



APLICAÇÃO DO MÉTODO PSEUDOESPECTRAL DE CHEBYSHEV EM PROBLEMAS HIDRODINÂMICOS

Johnny J. Martínez R.

Universidade Federal de Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Oceânica
Cx. P. 68508, CEP.21945970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Paulo T. Esperança.

Universidade Federal de Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Oceânica
Cx. P. 68508, CEP.21945970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. *É proposto um modelo numérico baseado no Método Pseudoespectral de Chebyshev para resolver três problemas com condições de contorno tipo Dirichlet. O primeiro está relacionado com o escoamento entre duas placas rígidas sendo uma fixa e a outra com velocidade constante, no segundo uma das placas tem movimento oscilatório, e o terceiro se refere à propagação de uma onda de choque governada pela equação de Burgers. Os resultados numéricos apresentados indicam que o Método Pseudoespectral é capaz de simular com grande precisão os problemas estudados.*

Palavras-chave: *Método Pseudoespectral de Chebyshev, Equação de Burgers.*

1. INTRODUÇÃO

Os métodos espectrais são métodos altamente precisos que foram originalmente desenvolvidos pelos meteorologistas. A principal contribuição para o uso intensivo destes métodos se deve a Orszag (1969) que desenvolveu os métodos transformados para avaliar os termos não lineares, usando a Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) e que permitiam calcular os termos não lineares em qualquer espaço (espectral ou físico) onde eles eram mais precisos e fáceis de obter. A partir de então os métodos transformados passaram a formar a coluna vertebral dos cálculos espectrais em grande escala e se tornaram a principal ferramenta numérica em certas áreas da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

Neste trabalho é usado um método pseudoespectral que não requer o uso da FFT, e que está baseado na multiplicação matriz-vetor, uma formulação devida originalmente a Ku e Hatzivramidis (1984), que no contexto de colocação de Chebyshev, idealizaram um método capaz de calcular as derivadas espaciais de uma função $u(x)$ no espaço físico usando o método das expansões de Chebyshev (MEC). Este método é assintoticamente mais lento que o método da FFT ($O(N \log N + N)$ operações), requerendo $O(N^2)$ operações, mas é frequentemente mais rápido quando o número de pontos de colocação é reduzido. Contrariamente ao método da FFT, este método é mais adequado para a vetorização e a computação paralela.

2. DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS ESPECTRAIS

Os Métodos Espectrais caracterizam-se pela expansão da solução de equações diferenciais parciais em termos de uma série truncada de polinômios ortogonais globais, chamados de funções base ou funções de aproximação. As funções base mais frequentemente usadas são: os polinômios trigonométricos (Fourier); os polinômios de Chebyshev e os polinômios de Legendre. A principal vantagem desta aproximação é a taxa de convergência exponencial do erro entre a solução exata e a numérica quando se incrementa o grau dos polinômios.

Os três esquemas de uso mais corrente são os Métodos de Galerkin, Tau e Colocação (Pseudoespectral). As diferenças entre estes métodos podem ser ilustradas ao considerarmos um problema de valor inicial-contorno da forma:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (3)$$

onde Ω é um domínio espacial com contorno $\partial\Omega$ e $L(x,t)$ é um operador diferencial linear.

A solução $u(x,t)$ expande-se em termos das funções base ortogonais ϕ_m como:

$$u_M(x,t) = \sum_{m=0}^M a_m(t) \phi_m(x) \quad (4)$$

Substituindo a expressão (4) na equação (1), se obtém um resíduo R_M :

$$R_M = \frac{\partial u_M}{\partial t} + Lu_M - f_M(x,t)$$

Seguindo-se então o procedimento do Método dos Resíduos Ponderados (MWR) que utiliza funções teste ψ_n , obtém-se a seguinte condição:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_M}{\partial t} + Lu_M - f_M(x,t) \right] \psi_n dx = 0 \quad (5)$$

Se as funções teste são iguais às funções base ou aproximação ($\psi_n = \phi_m$), então o Método Espectral é chamado de Método de Galerkin ou o Método Tau. Mas, se as funções teste são as funções generalizadas delta de Dirac transladadas, $\psi_n = \delta(x - x_n)$, o Método Espectral é chamado de Colocação ou Pseudoespectral.

