



ANÁLISE DO PÊNDULO NÃO-LINEAR A PARTIR DA RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADO

Luiz Fernando Penna Franca

Marcelo Amorim Savi

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil
E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Pedro Manuel C. L. Pacheco

CEFET/RJ, Departamento de Engenharia Mecânica
20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil
E-Mail: calas@cefet-rj.br

Resumo. *A análise de sistemas dinâmicos não-lineares a partir de sinais experimentais aponta para a necessidade de se obter conclusões sobre a dinâmica do sistema sem conhecer detalhes sobre o seu comportamento. A idéia básica da reconstrução do espaço de estado está calcada no fato de que a história temporal de um sinal contém informações sobre variáveis de estado não observáveis que podem ser usadas para prever um estado presente. Este trabalho apresenta uma revisão sobre as técnicas de reconstrução do espaço de estado, aplicando-as à análise do pêndulo não-linear. Para efeito de análise, considera-se um sinal gerado a partir de uma simulação numérica. Discutem-se os movimentos periódico e caótico. Inclui-se também a análise da reconstrução do espaço de um sinal caótico com ruído. Os resultados mostram que o espaço de estado reconstruído é similar ao espaço original.*

Palavras-chave: *Caos, Dinâmica não-linear, Reconstrução do espaço de estado.*

1. INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas físicos não-lineares tem ganho grande importância desde os anos 60, quando E. Lorenz desenvolveu estudos sobre a imprevisibilidade de fenômenos meteorológicos. A dinâmica desses sistemas apresenta uma série de características não observadas nos sistemas lineares. A possibilidade de que os sistemas dinâmicos se comportem de maneira imprevisível motiva uma área de pesquisa atualmente conhecida como *caos*. A imprevisibilidade e a forte dependência das condições iniciais são as principais características do comportamento caótico.

Muitas áreas do conhecimento têm se deparado com este tipo de comportamento, dentre as quais vale destacar a engenharia (Moon, 1998; Piccoli & Weber, 1998; Mees & Sparrow, 1987), a medicina (Goldberger *et al.*, 1990), a ecologia (Schaffer, 1985), a biologia (Hassell *et al.*, 1991) e a economia (Peel & Speight, 1994). Isto tem motivado estudos que reavaliem as

concepções tradicionais, utilizando métodos analíticos, numéricos e experimentais alternativos.

Inúmeras pesquisas são dedicadas a estudar sistemas dinâmicos descritos por modelos matemáticos simples. Apesar da simplicidade de um determinado modelo, sua resposta dinâmica pode exibir um comportamento bastante complexo. Matematicamente, existem dois tipos de abordagens utilizadas no estudo de sistemas dinâmicos: equações diferenciais e mapas. Alligood *et al.* (1997) colocam que “obviamente, a idéia de que um experimento real possa ser governado por um conjunto de equações é uma ficção. Um conjunto de equações diferenciais, ou um mapa, pode modelar um sistema apenas da forma suficiente para fornecer resultados úteis”. Nesse contexto, torna-se importante responder a seguinte questão: É possível obter conclusões sobre a dinâmica de um sistema sem conhecer detalhes sobre o seu comportamento? Ou, em outras palavras, é possível conhecer a dinâmica de um sistema que não possui um modelo matemático estabelecido?

A definição ou a modelagem de um sistema necessita ser representada através de informações que são denotadas como o estado deste sistema. De uma maneira geral, um experimento não mede todas as variáveis de estado do sistema e, usualmente, tem-se disponível a evolução no tempo de apenas uma variável de estado. Dessa forma, é interessante analisar o sistema dinâmico a partir dessa série temporal o que é feito a partir de técnicas de reconstrução do espaço de estado.

A reconstrução do espaço de estado baseada no método da defasagem no tempo (*time delay*) tem provado ser uma poderosa ferramenta na análise de sistemas físicos não-lineares com comportamento caótico (Ravindra & Hagedorn, 1999). As idéias fundamentais sobre a técnica são creditadas a Ruelle (1979), Packard (1980) e Takens (1981), e uma de suas principais características é a preservação dos invariantes geométricos do sistema (dimensão fractal, expoente de Lyapunov e outros).

Normalmente, não se sabe *a priori* quantas e quais são as variáveis de estado de um sistema dinâmico o que dificulta a determinação da sua dimensão. Assim, antes de se reconstruir o espaço de estado faz-se necessário determinar a dimensão de imersão do sistema (*embedding dimension*), definindo um conjunto de coordenadas que serve como base para a reconstrução do espaço de estado. Um dos métodos mais eficientes para a determinação dessa dimensão é o método das falsas vizinhanças (*false neighbours*) (Kennel *et al.*, 1992).

