



MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS ADAPTATIVAS ATRAVÉS DO MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

Osvaldo Prado de Rezende

Escola de Engenharia Industrial de São José dos Campos
Av. Barão do Rio Branco, 882
CEP: 12223-000 – São José dos Campos, SP, Brasil

Patrícia Tieme Maeda, Luiz Carlos Sandoval Goes

Instituto Tecnológico de Aeronáutica / CTA
12228-900 – São José dos Campos, SP, Brasil

***Resumo:** A modelagem dinâmica e o controle ativo de estruturas flexíveis são estudadas através da técnica do Lugar Geométrico das Raízes. O trabalho apresenta a derivação da Função de Transferência (SISO) de dois estudos de caso. O primeiro exemplo consiste no controle ativo de uma viga de Euler-Bernouille, bi-apoiada, controlada e monitorada por elementos puntiformes, atuador inercial e sensor acelerométrico. O segundo exemplo contempla a mesma estrutura flexível porém controlada e monitorada com elementos piezoelétricos, distribuídos ao longo da estrutura. Os ganhos de controle proporcional-derivativo e a influência das dinâmicas dos sensores e atuadores nas propriedades de estabilidade do sistema são discutidas.*

***Palavras-Chave:** Controle ativo, Estrutura flexível, Sensores e atuadores piezoelétricos.*

1. Introdução

Manipuladores robóticos para aplicações espaciais devem possuir pequenos coeficientes inerciais, massas e momentos de inércia, em razão de economia de peso e energia nas manobras requeridas. Essas características aliadas ao fato de que esses manipuladores usualmente possuem elos longos, torna relevante, para efeito de controle, a influência da dinâmica dos modos flexíveis. Os modos flexíveis de uma estrutura passam a ter importância no projeto do sistema de controle quando os primeiros modos naturais da estrutura localizam-se dentro da banda de frequência do controlador. Desta forma, o controle ativo de uma estrutura flexível requer a inclusão da dinâmica dos modos rígidos e flexíveis, bem como da dinâmica dos sensores e atuadores utilizados na malha de controle.

O conhecimento da dinâmica da estrutura e da dinâmica dos elementos transdutores, sensores e atuadores, constituem a base para o projeto do sistema de controle ativo. A integração de sensores e atuadores em uma estrutura flexível com a inclusão de comandos eletrônicos visando o controle de variáveis importantes, eleva a categoria da estrutura, isto é, ela passa de uma estrutura ativa para uma categoria de estrutura adaptativa.

Neste trabalho analisa-se os efeitos da dinâmica dos sensores e atuadores quando integrados em uma estrutura flexível. Dois tipos de sensores e atuadores são integrados em uma estrutura flexível tipo viga simples. As equações do movimento são obtidas através das equações de Lagrange de onde se obtém a Função de Transferência que é a base para o projeto de um controlador tipo P-D, via o LGR. Nestes estudos, são estabelecidas as condições de estabilidade para o projeto de um controlador ativo de vibrações de uma estrutura adaptativa.

2. Modelagem Dinâmica

Na modelagem dinâmica da estrutura flexível, tipo viga de Euler-Bernouille, são incluídos os efeitos dinâmicos dos sensores (acelerômetro e sensor piezoelétrico distribuído), e atuadores (atuador inercial e atuador piezoelétrico distribuído) conforme indicado na figura 1, abaixo.

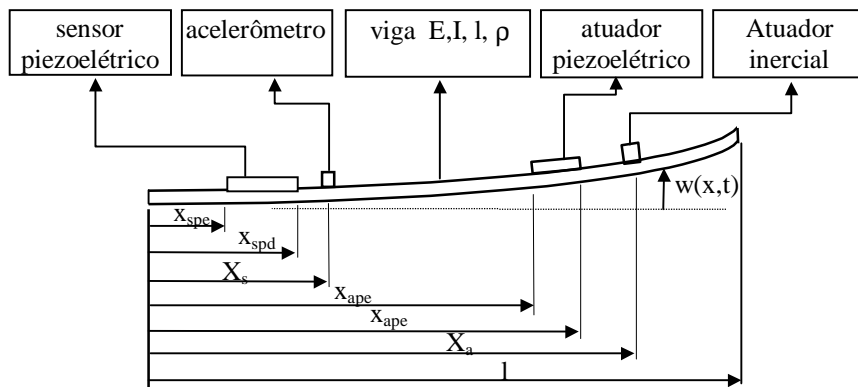


Figura 1: Posicionamento dos transdutores na viga de comprimento l .

