



## IDENTIFICAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS ATRAVÉS DE ANÁLISE MODAL

**Sergio F. Bastos**

Centro Tecnológico da Indústria Química e Têxtil e Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, CETIQT/COPPE/EE/UFRJ – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

**Lavínia S. A. Borges**

**Fernando A. Rochinha**

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, COPPE/EE – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

***Resumo.** Este trabalho lida com a identificação de parâmetros elásticos em placas retangulares. Um método é descrito para a identificação dos parâmetros elásticos através da medida das frequências naturais de uma placa em vibração livre. O problema de estimação de parâmetros é resolvido minimizando-se as diferenças entre as frequências medidas e as frequências calculadas, através do método dos mínimos quadrados. O método numérico para o cálculo das frequências naturais envolve a formulação de Rayleigh-Ritz usando polinômios ortogonais característicos nas séries que representam as funções de deslocamento, que são apropriados para representar condições de contorno de bordo livre.*

***Palavras-chave:** Identificação de parâmetros, Constantes elásticas, Análise Modal*

### 1. INTRODUÇÃO

As constantes elásticas dos materiais de engenharia são parâmetros fundamentais para análise, projeto, construção e controle de sistemas estruturais. Desta forma, o conhecimento destas constantes torna-se imprescindível em aplicações industriais sofisticadas, como, por exemplo, na área aero-espacial. A obtenção desses parâmetros é ainda mais vital nesse tipo de aplicação já que os materiais compósitos, que possuem um maior número de constantes independentes quando comparados com os materiais isotrópicos usuais, são cada vez mais utilizados.

Técnicas convencionais de identificação de constantes elásticas baseadas em ensaios estáticos não se mostram muito convenientes para materiais compósitos, uma vez que estes apresentam campos não uniformes de tensão ou deformação, efeitos pronunciados nos contornos e um número elevado de constantes a serem determinadas. Motivado por isso, introduz-se, no presente trabalho, uma nova abordagem para a obtenção de constantes elásticas a partir da realização de ensaios de vibração associados a técnicas de otimização.

Iniciativas semelhantes já foram testadas com sucesso em Ayorinde (1995), Deobald e Gibson (1988), Frederiksen (1997), Grediac *et al* (1996 e 1998) e Marchand *et al.* (1995).

Este artigo representa um primeiro passo no sentido de consolidar a abordagem proposta para materiais compósitos. Aqui são apresentadas as formulações, algoritmo e ensaios experimentais a serem utilizados. Para verificar a eficácia e consistência destes, foi desenvolvida uma aplicação para o caso de uma placa homogênea e isotrópica. Os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios e denotam que as técnicas aqui propostas poderão ser utilizadas para a identificação de constantes elásticas em materiais compósitos.

A parte experimental foi desenvolvida em uma placa retangular homogênea de alumínio de tal forma a simular uma placa vibrando com todos os contornos livres. As frequências naturais experimentais de vibração livre da placa foram mensuradas através de funções de resposta em frequência e foram utilizadas juntamente com as frequências naturais analíticas para a identificação dos parâmetros elásticos da placa.

## 2. ANÁLISE TEÓRICA

Consideremos uma placa retangular homogênea fina com comprimento  $a$ , largura  $b$  e espessura  $h$ , cujos limites são especificados em  $-a/2$  e  $a/2$  no eixo  $x$ ,  $-b/2$  e  $b/2$  no eixo  $y$  e  $-h/2$  e  $h/2$  no eixo  $z$ . Com isto, os eixos coordenados se encontram no plano médio da placa, com o eixo  $z$  normal a este plano, ou seja, a origem dos eixos coordenados está localizada no centro geométrico da placa. A Fig. 1 apresenta de forma esquemática as considerações descritas anteriormente.