Este trabalho apresenta uma discussão sobre a técnica da defasagem no tempo, aplicando-a na análise do movimento do pêndulo simples não-linear. O pêndulo não-linear é um problema clássico no estudo do caos, mas sua análise a partir da reconstrução do espaço de estado ainda não está disponível na literatura. O principal objetivo deste trabalho é comparar o espaço reconstruído com o espaço original gerado através de uma simulação numérica. Dessa forma, uma vez que a dimensão do sistema é conhecida, não se discutem as técnicas para determinação da dimensão de imersão. Inicialmente, apresentam-se alguns resultados obtidos a partir de simulações numéricas. Em seguida, elege-se uma variável de estado como sinal do sistema, fazendo a análise desse sinal através da técnica de *FFT* (*Fast Fourier Transform*) para avaliar o tipo de resposta desse sistema. Posteriormente, faz-se a reconstrução do espaço de estado através da técnica da defasagem no tempo. Os espaços de estado obtidos numericamente e a partir das técnicas de reconstrução mostram-se semelhantes.

2. RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADO

A idéia básica da reconstrução do espaço de estado, ou de fase, está calcada no fato de que a história temporal de um sinal contém informações sobre variáveis de estado não observáveis que podem ser usadas para prever um estado presente.

Considere então uma série temporal, $s(t)$, que representa a trajetória de um dado sistema dinâmico. O espaço de estado do sistema pode ser reconstruído a partir desta série considerando a técnica da defasagem no tempo (*time delay*). Esta técnica foi inicialmente proposta por Rulle (1979) e Packard (1980) e posteriormente por Takens (1981) e Sauer *et al.* (1991). A idéia básica da técnica é traçar $s(t)$ versus $s(t+\tau)$, onde τ é uma defasagem (*delay*). Este procedimento é motivado pelo fato de que a trajetória representada no espaço de fase reconstruído possui propriedades similares ao espaço de fase original, sendo topologicamente equivalentes (Moon, 1992).

2.1 Técnica da Defasagem no Tempo (*Time Delay*)

Nos primeiros trabalhos sobre reconstrução do espaço, $s(t)$ era traçado em função de $s(t+1)$. Um problema imediato dessa abordagem é a alta correlação existente entre $s(t)$ e $s(t+1)$, fazendo com que o espaço de fase torne-se fortemente alinhado na direção (1, 1), causando resultados distorcidos. Por um outro lado, se o valor da defasagem for muito grande, a distância entre os dados considerados na formação do vetor de defasagem é grande, e eles podem não serem suficientes para reproduzir a dinâmica do sistema original.

Se o sinal experimental é representado por $s(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, onde N é o número total de amostras, então o vetor reconstruído é dado por:

$$u(n) = \{s(n), s(n+\tau), \dots, s(n+(d-1)\tau)\} \quad (1)$$

onde d é a dimensão de imersão do sistema escolhido de tal maneira que $d > 2d_A + 1$, sendo d_A a dimensão do atrator. $u(n)$ representa a dinâmica reconstruída na imersão.

Os resultados de Takens (1980) garantem que o atrator reconstruído e o original são difeomórficos. Além disso, a série temporal de uma única variável é suficiente para a reconstrução desde que a dimensão de imersão seja suficientemente grande (Takens 1980; Sauer *et al.*, 1991). Assim, a escolha correta da defasagem τ e da dimensão de imersão d são de extrema importância para a identificação dos invariantes geométricos. Mostrando a importância da escolha correta do parâmetro de defasagem, em uma conferência em Berlim no ano de 1986, foram apresentados cinco trabalhos diferentes sobre a sua escolha na reconstrução do espaço de fase.

Algumas técnicas como o método do valor singular global (*global singular value method*) (Broomhead & King, 1986) e a função de autocorrelação (*autocorrelation function*) (Box & Jenkins, 1994), foram desenvolvidas para avaliar o parâmetro de defasagem e apresentam alguma eficiência. No entanto, é o método da informação mútua (*mutual information method*) (Fraser & Swinney, 1986) que apresenta melhores resultados o que tornou sua aplicação mais difundida.

2.2 Método da Informação Mútua

Fraser & Swinney (1986) estabelecem que o valor da defasagem τ corresponde ao primeiro mínimo local da função de informação mútua $I(\tau)$, quando este existir. Esta função é definida da seguinte forma,

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^{N-\tau} P(s(n), s(n+\tau)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n+\tau))}{P(s(n))P(s(n+\tau))} \right] \quad (2)$$

onde $P(s(n))$ é a probabilidade da medida $s(n)$, $P(s(n+\tau))$ é a probabilidade da medida $s(n+\tau)$, e $P(s(n), s(n+\tau))$ é a probabilidade da medida combinada de $s(n)$ e $s(n+\tau)$ (Fraser & Swinney, 1986).

