



ANÁLISE DAS TENSÕES TÉRMICAS EM CERÂMICAS VIA UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.

L. S. Diniz e M. G. da Silva

CPGEM/CT-UFPB

Universidade Federal da Paraíba

58059-900 João Pessoa - PB - Brasil

C. A. C. Santos e F. A. Belo

LES/DTM – CT/UFPB

Laboratório de Energia Solar – Campus I

Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa – PB – 58059-900 - Brasil

Sumário. As fraturas das cerâmicas estão diretamente relacionadas às tensões geradas durante os choques térmicos. Métodos numéricos e experimentais têm sido propostos para a determinação destas tensões, muitos dos quais não têm levado em consideração a dependência térmica das propriedades do material. O presente trabalho utiliza o método analítico da transformada integral generalizada (GITT), para obtenção da distribuição de temperaturas na amostra e avaliação das tensões térmicas máximas em função do número de Fourier.

Palavras-chave. Tensões Térmicas, Temperatura, Fourier, Difusividade, Biot

1. INTRODUÇÃO

As análises de resistência ao choque térmico de materiais quebradiços, tal como a cerâmica, têm sido por muito tempo realizadas apenas através de observações de caráter qualitativo. Mais recentemente os interesses têm direcionado as avaliações com base quantitativa. Esta mudança de enfoque para a base quantitativa tem sido indicada por análises e experimentos que demonstraram que determinados materiais podem apresentar indicativos de melhor qualidade que outros em um tipo de teste e produzir resultados contrários em outros testes. As razões para este comportamento estão relacionadas com a complexidade para o conhecimento do campo térmico e dos parâmetros envolvendo propriedades térmicas dependentes da temperatura.

As tensões térmicas geradas durante os testes de choque térmico, estão diretamente relacionadas com as fraturas das cerâmicas; por isso muitos estudos têm sido desenvolvidos para a determinação destas tensões. Entre estes estudos podemos citar os métodos do resfriamento e aquecimento rápido. No resfriamento rápido, a amostra é imersa em água e a

resistência residual é medida para se obter a diferença de temperatura crítica, ΔT_c . A diferença de temperatura crítica é responsável pela contração significativa nas dimensões da amostra causando sua fratura, que segundo T. Nishikawa, T. Gao, M. Hibi, M. Takatsu (1994) representa a resistência do material cerâmico ao choque térmico. No aquecimento rápido, o corpo é submetido a aquecimento produzido por radiação infravermelho, e se estima o decréscimo de sua resistência. Nestes métodos não se leva em consideração que as propriedades térmicas das cerâmicas (condutividade, difusividade e calor específico), variam significativamente com a temperatura, e para cada tipo diferente de cerâmica.

A não consideração destas propriedades, afeta na determinação das tensões térmicas. Em trabalhos anteriores como o de T. R. Goodman (1961), a condutividade térmica foi considerada, diminuindo assim o erro na determinação das tensões, no trabalho de T. Nishikawa, T. Mizui, M. Takatsu & Y. Mizutani (1995) leva-se em consideração todas as propriedades, e as tensões são obtidas numericamente pelo método implícito das diferenças finitas.

O presente trabalho tem por objetivo determinar o campo de temperatura de um problema de condução transiente com as propriedades térmicas variando a temperatura e as tensões térmicas provenientes dos choques térmicos. Para a determinação do campo térmico é utilizado a metodologia própria da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). O sistema de equações diferenciais ordinárias da temperatura transformada foi resolvido pelo da subrotina DIVIPAG do IMSL (1989), com controle automático de erro. Os resultados são apresentados em forma de tabelas onde se discute a convergência da solução e os efeitos da influencia dos parâmetros de interesses práticos na engenharia de materiais.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.

