



## COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGAS

### Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Marquês de S. Vicente, 225 - 22 453-900 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

E-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

### Hamilton Leckar

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Matemática Aplicada  
Rua Mário Santos Braga s/n - 24 020-140 - Niterói, RJ, Brasil

E-mail: gmahaf1@vm.uff.br

**Resumo.** *O objetivo do trabalho é comparar os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko para vibrações transversais de vigas. São calculadas as frequências e modos de vibração de uma viga pelos três modelos e estes são comparados em função de parâmetros como a esbeltez. Além da formulação teórica, que permite determinar a existência de modos normais de vibração são apresentadas simulações numéricas que ajudam a entender as diferenças entre os modelos em função da frequência de vibração.*

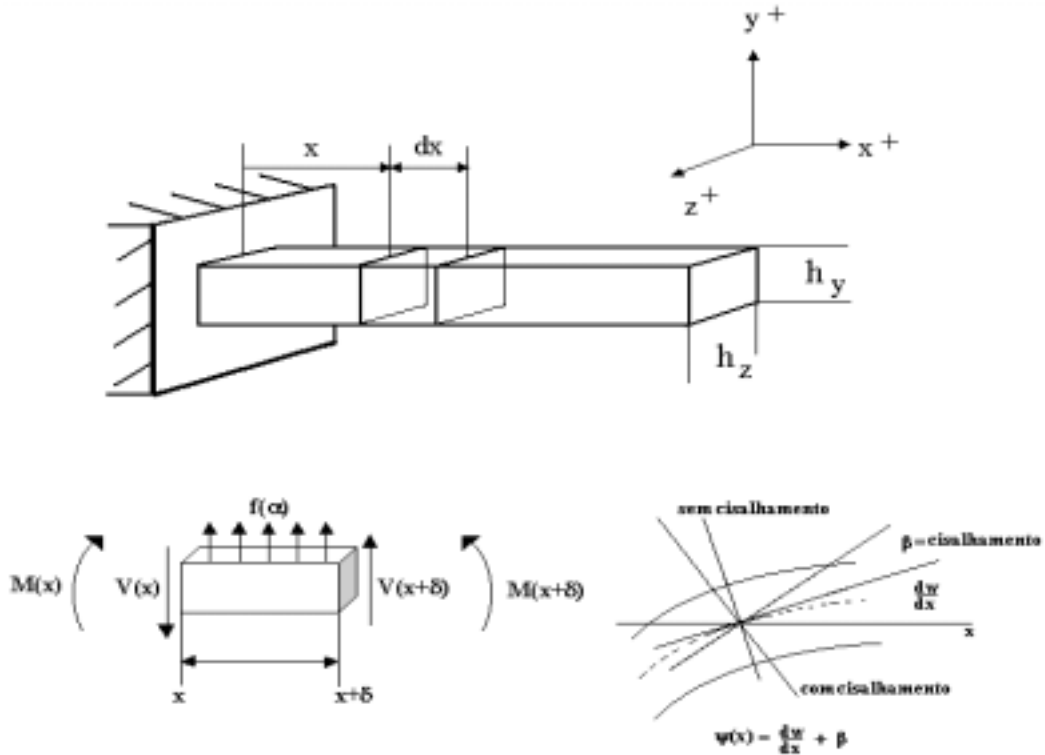
**Palavras-chave:** *Modelos de vigas, Modos de vibração, Euler-Bernoulli, Vlasov, Timoshenko*

## 1. MODELOS DE VIGAS

Quando as dimensões da seção transversal da viga são pequenas em comparação com o seu comprimento (vigas longas e esbeltas) e em situações em que o cisalhamento e a inércia de rotação possam ser desprezados, o modelo de Euler-Bernoulli é comumente utilizado. Nos três modelos faz-se a suposição de que as seções transversais planas permanecem após deflexão. No modelo de Vlasov despreza-se o cisalhamento, porém se considera a inércia de rotação. O modelo de Timoshenko além de considerar a inércia de rotação leva em conta o giro da seção transversal em relação a perpendicular ao eixo longitudinal da viga, devido ao cisalhamento. Do ponto de vista de geometria, o cisalhamento é importante quando as dimensões da seção não são pequenas em comparação com o comprimento da viga. Para altas frequências o modelo de Euler-Bernoulli não fornece bons resultados e o modelo de Timoshenko deve ser usado, independentemente da geometria da viga.