3. MÉTODO PSEUDOESPECTRAL DE CHEBYSHEV (MEC)

Uma função $u(x)$ com $x \in [-1,1]$ pode expandir-se em uma série truncada de polinômios de Chebyshev de $N + 1$ termos (Ku e Hatzivramidis (1984)):

$$u(x) = \sum_{p=1}^{N+1} a_p T_{p-1}(x) \quad (6)$$

onde $T_{p-1}(x)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem $p-1$ definido como:

$$T_{p-1}(x) = \cos((p-1) \cos^{-1} x) \quad (7)$$

Usando como pontos de colocação os chamados pontos de Gauss-Lobatto; $x_n = \cos(\pi(n-1)/N)$; $1 \leq n \leq N+1$, o valor da função nestes pontos de colocação é expresso como:

$$u_n = u(x_n) = \sum_{p=1}^{N+1} a_p \cos \frac{\pi(p-1)(n-1)}{N} \quad (8)$$

com os coeficientes transformados a_p dados pela relação:

$$a_p = \frac{2}{N} \frac{1}{\bar{c}_p} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\bar{c}_n} T_{p-1}(x_n) u_n \quad (9)$$

onde: $\bar{c}_1 = \bar{c}_{N+1} = 2$, $\bar{c}_p = 1$ para $1 < p < N+1$. A Eq. (9) pode ser escrita em forma matricial, como:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{u} \quad (10)$$

Se $u(x)$ é diferenciável, a primeira e segunda derivada da função $u(x)$ podem ser aproximadas como:

$$u'(x_n) = \sum_{p=1}^{N+1} a_p^{(1)} T_{p-1}(x_n) \quad (11)$$

$$u''(x_n) = \sum_{p=1}^{N+1} a_p^{(2)} T_{p-1}(x_n) \quad (12)$$

onde os coeficientes transformados das derivadas $a_p^{(1)}$ e $a_p^{(2)}$ são definidos como:

$$a_p^{(q)} = \frac{2}{c_p} \sum_{\substack{n=p+1 \\ n+p \text{ impar}}}^{N+1} (n-1) a_n^{(q-1)}, \quad q = 1, 2 \quad (13)$$

com $c_1 = 2$; $c_p = 1$, $p \geq 2$ e q representando a ordem de diferenciação. As Eqs. (11) e (12) podem ser expressas em forma matricial, como:

$$\mathbf{u}' = T \mathbf{a}^{(1)} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}'' = T \mathbf{a}^{(2)} \quad (15)$$

onde:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{a} \quad (16)$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{a} = \mathbf{G}^{(2)} \mathbf{a} \quad (17)$$

e $\mathbf{G}^{(1)}$ é uma matriz quadrada $(N+1) \times (N+1)$ com elementos:

$$\mathbf{G}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 0 & i \geq j \text{ ou } i + j \text{ par} \\ \frac{2(j-1)}{c_i} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (18)$$

Combinando as Eqs. (10), (14), (15), (16) e (17) obtém-se:

$$\mathbf{u}' = \hat{\mathbf{G}}^{(1)} \mathbf{u} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}'' = \hat{\mathbf{G}}^{(2)} \mathbf{u} \quad (20)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{G}}^{(q)} = \mathbf{T} \mathbf{G}^{(q)} \hat{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{q} = 1, 2 \quad (21)$$