As equações do movimento podem ser obtidas através das equações de Lagrange Generalizadas (Junkins & Kim, 1993), onde se considera as propriedades, de inércia e rigidez, distribuídas. O Lagrangeano generalizado do sistema flexível é dado por:

$$L(w, \dot{w}, w') = T(\dot{w}) - V(w') \quad (1)$$

onde T e V são, respectivamente, as energias cinética e potencial elástica do sistema. No cálculo da energia cinética e potencial consideram-se as propriedades inerciais e de rigidez elástica não só da viga como também dos atuadores e sensores. Sendo $w(x,t)$ a deformação elástica transversal da viga na posição x , as energias cinética e potencial da estrutura são dadas por:

$$T = T_v + T_s + T_a + T_{sp} + T_{ap} \quad (2-a)$$

$$V = V_v + V_{sp} + V_{ap} \quad (2-b)$$

onde

$$T_v = \frac{1}{2} \int_0^l m_v \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^l m_s \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 \delta(x - x_s) dx$$

$$T_a = \frac{1}{2} \int_0^l m_a \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 \delta(x - x_a) dx \quad T_{ap} = \frac{1}{2} \int_0^l m_{ap} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 [u(x - x_{ape}) - u(x - x_{apd})] dx$$

$$T_{sp} = \frac{1}{2} \int_0^l m_{sp} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 [u(x - x_{spe}) - u(x - x_{spd})] dx \quad V_v = \frac{1}{2} \int_0^l EI_v \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$V_{ap} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{ap} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 [u(x - x_{ape}) - u(x - x_{apd})] dx$$

$$V_{sp} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{sp} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 [u(x - x_{spe}) - u(x - x_{spd})] dx$$

T_v , T_s , T_a , T_{sp} e T_{ap} são as energias cinéticas da viga, do acelerômetro, do atuador inercial, do sensor e do atuador piezoelétricos, respectivamente. V_v , V_{sp} e V_{ap} são as energias potenciais da viga, do sensor e do atuador piezoelétricos, respectivamente. m_v , m_{sp} e m_{ap} são respectivamente, as massas por unidade de comprimento da viga, do sensor e do atuador piezoelétricos. m_s e m_a são as massas do acelerômetro e do atuador inercial, respectivamente. EI_v , EI_{sp} e EI_{ap} são as rigidez flexurais da viga, do sensor e do atuador piezoelétricos, respectivamente. $\delta(\cdot)$ e $u(\cdot)$ são as funções espaciais delta de Dirac e unitária, respectivamente.

Para discretizar o sistema, $w(x, t)$ é expandido em termos de um conjunto finito de funções admissíveis onde considera-se o princípio da separação de variáveis,

$$w(x, t) = \sum_r^{n_e} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3)$$

onde $\phi_r(x)$ é a função admissível dependente apenas da posição x , enquanto que $\eta_r(t)$, é a coordenada generalizada dependente apenas do tempo t , n_e é o número de termos que será considerado na expansão, Eq. (3), que corresponde ao número de modos de vibração que serão considerados no cálculo da deflexão $w(x,t)$.

Substituindo a Eq. (3) nas equações Eq. (2-a) e Eq. (2-b), realizando as derivadas parciais e desenvolvendo o quadrado dos somatórios obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n_e} \sum_{s=1}^{n_e} \dot{\eta}_r(t) \dot{\eta}_s(t) m_{rs} \quad (4-a)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \eta_r(t) \eta_s(t) k_{rs} \quad (4-b)$$

onde

$$m_{rs} = \int_0^l \{ m_v \phi_r(x) \phi_s(x) + m_s \phi_r(x) \phi_s(x) \delta(x - x_s) + m_a \phi_r(x) \phi_s(x) \delta(x - x_a) + m_{sp} \phi_r(x) \phi_s(x) [u(x - x_{spe}) - u(x - x_{spd})] + m_{ap} \phi_r(x) \phi_s(x) [u(x - x_{ape}) - u(x - x_{apd})] \} dx \quad (5-a)$$

$$k_{rs} = \int_0^l \{ EI_v \phi_r(x) \phi_s(x) + EI_{sp} \phi_r(x) \phi_s(x) [u(x - x_{spe}) - u(x - x_{spd})] + EI_{ap} \phi_r(x) \phi_s(x) [u(x - x_{ape}) - u(x - x_{apd})] \} dx \quad (5-b)$$