Vejamos agora uma forma sistemática de equacionar os modelos de viga que trataremos. Maiores detalhes o leitor encontrará por exemplo em (Inman, 1996), (Leckar &

Figura 1: Viga engastada-livre (Cantilever). Um elemento de viga



Sampaio, 1999) ou (Roseau, 1984).

Consideremos um elemento de viga. Sejam  $u(x, t)$  a posição do ponto  $x$  no instante  $t$  e  $\psi(x, t)$  a posição angular da seção associada ao ponto  $x$ . No ponto  $x$  representado na Fig. 1, consideramos uma força  $V(x, t)$  denominada força cortante, e um momento  $M(x, t)$ , denominado momento fletor, que representam a ação dos pontos que estão à esquerda de  $x$ .

As equações que governam a dinâmica podem ser deduzidas a partir do balanço de quantidade de movimento linear e angular:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t). \quad (1)$$

$$\rho(x)I(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} + V(x, t). \quad (2)$$

Nessas equações aparecem os seguintes parâmetros:

$\rho(x)$  densidade volumétrica do material no ponto  $x$ ;

$A(x)$  área da seção rígida associada ao ponto  $x$ ;

$I(x)$  momento de inércia da seção no ponto  $x$ ;

$f(x, t)$  força aplicada na direção vertical no ponto  $x$  no instante  $t$ .

As equações "Eq. (1)" e "Eq. (2)" relacionam o movimento da viga, descrito pelo par  $(u, \psi)$  com os esforços (força, momento) descritos pelo par  $(V, M)$ .

Para completar a formulação de um problema de viga precisamos ainda prescrever:

- a) as hipóteses constitutivas que relacionam  $(u, \psi)$  com  $(V, M)$ ;
- b) as condições nos contornos da viga.

As condições de contorno mais freqüentes são:

- *Engastamento*:  $u = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  na extremidade.

A condição  $u = 0$  afirma que a extremidade está fixa e  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  que a inclinação é nula (obviamente os valores fixados são arbitrários).

- *Simplesmente apoiada ou pinada*:  $u = 0, M = 0$ .

Neste caso uma das condições é dinâmica,  $M = 0$ , isto é, que o momento na extremidade é nulo.

- *Livre*:  $M = 0, V = 0$ .

Nesse caso temos duas condições dinâmicas, os esforços são nulos.

- *Deslizante*:  $V = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

**Modelo de Euler-Bernoulli.** Vamos neste caso desprezar a inércia de rotação e o cisalhamento, o que da "Eq. (2)" fornece uma relação entre  $M$  e  $V$ :  $V = -\frac{\partial M}{\partial x}$ .

E vamos adotar a hipótese constitutiva de que o momento é proporcional a curvatura linearizada, isto é:  $M = E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

$E(x)$ , o módulo de elasticidade, é uma propriedade característica do material no ponto  $x$ .

$I(x)$  é o momento de inércia da área da seção.

As duas equações "Eq. (1)" e "Eq. (2)" fornecem então:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(x, t). \quad (3)$$

**Modelo de Vlasov.** Esta é uma teoria de viga intermediária. Nesse caso não desprezamos a inércia de rotação, tomaremos  $\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$ . "Equação (2)" do balanço de momento angular fornece então:

$$V = \rho(x)I(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Para  $M$  conservamos a hipótese feita anteriormente.

Temos então:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E(x)I(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho(x)I(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = f(x, t), \quad (4)$$

que é uma equação hiperbólica.