3.2. Modelo Numérico

O modelo matemático é representado por uma equação geral de convecção/difusão unidimensional do tipo (Martínez (1999)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (d + eu) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{r}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -1 \leq x \leq 1, t > 0 \quad (22)$$

onde d , e e r são parâmetros livres, Re é o Número de Reynolds e $f(x, t)$ é o termo fonte, com as condições de contorno do tipo Dirichlet:

$$u(-1, t) = \alpha \quad \text{e} \quad u(1, t) = \beta \quad \text{para } t > 0 \quad (23)$$

e a condição inicial:

$$u(x, 0) = u_o(x) \quad \text{para } x \in [-1, 1] \quad (24)$$

O modelo numérico consiste de uma discretização espacial na qual as derivadas espaciais são aproximadas pelas expressões obtidas pelo Método Pseudoespectral de Chebyshev (MEC) e uma discretização temporal que é realizada com um esquema explícito-implícito ABCN, onde usa-se o método de Adams-Bashforth de 2ª ordem para tratar os termos convectivo e fonte, enquanto que o método de Crank-Nicolson é usado para tratar o termo difusivo. Finalmente, após o processo de discretização se obtém um sistema linear de equações que pode ser representado em forma matricial como:

$$\mathbf{A}u = \mathbf{b} \quad (25)$$

onde a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{b} são definidos como:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{I} - \frac{r\Delta t}{2Re} \hat{\mathbf{G}}^{(2)} \right]$$

$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{I} + \frac{r\Delta t}{2Re} \hat{\mathbf{G}}^{(2)} \right] u^n - \Delta t (1.5N^n - 0.5N^{n-1}) + \Delta t (1.5f^n - 0.5f^{n-1})$$

onde $N = (d - eu)\hat{\mathbf{G}}^{(1)}u$, \mathbf{I} é a matriz identidade e Δt é o passo de tempo. Este sistema linear de equações pode ser resolvido usando um método direto (decomposição LU). Assim, a matriz \mathbf{A} é invertida uma só vez no início e para cada passo de tempo a solução do sistema matricial é obtida por meio de simples multiplicação de matrizes e vetores.

4. SOLUÇÕES NUMÉRICAS

4.1 Placa rígida movimentada bruscamente e a outra fixa

Suponha-se que o fluido entre duas placas rígidas infinitas localizadas em $y = 0$ e $y = d$ esteja inicialmente em repouso, e que a placa inferior seja levada bruscamente a uma velocidade constante U em seu próprio plano, com a placa superior permanecendo fixa. O fluido é movimentado pela ação viscosa e a distribuição de velocidade é governada pela equação de difusão adimensional:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \quad (26)$$

onde o Número de Reynolds é definido como: $Re = Ud / \nu$ com ν sendo a viscosidade cinemática do fluido; $s = Ut / d$, $\eta = y / d$ e $\hat{u} = U / d$ são o tempo, a distância e a velocidade adimensionais, com as condições de contorno da forma:

$$\hat{u}(0, s) = 1, \quad \hat{u}(1, s) = 0 \quad \text{para } s > 0 \quad (27)$$

e a condição inicial como:

$$\hat{u}(\eta, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < \eta \leq 1 \quad (28)$$

Na Fig. 2 comparam-se os perfis de velocidade analítica e numérica ao longo do tempo para o caso do escoamento entre as placas paralelas em movimento relativo com um $Re = 200$. Aqui pode-se notar que a concordância entre as soluções analítica e numérica (obtidas pelo Método Pseudoespectral MEC com 65 pontos de colocação e um passo de tempo de 0,001 s) é muito boa. Este modelo numérico acompanha muito bem o processo transiente do fluido entre as placas, de maneira que pode ser apreciada a influência gradual da placa superior no processo de difusão da velocidade de tal forma que a velocidade tende assintoticamente à

distribuição linear que é característica do escoamento de Couette com gradiente de pressão nulo.