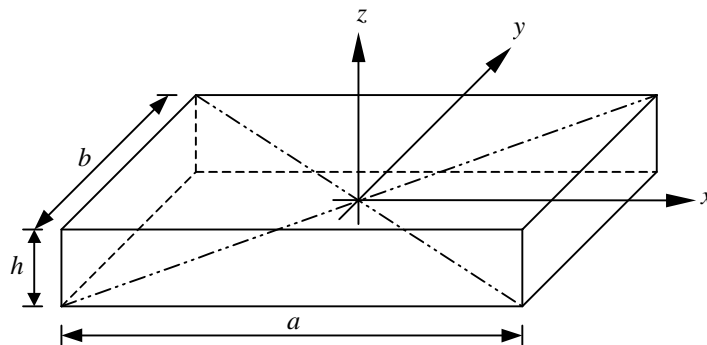


Figura 1- Forma geométrica da placa

### 2.1 Método de Rayleigh-Ritz

O método consiste em assumir uma série para representar o movimento harmônico de vibração da placa. Esta série é representada na Eq. (1), onde  $W(\xi, \eta)$  é a amplitude do deslocamento transversal (direção  $z$ ) dos pontos da superfície média,  $A_{mn}$  são constantes a determinar,  $\phi_m(\xi)$  e  $\phi_n(\eta)$  são funções polinomiais ortogonais (Frederiksen, 1995, 1997),  $\omega$  é a frequência de oscilação do movimento e  $t$  o tempo.

$$W(\xi, \eta) = \left[ \sum_m \sum_n A_{mn} \phi_m(\xi) \phi_n(\eta) \right] e^{i\omega t} \quad (1)$$

onde foram introduzidas as variáveis adimensionais  $\xi = \frac{2x}{a}$  e  $\eta = \frac{2y}{b}$ .

Frederiksen (1995) apresentou a seguinte fórmula de recorrência para o desenvolvimento da seqüência de polinômios ortogonais adequados para representar condições de contorno de bordo livre.

$$p_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(\xi) = (\xi - B_1)p_0(\xi),$$

$$P_i(\xi) = (\xi - B_i)p_{i-1}(\xi) - \sqrt{A_{i-1}} p_{i-2}(\xi) \quad (i = 2, 3, 4, \dots), \quad p_i(\xi) = \frac{P_i(\xi)}{\sqrt{A_i}}, \quad (2)$$

onde:

$$A_i = \int_{-1}^1 P_i^2(\xi) d\xi, \quad (3)$$

$$B_i = \int_{-1}^1 \xi p_{i-1}(\xi) d\xi. \quad (4)$$

$P_i(\xi)$  e  $p_i(\xi)$  denotam os polinômios de graus  $i$ .

Devido à adimensionalização adotada os escalares  $B_i$  são nulos.

Utilizando o método de Rayleigh-Ritz obtemos a Eq. (5) que representa o movimento harmônico livre para uma placa:

$$\left[ K - \bar{f}_{(t)} Id \right] A^{(t)} = 0 \quad (5)$$

onde  $A^{(t)}$  são parâmetros a serem determinados ,

$$K = \frac{1}{3\pi^2(1-\nu^2)} \mathcal{C}, \quad (6)$$

$$\mathcal{C}_{ijmn} = \left[ H_{mi}^{22} H_{nj}^{00} + \alpha^4 H_{mi}^{00} H_{nj}^{22} + \nu \alpha^2 (H_{mi}^{20} H_{nj}^{02} + H_{mi}^{02} H_{nj}^{20}) + 2(1-\nu) \alpha^2 H_{mi}^{11} H_{nj}^{11} \right], \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad (8)$$

$$H_{mi}^{kl} = \int_{-1}^1 \frac{d^k \phi_m}{(d\xi)^k} \frac{d^l \phi_i}{(d\eta)^l}. \quad (9)$$

Os índices  $m$  e  $n$  variam de zero até o número de polinômios ortogonais menos 1. As integrais introduzidas em  $H_{mi}^{kl}$  são independentes dos parâmetros materiais, o que auxiliará no desempenho computacional do algoritmo proposto. Além disso,

$$\bar{f} = f \sqrt{\frac{\rho \alpha^4}{E h^2}}, \quad (10)$$

$$\omega^2 = 4\pi^2 f^2, \quad (11)$$

$E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\rho$  a densidade volumétrica do material.

O algoritmo para o cálculo das funções polinomiais, assim como o método de Rayleigh-Ritz foram implementados no ambiente MATLAB®. O número de polinômios escolhido para este trabalho foi 15, ou seja, o polinômio de mais alta ordem foi de ordem 14. Isto porque, a partir dos testes realizados preliminarmente, verificamos que o aumento dessa ordem não significava um aumento da precisão dos coeficientes obtidos.