A determinação da distribuição de temperaturas considerando a condução de calor unidimensional para uma placa plana infinita, no aquecimento e no resfriamento rápido em ambas as superfícies, e ainda levando-se em consideração as propriedades do material, condições de contorno e inicial, são escritas como mostrado abaixo.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0 \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (1.b)$$

$$-K(T) \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_f), \quad x = L \quad (1.c)$$

$$T = T_i, \quad t = 0 \quad (1.d)$$

Fazendo a adimensionalização das equações acima, através dos seguintes grupos adimensionais,

$$X = \frac{x}{L} \quad \tau = \frac{\alpha_0 t}{L^2} \quad \alpha^* = \frac{\alpha(T)}{\alpha_0}$$

$$K^* = \frac{K(T)}{K_0} \quad \Theta(X, \tau) = \frac{T - T_i}{T_f - T_i} \quad Bi = \frac{h \cdot L}{k_0} \quad (2.0)$$

obtemos:

$$\frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\alpha^* \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X} \right] , \quad 0 < X < 1 \quad \tau > 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X} = 0 , \quad X = 0 \quad (3.b)$$

$$K^* \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X} + Bi(\Theta(X, \tau) - 1) = 0 , \quad X = 1 \quad (3.c)$$

$$\Theta(X, \tau) = 0 , \quad \tau = 0 \quad (3.d)$$

Onde os subscritos f e i representam respectivamente as condições final e inicial dos ensaios.

A difusividade e condutividade térmica adimensionais mostradas nas equações acima são expressas em função da temperatura, segundo o trabalho de T. Nishikawa, T. Mizui, M. Takatsu & Y. Mizutani (1995), como:

$$K^* = 1 + A\Theta(X, \tau) \quad (4.a)$$

$$\alpha^* = 1 + B\Theta(X, \tau) \quad (4.b)$$

Os coeficientes A e B das equações (4.a,b) são coeficientes de dependência da temperatura, denotados como constantes de temperatura. A difusividade térmica adimensional, α^* , foi usada no lugar do calor específico, C_p , porque ela é expressa em termos da condutividade térmica e calor específico.

Seguindo a metodologia empregada pela Técnica da Transformada Integral Generalizada indicada por Cotta, R. M. (1993) é selecionado o seguinte problema de auxiliar

$$\frac{\partial^2 \psi_i(X)}{\partial X^2} + \mu_i^2 \psi_i(X) = 0 , \quad 0 < X < 1 \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial \psi_i(X)}{\partial X} = 0 , \quad X = 0 \quad (5.b)$$

$$\frac{\partial \psi_i(X)}{\partial X} + Bi\psi_i(X) = 0 , \quad X = 1 \quad (5.c)$$

O par de transformada obtido para o problema proposto é:

$$\bar{\Theta}_i(\tau) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \psi_i(X) \Theta(X, \tau) dX \quad \text{Transformada} \quad (6.a)$$

$$\Theta(X, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i(X) \bar{\Theta}_i(\tau)}{N_i^{1/2}} \quad \text{Inversa} \quad (6.b)$$

Após o acoplamento do problema principal com o problema auxiliar e obtenção do par transformada integral e através de manipulações matemáticas e aplicação direta do segundo teorema de GREEN, obtemos a equação diferencial ordinária, na forma transformada da distribuição de temperaturas, dada pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_i(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \bar{\Theta}_j = \bar{D}_i \quad (7.a)$$

$$\bar{\Theta}_i(0) = 0 \quad (7.b)$$

com os coeficientes da equação (7.a) dados por:

$$C_{ij} = A_{ij} - B_{ij} \quad (7.c)$$

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\mu_i^2 \psi_i(X) \psi_j(X) \alpha^* dX}{(N_i N_j)^{1/2}} \quad (7.d)$$

$$B_{ij} = \int_0^1 \frac{\alpha^*(1) Bi \psi_i}{(N_i N_j)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{K^*(1)}\right) \psi_j dX \quad (7.e)$$

$$\bar{D}_i = \frac{1}{N_i^{1/2}} Bi \psi_i(1) \frac{\alpha^*(1)}{K^*(1)} \quad (7.f)$$

onde o número 1 na equação acima indica que a função é tomada na parede.

A equação acima foi resolvida utilizando código computacional FORTRAN POWERSTATION versão 4.0 para ambiente Windows, usando a subrotina IVPAG/DIVIPAG.