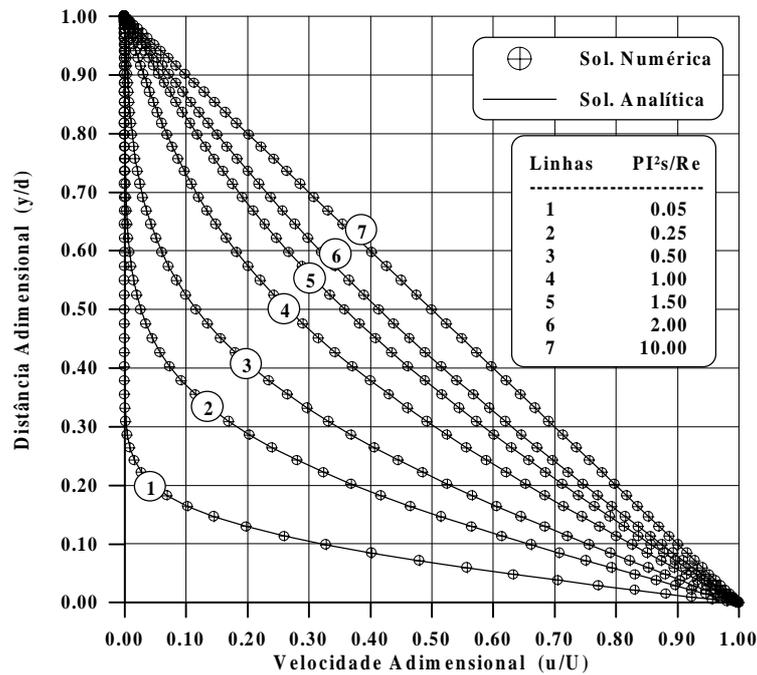


Figura 2. Perfis de velocidade para vários instantes de tempo para um $Re = 200$, passo de tempo de $0,001\text{ s}$ e 65 pontos de colocação.

Para este caso de $Re = 200$ e um tempo de $5,066\text{ s}$, os erros máximos obtidos pelo Método MEC decrescem exponencialmente, ou seja alcança-se uma alta precisão com poucos pontos de colocação (para 33 pontos de colocação o erro é da ordem de 10^{-9}), e à medida que se diminui o passo de tempo aumenta a taxa de convergência do método (para o mesmo número de pontos e um passo de tempo de 10^{-4} a ordem do erro é de 10^{-11}) (Martínez (1999)).

4.2 Placa rígida oscilando e a outra fixa

Suponha-se que a placa inferior do caso anterior seja levada a uma velocidade oscilatória, $U \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência angular de oscilação. Como antes, a distribuição de velocidade é governada pela Eq. (26), sendo a condição de contorno da placa oscilante dada por:

$$\hat{u}(0, s) = \cos(\omega s), \quad \hat{u}(1, s) = 0 \quad \text{para } s > 0 \quad (29)$$

onde $\omega = \omega d / U$ é a frequência angular adimensional.

Nas Figs. 3 e 4 se pode apreciar como o modelo numérico (usando 33 pontos de colocação e um passo de tempo adimensional, $ds = 0.001$) acompanha muito bem o processo oscilatório desenvolvido pelo fluido para uma frequência baixa, $\omega = \pi/2$ (Fig. 3) e uma frequência alta, $\omega = 6\pi$ (Fig. 4) quando se varia o Número de Reynolds para um tempo final, $s = 0.50$. Estes resultados mostram que a espessura da camada de fluido arrastada pela placa oscilante é inversamente proporcional à frequência de oscilação e ao Número de Reynolds (ou proporcional à viscosidade cinemática do fluido ν).