Aplicando-se a equação de Lagrange para as coordenadas generalizadas, $\eta_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, n_e$, obtém-se :

$$\sum_{s=1}^{n_e} m_{rs} \ddot{\eta}_s(t) + \sum_{s=1}^{n_e} k_{rs} \eta_s(t) = Q_r(t) \quad (6)$$

A força generalizada, $Q_r(t)$, é obtida através do princípio do trabalho virtual mostrado a seguir:

$$\delta W = \int_0^l f(x, t) \delta w(x, t) dx \quad (7)$$

onde δW é o trabalho virtual realizado pela força $f(x, t)$ aplicada pelos atuadores ao longo do deslocamento virtual, $\delta w(x, t)$. Substituindo a Eq. (03) na Eq. (07) encontra-se:

$$\delta W = \sum_{r=1}^n \int_0^l f(x, t) \phi_r(x) \delta(\eta_r(t)) dx = \sum_{r=1}^n Q_r(t) \delta(\eta_r(t))$$

onde

$$Q_r(t) = \int_0^l f(x, t) \phi_r(x) dx \quad (8)$$

Considerando então a Eq. (8), a Eq. (6), pode ser escrita na forma matricial, abaixo:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (9)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes, $n_e \times n_e$, de massa e rigidez, respectivamente, cujos elementos são dados, pelas equações Eq. (5-a) e Eq. (5-b). $\boldsymbol{\eta}(t)$ e $\mathbf{Q}(t)$ são os vetores, n_e dimensionais, das coordenadas e forças generalizadas, respectivamente.

2.1 Dinâmica dos Transdutores

Uma vez determinado as matrizes de massa e rigidez e escolhida uma função admissível ou de comparação, a Eq.(9) está pronta para ser utilizada na análise dinâmica da estrutura. Para efeito de controle resta então a integração das dinâmicas dos atuadores, como entradas, e dos sensores, como saídas. A relação entre a saída e a entrada dos sensores e atuadores considerados na estrutura estão relacionados na tabela 1.

Na tabela 1 (Preumont, 1997), as constantes que compõe os ganhos do sensor e atuador piezoelétricos são:

E_p : Módulo de elasticidade do material do sensor piezoelétrico.....	N/m ²
d_{31} : constante piezoelétrico	m/V
h : espessura do filme piezoelétrico.....	m
b_p : largura do filme piezoelétrico.....	m
C_f : capacitância do elemento capacitivo do amplificador de carga.....	coulomb/V

Tabela 1: Funções de transferência do transdutores

Transdutores	G(s)	Observação
acelerômetro	$\frac{-g_s s^2}{s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2}$	g_s : ganho do acelerômetro ζ_s : fração de amortecimento ω_s : frequência natural
Atuador inercial	$\frac{-g_a s^2}{s^2 + 2\zeta_a \omega_a s + \omega_a^2}$	g_a : ganho do atuador inercial ζ_a : fração de amortecimento ω_a : frequência natural
sensor piezoelétrico	g_{sp}	g_{sp} : ganho do sensor piezoelétrico $g_{sp} = \frac{E_p d_{31} h b_p}{C_f}$
atuador piezo elétrico	g_{ap}	g_{ap} : ganho do atuador piezoelétrico $g_{ap} = -E_p d_{31} b_p h$

2.2 Função de Transferência da Estrutura Ativa

A função de transferência da estrutura ativa incorpora a dinâmica da viga bem como dos elementos transdutores. Considerando um sistema de controle com uma entrada e uma saída, a função de transferência é obtida da seguinte forma: Primeiro aplica-se a Transformada de Laplace na equação (9) para se obter a relação entre a Transformadas de Laplace da coordenada generalizada $\eta(s)$, e da força generalizada $Q(s)$, o que resulta em:

$$\eta(s) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q}(s) \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \quad (11)$$