A tensão térmica adimensional, σ^* , para uma placa infinita unidimensional, segundo S. P. Timoshenko & J. N. Goodier (1970) e dada por:

$$\sigma^*(X) = \Theta(\tau)_{\text{média}} - \Theta(X, \tau) \quad (8.0)$$

A temperatura média na placa pode ser calculada a partir da distribuição de temperatura da seguinte forma:

$$\Theta(\tau)_{\text{média}} = \frac{1}{X} \int_0^X \Theta(X', \tau) dX' \quad (9.0)$$

onde σ^* , tensão térmica adimensional, é dada como $\sigma_f / [\gamma E \Delta T]$, σ_f é a resistência à fratura, γ é o coeficiente de expansão térmica, E é o módulo de Young's e ΔT é o valor absoluto de $T_f - T_i$ é a diferença de temperatura no teste de choque térmico. A tensão térmica máxima é gerada no centro do corpo ($X=0$), durante o teste do aquecimento rápido e no resfriamento rápido a tensão máxima é gerada na superfície do corpo ($X=1$).

3. RESULTADOS

Os resultados da solução são inicialmente analisados quanto a qualidade obtida em termos de convergência e confiabilidade para uma análise ampliada e com controle dos parâmetros que influenciam as tensões térmicas. A tabela 1 mostra resultados obtidos para as tensões térmicas em testes de aquecimento rápidos com os coeficientes $A=0$ e $B=0$, que representam as tensões equivalente de uma situação clássica de um problema de condução transiente com condutividade e difusividade térmica constantes. Na tabela 1 pode ser observado que a convergência plena para diferentes valores do número de Fourier (τ) com quatro algarismos significativos é alcançada para 50 equações. Situação semelhante é observada na tabela 2, representando no entanto agora a situação de resfriamento. As dificuldades de convergência para o aquecimento estão relacionadas diretamente com a definição das tensões térmicas de aquecimento e resfriamento e as variações das propriedades com a temperatura. No resfriamento a tensão térmica depende das temperaturas média do corpo e da superfície bem como das propriedades térmicas que aumentam com a temperatura, facilitando a difusão de calor no corpo exigindo menor tempo e menos termos da série para a completa captação dos efeitos térmicos, conforme mostra a tabela 3. Enquanto no aquecimento se verifica que a tensão térmica depende da temperatura no centro do corpo além da temperatura média e de suas propriedades. Se verifica ainda que as propriedades decrescem com a temperatura, dificultando a propagação da onda térmica necessitando de tempo e o número de termos maiores, como mostrado na tabela 4. Como pode ser observado a tabela 4 apresenta resultados para um número limitado a $N = 30$, n representando o número de autovalores utilizados. A limitação computacional alcançada para este número de autovalores se credita as observações feitas acima.

Tabela 1 – Tabela de convergência dos valores das tensões térmicas(σ) no aquecimento para diferentes números de autovalores e coeficientes de temperatura ($A = 0, B = 0$).

τ	σ N = 10	σ N = 20	σ N = 30	σ N = 40	σ N = 50	σ N = 60
0,025	0,0821	0,0782	0,0775	0,0772	0,0771	0,0771
0,050	0,1360	0,1321	0,1314	0,1311	0,1310	0,1310
0,100	0,2011	0,1973	0,1965	0,1963	0,1962	0,1962
0,125	0,2156	0,2117	0,2110	0,2107	0,2106	0,2106
0,150	0,2221	0,2182	0,2174	0,2172	0,2171	0,2170
0,200	0,2208	0,2170	0,2162	0,2160	0,2158	0,2158
0,225	0,2164	0,2124	0,2116	0,2114	0,2113	0,2112
0,250	0,2105	0,2066	0,2058	0,2055	0,2054	0,2053
0,300	0,1969	0,1929	0,1922	0,1919	0,1918	0,1917
0,325	0,1897	0,1858	0,1850	0,1847	0,1846	0,1845
0,350	0,1825	0,1786	0,1778	0,1776	0,1774	0,1774
0,400	0,1686	0,1646	0,1638	0,1636	0,1634	0,1635
0,425	0,1618	0,1579	0,1572	0,1569	0,1567	0,1568
0,450	0,1554	0,1514	0,1507	0,1504	0,1503	0,1503
0,500	0,1431	0,1391	0,1384	0,1382	0,1380	0,1381

Tabela 2 – Tabela de convergência dos valores das tensões térmicas(σ) resfriamento para diferentes números de autovalores e coeficientes de temperatura ($A = 0, B = 0$).

