

OSCILAÇÕES DO GÁS CONTIDO EM UM TUBO FECHADO DESCRITAS POR UM MÉTODO DE CAPTURA DE CHOQUE

Luciano Amaury dos Santos

Ronei Mascarenhas de Brito

Arcanjo Lenzi

Antônio Fábio Carvalho da Silva

Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC

CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brasil

***Resumo.** A propagação de ondas sonoras de amplitude finita em tubos é importante no escoamento dos gases na tubulação de descarga de motores de combustão interna e mais recentemente tem sido estudada com vistas ao desenvolvimento de compressores sônicos. Neste artigo é avaliada uma das formas de estudar este tipo de ondas: a solução numérica das equações quase-unidimensionais de conservação da massa e da quantidade de movimento utilizando um método de captura de choque.*

***Palavras-chave:** Acústica não-linear, Simulação numérica, Compressor sônico*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de ondas de pressão unidimensionais de amplitude finita em tubos, em que termos não-lineares das equações de movimento são significativos, tem atraído a atenção de pesquisadores há algum tempo (Zaripov & Ilgamov, 1976), como um caso mais simples da propagação de ondas acústicas de amplitude finita. Este caso é particularmente interessante, por exemplo, no estudo da propagação de ondas de pressão nas tubulações de descarga de gases em motores de combustão interna. Recentemente este interesse foi renovado a partir da possibilidade de construção de compressores sônicos, em que o fluido é excitado propositalmente em uma frequência de ressonância, conforme descrito por Ashley (1998).

A descrição matemática destas ondas não-lineares tem sido freqüentemente baseada em métodos de perturbação (Chester, 1964), assumindo-se que o escoamento seja isentrópico e, muitas vezes, invíscido. Estes métodos proporcionam bons resultados, embora o seu desenvolvimento exija um esforço matemático considerável. Além da complexidade estes métodos tem como desvantagem as hipóteses restritivas quanto à amplitude das perturbações admissíveis, geralmente utilizadas.

No presente trabalho é usado um método de diferenças finitas com uma discretização de alta resolução na captura de choques (LeVeque, 1990). O comportamento deste método é

observado na simulação de oscilações de gás em tubos de seção constante ou variável, em frequências próximas de uma ressonância.

2. ALGUMAS HIPÓTESES IMPORTANTES

Antes de detalhar o modelo matemático são discutidas algumas hipóteses simplificativas.

2.1 escoamento ideal

Como em acústica linear os termos viscosos e de condução de calor limitam as amplitudes previstas nas ressonâncias pelos modelos matemáticos (de forma que, desprezados estes efeitos, tem-se amplitude infinita nas ressonâncias) é fácil enxergar tais termos como sendo sempre os responsáveis pela limitação das amplitudes nessas frequências. Em modelos não-lineares, entretanto, ocorre também a atenuação das ondas por efeitos não-lineares.

Nos modelos não-lineares um sistema excitado na sua frequência natural fundamental fornece uma resposta cujo espectro de frequências envolve, além da frequência da excitação, frequências múltiplas dela (harmônicas). Diz-se, portanto, que a energia é levada das componentes de Fourier de frequências mais baixas para as componentes de frequências mais altas pela não-linearidade. As componentes de altas frequências distorcem a forma da onda, daquela senoidal da frequência de excitação correspondente à da primeira ressonância do tubo. A transferência de energia para as componentes de altas frequências representa uma forma de dissipação da energia fornecida pelo tubo para o gás na frequência fundamental.

Temkim (1980, seção 3.7) discute com maior profundidade os efeitos não-lineares, dando especial atenção à formação e atenuação de ondas de choque por estes efeitos. Note-se que os processos não-lineares discutidos aqui são irreversíveis: a energia transferida para as componentes de alta frequência não é devolvida às de baixa frequência.

Fisicamente, é natural que, para as componentes da onda de frequências suficientemente altas, os efeitos viscosos e de condução tornem-se importantes e transformem a energia mecânica que chegar à essas componentes em energia interna.

Mas, como pode-se verificar em diversos resultados publicados na literatura, mesmo modelos que desprezam os termos viscosos e de condução podem prever a amplitude finita das oscilações de um gás em ressonância. Em muitas situações os efeitos dos termos não-lineares (sobre a amplitude das componentes de Fourier da resposta que são de interesse prático) são muito mais importantes que os efeitos dos termos viscosos e de condução, de modo que estes últimos termos são efetivamente desprezíveis. A hipótese de escoamento ideal adotada no presente trabalho é própria para lidar com situações deste tipo.