Relacionando a força generalizada, $Q(s)$, com a força gerada pelo atuador, obtém-se

$$Q(s) = \Phi_a(x_a) F(s) = \Phi_a(x_a) G_a(s) V_a(s) \quad (12)$$

onde $\Phi_a(x_a)$ é o vetor n_e -dimensional que descreve a dependência espacial (função de forma) da função força aplicada. $G_a(s)$ é a função de transferência do atuador e $V_a(s)$ é o sinal elétrico de controle. Por último, relaciona-se a saída do sensor com a sua entrada que pode ser a deflexão, a velocidade ou a aceleração de um ponto da viga conforme o sensor escolhido. Considerando-se um sensor tal que a entrada seja a deflexão da viga, $w(x_s, t)$, e a saída um sinal elétrico, $v_s(t)$ e ainda considerando a expansão em termos dos n_e modos assumidos, encontra-se:

$$V_s(s) = G_s(s) \Phi_s^{\text{Tr}}(s) \eta(s) \quad (13)$$

Assim, através das equações (10), (11), (12) e (13), obtém-se uma função de transferência global, $G_g(s)$, entre o sinal $V_s(s)$ (saída do sensor) e o sinal $V_a(s)$ (entrada do atuador).

$$G_g(s) = G_a G_s \Phi_s^{\text{Tr}}(x_s) \mathbf{B}^{-1} \Phi_a(x_a) \quad (14)$$

Uma vez obtida esta função de transferência, pode-se analisar o comportamento dinâmico da estrutura em malha aberta e ainda estabelecer uma estratégia de controle que atenda os requisitos de estabilidade e performance desejados.

3. Estudos de Caso

Dois exemplos serão considerados: I - Uma viga bi-apoiada com um atuador inercial e o sensor um acelerômetro e II - a mesma viga com transdutores piezoelétricos.

Caso I: A figura 2 representa uma viga bi-apoiada com um atuador inercial na posição x_a e um sensor (acelerômetro), na posição x_s . O sinal $v_a(t)$, de entrada, é gerado por uma fonte de tensão enquanto que o sinal de saída, $v_s(t)$, é captado em um medidor de vibrações.

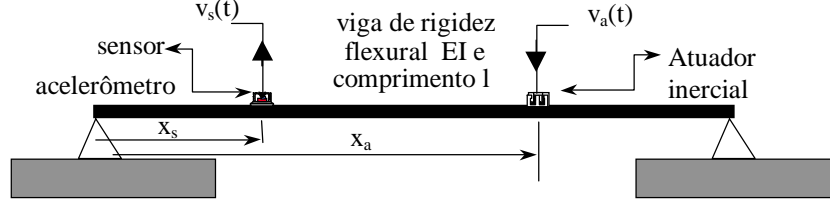


Figura 2: Estrutura ativa consistindo de uma viga bi-apoiada, atuada por um atuador inercial e sensoriada por um acelerômetro.

A função admissível deve ser escolhida de tal forma que satisfaça as condições de contorno geométricas da estrutura, e para tal será assumida a função, $\phi_r(x) = \text{sen}(r\pi x/l)$. Considerando apenas os dois primeiros modos, $n_e=2$, a função modal, $\Phi(x)$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\Phi(x) = [\phi_1 \quad \phi_2]^{\text{Tr}} \quad (15)$$

Uma vez definida a função admissível, determina-se as matrizes de massa e rigidez através das equações (5-a) e (5-b) adaptadas para o exemplo em questão.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

onde os elementos das matrizes são dados por:

$$m_{11} = \frac{m_v}{2} + \frac{m_a}{a_1} + \frac{m_s}{a_2} \quad m_{12} = \frac{m_a}{a_3} + \frac{m_s}{a_4} \quad m_{21} = m_{12} \quad m_{22} = \frac{m_v}{2} + \frac{m_a}{a_5} + \frac{m_s}{a_6}$$

$$a_1 = \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi x_a}{l}\right)} \quad a_2 = \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi x_s}{l}\right)} \quad a_3 = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi x_a}{l}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi x_a}{l}\right)} \quad a_4 = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi x_s}{l}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi x_s}{l}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x_a}{l}\right)} \quad a_6 = \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x_s}{l}\right)} \quad k_{11} = \frac{EI_v \pi^4}{2l^3} \quad k_{12} = k_{21} = 0 \quad k_{22} = \frac{8EI_v \pi^4}{l^3}$$

Uma vez determinada as matrizes de massa e rigidez, obtém-se a matriz B, Eq.(11), e em seguida a sua inversa, resultando em:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 m_{22} + k_{22}}{\det(B)} & -\frac{s^2 m_{12}}{\det(B)} \\ -\frac{s^2 m_{21}}{\det(B)} & \frac{s^2 m_{11} + k_{11}}{\det(B)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\det(B)$ é o determinante da matriz B: $\det(B) = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})s^4 + (k_{11}m_{22} + k_{22}m_{11})s^2 + k_{11}k_{22}$