τ	σ N = 10	σ N = 20	σ N = 30	σ N = 40	σ N = 50	σ N = 60
0,01	0,3490	0,3493	0,3488	0,3491	0,3491	0,3492
0,02	0,4126	0,4134	0,4135	0,4136	0,4136	0,4136
0,04	0,4613	0,4620	0,4620	0,4620	0,4621	0,4622
0,05	0,4709	0,4715	0,4714	0,4715	0,4716	0,4715
0,06	0,4758	0,4764	0,4760	0,4761	0,4762	0,4764
0,08	0,4775	0,4775	0,4773	0,4773	0,4773	0,4773
0,09	0,4757	0,4756	0,4755	0,4754	0,4754	0,4755
0,10	0,4727	0,4726	0,4725	0,4725	0,4725	0,4725
0,12	0,4644	0,4643	0,4642	0,4642	0,4642	0,4642
0,14	0,4541	0,4539	0,4539	0,4539	0,4539	0,4538
0,15	0,4484	0,4482	0,4482	0,4482	0,4482	0,4481
0,16	0,4425	0,4423	0,4423	0,4423	0,4423	0,4422
0,17	0,4364	0,4362	0,4362	0,4362	0,4362	0,4362
0,18	0,4302	0,4300	0,4300	0,4300	0,4300	0,4300
0,20	0,4176	0,4174	0,4174	0,4174	0,4174	0,4174

Tabela 3 – Tabela de convergência dos valores das tensões térmicas(σ) no resfriamento para diferentes números de autovalores e coeficientes de temperatura ($A = 0, B = 5$).

τ	σ N = 10	σ N = 20	σ N = 30	σ N = 40	σ N = 50	σ N = 60
0,01	0,3824	0,3722	0,3689	0,3668	0,3665	0,3670
0,02	0,4426	0,4314	0,4262	0,4242	0,4238	0,4220
0,04	0,4825	0,4680	0,4637	0,4610	0,4599	0,4590
0,05	0,4881	0,4718	0,4682	0,4658	0,4642	0,4634
0,06	0,4893	0,4737	0,4685	0,4656	0,4655	0,4635
0,08	0,4841	0,4672	0,4615	0,4593	0,4581	0,4568
0,09	0,4796	0,4619	0,4568	0,4546	0,4522	0,4523
0,10	0,4750	0,4552	0,4513	0,4493	0,4481	0,4474
0,11	0,4707	0,4510	0,4466	0,4444	0,4430	0,4417
0,12	0,4672	0,4486	0,4432	0,4406	0,4384	0,4388
0,14	0,4625	0,4444	0,4383	0,4354	0,4341	0,4324
0,15	0,4614	0,4422	0,4370	0,4341	0,4331	0,4316
0,16	0,4611	0,4426	0,4366	0,4335	0,4327	0,4318
0,18	0,4619	0,4419	0,4373	0,4348	0,4328	0,4327
0,20	0,4640	0,4441	0,4393	0,4369	0,4360	0,4339

Tabela 4 – Tabela de convergência dos valores das tensões térmicas(σ) no aquecimento para diferentes números de autovalores e coeficientes de temperatura ($A = -0,3, B = -0,2$).

τ	σ N = 10	σ N = 20	σ N = 30
0,025	0,0852	0,0802	0,0789
0,050	0,1401	0,1335	0,1313
0,100	0,2070	0,1971	0,1926
0,125	0,2234	0,2121	0,2065
0,150	0,2325	0,2200	0,2135
0,200	0,2374	0,2232	0,2152
0,225	0,2361	0,2212	0,2130
0,250	0,2334	0,2179	0,2095
0,300	0,2255	0,2093	0,1998
0,325	0,2209	0,2045	0,1947
0,350	0,2162	0,1995	0,1896
0,400	0,2064	0,1895	0,1796
0,425	0,2016	0,1845	0,1745
0,450	0,1968	0,1796	0,1694
0,500	0,1874	0,1701	0,1602

3.1 Efeito dos Coeficientes de Temperatura A e B nas Tensões Térmicas

3.1.1 Condições de Resfriamento Rápido

O gráfico da figura 1, mostra as mudanças das tensões térmicas σ^* , no teste do resfriamento rápido em função do número de Fourier τ . Podem ser observados nas curvas os pontos de máximo das tensões, para valores diferentes dos coeficientes de temperatura A e B.