2.2 Processo politrópico

Para evitar o uso da equação da conservação da energia, admite-se frequentemente que o escoamento seja isentrópico. Esta hipótese tem uma fraca conexão com o fato de que um processo adiabático reversível é isentrópico. Admite-se que ocorram processos irreversíveis dentro do tubo, contanto que a perda de calor para o ambiente seja tal que mantenha a entropia do fluido constante ao longo de todo o tubo.

O uso da equação da conservação da energia implicaria em considerar os processos de transferência de calor do interior do tubo para o ambiente externo. Se o tubo fosse considerado adiabático ter-se-ia, na ressonância, um contínuo aumento da energia do fluido e, portanto, um regime periódico nunca seria alcançado. Aganin *et al.* (1996) testaram tanto o uso da conservação da energia (considerando o tubo adiabático) como a hipótese de

escoamento isentrópico, tendo manifestado nas suas conclusões uma preferência pelos resultados obtidos assumindo o processo isentrópico.

De fato pode-se aprimorar os resultados do modelo isentrópico, sem utilizar a equação da energia, admitindo que o gás sofra um processo politrópico mais genérico (Van Wylen & Sonntag, 1976) durante as suas oscilações.

3. MODELO MATEMÁTICO

O escoamento quase-unidimensional e invíscido de um fluido pode ser descrito, em um sistema de referência que se move com aceleração $a(t)$, pelas equações de conservação da massa e quantidade de movimento escritas como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} \rho A \\ \rho u A \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} \rho u A \\ \rho u^2 A + p A \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ p \frac{dA}{dx} - \rho A a \end{matrix} \right\} \quad (1)$$

sendo ρ a massa específica do fluido; u , a velocidade; p , a pressão; $A(x)$, a área da seção transversal do tubo. Para o escoamento isentrópico de um gás perfeito, que inicialmente encontrava-se em um estado uniforme ao longo de todo o tubo, tem-se $p = K \rho^n$, sendo $K = p_0 / \rho_0^n$ e n a razão de calores específicos do gás (considerados constantes). O subscrito 0 indica o estado inicial. De um modo mais genérico pode-se admitir que n seja um expoente politrópico (maior que 1 e menor que a razão de calores específicos) escolhido para representar adequadamente o processo sofrido pelo gás (verificado experimentalmente).

Estas são as equações do modelo teórico usado no presente trabalho. O sistema de coordenadas móvel é utilizado para representar um tubo que sofre um deslocamento harmônico, causado por um excitador, conforme ilustrado na Fig. 1.

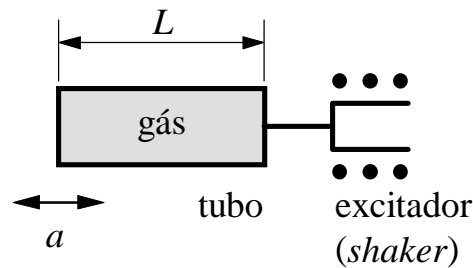


Figura 1 - Tubo solidário com excitador (*shaker*).

4. MÉTODO NUMÉRICO

Para a simulação numérica do movimento do gás no interior do tubo foi utilizado um método do tipo Lax-Wendroff, com um esquema de discretização de alta resolução (LeVeque, 1990), conforme detalhado a seguir.

Discretizada com o auxílio de um volume de controle como o mostrado na Fig. 2, a Eq. (1) fica na forma

$$\phi_i^{k+1} - \phi_i^k = \Delta t \left[(f_{i-1/2} - f_{i+1/2}) / \Delta x + s_i \right]^{k+1/2} / A_i \quad (2)$$

onde

$$\phi = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} \rho u A \\ \rho u^2 A + pA \end{Bmatrix} \quad (3)$$

e

$$s_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_i (A_{i+1/2} - A_{i-1/2}) / \Delta x - \rho_i A_i a \end{Bmatrix} \quad (4)$$

O subscrito i é usado para indicar a posição em que é avaliada uma quantidade, de modo que $x_i = (i-1/2) \Delta x$, e o superescrito k , analogamente, para o instante de tempo $t^k = k \Delta t$.