Da tabela 1, retiram-se as funções de transferências do atuador inercial, e do sensor acelerométrico, que podem ser reescritas na seguinte forma:

$$G_s(s) = \frac{-g_s s^2}{s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2} \quad G_a(s) = \frac{-g_a s^2}{s^2 + 2\zeta_a \omega_a s + \omega_a^2}$$

Substituindo as equações acima e ainda as equações (12) e (13) na Eq.(14), encontra-se a função de transferência global, $G_g(s)$, entre a saída do sensor, $V_a(s)$, e a entrada no atuador, $V_p(s)$, que será empregada para projetar diferentes ações de controle.

$$G_g(S) = \frac{s^4 (b_2 s^2 + b_o)}{(s^2 + 2\zeta_a \omega_a + \omega_a^2)(s^2 + 2\zeta_s \omega_s + \omega_s^2)(a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_o)} \quad (17)$$

onde

$$\begin{aligned} b_2 &= \phi_1(x_s)\phi_1(x_a)m_{22} - \phi_2(x_s)\phi_1(x_a)m_{21} - \phi_1(x_s)\phi_2(x_a)m_{12} + \phi_2(x_s)\phi_2(x_a)m_{11} \\ b_o &= \phi_1(x_s)\phi_1(x_a)k_{22} + \phi_2(x_s)\phi_2(x_a)k_{11} \\ a_4 &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \quad a_2 = k_{11}m_{22} + k_{22}m_{11} \quad a_o = k_{11}k_{22} \end{aligned}$$

O segundo estudo de caso está ilustrado na figura 3, que consiste de uma viga bi-apoiada com um atuador e um sensor piezoelétrico distribuído nas posições indicadas. Um sinal elétrico, $v_{ap}(t)$, de entrada no atuador, é gerado pela fonte de tensão enquanto que o sinal de saída, $v_{sp}(t)$, do sensor, é captado no medidor de vibrações. A mesma função admissível e o mesmo número de modos do exemplo I são considerados nesse caso.

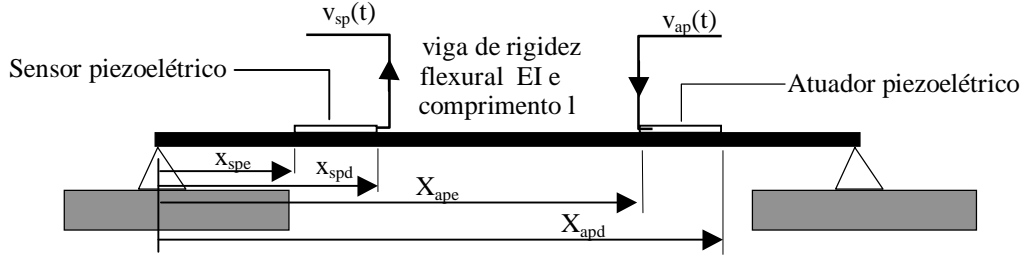


Figura 3: Estrutura ativa consistindo de uma viga bi-apoiada com transdutores piezoelétricos

Nesse exemplo, é de se esperar, que os elementos das matrizes de massa e rigidez sejam diferentes que as do exemplo anterior. Isso acontece porque no caso I as massas dos elementos transdutores foram consideradas puntiformes enquanto que nesse caso II, as massas estão distribuídas em regiões da viga. É importante observar que agora existe também a influência da rigidez elásticas dos elementos piezoelétricos na matriz de rigidez do sistema.

Considerando os parâmetros da viga e dos atuadores piezoelétricos da tabela 3, e realizando os cálculos, determina-se as matrizes de massa e rigidez. Utilizando o mesmo procedimento do exemplo I, encontra-se a seguinte função de transferência global entre a entrada no atuador piezoelétrico, $V_{ap}(s)$, e a saída do sensor piezoelétrico, $V_{sp}(s)$:

$$G_g(s) = g_{ap} g_{sp} \frac{[f_1 m_{22} - (f_t + f_u) m_{12} + f_v m_{11}] s^2 + f_1 k_{22} - (f_t + f_u) k_{12} + f_v k_{11}}{(m_{11} m_{22} - m_{12}^2) s^4 + (m_{11} k_{22} + m_{22} k_{11} - 2m_{12} k_{21}) s^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2} \quad (18)$$