Na curva 1, onde a difusividade é função da temperatura, enquanto a condutividade permanece constante (A=0, B=5), o intervalo de tempo onde ocorre o gradiente máximo de temperatura é pequeno, este efeito provoca uma elevação da tensão térmica máxima com relação a curva 1.

Na curva 2, pelo o fato da difusividade e condutividade térmicas serem constantes (A=0, B=0), e não aumentarem com a diminuição da temperatura, o intervalo de tempo onde ocorre a tensão térmica máxima é grande, e como o fluxo de calor também é pequeno, o valor da tensão térmica máxima é menor do que os indicados nas curvas anteriores.

Na curva 3, onde a difusividade e condutividade térmica são dependentes da temperatura (A=3, B=5). Tendo em vista o aumento da difusividade com a diminuição da temperatura, o intervalo de tempo onde ocorre o gradiente máximo de temperatura é menor. Por outro lado o aumento da condutividade diminui o fluxo de calor, como pode ser visto pela equação 1.d, provocando a diminuição do valor da tensão térmica máxima.

Na curva 4 na qual A=3 e B=0 da figura 1, a condutividade térmica é dependente da temperatura, enquanto a difusividade permanece constante, o tempo para ocorrer o gradiente máximo de temperatura é maior comparado com as outras curvas, enquanto que o valor da tensão é menor.

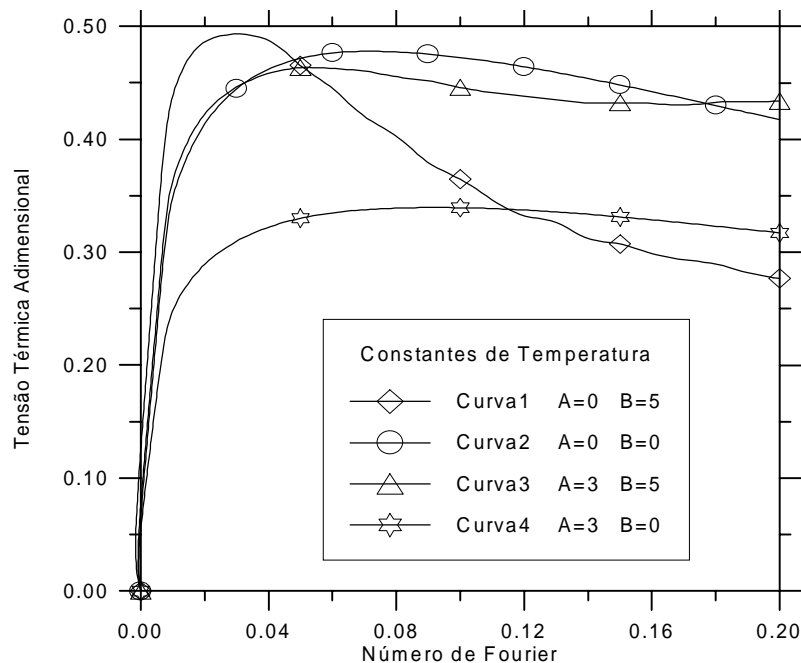


Figura 01 – Variação da tensão térmica na superfície de um corpo com o número de Fourier para o rápido resfriamento. Corpo com diferentes coeficientes de temperatura A e B, mas com o número de Biot constante e igual a 5.

A distribuição de temperatura no corpo em função do comprimento adimensional e para o número de Fourier onde ocorre a máxima tensão térmica ($\tau = 0.032$), para os coeficientes de temperatura, $A=0$ e $B=5$ é mostrada na figura 02. O comportamento das outras curvas, para coeficientes de temperatura diferentes têm o mesmo comportamento que as curvas mostradas na figura.

