amortecimento.

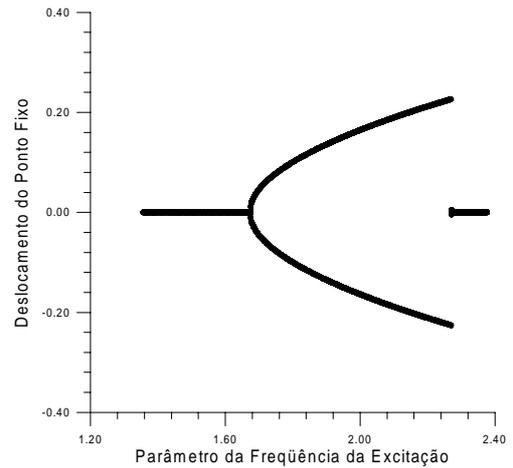
Figura 3- Diagrama de estabilidade da coluna e efeito do amortecimento viscoso.

4.2 Diagramas de Bifurcação, Respostas no Tempo e Planos de Fase para a Coluna Perfeita e Imperfeita

O comportamento da coluna no interior das regiões de instabilidade paramétrica é um problema pouco estudado na literatura. Entretanto, o uso de métodos numéricos pode mostrar com precisão os diversos tipos de comportamento exibidos pelo sistema no interior das regiões de instabilidade. A partir destas informações o engenheiro terá condições de avaliar a gravidade da ressonância paramétrica no comportamento da coluna e as possíveis mudanças nos parâmetros do sistema para que se possa evitá-la quando a análise não-linear mostrar ser isto necessário. Uma ferramenta bastante útil neste tipo de análise são os diagramas de bifurcação onde as coordenadas dos pontos fixos do mapa de Poincaré são mostradas como função de um dado parâmetro de controle.



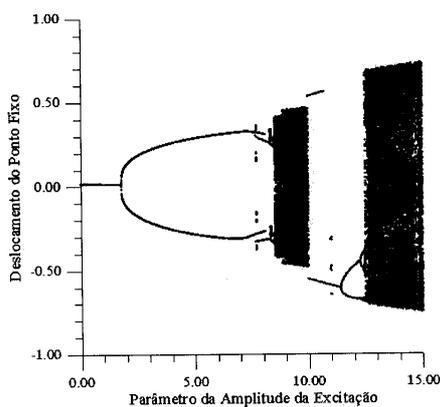
a) $\Omega = 2\omega$.



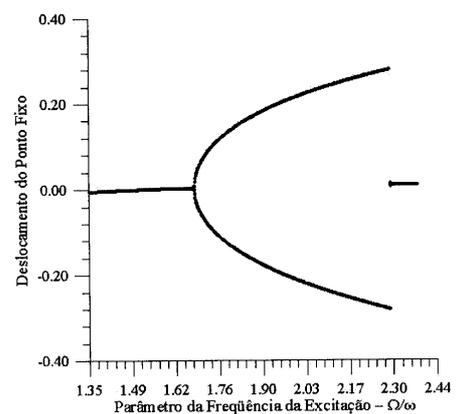
b) $\delta_2 = 3$.

Figura 4- Diagramas de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, na primeira região de ressonância paramétrica.

Um diagrama de bifurcação típico da primeira região de ressonância ($\Omega \approx 2\omega$) está mostrado na Fig. 4.a. Considera-se, neste caso, o parâmetro da frequência da excitação fixo ($\Omega = 2\omega$) e varia-se a amplitude da excitação. Na Figura 4.b o parâmetro de controle é a frequência da excitação, estando fixo o parâmetro do carregamento, $\delta_2 = 3$. Nota-se no diagrama de bifurcação da Figura 4 o surgimento de uma solução de período dois associada à fronteira esquerda do diagrama de estabilidade que cresce de amplitude à medida que Ω aumenta. Na Figura 4.b nota-se o mesmo fenômeno, entretanto ao se entrar na região instável pelo lado direito, observa-se um salto dinâmico após o qual a coluna passa a oscilar harmonicamente, tendo a resposta o dobro do período da força excitadora. A Figura 5 mostra o diagrama de bifurcação nesta mesma região de ressonância para o caso imperfeito onde o parâmetro da imperfeição, $f_{01} = 0.01$. Nota-se que neste caso a coluna apresenta oscilações transversais para qualquer força, entretanto, mesmo neste caso, ocorrem as mesmas bifurcações e saltos dinâmicos observados no sistema perfeito. Nota-se também que, para grandes valores de δ_2 , podem surgir soluções sub-harmônicas de várias ordens além de extensas regiões de caos intercaladas por janelas periódicas.



a) $\Omega/\omega = 2$, $f_{01} = 0.01$.



b) $\delta_2 = 3$, $f_{01} = 0.01$.

