

TURBULÊNCIA EM SISTEMAS BIFÁSICOS GÁS-LÍQUIDO

Jader R. Barbosa, Jr.

Departamento de Engenharia Mecânica
 Universidade Federal de Santa Catarina
 Florianópolis - SC - 88040-900 - Brasil
 e-mail: jrb@nrva.ufsc.br

1. INTRODUÇÃO

Escoamentos multifásicos estão por toda a parte. De fenômenos naturais em escala geológica à engenharia em escala microscópica, do estudo de escoamentos de rocha fundida e suas misturas no interior da Terra ao projeto de componentes de veículos espaciais, é difícil encontrarmos desafios científicos ou tecnológicos de relevância na Mecânica dos Fluidos e áreas afins que não envolvam a presença de escoamentos multifásicos.

Nos escoamentos multifásicos, duas ou mais fases escoam simultaneamente. Uma *fase* é definida como um estado termodinâmico da matéria, podendo apresentar-se sob a forma sólida, líquida ou gasosa. Definimos escoamento bifásico como o movimento de uma mistura, não muito diluída, de duas fases.

O contato entre duas ou mais fases distintas e imiscíveis implica na existência de uma *interface* entre as fases. Do ponto de vista do entendimento e da modelagem de um problema bifásico, o comportamento da(s) interface(s) em função das variáveis de campo (velocidade, pressão, temperatura...) e das demais grandezas representa o maior desafio a ser vencido. Além dos complexos processos de transferência através da(s) interface(s), a presença de instabilidades e turbulência em cada fase torna tal tarefa ainda mais formidável.

Neste contexto, o objetivo do presente documento é fornecer uma resposta à seguinte pergunta:

Num escoamento bifásico, como e quanto a estrutura
 turbulenta de uma fase é afetada pela presença da outra?

Nossa resposta a uma pergunta tão ambiciosa e abrangente será focada nos escoamentos bifásicos de maior interesse prático e industrial, ou seja, os escoamentos gás-líquido. Apesar de serem os mais importantes e mais estudados, nem todas as características dos escoamentos gás-líquido (a turbulência sendo uma delas) são plenamente entendidas. Entretanto, um apanhado do conhecimento agregado sobre a turbulência nestes escoamentos se faz justificável face aos avanços experimentais e de modelagem realizados ao longo das últimas décadas. Tais avanços destacam-se sobretudo para algumas configurações interfaciais, ou *padrões de escoamento*, dos escoamentos gás-líquido.

A presente lição está organizada da seguinte forma. Na Seção 2, os padrões de escoamento bifásico gás-líquido e as características básicas de sua modelagem integral são apresentados tendo sempre em mente um contexto evolutivo e a necessidade de descrevermos a turbulência em cada fase de maneira adequada. As

características da turbulência em sistemas bifásicos inferidas a partir de resultados experimentais são delineadas na Seção 3. Tais resultados são particularmente importantes para a construção de modelos visando descrever a turbulência nestes sistemas. A Seção 4 introduz os aspectos fundamentais da modelagem diferencial de escoamentos bifásicos, como a definição de variáveis e de médias. Na Seção 5, os princípios de conservação das variáveis médias de cada fase na forma diferencial são apresentados em detalhe. Em seguida, a modelagem da turbulência para cada padrão em particular é mostrada na Seção 6. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 7.

2. ESCOAMENTOS BIFÁSICOS GÁS-LÍQUIDO

2.1. Considerações preliminares

Conforme dito anteriormente, além da turbulência em cada uma das fases, o estudo de escoamentos multifásicos envolve a investigação de um outro fenômeno igualmente complexo: a dinâmica da(s) interface(s) entre as fases. Nesta seção, procuramos conferir um aspecto evolutivo à maneira como os escoamentos bifásicos são tratados na literatura. Ao seguirmos tal procedimento, ficará clara a necessidade classificarmos qualitativamente os diversos tipos de escoamento bifásico.