As informações mútuas não são funções das variáveis $s(n)$ e $s(n+\tau)$, mas sim, de um funcional da probabilidade combinada de $s(n)$ e $s(n+\tau)$. Se $s(n)$ e $s(n+\tau)$ são iguais, então $I(\tau)$ é máximo, especificando a precisão relativa das medidas em bits, isto é, o quanto de informação uma medida fornece sobre uma segunda medida de uma mesma variável. Por outro lado, se $s(n)$ e $s(n+\tau)$ são completamente independentes, o argumento do termo logarítmico é a unidade e $I(\tau) = 0$. Dessa forma, ao traçar $I(\tau)$ em função de τ , o melhor valor da defasagem corresponde ao valor de τ no primeiro mínimo local. Com isso, garante-se que o espaço de fase reconstruído é topologicamente equivalente ao espaço de fase do sistema dinâmico original.

Este método, baseado em histogramas, demonstrou ser eficiente para séries temporais geradas por computador. No entanto, Berger & Minis (1995) afirmam que em séries temporais com ruído, oriundas de sinais experimentais, sua aplicação é ineficiente. Nestes casos, Kennel (1990) sugere o uso de uma nova técnica adaptativa para estimar a função de probabilidade, em substituição aos histogramas, mostrando ser altamente eficiente no cálculo da informação mútua para séries temporais com ruído.

3. PÊNULO NÃO-LINEAR

Considere um pêndulo não-linear onde θ define sua posição, α é o coeficiente de amortecimento viscoso linear e ω_n está associado à frequência natural do sistema. Admite-se um forçamento harmônico sendo ρ a amplitude e Ω a frequência de forçamento. A equação de movimento do sistema está apresentada a seguir.

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_n^2 \sin(\theta) = \rho \cos(\Omega t) \quad (3)$$

Esta equação pode ser reescrita como um sistema de equações de primeira ordem, $\dot{u} = f(u, t)$, $u \in R^2$, onde $u_1 = x = \theta$ e $u_2 = y = \dot{\theta}$. Analisando o significado físico do movimento do pêndulo, identificam-se dois pontos de equilíbrio: $(0,0)$ e $(\pi,0)$. O deslocamento do pêndulo limita-se ao intervalo $\theta = (0, +\pi)$, no sentido positivo, $\theta = (0, -\pi)$, no sentido negativo, caracterizando uma variação de posição de 2π . Esse tipo de espaço de fase representa a superfície de um cilindro obtido através do produto topológico de uma circunferência (S^1) e uma reta (R^1). Assim, os pontos $(+\pi,0)$ e $(-\pi,0)$ são idênticos, pois representam a mesma posição.

Neste trabalho, simulações numéricas são realizadas a partir do método Runge Kutta de quarta ordem com passos menores que $\Delta t = 2\pi / 100$. Para todas as simulações estudadas considera-se $\alpha = 0,2$ e $\omega_n = \Omega = 1,0$.

3.1 Movimento periódico

Considere uma amplitude de forçamento $\rho = 2,56$. Nesse caso, o pêndulo apresenta um movimento periódico de período-2. A Fig.1 mostra a órbita deste movimento em regime permanente, no espaço de fase cilíndrico e rebatido no plano.

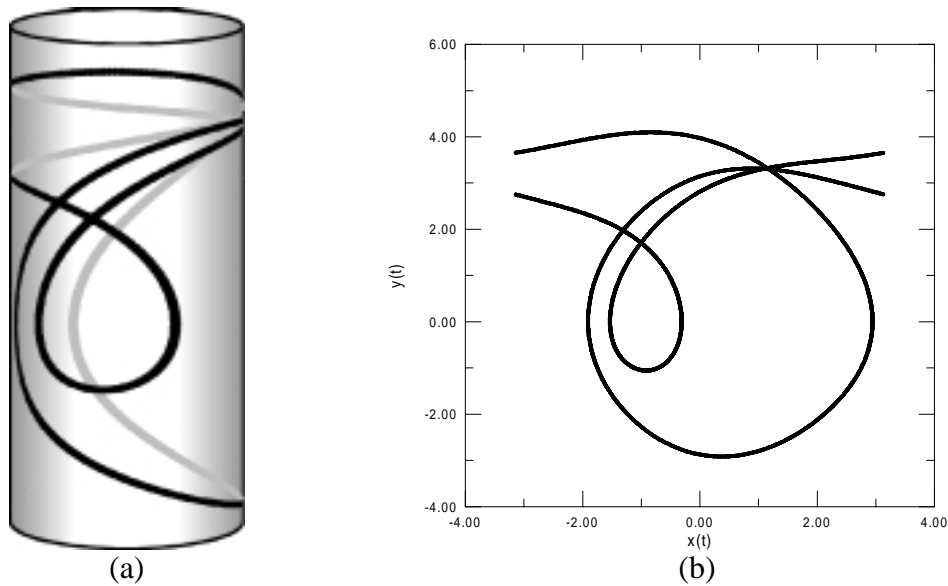


Figura 1 - Órbita de período-2. (a) Espaço de fase cilíndrico; (b) Espaço de fase plano.