A verificação da implementação computacional utilizada foi feita com base na comparação dos resultados numéricos das frequências naturais obtidos via método dos elementos finitos usando o ambiente computacional ANSYS®. A Tabela 1 fornece os resultados analíticos e os compara com os resultados numéricos, dando também a diferença percentual das frequências naturais em relação ao método numérico para valores de placa  $a = 0,6\text{m}$ ,  $b = 0,4\text{m}$ ,  $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ ,  $h = 0,0063\text{m}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $E = 7,3 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$ .

Tabela 1 – Rayleigh-Ritz *versus* elementos finitos

Frequência natural em Hz	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
Rayleigh-Ritz	88,1	93,8	203,1	218,7	252,9	293,8	376,3	433,2	526,1	592,1	640,3	648,4	657,9
Elementos finitos	87,3	94,1	202,7	220,6	253,8	297,3	378,0	434,5	536,2	596,0	647,8	650,8	662,6
Diferença percentual	0,9	0,3	0,2	0,9	0,3	0,3	0,4	0,3	1,9	0,6	1,1	0,4	0,7

As três primeiras frequências  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  não aparecem na Tabela 1, pois são referentes aos modos rígidos e valem zero.

### 3. ANÁLISE EXPERIMENTAL

As frequências naturais de vibração da placa foram obtidas experimentalmente através da análise modal (Ewins, 1985). Uma placa de alumínio medindo  $0,6000\text{m} \times 0,4000\text{m} \times 0,0063\text{m}$  foi utilizada com todos os bordos livres. Para reproduzir na prática estas condições, a placa foi suspensa por dois fios de nylon.

Três experimentos foram montados com a placa suspensa. O primeiro deles mostrado na Fig. 2 foi implementada a técnica do impulso através de um martelo de impacto. Nos outros dois, utilizamos como fonte de excitação vibradores eletro-mecânicos, sendo que em um dos casos foi utilizada mono excitação e no outro múltipla excitação através de dois excitadores. Em todos os experimentos foi utilizado quatro acelerômetros fixados à placa, dois condicionadores de sinal, um analisador de espectro e um computador PC.

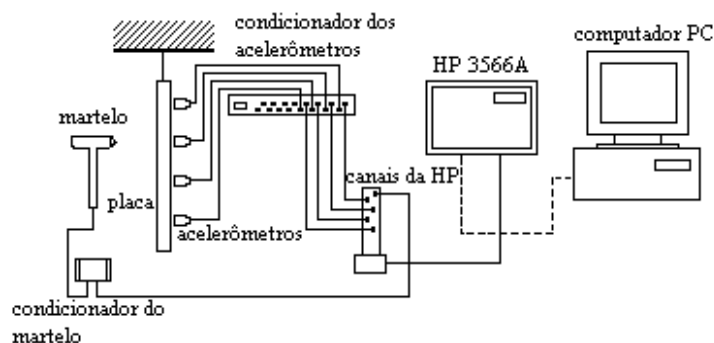


Figura 2- Esquema de montagem do primeiro experimento

### 3.1 Experimentos

As respostas dos acelerômetros em função da entrada via martelo ou vibrador foram processadas em um analisador de espectro HP 3566A e obtidas as funções de resposta em frequência (FRF) entre o canal de entrada (martelo ou vibrador) e os canais de saída (acelerômetros).

Deobald e Gibson (1988) realizaram experimentos semelhantes e verificaram que a razão de amortecimento nestes casos era menor do que 0,01. Por isso não consideramos o amortecimento no nosso experimento .

No primeiro experimento, realizamos 100 ensaios, a partir dos quais foi obtida a FRF. No segundo experimento utilizamos apenas um vibrador com sinal randômico como fonte externa. Estes dois experimentos acusavam duas frequências muito próximas, por isso, foi realizado um terceiro experimento com excitação múltipla onde concentramos a FRF em uma banda estreita que continha as frequências desejadas. Após este terceiro experimento foi constatado que as frequências realmente existiam.

Nos três experimentos obtivemos um total de 28 FRF's. As frequências naturais medidas das FRF's de cada experimento não diferiram muito uma das outras, a diferença ficou em torno de 5%, por isso, como o primeiro experimento apresentou uma FRF mais isenta de ruídos, optou-se em utilizá-lo para a determinação das frequências naturais experimentais.

A Figura 3 mostra as FRF's obtidas pelos acelerômetros no primeiro experimento e a Tabela 2 as frequências naturais experimentais do primeiro experimento.