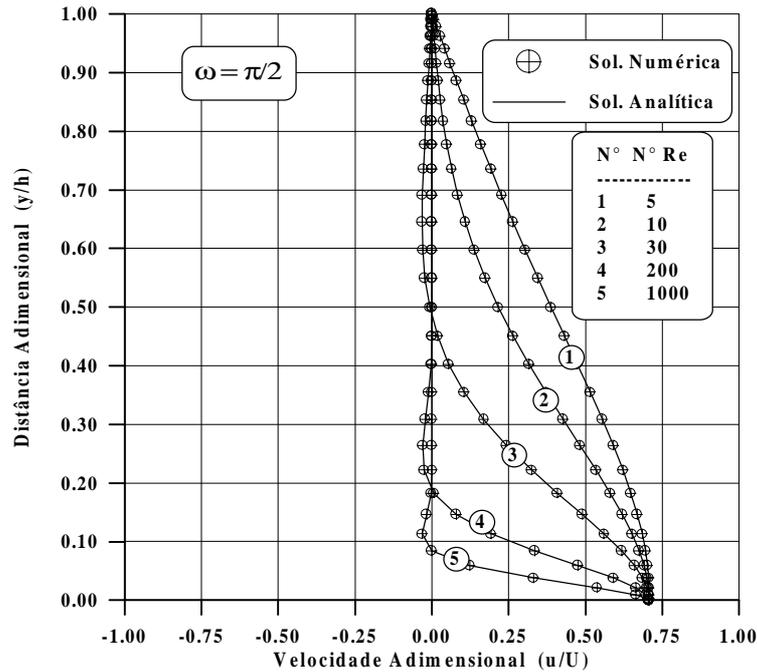


Figura 3. Distribuição de velocidades para vários Re com uma frequência de $\pi/2$, $s = 0.50$, $ds = 0.001$ e 33 pontos de colocação.

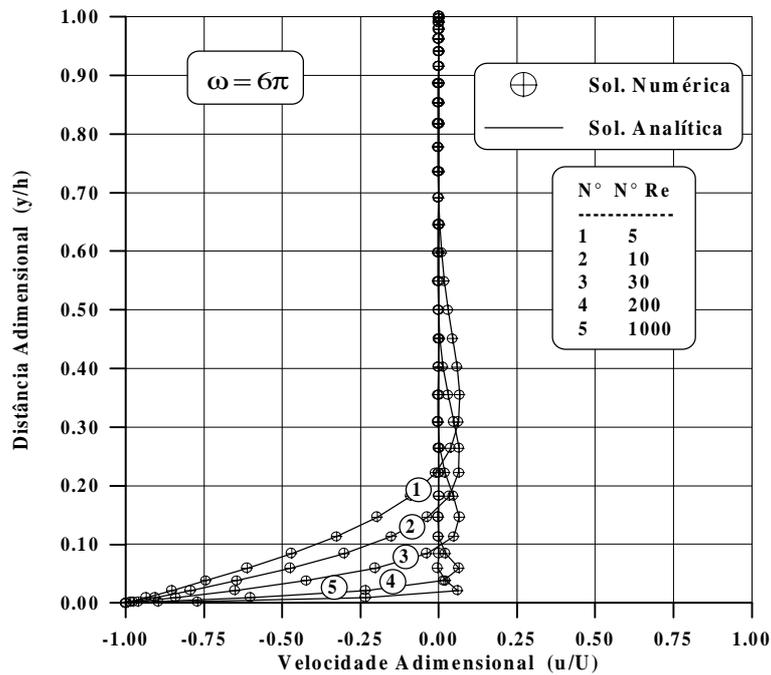


Figura 4. Distribuição de velocidades para vários Re com uma frequência de 6π , $s = 0.50$, $ds = 0.001$ e 33 pontos de colocação.

4.3 Propagação de uma onda de choque

Suponha que uma onda de choque inicialmente descontínua e centrada na origem propague-se à direita em uma região $-1 \leq x \leq 1$ e que seu perfil inicialmente descontínuo é

lentamente suavizado por um processo viscoso dissipativo. Esta situação física é governada pela forma modificada da equação viscosa adimensional de Burgers (Fletcher (1983)):

$$\frac{\partial u}{\partial s} + (u - 0.5) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (30)$$

A escolha desta equação faz com que o sistema de coordenadas propague-se à mesma velocidade que a onda de choque. Por conseguinte, o movimento convectivo é congelado e o choque permanece fixo em $x = 0$ à medida que $s \rightarrow \infty$. Assim, as soluções de estado permanente podem ser obtidas sem requerer um domínio espacial semi-infinito. Cabe destacar que devido à presença do termo convectivo não-linear, a equação de Burgers pode apresentar dificuldades na solução numérica (“aliasing” e instabilidade), especialmente nos casos em que o termo dissipativo é pequeno ou nulo (Fletcher (1991)).