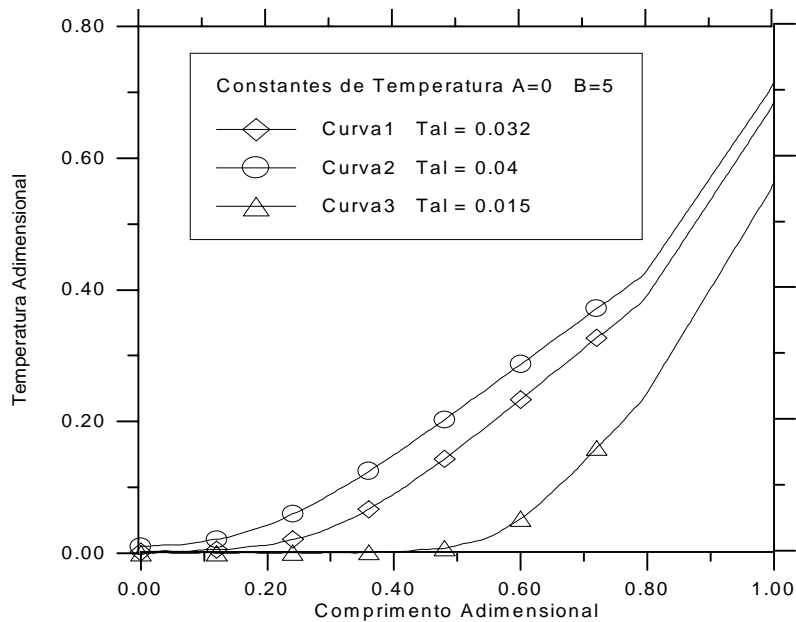


Figura 02 - Distribuição de temperatura num corpo para o rápido resfriamento. O numero de Biot é constante e igual a 5.

3.1.2- Condições de aquecimento rápido.

No gráfico da figura 03, podem ser observadas as tensões térmicas máximas atingidas por uma amostra de material cerâmico quando submetido a um teste de aquecimento rápido em função do número de Fourier e diferentes coeficientes de temperatura A e B. Neste tipo de teste as tensões térmicas máximas σ_{max}^* , são atingidas no centro da amostra. A distribuição de temperatura é mostrada na figura 04.

Como pode ser observado pelas curvas obtidas, os valores das tensões térmicas máximas no teste do aquecimento são aproximadamente metade do valor determinado no resfriamento, enquanto o intervalo de tempo necessário para atingir o gradiente máximo de temperatura aumenta. Isso é explicado pelo fato da condutividade e da difusividade térmicas diminuírem com o aumento da temperatura.

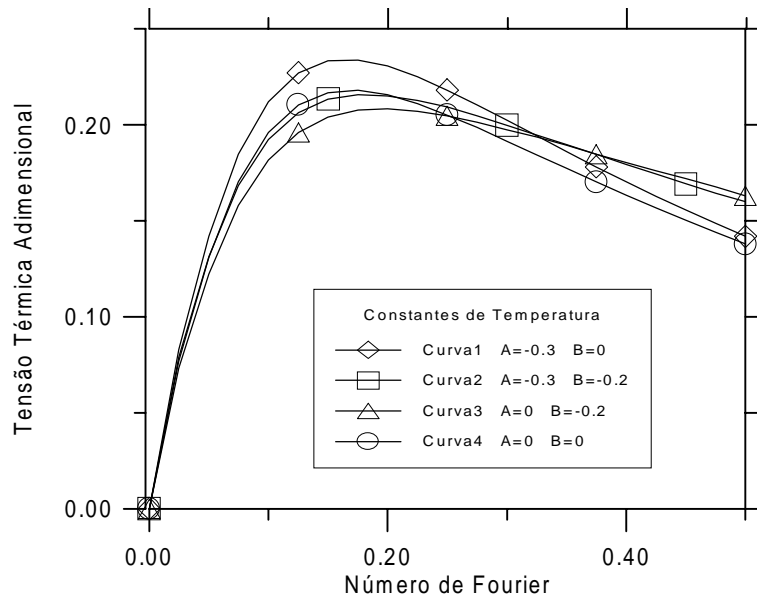


Figura 03- Variação das tensões térmicas no centro de um corpo com o número de Fourier para o aquecimento rápido. Corpo com diferentes coeficientes de temperatura A e B e Biot constante e igual a 5.