Figura 5- Diagrama de bifurcação da coluna com imperfeição geométrica inicial, na primeira região de ressonância paramétrica.

Mostram-se nas Fig. 6.a e 6.b os diagramas de bifurcação da segunda região de ressonância paramétrica, tendo como parâmetros de controle a amplitude e a frequência da excitação, respectivamente. A Figura 7 mostra os diagramas nesta mesma região de ressonância, considerando-se agora a coluna imperfeita ($f_{o1} = 0.01$). Nota-se que neste caso, ao perder a estabilidade a coluna exibe movimentos periódicos com o mesmo período da força. Observa-se novamente a existência de saltos dinâmicos, que são potencialmente perigosos, podendo provocar danos ou até mesmo o colapso da estrutura.

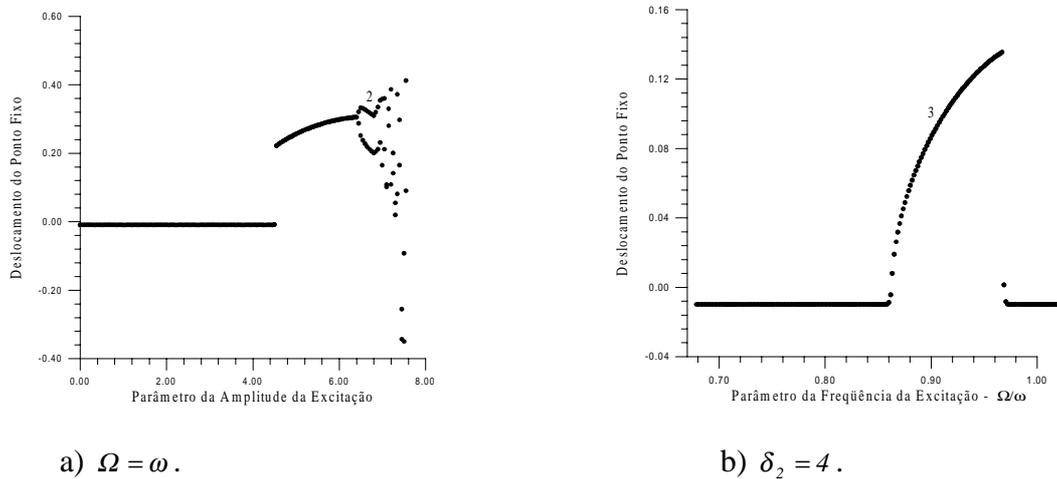


Figura 6- Diagramas de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, na segunda região de ressonância paramétrica.