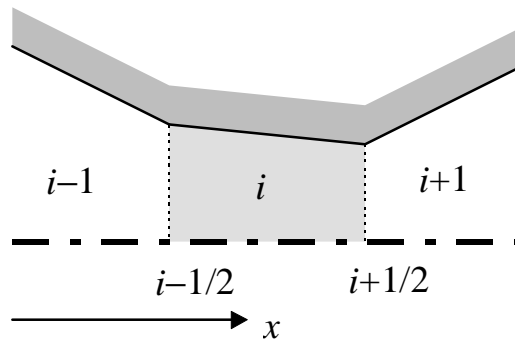


Figura 2 - Volume de controle usado na discretização da Eq. (1).

O esquema do tipo Lax-Wendroff garante segunda ordem de acurácia no tempo e no espaço mas não leva em consideração a presença do termo forçante s na equação de conservação da quantidade de movimento. Para alcançar segunda ordem na avaliação deste termo faz-se, inicialmente, o cálculo da massa específica usando a primeira linha da Eq. (2). Calcula-se, então, a pressão e, em seguida, usando valores médios entre os valores recentemente calculados e os valores da pressão e da massa específica para o instante anterior, calcula-se o termo forçante não-nulo, presente na segunda linha da Eq. (2).

A avaliação dos fluxos f é feita usando as variáveis características locais nas interfaces dos volumes de controle. As variáveis características locais são obtidas a partir de um estado em que a velocidade e a massa específica são dadas simplesmente pela média aritmética dos seus valores nos volumes de controle vizinhos a cada interface. Foi utilizado o *Superbee Limiter* de Roe para evitar o tratamento inadequado dos choques pelo método de Lax-Wendroff.

5. RESULTADOS

Nesta seção serão mostrados os resultados para duas geometrias: um tubo de seção constante, com uma área A_0 e um tubo cujo seção transversal tem a sua área variada ao longo do comprimento segundo $A(x) = A_0 [2 - \cos(\pi x / L)]^2$, para $0 \leq x \leq L$, onde L é o comprimento do tubo. Serão estudadas as respostas destes tubos quando forçados a oscilar em frequências ω próximas das suas frequências naturais fundamentais. Para o tubo reto tem-se a frequência natural fundamental dada por $\omega_0 = \pi c_0 / L$ sendo c_0 a velocidade do som calculada

no estado não-perturbado, $c_0 = \sqrt{n K \rho_0^{n-1}}$. Será considerado o movimento do tubo reto com uma amplitude de deslocamento $D = 10^{-4} L$. O outro tubo terá resultados mostrados para esta e também para a amplitude $D = 10^{-3} L$. Em todos os casos considerar-se-á o escoamento isotérmico, portanto $n = 1$.

A aceleração do tubo é obtida, a partir da amplitude do movimento, através de $a(t) = -\frac{D}{2} \omega^2 \cos(\omega t)$, enquanto que a constante K , a massa específica e a pressão iniciais estão relacionadas por $K = p_0 / \rho_0^n$.

A Fig. 3 mostra valores de amplitude das oscilações de pressão verificadas na extremidade ($x = 0$) do tubo de seção variável para diversas freqüências e para duas amplitudes de movimento do tubo. Na Fig. 3 são mostrados resultados obtidos com diversas malhas. O efeito de malha é discutido rapidamente na seção 6.2 deste artigo.