$$\text{onde } g_{sp} = \frac{E_p d_{31} h b_p}{C_f} \quad g_{ap} = -E_p d_{31} h b_p$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= [(\pi x_{spe}/l) \cos(\pi x_{spe}/l) - (\pi x_{spd}/l) \cos(\pi x_{spd}/l)][(\pi x_{ape}/l) \cos(\pi x_{ape}/l) - (\pi x_{apd}/l) \cos(\pi x_{apd}/l)] \\
f_t &= [(\pi x_{spe}/l) \cos(\pi x_{spe}/l) - (\pi x_{spd}/l) \cos(\pi x_{spd}/l)][(2\pi x_{ape}/l) \cos(2\pi x_{ape}/l) - (2\pi x_{apd}/l) \cos(2\pi x_{apd}/l)] \\
f_v &= [(2\pi x_{spe}/l) \cos(2\pi x_{spe}/l) - (2\pi x_{spd}/l) \cos(2\pi x_{spd}/l)][(2\pi x_{ape}/l) \cos(2\pi x_{ape}/l) - (2\pi x_{apd}/l) \cos(2\pi x_{apd}/l)] \\
f_u &= [(2\pi x_{spe}/l) \cos(2\pi x_{spe}/l) - (2\pi x_{spd}/l) \cos(2\pi x_{spd}/l)][(\pi x_{ape}/l) \cos(\pi x_{ape}/l) - (\pi x_{apd}/l) \cos(\pi x_{apd}/l)]
\end{aligned}$$

4. Controle da Estrutura

Uma vez determinada a função de transferência, pode-se analisar a estabilidade da estrutura em malha fechada através do Método do Lugar Geométrico das Raízes, LGR. Qualquer ponto do LGR, no plano-s, é solução da equação característica:

$$1 + gG_g(s)H(s) = 0 \quad (19)$$

onde g é um ganho, $H(s) = 1 + T_d s$ é a lei de controle P-D, isto é, Proporcional-Derivativo e T_d é constante. Utilizando a equação (17) e considerando os dados das tabelas 2 com os ganhos, g_p e g_a , unitários, encontra-se para o caso I:

$$G_g(s)H(s) = \frac{s^4(b_2 s^2 + b_0)(1 + T_d s)}{(s^2 + 2\zeta_a \omega_a + \omega_a^2)(s^2 + 2\zeta_s \omega_s + \omega_s^2)(a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0)} \quad (20)$$

Considerando $T_d = 0,5$ s, $\omega_s = 2\pi 20 \cdot 10^3$ rad/s, $\omega_a = 2\pi 10 \cdot 10^3$ rad/s, $\zeta_a = \zeta_s = 0,5$, obtém-se, para duas diferentes posições do atuador e do sensor, os gráficos LGR referentes à Eq.(20), figuras 4-a e 4-b.

As marcas “o” e “x”, representam respectivamente os zeros e os pólos da função de transferência em malha aberta. Como existe raízes bem próximo à origem, uma ampliação se faz necessário. São oito pólos, quatro no semi-plano esquerdo oriundos dos elementos transdutores e os outros quatro pólos sobre o eixo imaginário originários dos dois modos flexíveis da estrutura. São sete zeros, quatro devido à dinâmica do atuador e sensor, dois em razão das ressonâncias das subestruturas definidas pelas posições relativas do atuador e do sensor (MIU, 1991) e um zero devido à ação de controle.

Escolhendo um ponto do gráfico Lugar Geométrico das Raízes, figura 4, pode-se determinar o ganho e os respectivos pólos permitindo assim realizar uma análise do comportamento dinâmico da estrutura, em malha fechada.

Tabela 2: Dados da estrutura do exemplo I

Dados da viga uniforme (alumínio)			
símbolo	grandeza	valor	unidade
ρ	massa específica	2710	kg/m ³
b	largura	0,050	m
e	altura	0,020	m
l	comprimento	0,400	m
m_v	densidade linear($\rho b e$)	2,71	kg/m
E_v	módulo de elasticidade	$70 \cdot 10^9$	N/m ²
I_v	momento de inércia de área($e^3 b/12$)	$3,333 \cdot 10^{-8}$	m ⁴
Dados do atuador inercial			
m_a	massa	0,100	kg
x_a	posição do atuador	0,320	m
Dados do sensor (acelerômetro)			
m_s	massa	0,050	kg
x_s	posição do sensor	0,100	m