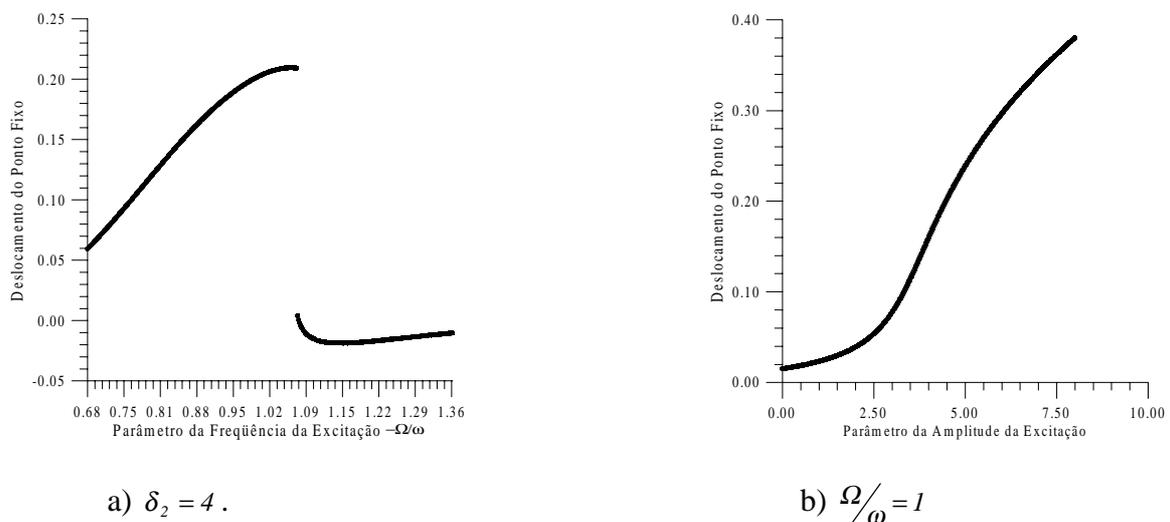


Figura 7- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades considerando-se a imperfeição geométrica inicial, $f_{o1}=0.01$.

4.2 Análise da Resposta da Coluna para $P_o=1.1P_{cr}$

Estuda-se a seguir o comportamento da coluna quando a parcela constante do carregamento axial é superior a carga crítica de Euler, no caso $P_o = 1.1 P_{cr}$. A Figura 8 mostra o caminho pós-crítico da coluna, o qual é simétrico estável, e nota-se que para valores da parcela constante do carregamento axial maiores que a carga crítica de Euler, a coluna pode ter três posições de equilíbrio pós-crítico, sendo as posições 1 e 3, posições de equilíbrio pós-

crítico estável e a posição 2, correspondente à solução fundamental, uma posição de equilíbrio instável.

Mostra-se na Fig. 9 o diagrama de bifurcação da coluna tendo-se como parâmetro de controle a amplitude da excitação e a frequência da excitação igual à frequência natural do sistema.

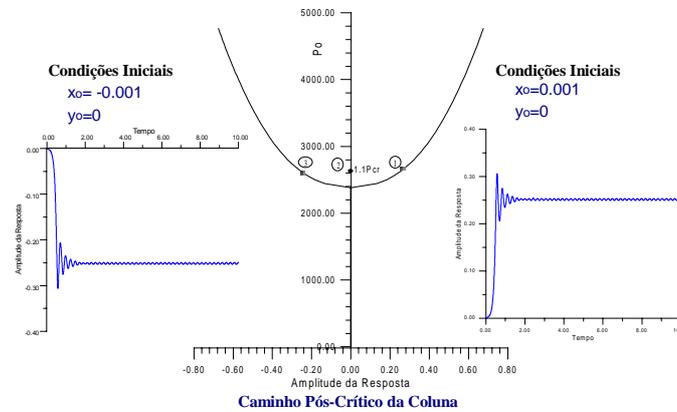


Figura 8- Caminho pós-crítico da coluna e resposta do sistema para dois conjuntos de condições iniciais.

Verifica-se, através do diagrama de bifurcação da Fig. 9 que a coluna sai da posição 1 que é uma posição de equilíbrio pós-crítico estável e, ao variar-se o parâmetro de controle, entra na região 2 onde verifica-se a presença de movimentos caóticos e nota-se que nesta região o sistema está oscilando em torno das três posições de equilíbrio pós-crítico. Verifica-se na região 3 a presença de soluções que possuem o dobro do período da excitação e, ao variar-se ainda mais o parâmetro de controle, verifica-se a presença de um salto dinâmico na passagem da região 4 para a região 5. Verificou-se na região 5 que a coluna volta à posição de equilíbrio vertical na faixa de 3.12 a 3.44 para o parâmetro da amplitude da excitação. Testou-se o mesmo modelo para outros tipos de condições notando-se o retorno da coluna à posição fundamental de equilíbrio que estaticamente é instável. Na região 6 verifica-se novamente a presença de movimentos caóticos e na região 7 soluções com o dobro e com o quádruplo do período da excitação e, ao variar-se parâmetro de controle, verifica-se novamente a presença de movimentos caóticos na região 8. As Figuras 10, 11 e 12 mostram a resposta no tempo para pontos pertencentes às regiões 1, 2 e 5 do diagrama de bifurcação da Fig. 9.