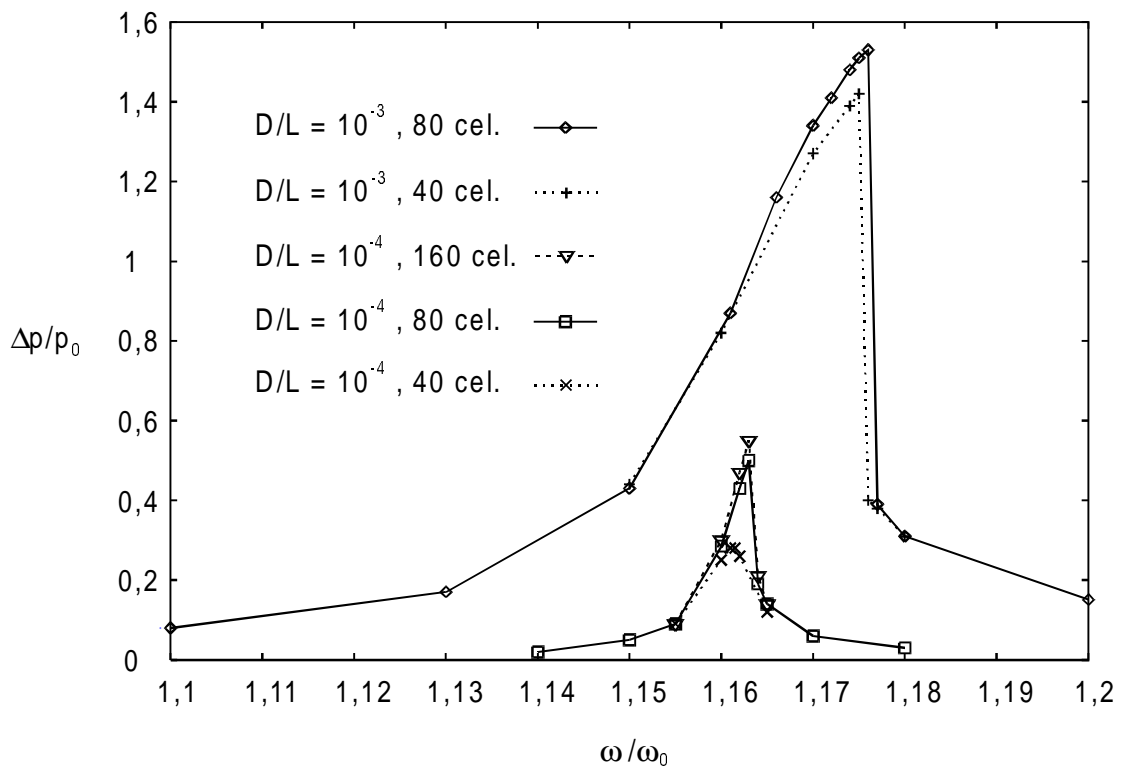


Figura 3 - Variação da pressão na extremidade $x = 0$ do tubo de seção variável.

Observa-se, através da Fig. 3, que as maiores variações de pressão ocorrem em freqüências diferentes, de acordo com a amplitude de deslocamento do tubo, D . Tanto a dependência da freqüência de ressonância com a amplitude das oscilações, como a variação abrupta na amplitude da resposta em função da freqüência da excitação (conhecida como *jump phenomenon*) vista na mesma figura, são características conhecidas da solução da equação de Duffing, um modelo clássico para oscilações não-lineares de sistemas de um grau de liberdade discutido por Rao (1995, seção 13.4.3). Esta semelhança entre a resposta de um tubo de seção variável e a solução da equação de Duffing foi observada por Ockendon *et al.* (1993).

A menos daqueles em que há alguma indicação a respeito na legenda, todos os resultados mostrados aqui foram obtidos dividindo o comprimento do tubo em 80 células (ou volumes de controle) como a mostrada na Fig. 2. O passo de tempo foi calculado usando $\Delta t = 0,4 \Delta x / c_0$.

A Fig. 4 mostra a variação da pressão ao longo do tempo nas extremidades do tubo para a amplitude $D = 10^{-3} L$ e a frequência $\omega = 1,176 \omega_0$, na qual foi obtida a maior amplitude de oscilação do gás na simulação numérica. Nesta figura podem ser notadas variações repentinas de pressão. Estas variações repentinas resultam da chegada de uma onda de choque à extremidade do tubo correspondente à curva considerada. A onda de choque aparece claramente no perfil de pressão ao longo do comprimento do tubo, mostrado na Fig. 5.