Mapeamento tipo Tangente para domínio finito

Esta transformação de malha mapeia os pontos de colocação de Chebyshev ξ_j para um novo grupo de pontos de interpolação x_j e permite uma melhor resolução no centro da malha, região do domínio onde ocorre a grande variação da solução. A transformação de malha pode ser definida como (Don (1997)):

$$x = g(\xi, \bar{\alpha}, \beta) = x_o + \frac{\tan(\delta(\xi - \xi_o))}{\bar{\alpha}}, \quad x, \xi \in [-1, 1] \quad (31)$$

onde:

$$\bar{\alpha} > 0 \quad \text{e} \quad x(-1) \leq \beta \leq x(+1)$$

$$x_o = -1 + \frac{2(\beta - x(-1))}{(x(+1) - x(-1))}$$

$$\kappa = \tan^{-1}(\alpha(1 - x_o)); \quad \gamma = \tan^{-1}(\alpha(1 + x_o))$$

$$\delta = \frac{(\kappa + \gamma)}{2} \quad \text{e} \quad \xi_o = -\frac{(\kappa - \gamma)}{(\kappa + \gamma)}$$

O parâmetro $\bar{\alpha}$ controla o grau de agrupamento dos pontos de colocação da malha, enquanto que os parâmetros β , x_o e ξ_o representam o ponto no espaço físico, transformado e não transformado onde os pontos da malha devem ser agrupados. A Eq. (30) transformada é expressa como:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + (u - 0.5) \frac{1}{\xi'} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{Re \xi'^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\xi''}{\xi'} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0, \quad |\xi| \leq 1, t > 0 \quad (32)$$

Na Fig. 5 pode-se observar a boa concordância entre as soluções numérica e analítica da equação viscosa de Burgers modificada para os Números de Reynolds, $Re = 10, 30, 50$ e 100 em um tempo de comparação, $s = 10$.

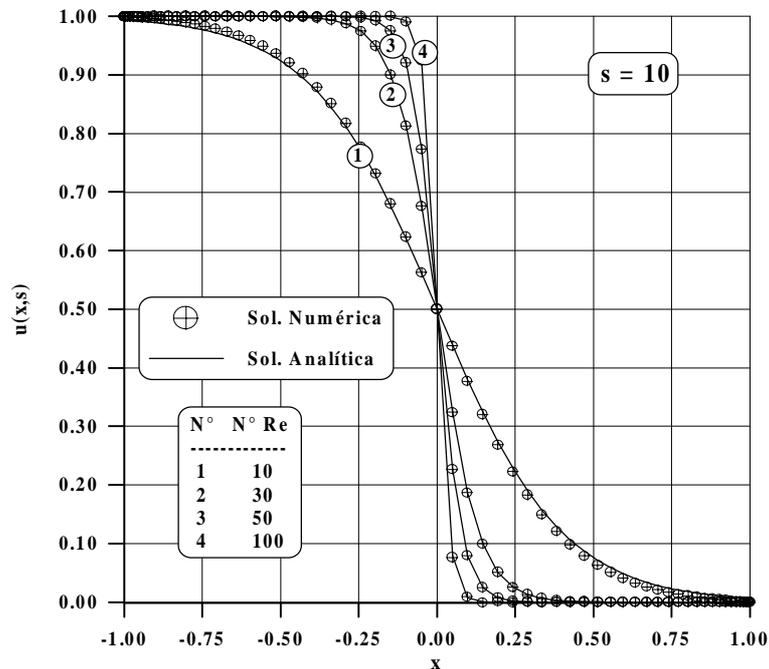


Figura 5. Soluções da equação de Burgers modificada para vários Números de Reynolds para um tempo adimensional de 10 com 65 pontos de colocação.