Repetindo-se o mesmo procedimento anterior para a estrutura do caso II. Utilizando-se a equação (18), os dados da tabela 3 e considerando-se ganhos, g_{sp} e g_{ap} , unitários e ainda uma ação de controle proporcional derivativo com $T_d=0,5$, encontra-se:

$$G_g(s)H(s) = \frac{[f_1 m_{22} - (f_t + f_u) m_{12} + f_v m_{11}] s^2 + f_1 k_{22} - (f_t + f_u) k_{12} + f_v k_{11}}{(m_{11} m_{22} - m_{12}^2) s^4 + (m_{11} k_{22} + m_{22} k_{11} - 2 m_{12} k_{21}) s^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2} (1 + T_d s) \quad (21)$$

Tabela 3: Dados da estrutura do exemplo II

Dados da viga uniforme(mesmos do exemplo I, tabela 3)			
símbolo	grandeza	valor	unidade
Dados do atuador piezoelétrico			
ρ_{ap}	massa específica	$7,6 \cdot 10^3$	kg/m^3
m_{ap}	densidade linear de massa($\rho_{ap}hb$)	0,095	Kg/m
x_{ape}	posição da extremidade à esquerda	0,300	m
x_{apd}	posição da extremidade à direita	0,340	m
E_{ap}	módulo de elasticidade	$6,3 \cdot 10^{10}$	N/m^2
h	espessura	0,00025	m
b	largura	0,050	m
I_{ap}	momento de inércia de área $((e/2+h)^3 - (e/2)^3)b/3$	$1,2815 \cdot 10^9$	m^4
Dados do sensor piezoelétrico			
ρ_{sp}	massa específica	$7,6 \cdot 10^3$	kg/m^3
m_{sp}	densidade linear de massa($\rho_{sp}hb$)	0,095	Kg/m
x_{spe}	posição da extremidade à esquerda	0,060	m
x_{spd}	posição da extremidade à direita	0,080	m
E_{sp}	módulo de elasticidade	$6,3 \cdot 10^{10}$	N/m^2
b	largura	0,050	m
h	espessura	0,00025	m
I_{sp}	momento de inércia de área $((e/2+h)^3 - (e/2)^3)b/3$	$1,2815 \cdot 10^9$	m^4

Obtém-se assim, os gráficos LGR, figura 5, referente à Eq.(21). Observa-se os quatro pólos sobre o eixo imaginário em decorrência dos dois modos flexíveis da viga e ainda três zeros, sendo dois oriundos das ressonâncias das subestruturas definidas pelas posições relativas dos transdutores (MIU, 1991) e o outro devido à ação de controle. Na figura 5-b verifica-se a impossibilidade de se obter todos os pólos estabilizantes, isto é, todos no semi-plano esquerdo do LGR.

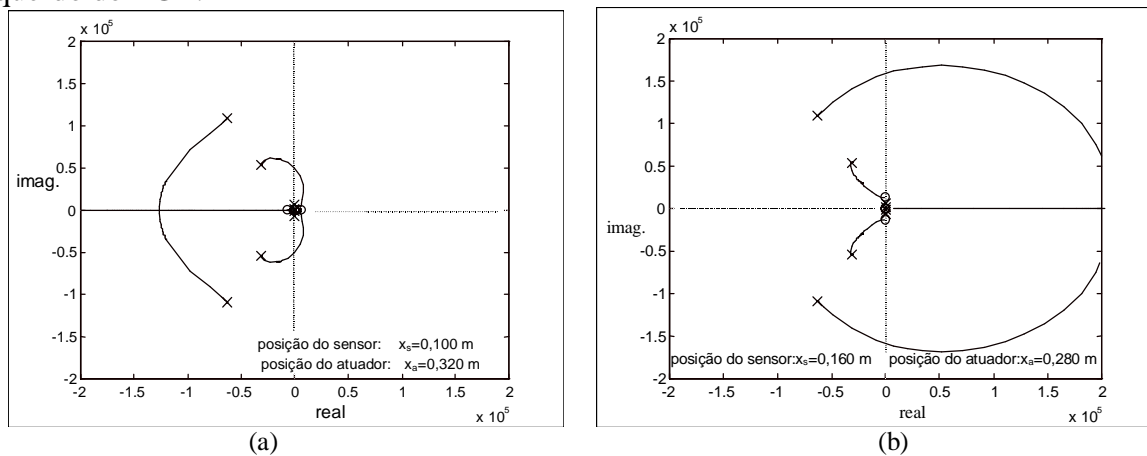


Figura 4: Lugar geométrico das raízes : Sensor e atuador nas posições (a) 0,100m; 0,320m; (b) 0,160m, 0,280m, respectivamente.