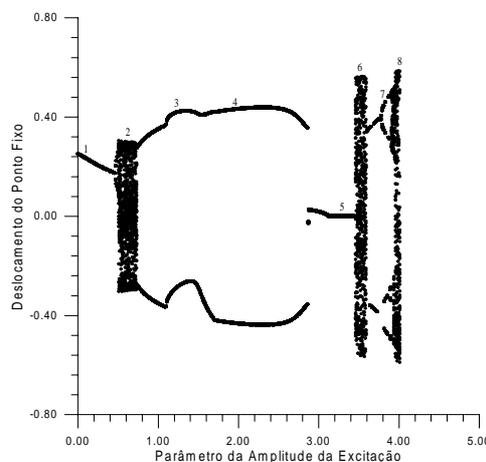
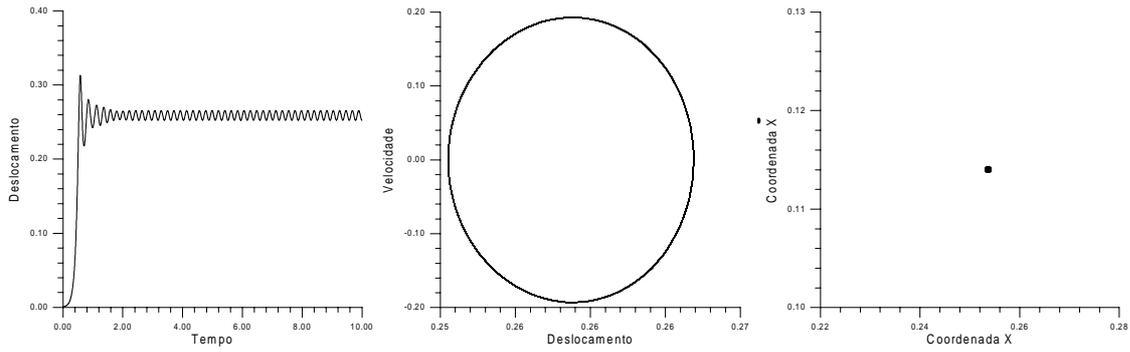
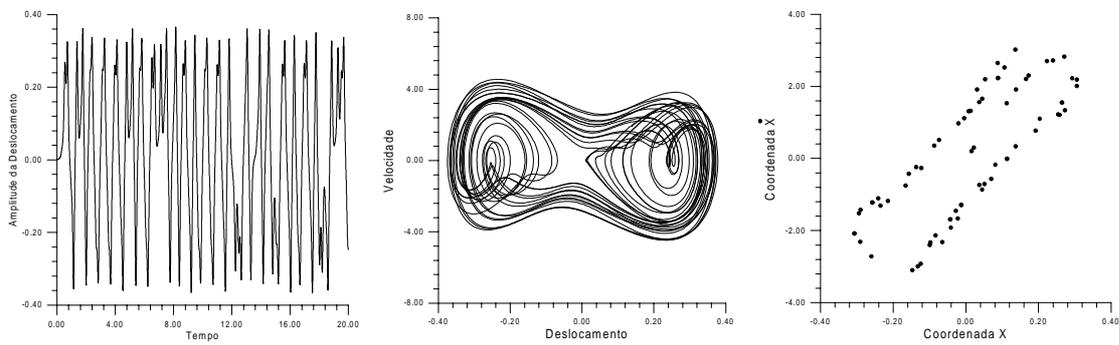


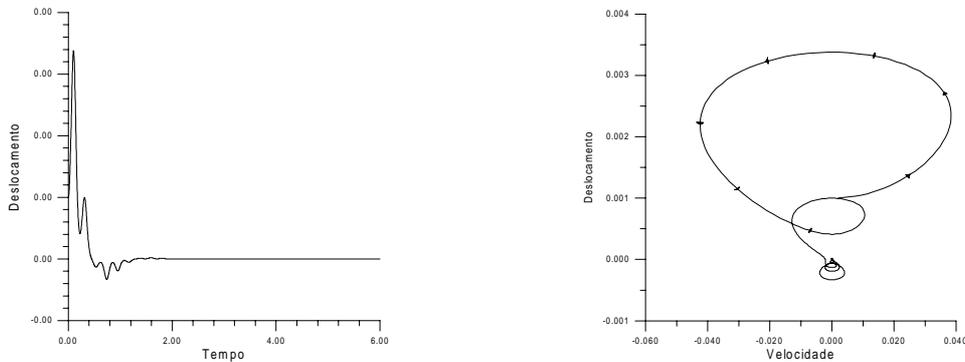
Figura 9- Diagrama de bifurcação da coluna com um grau de liberdade e não-linearidades, $\Omega = \omega$ e $P_0 = 1.1P_{cr}$.