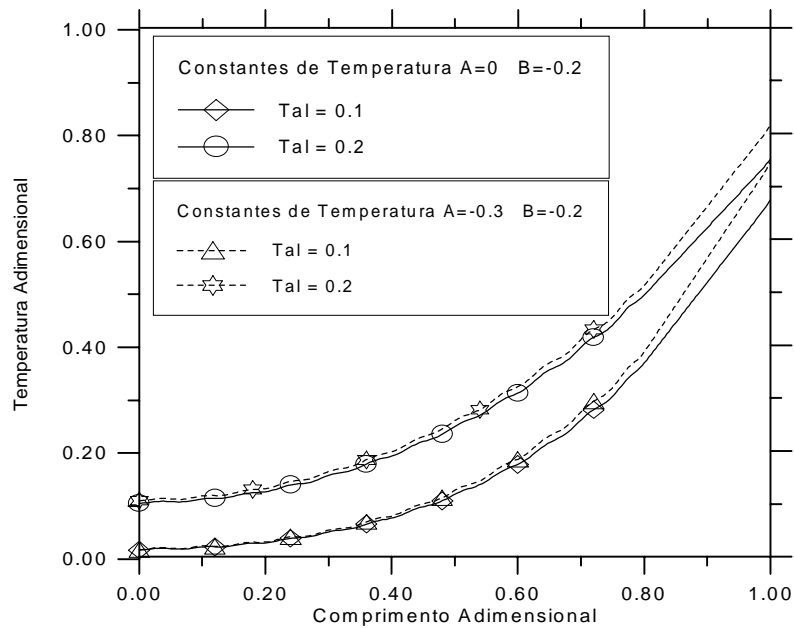


Figura 04 Distribuição de temperatura para o aquecimento rápido. O número de Biot é constante e igual a 5.

4. CONCLUSÕES

A técnica da transformada integral generalizada foi utilizada levando-se em consideração as propriedades térmicas do material cerâmico. E em função dos resultados obtidos podemos concluir que:

- 1 - A técnica da transformada integral leva a resultados mais confiáveis, já que a solução das equações para a distribuição de temperaturas é feita analiticamente.
- 2 - O uso desta técnica utiliza programas simples, reduzindo significativamente o custo computacional.
- 3 - Devido a um termo não linear na equação 1.c do problema principal, a técnica não reproduz resultados satisfatórios para as temperaturas na superfície da amostra no teste de resfriamento rápido. Para contornar este problema obtivemos estas temperaturas através de um balanço integral.
- 4 - A tensão térmica gerada no aquecimento rápido é aproximadamente metade do valor obtido no teste de resfriamento rápido.

5. REFERÊNCIAS

- R. M. Cotta, 1993, Integral transforms in computational heat and flow, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida..
- IMSL Library, Houston, Texas, 1989
- T. R. Goodman, 1961, The Heat - Balance Integral - Further Considerations and Refinements, J. Heat Transfer, Transactions of the ASME, Vol. 83, pp 83-86..
- T. Nishikawa, T. Gao, M. Hibi & M. Takatsu, 1994, Heat transmission during thermal shock testing of ceramics, Journal of Materials Science, Vol.29, pp. 213-217.
- T. Nishikawa, T. Mizui, M. Takatsu & Y. Mizutani, 1995, Effect of the temperature dependence of thermal properties on the thermal shock tests of ceramics, Journal of Materials Science, Vol.30, pp. 5013-5019.
- S. S. Manson and R. W. Smith, 1956, Quantitative Evaluation of Thermal-Shock Resistance, J Heat Transfer, Vol 78, pp 533-544.
- W. P. Rogers, Ashley F. Emery, Richard C. Bradt and Albert S. Kobayashi, 1987, Statistical Study of Thermal Fracture of ceramic Materials in the Water Quench Test, Journal of the American Ceramic Society, Vol. 70, pp 406-412.
- S. P. Timoshenko & J. N. Goodier, 1970, Theory of Elasticity, Mcgraw Hill, New York..
- M. N. Ozisik, Heat Conduction, 1980, John Wiley & Sons, Inc. New York.

ANALYSIS OF THE THERMAL STRESS IN CERAMIC THROUGH USE OF THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE

ABSTRACT: The fractures of the ceramic are directly deal with the thermal stress generated during the thermal shocks. Numeric and experimental methods have been proposed for the determination of these stress, many of the which have not been taking in consideration the thermal dependence of the properties of the material. The present work uses the analytic procedure included on the generalized integral transform technique (GITT), for obtaining of the distribution of temperatures in the sample and evaluation of the maximum thermal stress as a function of the Fourier number.

Keywords. Thermal stress, Temperature, Fourier, Diffusivity, Biot