Neste ponto, elege-se a variável de estado x como um sinal característico do pêndulo. Esse sinal representa uma simulação de um sinal experimental ideal (sem ruído). A análise através da *FFT* (*Fast Fourier Transform*) permite identificar as frequências envolvidas no movimento (Fig.2). O espectro de frequência é discreto, apresentando um número finito de frequências, neste caso igual a 2, o que confirma uma resposta de período-2.

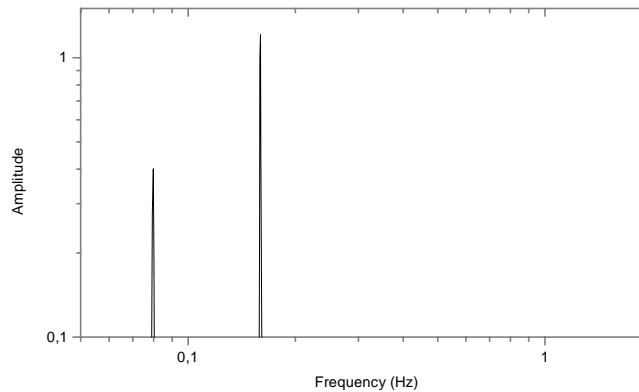


Figura 2 - *FFT* da resposta de período-2.

Considere agora a reconstrução do espaço de estado a partir da técnica da defasagem no tempo. A Fig.3a mostra a relação entre a informação mútua e o tempo de defasagem, para as mesmas condições do exemplo anterior (período-2). Este caso apresenta uma dificuldade para determinar o valor ideal da defasagem. A utilização do primeiro mínimo local não apresenta bons resultados. No entanto, dividindo a curva em regiões definidas a partir dos dois primeiros pontos de máximo global (linha vertical), pode-se considerar o mínimo global da primeira região como o valor ideal (1,319s), o que fornece resultados satisfatórios. A Fig.3b mostra a órbita reconstruída a partir desta defasagem. O rebatimento dos valores da variável x faz com que o espaço reconstruído seja diferente do espaço de fase original (Fig.1). Isto ocorre, pois a variável y não deveria ser rebatida, o que de fato acontece ao se reconstruir o espaço a partir da variável x . Para eliminar este tipo de problema, faz-se uma normalização dessas variáveis. Aumentando o intervalo para 4π , os espaços fase original e reconstruído tornam-se equivalentes (Fig.4).

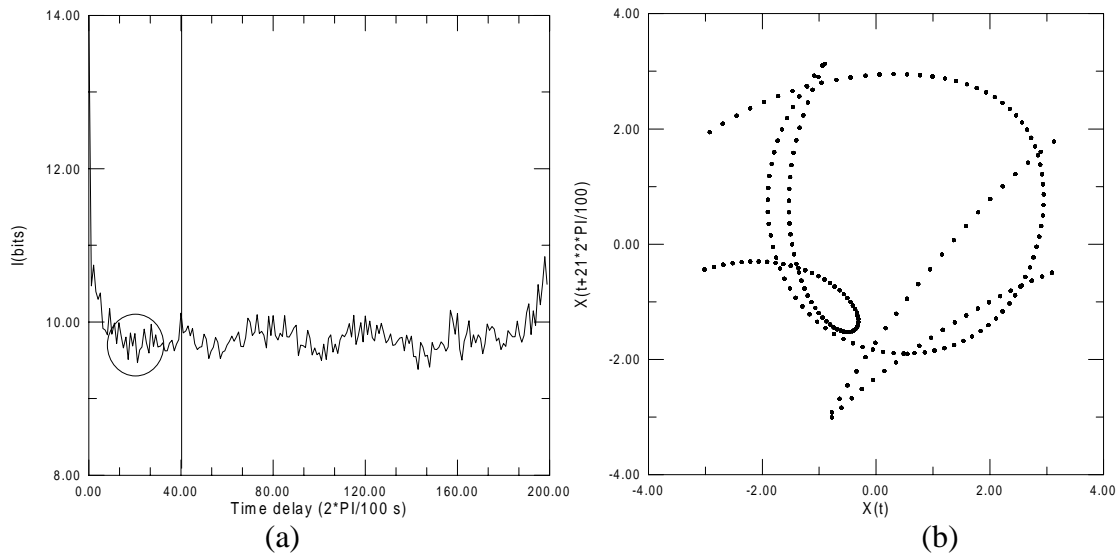


Figura 3 - Espaço de fase do movimento de período-2 .
 (a) Informação Mútua *versus* tempo de defasagem; (b) Espaço de fase reconstruído.