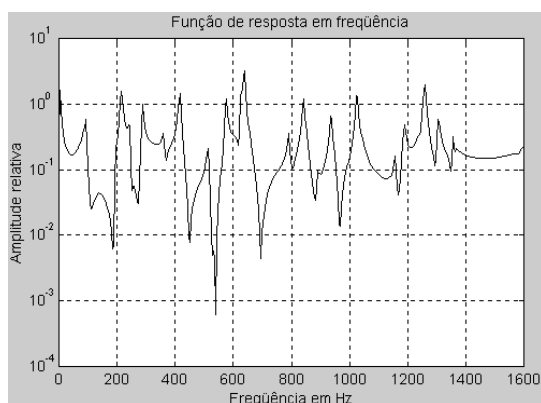


Figura 3 (a) – 1º acelerômetro

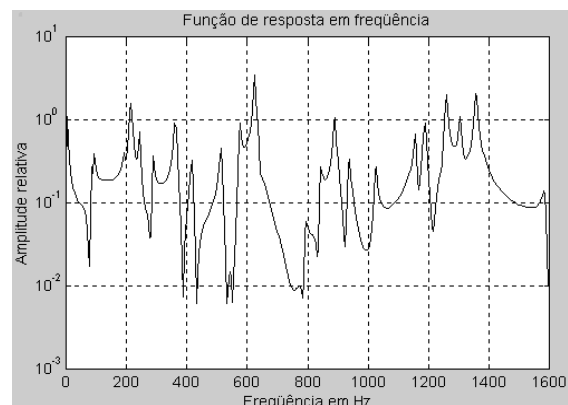


Figura 3 (b) – 2º acelerômetro

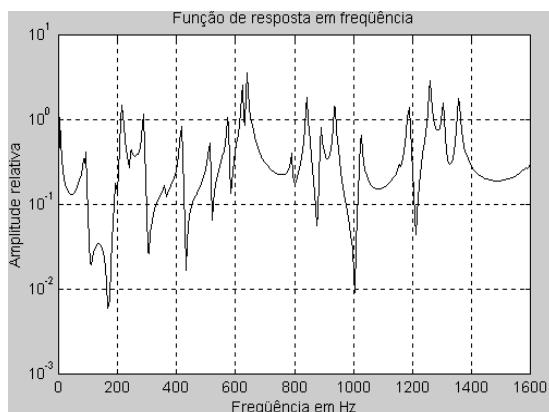


Figura 3 (c) – 3º acelerômetro

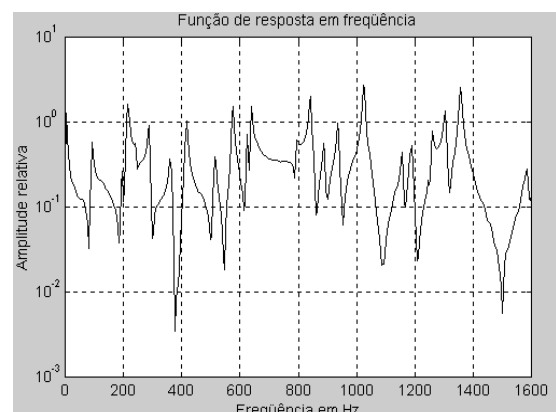


Figura 3 (d) – 4º acelerômetro

Tabela 2 – Frequências naturais experimentais em Hz

Frequência Natural	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>9</sub>	f <sub>10</sub>	f <sub>11</sub>	f <sub>12</sub>	f <sub>13</sub>	f <sub>14</sub>	f <sub>15</sub>	f <sub>16</sub>
Valor	84,7	92,8	195,7	215,9	246,2	288,5	359,1	415,6	512,5	577,0	623,5	639,6	641,6

### 3.2 Comparação de resultados

Pode-se observar na comparação das tabelas anteriormente apresentadas que as frequências naturais experimentais são sempre menores que as frequências naturais obtidas pelos métodos analíticos e numéricos. Talvez seja devido ao fato do amortecimento ter sido desprezado ou ao acréscimo de massa à placa pelos acelerômetros.

Os pequenos erros percentuais das frequências experimentais em relação as frequências obtidas através do método numérico, apontados na Tabela 3, mostram que as técnicas utilizadas no desenvolvimento do experimento, assim como, a forma de tratamento e obtenção das frequências naturais, são válidas e merecem uma atenção especial por partes dos pesquisadores.