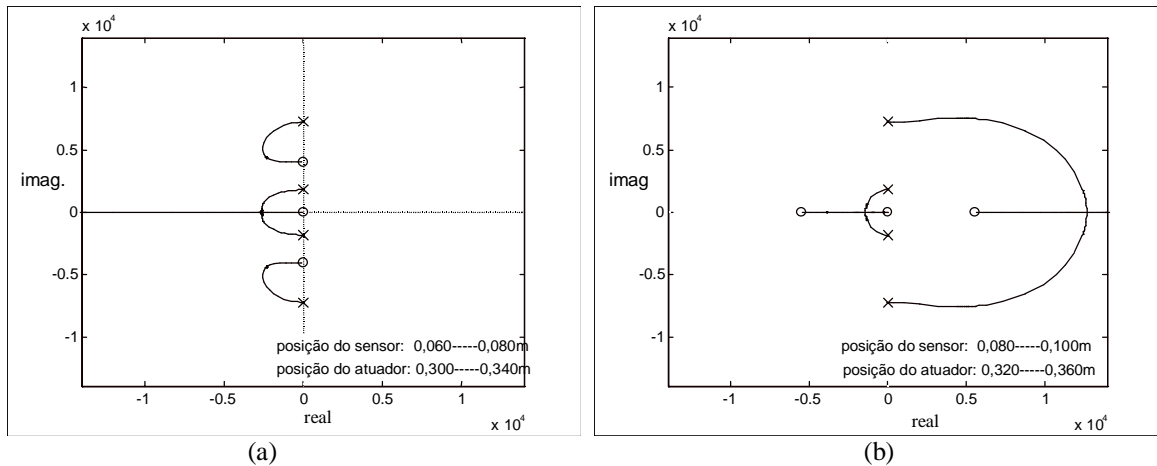


Figura 5: Lugar geométrico das raízes: sensor e atuador posicionados nas regiões (a) 0,060 até 0,080m; 0,300 até 0,340m, (b) 0,080 até 0,100m, 0,320 até 0,360m, respectivamente.

5. Conclusão

Uma vez encontrada a função de transferência da estrutura ativa, abre-se uma série de possibilidades de análise do seu comportamento dinâmico, dentre elas o controle em malha aberta e fechada considerando os transdutores colocados e não colocados.

Neste trabalho, após a modelagem da estrutura, viga bi-apoiada, atuada e sensoriada, foi construído o Lugar Geométrico das Raízes, LGR, para uma ação de controle proporcional derivativo considerando os sensores, acelerômetro e piezoelétrico e atuadores, inercial e piezoelétrico em duas diferentes posições possibilitando verificar a influência da dinâmica dos mesmos para análise de estabilidade.

Através da escolha de pontos no diagrama Lugar Geométrico das Raízes, o que define os correspondentes ganhos e pólos em malha fechada, possibilita a confirmação da estabilidade através de uma função impulsiva.

REFERÊNCIAS

- Fuller, C. R. , Elliott, S. J., Nelson, P. A., 1996, Active Control of Vibration Academic Press; San Diego.
- Junkins, J.L. & Kim, Y., 1993, Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, AIAA Education Series, Washington, DC;
- Miu, D.K., 1991, Physical Interpretation of Transfer Function Zeros for Simple Control Systems with Mechanical Flexibilities. ASME J. Dynamic Systems Measurement and Control; Vol. 113, September 419-424.
- Preumont, A, 1997, Vibration Control of Structures; Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Title: Active Control of flexible structures

Abstract: The dynamic modeling and the active control of flexible structures are analyzed through the Root-Locus method. This paper presents the derivation of SISO transfer functions for the control of two case studies. The first example consists of the active control of an Euler-Bernouille beam with discrete sensor and actuator. In this case the control is achieved with acceleration feedback and a proof-mass actuator. The second example consist of the same type of structure with distributed piezoelectric sensor and actuator. A proportional plus derivative control law is investigated from the point of view of stability of the system.

Key-Words: Active control, Flexible structures, Piezoelectric actuator and sensor.