**Modelo de Timoshenko.** Nesse caso, consideramos as hipóteses constitutivas

$$M(x, t) = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$$

$$V(x, t) = kGA \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right)(x, t)$$

onde

$k(x)$  é o coeficiente de cisalhamento e  $G(x)$  é o módulo de cisalhamento.

As equações "Eq. (1)" e "Eq. (2)" são escritas na forma:

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( kGA \left( \psi(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \right) = f(x, t) \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + kGA \left( \psi(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Nesse modelo  $\psi - \frac{\partial u}{\partial x}$  é o ângulo de cisalhamento.

### Observações.

(A) A seção rígida associada a um ponto  $x$  da viga desempenha um papel fundamental na teoria.

Dois tipos de propriedades da seção são de relevância:

- i) *tipo de material:*  $E(x)$ ,  $G(x)$ ,  $\rho(x)$
- ii) *forma e magnitude da seção:*  $I(x)$ ,  $k(x)$ ,  $A(x)$

O coeficiente de cisalhamento  $k$  depende da forma da seção. Por exemplo,  $k = \frac{5}{6}$  para seções retangulares e  $k = \frac{9}{10}$  para seções circulares. Veja (Cowper, 1966) para um estudo mais detalhado sobre  $k$ .

(B) Número de parâmetros de cada modelo: O modelo de Euler-Bernoulli dado pela "Eq. (3)" é descrito por apenas um parâmetro  $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$  (coeficientes constantes). O modelo de Vlasov dado pela "Eq. (4)" é descrito por dois parâmetros:  $c$  e  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ . O modelo de Timoshenko dado pela "Eq. (5)" é descrito por três parâmetros:  $c$ ,  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  e  $\alpha = \sqrt{\frac{kG}{\rho}}$ .

## 2. FREQUÊNCIAS E MODOS DE VIBRAÇÃO

Muitos problemas de vibrações de vigas podem ser resolvidos pelo método de separação de variáveis. Isto é, nos modelos de Euler-Bernoulli e Vlasov vamos procurar soluções

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

e, no modelo de Timoshenko

$$u(x, t) = T(t)Y(x), \quad \psi(x, t) = T(t)\theta(x).$$

Denotando por  $()'$  a derivada parcial em relação a  $x$ , temos que as funções  $X$  e  $T$  devem satisfazer:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho A} (E I X'')'' = \omega^2 X \quad (7)$$

para o modelo de Euler-Bernoulli. No modelo de Timoshenko,  $T$  deve satisfazer a "Eq. (6)" e  $X, \theta$  devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} [(kGA)(\theta - Y')] - \omega^2 \rho A Y = 0 \\ (kGA)(\theta - Y') - [(EI)\theta'] - \omega^2 I\rho \theta = 0, \end{cases}$$

sendo  $\omega$  um número real (constante de separação).

Em problemas em que as equações têm solução geral conhecida, as condições de contorno nos levam a determinar  $\omega$  através de uma equação característica. Isto ocorre mais freqüentemente no caso de coeficientes constantes. No caso de coeficientes variáveis usamos métodos numéricos para aproximar a solução. Tais raízes  $\omega$  que formam uma seqüência crescente ilimitada  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  são as freqüências naturais e cada função da variável espacial  $x$  correspondente é chamada de modo natural de vibração.

## 2.1. Exemplos Comparativos

Em seguida apresentaremos dois problemas modelo propostos para uma viga de aço doce de comprimento  $L$ , com extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ , cujas especificações são as da Tabela 1:

Tabela 1: Parâmetros da viga modelo.

Constante elástica	$E = 207 \times 10^9 \text{ Pa}$
Momento de inércia	$I = 36534 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
Área da seção	$A = 16856 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Densidade volumétrica	$\rho = 46276 \times 10^7 \text{ Kg/m}^3$
Coefficiente de cisalhamento	$k = 0,8333$
Módulo de cisalhamento	$G = 79300 \times 10^{10} \text{ Pa}$

## 2.2. Caso da viga pinada-pinada

As freqüências e os modos de vibração de uma viga pinada-pinada correspondentes aos três modelos estão dados na Tabela 2.