a) Resposta no Tempo. b) Plano de fase. c) Diagrama de Poincaré.
 Figura 10 - Resposta no tempo, espaço de fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 1 do diagrama de bifurcação da Fig. 9.



a) Resposta no Tempo. b) Plano de fase. c) Diagrama de Poincaré.
 Figura 11 - Resposta no tempo, espaço de fase e diagrama de Poincaré do sistema na região 1 do diagrama de bifurcação da Fig. 9.



a) Resposta no Tempo. b) Espaço Fase.
 Figura 12 - Resposta no tempo e espaço de fase do sistema na região 5 do diagrama de bifurcação da Fig. 9.

4.3 Conclusão

A equação de movimento da coluna para o problema linear, nada mais é do que uma generalização da equação de Mathieu. Sabe-se que, no espaço dos parâmetros de controle dessa equação existem regiões associadas a respostas que crescem de forma ilimitada com o tempo, conhecidas como regiões de ressonância paramétrica. Na presença do amortecimento, as regiões de instabilidade diminuem, e podem desaparecer completamente da região de

interesse prático. Portanto o aumento do coeficiente de amortecimento da estrutura é uma estratégia que pode ser usada com bastante eficiência para o controle ou eliminação da ressonância paramétrica. As não-linearidades devem ser consideradas quando se estuda o movimento no interior das regiões instáveis. A teoria linear que prevê o crescimento da resposta, nas regiões de ressonância paramétrica, só descreve o fenômeno físico se os deslocamentos forem pequenos o suficiente para que se possa desprezar o efeito das não-linearidades. Nota-se através dos diagramas de bifurcação uma diversidade na resposta da coluna nas regiões instáveis, as quais podem apresentar período igual ao período da força excitadora além de oscilações sub-harmônicas e caóticas. Observa-se que, devido a presença da imperfeição, a resposta permanente ao contrário do caso perfeito, tem sempre uma amplitude não nula, isto porque ao se considerar uma certa imperfeição, o sistema já está deslocado de sua posição de equilíbrio e a carga axial provoca conseqüentemente, desde o início, flexão na coluna.

REFERÊNCIAS

- Bazant, Z. P.; Cedolin, L., *Stability of Structures - Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. Oxford University Press, New York, 1991.
- Bolotin, V.V., 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco, USA
- Nayfeh, A. H., Mook, D. T., 1979. *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, N.Y.
- Oliveira, S. S., 1998, *Instabilidade Paramétrica de Colunas*. Dissertação de mestrado, PUC-Rio, RJ.
- Soares, M.E.S., 1992, *Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade*, Dissertação de Mestrado, EPUSP, São Paulo.
- Stoker, J. J., 1950, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, N.Y.

CHAOTIC OSCILLATIONS OF COLUNS UNDER AXIAL PERIODIC LOADS

ABSTRACT

The main aim of the present work is to develop a formulation and some strategies for the instability analysis of slender columns under an axial harmonic force this phenomenon is known as parametric resonance. An excitation is said to be parametric if it appears as time-dependent - often periodic - coefficients in the equations governing the motion of the system, and not as an inhomogeneous term. The column is described by Navier classical formulation. The present work consider the column with one or three degrees of freedom with or without nonlinearities. The equations governing the motion are obtained by the Ritz method.

The linear equation (Mathieu equation) and the Duffing equation with small damping are solved in an approximate way using multiple scales techniques, revealing the possibility of destabilizing the static equilibrium position in certain regions of the control space. A similar conclusion is obtained by employing numerical methods for the solution of linear and nonlinear equation systems with or without initial geometrical imperfections.

This enables one to obtain time response, phase space, projections Poincaré sections and bifurcation diagrams. These numerical results show that the column with nonlinearities and loaded by a periodic longitudinal force can present various solutions with the same period as the forcing and subharmonic e superharmonic oscillations, as well as chaotic motions.

Keywords: Coluns, Parametric instability, Non-linear oscillations, Chaos.