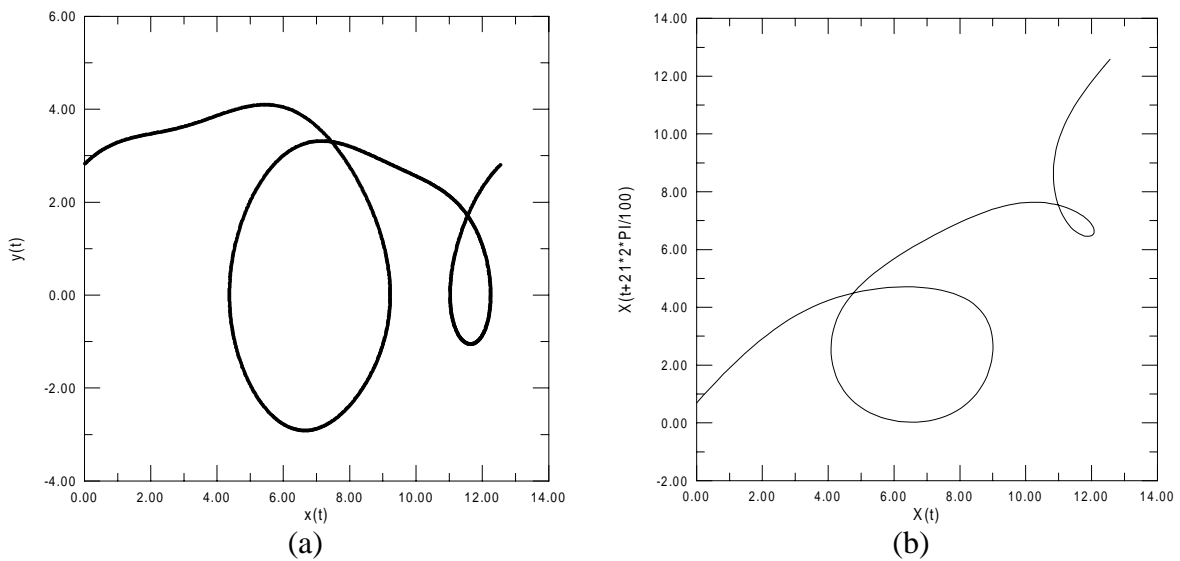


Figura 4 – Espaço de fase do movimento de período-2 em um intervalo de 4π .
 (a) Espaço de fase original; (b) Espaço de fase reconstruído.

3.2 Movimento caótico

Considere agora um movimento caótico onde admite-se um forçamento $\rho = 2,50$. A seção de Poincaré desse movimento, obtido a partir da simulação numérica, está apresentada na Fig.5, mostrando um atrator estranho.

Mais uma vez, elege-se a variável de estado x como um sinal característico do pêndulo. A análise através da *FFT (Fast Fourier Transform)* (Fig.6), mostra que o sinal apresenta um espectro contínuo em um determinado intervalo, o que caracteriza o comportamento caótico (Moon, 1992). Considere agora a reconstrução do espaço de estado. A Fig.7a mostra a curva da informação mútua *versus* tempo de defasagem. Nesse caso, a determinação desse parâmetro é mais clara do que no caso do movimento periódico ($\tau = 2,2619s$). No entanto, o procedimento utilizado para determinar o tempo de defasagem no caso do movimento periódico continua sendo válido. A Fig.7b apresenta o atrator estranho reconstruído. O mesmo problema encontrado para o movimento de período-2, com relação ao rebatimento da variável

x no intervalo $x = (-\pi, +\pi)$, também é observado no comportamento caótico. Mais uma vez, este problema pode ser resolvido através de uma normalização das variáveis, o que está mostrado na Fig.8.