Tabela 3 - Erros percentuais - experimental/numérico

Frequência natural	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>9</sub>	f <sub>10</sub>	f <sub>11</sub>	f <sub>12</sub>	f <sub>13</sub>	f <sub>14</sub>	f <sub>15</sub>	f <sub>16</sub>
Erro percentual	3,0	1,4	3,4	2,1	3,0	3,0	5,0	4,3	4,4	3,2	3,7	1,7	3,2

## 4. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS ELÁSTICOS

Neste trabalho identificaram-se apenas as constantes elásticas  $E$  (módulo de elasticidade) e  $\nu$  (coeficiente de Poisson). O método de identificação que será apresentado é uma adaptação do método proposto por Frederiksen (1997). Este método baseia-se na escolha de uma função objetivo para representar a diferença entre as frequências obtidas experimentalmente e aquelas do modelo numérico, que são funções dos parâmetros a serem identificados.

A função objetivo a ser minimizada consiste do somatório dos quadrados das diferenças relativas entre as frequências naturais experimentais  $f_e^{(l)}$  e as frequências analíticas correspondentes  $f^{(l)}$ :

$$L(E, \nu) = \sum_l \frac{(f_e^{(l)} - f^{(l)})^2}{(f_e^{(l)})^2} = \sum_l \frac{\left( \overline{f_e^{(l)}} - \sqrt{\frac{E}{E_0}} \overline{f^{(l)}} \right)^2}{(\overline{f_e^{(l)}})^2} \quad (12)$$

onde:  $E_0$  é o módulo de elasticidade de referência escolhido para inicializar o processo iterativo. As condições de ótimo associadas a função objetivo proposta, conduzem a seguinte expressão para o cálculo do módulo de elasticidade:

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_0}} = \frac{\sum_{\ell} \left( \frac{\bar{f}^{(\ell)}}{\bar{fe}^{(\ell)}} \right)}{\sum_{\ell} \left( \frac{\bar{f}^{(\ell)}}{\bar{fe}^{(\ell)}} \right)^2} \quad (13)$$

Para a obtenção do parâmetro  $\nu$  (coeficiente de Poisson) foram utilizadas iterações de Newton sobre as condições de ótimo associadas a este coeficiente. Os gradientes para implementação desse procedimento são dados por:

$$\nabla L = -2 \sum_{\ell} \left( \frac{\bar{fe}^{(\ell)} - \sqrt{\frac{E}{E_0}} \bar{f}^{(\ell)}}{(\bar{fe}^{(\ell)})^2} \right) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \frac{\partial \bar{f}^{(\ell)}}{\partial \nu} \quad (14)$$

$$\nabla^2 L = -2 \sum_{\ell} \left[ \left( \frac{\bar{fe}^{(\ell)} - \sqrt{\frac{E}{E_0}} \bar{f}^{(\ell)}}{(\bar{fe}^{(\ell)})^2} \right) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \frac{\partial^2 \bar{f}^{(\ell)}}{\partial^2 \nu} - \frac{E}{E_0} \frac{1}{(\bar{fe}^{(\ell)})^2} \left( \frac{\partial \bar{f}^{(\ell)}}{\partial \nu} \right)^2 \right] \quad (15)$$

onde as derivadas de  $\bar{f}^{(\ell)}$  são dadas por:

$$\frac{\partial \bar{f}^{(\ell)}}{\partial \nu} = \frac{1}{2 \bar{fe}^{(\ell)}} \frac{\partial K}{\partial \nu} A^{(\ell)} \cdot A^{(\ell)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \bar{f}^{(\ell)}}{\partial \nu^2} = \frac{1}{2 \bar{fe}^{(\ell)}} \left[ \frac{\partial^2 K}{\partial \nu^2} - 2 \left( \frac{\partial \bar{f}^{(\ell)}}{\partial \nu} \right)^2 \right] A^{(\ell)} \cdot A^{(\ell)} \quad (16)$$

Ressalta-se que as derivadas da matriz de rigidez são obtidas analiticamente.

## 4.2 Resultados

Apesar da pouca sensibilidade ao  $\nu$  (coeficiente de Poisson) das derivadas de  $\bar{f}$ , o algoritmo convergiu rapidamente, tanto para o parâmetro  $E$  como para o parâmetro  $\nu$ . A Tabela 4 mostra alguns resultados obtidos com o algoritmo.