Tabela 2: Freqüências e modos de vibração.

Modelo	Freqüência	Modo de vibração
Euler-Bernoulli	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2 c}{L^2}$	$X_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Vlasov	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2 c / L^2}{\sqrt{(n^2 \pi^2 r^2 / L^2) + 1}}$	$X_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Timoshenko	$\omega_{n,(1)} = \frac{\alpha^2 - b - \sqrt{\delta}}{r^2} \frac{1}{2}$	$\begin{cases} X_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \theta_{n,(1)} = \rho A \left( \omega_{n,(1)}^2 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases}$
	$\omega_{n,(2)} = \frac{\alpha^2 - b + \sqrt{\delta}}{r^2} \frac{1}{2}$	
	$b = -\left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{L^2} + \frac{\pi^2 n^2 c^2}{\alpha^2 L^2}\right)$	
	$\delta = b^2 - 4 \frac{r^2 \pi^4 n^4 c^2}{\alpha^2 L^4}$	

**Comparação das freqüências.** Na Tabela 3 as freqüências aproximadas com o MATLAB são dadas para a viga modelo da Tabela 1 tendo comprimentos  $L$  e  $2L$  sendo  $L = 0,5687$ . Vemos que a cada  $n$  correspondem duas freqüências  $\omega_{n,(1)}$  e  $\omega_{n,(2)}$ . A primeira é inferior as freqüências correspondentes de Vlasov e de Euler-Bernoulli e a outra é muito grande. A medida que a viga se torna mais esbelta,  $\omega_{n,(1)}$  se aproxima da freqüência correspondente de Euler-Bernoulli, enquanto que a outra tende ao infinito.

### 2.3. Caso da viga biengastada

Na Tabela 4 são descritos os modos e freqüências naturais de vibração para uma viga nos modelos de Euler-Bernoulli e de Vlasov. Os modos e freqüências naturais no modelo de Timoshenko foram obtidos numericamente usando o método de elementos finitos com um programa em MATLAB.

**Comparação das freqüências.** Na Tabela 5 as freqüências aproximadas com o MATLAB são dadas para a viga modelo da Tabela 1 tendo comprimentos  $L$  e  $2L$  sendo  $L = 0,5687$ . Para o modelo de Timoshenko os valores dados são aproximações numéricas obtidas pelo método de elementos finitos programado em MATLAB.

Tabela 3: Freqüências nos modelos.

$L = 0,5687$							
Euler-Bernoulli							
	3,0048	12,0194	27,0436	48,0775	75,1210	108,1743	147,2372
Vlasov							
	3,0048	12,0192	27,0428	48,0750	75,1149	108,1616	147,2137
Timoshenko							
$\omega_{n,(1)}$	3,0044	12,0128	27,0103	47,9727	74,8659	107,6468	146,2633
$\omega_{n,(2)} \times 10^{-4}$	2,5671	2,5682	2,5699	2,5724	2,5755	2,5794	2,5839
$L = 2 \times 0,5687$							
Euler-Bernoulli							
$w_n$	0,7512	3,0048	6,7609	12,0194	18,7803	27,0436	36,8093
Vlasov							
$\omega_n$	0,7512	3,0048	6,7608	12,0192	18,7799	27,0428	36,8078
Timoshenko							
$\omega_{n,(1)}$	0,7511	3,0044	6,7588	12,0128	18,7642	27,0103	36,7478
$\omega_{n,(2)} \times 10^{-4}$	2,5669	2,5671	2,5676	2,5682	2,5690	2,5699	2,5711

Tabela 4: Freqüências e modos de vibração.