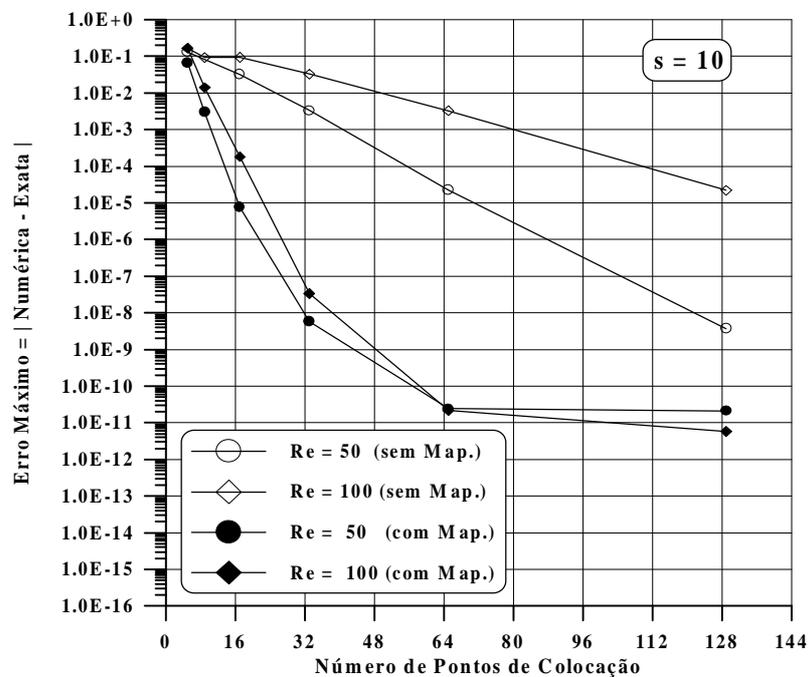


Figura 6. Taxas de convergência do Método MEC na solução de Burgers modificada com e sem mapeamento para $Re = 50$ e 100 , $s = 10$ e usando um $ds = 10^{-3}$.

Na Fig. 6 pode ser observada a baixa taxa de convergência do método MEC na solução da equação viscosa de Burgers modificada sem mapeamento para os Números de Reynolds, $Re = 50$ e 100 . Para o caso do uso do mapeamento tipo tangente com a equação viscosa de Burgers modificada observa-se que a taxa de convergência melhora muito em comparação à taxa de convergência sem mapeamento. As soluções numéricas foram obtidas para um tempo de comparação, $s = 10$ e o mapeamento foi realizado usando os parâmetros $\bar{\alpha} = 10$ e $\beta = 0$.

5. CONCLUSÕES

Finalmente, os resultados das experiências numéricas mostraram que o Método Pseudoespectral de Chebyshev (MEC) é capaz de simular com precisão os problemas estudados. Nos dois primeiros problemas obtém-se uma alta precisão (precisão espectral), enquanto que, no problema de propagação da onda de choque o Método Pseudoespectral de Chebyshev perde a precisão espectral. Esta precisão porém pode ser recuperada quando é usado um mapeamento do tipo tangente para resolver a região de grande variação da variável dependente.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação José Bonifácio da UFRJ pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Don, W.S., 1997, Mapping Functions of the PseudoPack v2.3, Division of Applied Mathematics, Brown University.
- Fletcher, C.A.J., 1983, A Comparison of Finite Element and Finite Difference Solutions of the One-and Two-Dimensional Burgers' Equations, Journal of Computational Physics, vol. 51, pp. 159-188.
- Fletcher, C.A.J., 1991, Computational Techniques for Fluid Dynamics, vol. 1, Second Edition, Springer-Verlag, New York.
- Ku, C.H., Hatzivramidis, D., 1984, Chebyshev expansion methods for the solution of the extended Graetz problem, Journal of Computational Physics, vol. 56, pp. 495-512.
- Martínez, J.J., 1999, Aplicação do método pseudoespectral de chebyshev em alguns problemas hidrodinâmicos, M.Sc, Tese, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Orszag, S.A., 1969, Numerical Methods for the Simulation of Turbulence, Physics of Fluids - Supplement II, vol. 12, pp. 250-257.

Title: Application of the Chebyshev pseudospectral method on some hydrodynamic problems.

Abstract. A numerical model based on the Chebyshev pseudospectral method is proposed for solving three problems with Dirichlet type boundary conditions: the first related with the flow developed between two rigid plates with one fixed and the other with constant velocity; in the second the moving plate oscillates; and the third related with the shock wave propagation governed by Burgers' equation. Numerical results indicate that the pseudospectral method is capable of simulating the problems studied with high accuracy.

Key words: Chebyshev pseudospectral method, Burgers' equation.