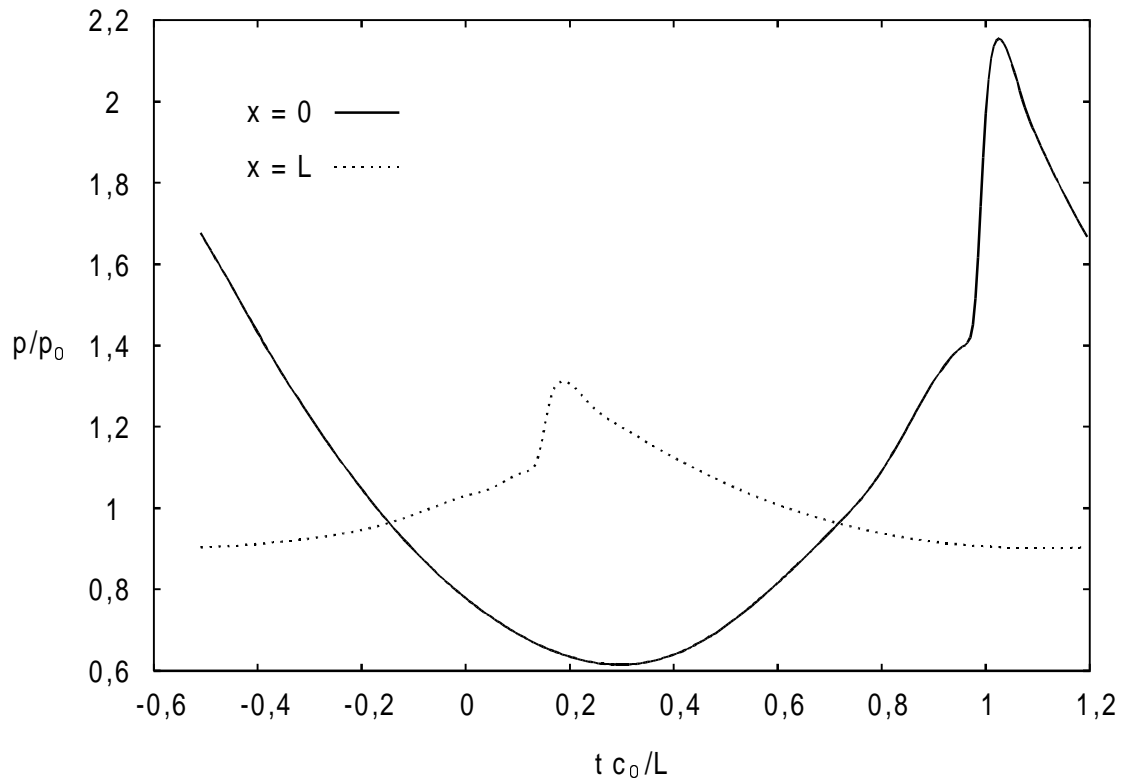


Figura 4 - Pressão nas extremidades do tubo, $D = 10^{-3} L$, $\omega = 1,176 \omega_0$.

A Fig. 5 mostra os perfis de pressão ao longo do tubo para as frequências $1,176 \omega_0$ e $1,15 \omega_0$. A frequência de $1,176 \omega_0$ representa praticamente a ressonância fundamental do gás neste tubo para a amplitude de movimento $D = 10^{-3} L$. O perfil correspondente apresenta um choque se aproximando da extremidade $x = L$ do tubo. O perfil correspondente à frequência de $1,15 \omega_0$, mais distante da ressonância, é mostrado justamente para contrastar a sua suavidade com o choque presente no perfil anterior.

Os perfis mostrados na Fig. 5, assim como os demais resultados desta seção, foram obtidos após 5×10^5 passos de tempo. Para evitar um excesso de algarismos nas abcissas do gráfico mostrado na Fig. 4, em que o tempo é a coordenada independente, fez-se uma translação da origem deste eixo, subtraindo dos valores de tempo um número inteiro de períodos. Assim as expressões de aceleração e velocidade do tubo permanecem válidas, porém o instante $t = 0$ aparece no gráfico. Seguindo este princípio, a fim de comparar os resultados da Fig. 5 com os resultados mostrados na Fig. 4, tem-se os instantes correspondentes aos

perfis mostrados na Fig. 5 dados por: $t = 0,005 L / c_0$, para $\omega = 1,176 \omega_0$ e $t = -0,212 L / c_0$, para $\omega = 1,15 \omega_0$.