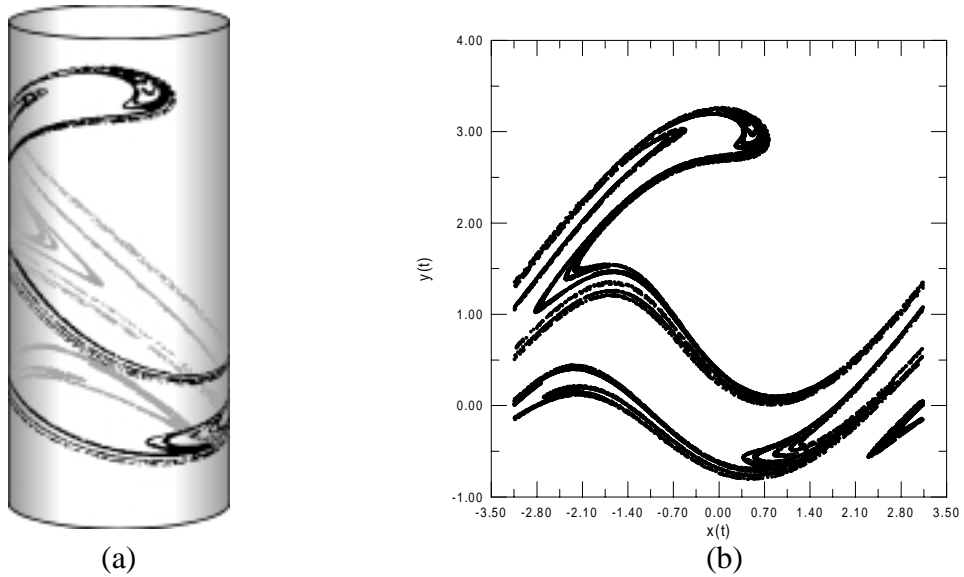


Figura 5 – Movimento caótico: Atrator estranho no (a) Espaço de fase cilíndrico; (b) Espaço de fase plano.

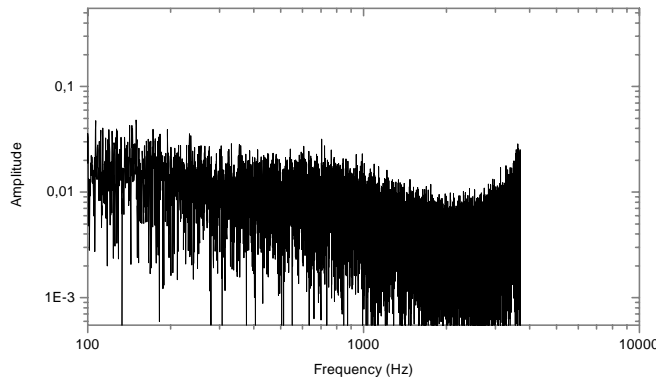


Figura 6 - FFT da resposta caótica.

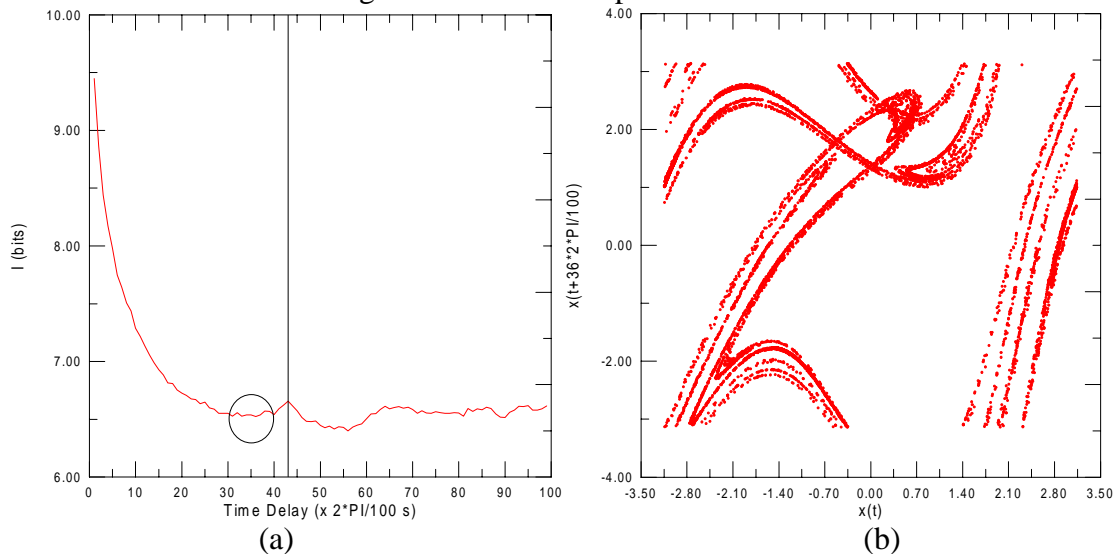


Figura 7 - Espaço de fase do movimento caótico. (a) Informação Mútua versus tempo de defasagem; (b) Atrator estranho reconstruído.

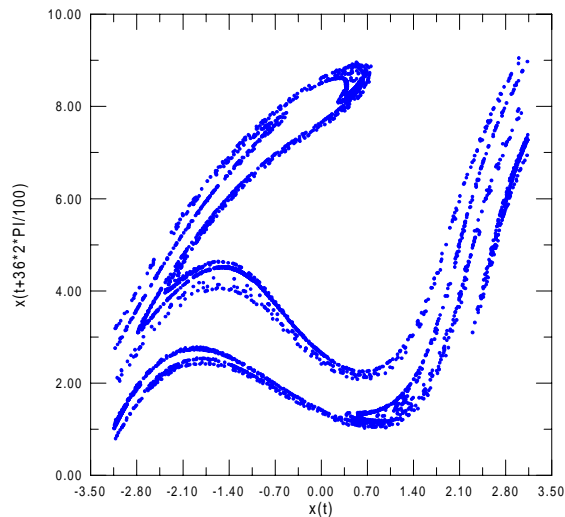


Figura 8 – Atrator estranho reconstruído.