Tabela 4 – Valores de  $E$  e  $\nu$  calculados pelo algoritmo

	valor inicial	valor calculado	iterações
1	$E_0=100$ MPa	$E=68,7517$ MPa	30
	$\nu=0,48$	$\nu=0,3090$	
2	$E_0=100$ MPa	$E=68,7513$ MPa	30
	$\nu=0,20$	$\nu=0,3088$	
3	$E_0=50$ MPa	$E=68,7525$ MPa	30
	$\nu=0,48$	$\nu=0,3092$	

Para obtenção dos resultados acima foram utilizadas as primeiras oito frequências naturais da estrutura.

Não foi feita nenhuma comparação entre os parâmetros calculados pelo algoritmo e os parâmetros reais da placa, pois não foi realizado nenhum ensaio experimental estático com a placa objeto deste estudo para a determinação destes parâmetros. Contudo, os resultados calculados pelo algoritmo são compatíveis com os parâmetros elásticos conhecidos do alumínio.

Independente dos dados iniciais ( $E_0$  e  $\nu$ ) os resultados obtidos com a técnica apresentada neste trabalho convergiram para o mesmo valor.

## 5. COMENTÁRIOS FINAIS

Foi apresentada neste artigo uma nova abordagem para a obtenção de constantes elásticas a partir de ensaios experimentais dinâmicos associados a técnicas numéricas.

Funções polinomiais ortogonais adequadas para as condições de contorno de bordos livres, quando aplicadas ao método de Rayleigh-Ritz, contribuem para a convergência e precisão do algoritmo proposto.

A abordagem proposta mostrou-se adequada para identificação de parâmetros elásticos, uma vez que conjuga facilidades de obtenção de dados experimentais com técnicas numéricas simples de serem implementadas em ambientes industriais.

Tendo em vista os bons resultados obtidos no contexto de um material isotrópico, os procedimentos desenvolvidos serão, agora, utilizados na identificação de parâmetros em compósitos, em particular em “placas sandwich”. Este tipo de placa requer a identificação de três parâmetros independentes, o módulo de elasticidade  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  e o módulo de elasticidade transversal  $G$ .

A aplicação destes procedimentos para identificar as constantes elásticas de "placas sandwich honeycomb" irá requerer apenas algumas modificações nos modelos teórico e experimental, pois este tipo de placa é muito leve, possui um amortecimento significativo e é altamente resistente.

### *Agradecimentos*

Os autores agradecem as suas próprias Instituições COPPE/UFRJ e SENAI/CETIQT, a Agência Espacial Brasileira através dos convênios 007- 011/98-AEB do projeto UNIESPAÇO e a PUC-Rio, na pessoa do prof. R.Sampaio, pelo incentivo e apoio logístico que permitiram o desenvolvimento deste trabalho.



## REFERÊNCIAS

- Deobald, L. R. & Gibson, R. F., 1988, Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/Rayleigh/Ritz technique, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 124, n. 2, pp. 269-283.
- Frederiksen, P. S., 1995, Single-layer plate theories applied to the flexural vibration of completely free thick laminates, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, n. 5, pp. 743-759.
- Frederiksen, P. S., 1997, Numerical studies for the identification of orthotropic elastic constants of thick plates, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 16, n. 1, pp. 117-140.
- Ewins, 1985, *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press Ltd., Somerset, England.
- Grédiac, M. & Paris, P. A., 1996, Direct Identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: Theoretical and numerical aspects, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 195, n. 3, pp. 401-415.
- Grédiac, M. & Fournier, N. & Paris, P. A. & Surrel, Y., 1998, Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis: experimental results, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 210, n. 5, pp. 643-659.
- Marchand, V. & Authesserre, J. & Pouyet, J. & Bacon, C., 1996, Determination of the constants of materials, in the form of plates, by a free vibration method, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 194, n. 4, pp. 497-512.
- Ayorinde, E. O., 1995, Elastic constants of thick orthotropic composite plates, *Journal of Composite Material*, vol. 29, n. 8, pp. 1025-1039.

**Abstract.** *This paper deals with elastic parameter identification in rectangular plates. A method is described for the identification of elastic parameters from measured natural frequencies of completely free plate. The parameter estimation problem is solved by minimizing, in a least squares sense, the differences between measured and calculated frequencies. The numerical method for calculating the natural frequencies comprises a Rayleigh-Ritz formulation using characteristic orthogonal polynomials in the series representing the displacement functions, which are appropriated for reproducing the boundary completely free conditions.*

**Key words:** *Parameter identification, Elastic constants, Modal Analysis*