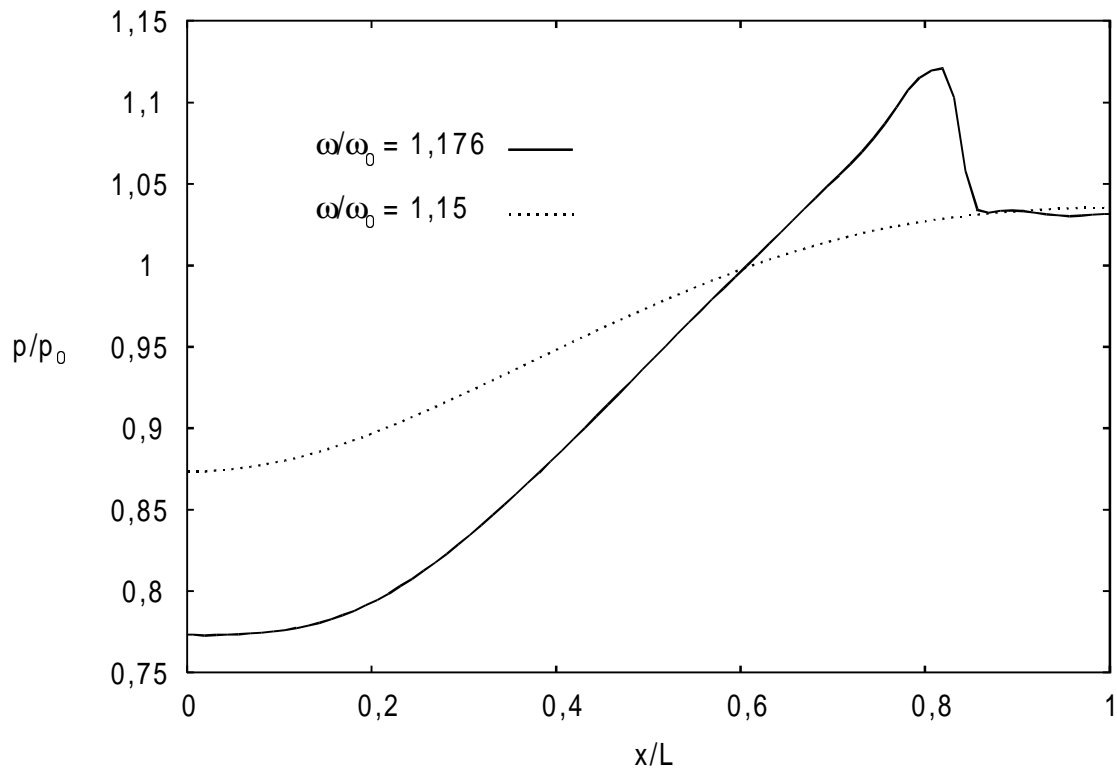


Figura 5 - Perfil de pressão ao longo do tubo de seção variável, $D = 10^{-3} L$.

Na Fig. 6 faz-se uma comparação de resultados obtidos com a metodologia apresentada no presente trabalho com resultados mostrados por Aganin *et al.* (1996). Os resultados mostrados por Aganin *et al.*, são para um tubo (de seção constante) parado com um pistão em uma extremidade que se movimenta com uma amplitude pico-a-pico de $2 \times 0,0161 L$. Os resultados do presente trabalho são para um tubo sem pistão que se movimenta com a amplitude $D = 0,0161 L$. A coincidência não é surpreendente, pois o deslocamento do pistão (ou das paredes do tubo) é pequeno comparado ao comprimento do tubo. O fenômeno principal, que é a formação da onda estacionária no interior do tubo (com o desenvolvimento do choque que se move de um lado para outro na ressonância), é o mesmo nos dois casos. O modelo proposto por Temkin (1968) prevê (e explica) com muita clareza esta coincidência.

Os resultados de Aganin *et al.* foram obtidos admitindo-se, para o escoamento isentrópico de ar, $n = 1,4$ e usando uma malha de 40 células. Os resultados experimentais são devidos a Galiev *et al.* (1972). Alguns detalhes do experimento podem ser encontrados no trabalho de Zaripov & Ilgamov (1976). Os resultados do presente trabalho são mostrados para $n = 1,4$ e $n = 1$ (escoamento isotérmico), esta última opção proporcionando melhor concordância com os resultados experimentais nas frequências em que a amplitude da resposta é máxima.