3.3. Movimento caótico com ruído

Esta seção apresenta a reconstrução do espaço de estado do movimento caótico discutido na seção anterior, considerando um sinal com ruído. Com esse objetivo, considera-se que o sinal é definido como sendo a variável x somada a um ruído randômico de, no máximo, 1/10 da amplitude máxima. A *FFT* do sinal está mostrada na Fig.9 onde observa-se que o espectro de freqüência é contínuo em um determinado intervalo, caracterizando um comportamento caótico, de maneira análoga ao caso sem ruído.

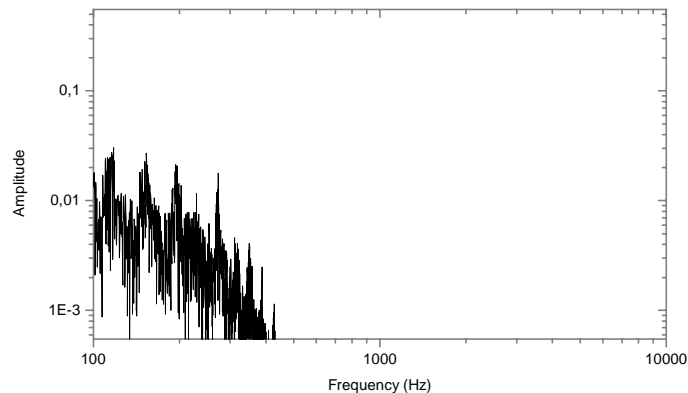


Figura 9 - *FFT* da resposta caótica com ruído.

Considere agora a reconstrução do espaço de estado. A Fig.10a mostra a curva da informação mútua *versus* tempo de defasagem. Nesse caso, o melhor parâmetro é $\tau = 3,5186s$ o que é bem diferente do calculado para o caso sem ruído. A Fig.10b apresenta o atrator estranho reconstruído e normalizado. Deve-se observar que este atrator não apresenta, de forma clara, as lamelas clássicas de um atrator estranho.

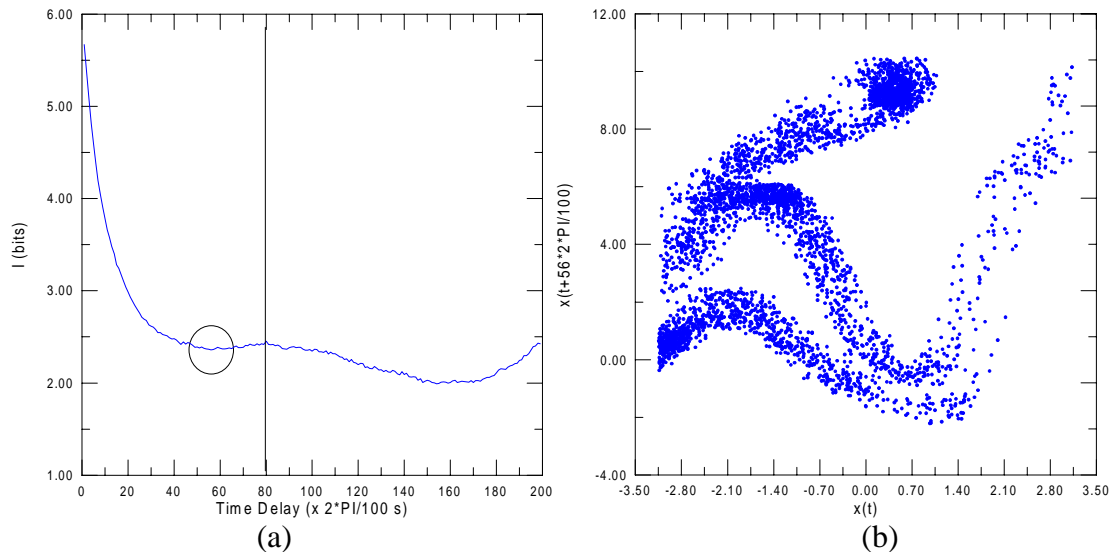


Figura 10 - Espaço de fase do movimento caótico com ruído.
 (a) Informação Mútua *versus* tempo de defasagem; (b) Atrator estranho reconstruído.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma revisão das técnicas de reconstrução do espaço de estado, aplicando-as na análise do movimento do pêndulo não-linear. Utilizou-se a técnica da defasagem no tempo, sendo o tempo de defasagem definido a partir do método da informação mútua. Elegendo-se como sinal a variável x , associada à posição do pêndulo, observa-se que o espaço de estado reconstruído é topologicamente equivalente ao original. Para a determinação do tempo de defasagem adequado, deve-se dividir a curva da informação mútua *versus* tempo de defasagem em regiões definidas pelos pontos de máximo, escolhendo o mínimo global da primeira região. Estudaram-se casos de movimento periódico, caótico e caótico com ruído, sendo que a reconstrução de todos os espaços analisados apresentaram resultados satisfatórios, mostrando a potencialidade da técnica.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o suporte do CNPq e da FAPERJ.