Modelo	Freqüência $\omega$	Modo de vibração
Euler-Bernoulli	$\omega_n = \frac{\beta_n^2 c}{L^2}$ $\cos \beta_n \cosh \beta_n = 1$	$X_n = \cosh\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)$ $-\sigma_n \left( \sinh\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \right)$ $\sigma_1 = 0,9825; \quad \sigma_2 = 1,0008$ $\sigma_n = \frac{P}{Q} \quad (n > 2)$ $P = \cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L)$ $Q = \sinh(\beta_n L) - \sin(\beta_n L)$
Vlasov	$(1 - \cos(\sqrt{\gamma_1}L)\cosh(\sqrt{\gamma_2}L))$ $+ B \sin(\sqrt{\gamma_1}L)\sinh(\sqrt{\gamma_2}L) = 0$ $B = -\frac{r^2 \omega^2}{2c^2 \sqrt{\gamma_1} \sqrt{\gamma_2}}$ $2\gamma_1 = \frac{r^2 \omega^2}{c^2} + \sqrt{\frac{r^4 \omega^4}{c^4} + 4\frac{\omega^2}{c^2}}$ $2\gamma_2 = -\frac{r^2 \omega^2}{c^2} + \sqrt{\frac{r^4 \omega^4}{c^4} + 4\frac{\omega^2}{c^2}}$	$X = \sigma \left( \cos\left(\frac{\sqrt{\gamma_1}x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\sqrt{\gamma_2}x}{L}\right) \right)$ $+ \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma_1}x}{L}\right) - \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\gamma_2}x}{L}\right)$ $\sigma = \frac{R}{S}$ $R = \sin(\sqrt{\gamma_1}L) - \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}} \sinh(\sqrt{\gamma_2}L)$ $S = \cos(\sqrt{\gamma_1}L) - \cosh(\sqrt{\gamma_2}L)$



Tabela 5: Freqüências nos modelos.

$L = 0,5687$							
Euler-Bernoulli							
$\omega_n$	6,8116	18,7765	36,8095	60,8480	90,8964	126,9545	169,0223
Vlasov							
$\omega_n$	6,8111	18,7727	36,7946	60,8073	90,8056	126,7775	168,7088
Timoshenko							
$\omega_{n,(1)}$	6,8078	18,7522	36,7255	60,6328	90,4372	126,0884	167,5281
$L = 2 \times 0,5687$							
Euler-Bernoulli							
$w_n$	1,7029	4,6941	9,2024	15,2120	22,7241	31,7386	42,2556
Vlasov							
$\omega_n$	1,7029	4,6939	9,2015	15,2095	22,7184	31,7276	42,2359
Timoshenko							
$\omega_{n,(1)}$	1,7027	4,6926	9,1971	15,1986	22,6956	31,6850	42,1634

## REFERÊNCIAS

- Cowper, G. R., 1966, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335-340.
- Inman, D. J., 1996, Engineering Vibration, Prentice-Hall, New Jersey.
- Leckar, H. & Sampaio R., 1999, Aspectos Matemáticos de Vibrações de Vigas, A aparecer nas Atas do 49<sup>o</sup> Seminário Brasileiro de Análise, 26-29 de maio, IME-UNICAMP.
- Roseau, M., 1984, Vibrations des Systèmes Mécaniques, Masson, Paris.
- Tong, X., Tabarrok, B.K. and Yeh, K. Y., 1995, Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section, Journal of sound and Vibration, Vol. 186(5), pp. 821-835.

## A COMPARISON AMONG THREE TRANSVERSAL VIBRATIONS BEAM MODELS

**Abstract.** *The beam models of Euler-Bernoulli, Vlasov and Timoshenko for transversal vibrations are compared, as function of the slenderness of the beam. The results help in the understanding of the role of the rotary inertia and shear in the dynamics of beams.*

**Key-words:** *Models of beams, Modes of vibrations, Euler-Bernoulli, Vlasov, Timoshenko*