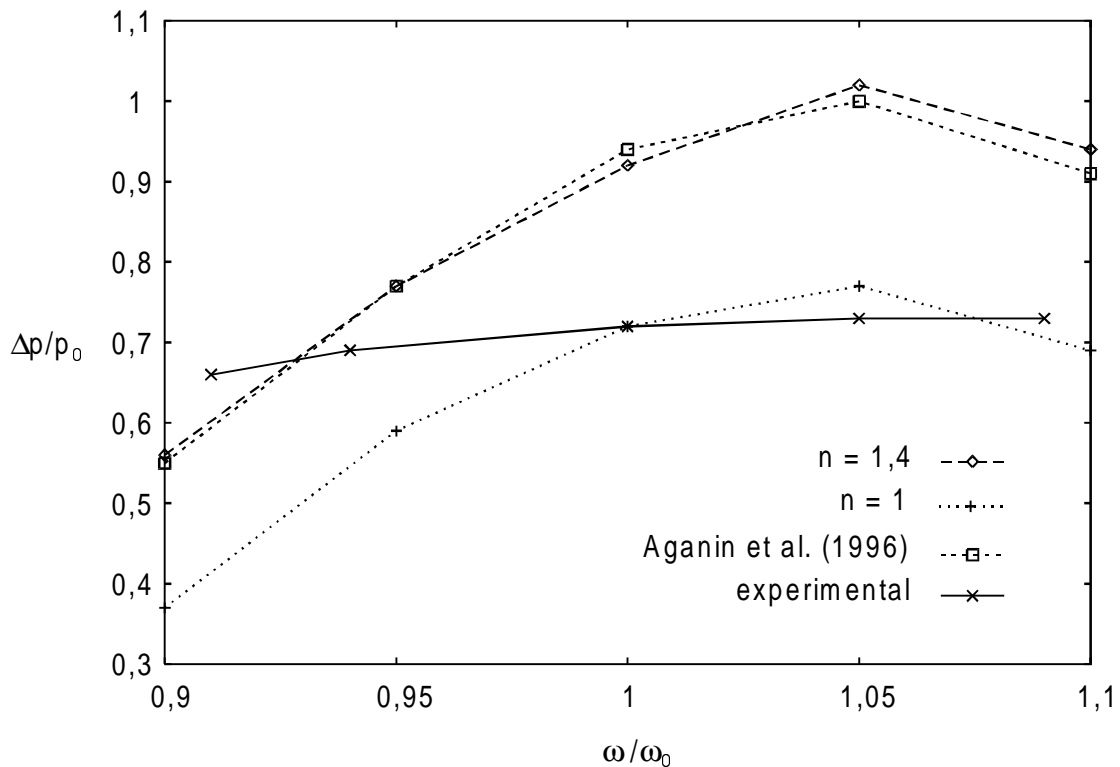


Figura 6 - Variação da pressão na extremidade $x = 0$ do tubo de seção constante.

6. DISCUSSÃO

6.1 Dos resultados

Nos resultados o fenômeno que se destaca é o aparecimento do choque. Notou-se que, para uma certa massa de determinado gás colocada no tubo, o aparecimento do choque depende da geometria do tubo, da amplitude e da frequência da excitação.

De acordo com Ockendon *et al.* (1993) há duas razões para o não-aparecimento de ondas de choque na ressonância. A primeira ocorre no caso de uma excitação de amplitude muito pequena, em que os efeitos não-lineares são pouco significativos frente aos efeitos viscosos. Esta razão não foi considerada no presente trabalho. A segunda ocorre quando, em um tubo de seção transversal variável, as componentes da onda de diferentes frequências se deslocam à velocidades diferentes. Para uma descontinuidade se propagar ao longo do tubo, todas as componentes de Fourier que a formam teriam de se deslocar com a mesma velocidade (em fase), o que não ocorre em um tubo de seção variável, de acordo com Ockendon *et al.*. Se a amplitude da oscilação é suficientemente grande para repor, através dos efeitos não-lineares, as componentes de alta frequência (em fase com as de baixa frequência) que estão se dispersando por causa da geometria do tubo, mesmo com a seção variável o choque aparece.

Alguns autores destacam a importância de as frequências naturais do tubo não serem múltiplas umas das outras para minimizar os efeitos do choque. Esta visão não é essencialmente diferente daquela que associa o não-aparecimento do choque com a dispersão das componentes de Fourier da onda. As frequências naturais estão associadas com o tempo que uma onda leva para percorrer o tubo inteiro e, tendo voltado ao ponto de partida, interferir construtivamente consigo mesma. Estes períodos naturais somente não serão múltiplos entre si se as componentes da onda de frequências diferentes se deslocarem com velocidades diferentes.

6.2 Do método numérico

Embora o método numérico utilizado aqui seja relativamente simples, comparado aos métodos espectrais ou métodos de perturbação, ele apresenta um importante inconveniente que é o fato de percorrer todo um processo transiente até alcançar o regime permanente periódico cujas características são de interesse primordial. O custo computacional deste processo ainda é significativo, tendo levado Aganin *et al.* (1996) a deplorar a inexistência de métodos capazes de realizar este tipo de simulação para o problema bidimensional em tempos de computação razoáveis, mesmo nas melhores máquinas disponíveis. Apesar disto simulações bidimensionais são reportadas na literatura (Kawahashi & Arakawa, 1996).