REFERÊNCIAS

- Alligood, K.T., Sauer, T.D. & Yorke, J.A., 1997, Chaos: an introduction to dynamical Systems, Springer-Verlag.
- Berger, B. S., Mins, I., Chen, Y. H., Chavali, A. & Rokni, M., 1995, Attractor embedding in metal cutting, J. Sound and Vibration, v.184, pp.936-942.
- Box, G.G.P., Jenkins, G.M. & Reinsel, G.C., 1994, Time series analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Broomhead, D.S. & King, G.P., 1986, Extracting qualitative dynamics from experimental data, Physica D, v.20, pp.217-236.
- Fraser, A.M., 1989, Reconstructing attractors from scalar time series: A comparison of singular system and redundancy criteria, Physica D, v.34, pp.391-404.
- Fraser, A.M. & Swinney, H.L., 1986, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, Physics Review A, v.33, pp.1134-1140.

- Goldberger, A., Ringney, D. & West, B., 1990, Chaos and fractal in human physiology, Scientific American, v.262(2), pp.34-41.
- Hassel, M.P., Comins, H.N. & May, R.M., 1991, Spatial structure and chaos in insect population dynamics, Nature, v.353, pp.255-258.
- Haucke, H., Ecke, R. E. & Wheatley, J.C., 1986, Dimensions and entropies in chaos systems, G. Mayer-Kress, ed. (Springer, Berlin), pp.198.
- Kennel, M.B., Brown, R. & Abarbanel, H.D.I., 1992, Determining embedding dimension from phase-space reconstruction using a geometrical construction, Physics Review A , v.25:6.
- Kennel, M.B., 1992, The multiple mutual information program, Report. Institute for Nonlinear Science, University of California, San Diego, CA.
- Moon, F.C., 1998, Dynamics and Chaos in Manufacturing Processes, John Wiley.
- Moon, F.C., 1992, Chaotic and Fractal Dynamics, John Wiley.
- Mees, A. I. & Sparrow, C., 1987, Some tools for analyzing chaos, Proceedings of the IEEE, v.75(8), pp.1058-1070.
- Packard, N.J., Crutchfield, J.P., Fromer, J.D. & Shaw, R.S., 1980, Geometry from a time series, Phys. Res. Ltrs., v.115, pp.712-716.
- Peel, D.A. & Speight, A.E.H., 1994, Hysteresis and cyclical variability in real wages, output and unemployment: empirical evidence from nonlinear methods for the United States, Int. J. Syst. Science, v.25(5), pp.943-965.
- Piccoli, H.C. & Weber, H.I., 1998, Experimental observation of chaotic motion in a rotor with rubbing, Nonlinear Dynamics, v.16, pp.55-70.
- Ravindra, B. & Hagedorn, P., 1999, State-space reconstruction of non-linear vibrating systems, Proceedings of PACAM 99 - Sixth Pan American Congress of Applied Mechanics / DINAME 99 - 8th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, Rio de Janeiro, Brazil, January 4-8, v.8, pp.1259-1262.
- Ruelle, D., 1979, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, Math. Inst. Hautes Etudes Sci., v.5:27.
- Sauer, T., Yorke, J.A., & Casdagli, M., 1991, Embedology, J. of Statistical Phy., v.65(3/4) pp.579-616.
- Schaffer, W.M., 1985, Order and chaos in ecological systems, Ecology, v.66(1): pp. 93-106.
- Takens, F., 1981, Detecting strange attractors in turbulence, Lecture notes in Math., v.898, Springer-Verlag, New York, pp. 366-381.

ANALYSIS OF NON-LINEAR PENDULUM USING STATE SPACE RECONSTRUCTION

Abstract. *Non-linear dynamics analysis from time series signals points to the necessity of answer questions about the dynamics of the system without understanding all details of the behavior. The basic idea of the state space reconstruction is that a signal contains information about unobserved state variables which can be used to predict the present state. This contribution presents an overview on the techniques of state space reconstruction, applying them to the non-linear pendulum analysis. The signal is generated by numerical simulation. Periodic and chaotic motions are treated. A chaotic motion with noise is also included in the analysis. The results show that the state space reconstructed is similar to original space.*

Keywords: *Chaos, Non-linear Dynamics, State Space Reconstruction.*