Notou-se ainda que o método se comporta melhor para amplitudes de oscilação maiores, tornando-se ineficiente para pequenas amplitudes. A principal razão para isso é que, para pequenas amplitudes de oscilação, os efeitos de dissipação não-linear são menores e é necessário muito tempo para que se alcance o regime permanente periódico. Também os erros de arredondamento podem tornar-se importantes quando as oscilações são muito pequenas. E, além disso, para representar oscilações de pequena amplitude são necessárias malhas mais refinadas, de modo a evitar-se que a dissipação numérica seja muito importante (comparada à dissipação não-linear). Este fato se manifesta na Fig. 3 onde se vê que para a amplitude de excitação $D = 10^{-3} L$ os resultados obtidos com uma malha de 40 células já são relativamente satisfatórios (bastante próximos dos obtidos com 80 células). Para a amplitude $D = 10^{-4} L$, entretanto, os resultados dessa malha são ainda precários.

Finalmente cabe lembrar que no tipo de simulação considerada aqui, realizada no domínio do tempo, é preciso acompanhar o movimento das ondas ao longo do tubo em um processo transiente rápido (mesmo no regime periódico). Para uma representação adequada deste transiente é necessário um passo de tempo curto, o que torna as condições de estabilidade do método explícito utilizado plenamente aceitáveis.

7. CONCLUSÃO

As oscilações do gás contido em um tubo fechado de seção variável foram estudadas utilizando um método de captura de choque. O método previu de modo satisfatório a dependência que estas oscilações apresentam em relação à geometria do tubo, à frequência e à amplitude da excitação e às propriedades físicas do gás contido no tubo. Conclui-se, portanto, que o método pode ser utilizado no projeto de ressonadores e equipamentos como os considerados por Ashley (1998).

REFERÊNCIAS

- Aganin, A.A., Ilgamov, M.A. & Smirnova, E.T., 1996, Development of Longitudinal Gas Waves in a Closed Tube, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 195, pp. 359-374.
- Ashley, S., 1998, Sound Waves at Work, *Mechanical Engineering*, vol. 120, pp. 80-84, March.
- Chester, W., 1964, Resonant Oscillations in Closed Tubes, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 18, pp. 44-64.
- Galiev, S.U., Ilgamov, M.A. & Sadykov, A.V., 1972, On Periodic Shock Waves in Gas, *Fluid Dynamics* (translation from Russian by Consultants Bureau, New York), pp. 223-230, November.

- Kawahashi, M. & Arakawa, M., 1996, Nonlinear Phenomena Induced by Finite-Amplitude Oscillation of Air Column in Closed Duct (Analysis of Acoustic Streaming), JSME International Journal, Series B, vol. 39, pp. 280-286.
- LeVeque, R.J., 1990, Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag.
- Ockendon, H., Onckendon, J.R., Peake, M.R. & Chester, W., 1993, Geometrical Effects in Resonant Gas Oscillations, Journal of Fluid Mechanics, vol. 257, pp. 201-217.
- Rao, S.S., 1995, Mechanical Vibrations, 3rd ed., Addison-Wesley Pub. Co.
- Temkin, S., 1981, Elements of Acoustics, John Wiley & Sons Inc.
- Temkin, S., 1968, Nonlinear Gas Oscillations in a Resonant Tube, The Physics of Fluids, vol. 11, pp. 960-963.
- Van Wylen, G.J. & Sonntag, R.E., 1976, Fundamentos da Termodinâmica Clássica, 2a. ed. (traduzido do Inglês por E. Yamane e outros), Edgard Blücher.
- Zaripov, R.G. & Ilgamov, M.A., 1976, Non-Linear Gas Oscillations in a Pipe, Journal of Sound and Vibration, vol. 46, pp. 245-257.

OSCILLATIONS OF THE GAS CONTAINED IN A CLOSED TUBE DESCRIBED BY A SHOCK CAPTURING METHOD

***Abstract.** The propagation of finite-amplitude acoustic waves in tubes is of great concern in pulsating gas flow problems as those inside exhaust pipes of internal combustion engines. More recently this has also been studied with interest in the development of sonic compressors. In this paper it is evaluated one of the ways for studying this phenomenon: the numerical solution of the quasi-one-dimensional mass and momentum conservation equations, using a shock capturing method.*

***Key-words:** Non-linear acoustics, Numerical simulation, Sonic compressor*