A maneira natural, e mais simples, de lidarmos com um escoamento multifásico é relacioná-lo a um escoamento monofásico correspondente. Tal escoamento hipotético possuirá propriedades físicas locais que são determinadas a partir de uma promediação das propriedades físicas locais de cada fase, levando em conta a taxa de presença local e instantânea de cada fase. A este escoamento hipotético, damos o nome de *escoamento homogêneo* ou *modelo homogêneo*.

Para ilustrar o modelo homogêneo com relação à turbulência, definimos a tensão de cisalhamento homogênea utilizando o modelo de turbulência mais simples, ou seja, o Modelo de Comprimento de Mistura de Prandtl

$$\tau_H = \eta_H \frac{dv_H}{dy} + \rho_H l_H^2 \left(\frac{dv_H}{dy} \right)^2 \quad (1)$$

onde η_H é a viscosidade homogênea, ρ_H é a densidade homogênea, v_H é a velocidade local homogênea e l_H é o comprimento de mistura homogêneo dado por $l_H = Ky$, onde K é a constante de von Kármán. Integrando a Eq. 1, temos

$$v_H^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C \quad (2)$$

onde as variáveis adimensionais são dadas por

$$v_H^+ = v_H \sqrt{\frac{\rho_H}{\tau_{wH}}} \quad (3)$$

e

$$y^+ = \frac{y\rho_H}{\eta_H} \sqrt{\frac{\tau_{wH}}{\rho_H}}. \quad (4)$$

Como podemos observar no exemplo acima, as equações a serem resolvidas para o modelo homogêneo são idênticas às do escoamento monofásico. Podemos dizer então que, através da hipótese de modelo homogêneo, o objeto da modelagem deixa de ser o escoamento e passa a ser o fluido bifásico hipotético.

Ao contrário da densidade bifásica, ρ_H , cuja expressão é obtida analiticamente, no modelo homogêneo, η_H é determinada a partir de relações empíricas. Desta forma, inúmeras formulações foram propostas e utilizadas ao longo dos anos para este parâmetro, cada uma visando confirmar sua adequação a um determinado conjunto de condições experimentais (por exemplo, vazões fásicas, pressão, tipo de fluidos etc.). Expressões mais difundidas são as propostas por

1. McAdams et al. (1942)

$$\frac{1}{\eta_H} = \frac{1 - x_G}{\eta_L} + \frac{x_G}{\eta_G} \quad (5)$$

2. Cicchitti et al. (1960)

$$\eta_H = (1 - x_G)\eta_L + x_G\eta_G \quad (6)$$

3. Dukler et al. (1964)

$$\eta_H = \frac{\frac{x_G\eta_G}{\rho_G} + \frac{(1-x_G)\eta_L}{\rho_L}}{\frac{x_G}{\rho_G} + \frac{(1-x_G)}{\rho_L}} \quad (7)$$

4. Beattie e Whalley (1982)

$$\eta_H = \eta_L (1 - \varepsilon_H) (1 + 2.5\varepsilon_H) + \eta_G \varepsilon_H \quad (8)$$

onde ε_H é a fração de vazão homogênea dada por

$$\varepsilon_H = \frac{\rho_L x_G}{\rho_L x_G + \rho_G (1 - x_G)}. \quad (9)$$

Apesar do modelo homogêneo apresentar diversas vantagens, sua faixa de aplicação é bastante limitada devido a seu pilar fundamental ser a desconsideração da velocidade relativa entre as fases. Como será visto, são poucas as situações práticas onde esta pode ser desconsiderada.

Uma outra maneira de se resolver o problema bifásico é através do método dos multiplicadores (Lockhart e Martinelli, 1949). Nesta metodologia desenvolvida exclusivamente para escoamentos internos, as fases são consideradas segregadas,

não havendo termos de interação entre elas. Na variante mais usada deste método, o gradiente de pressão médio na direção do escoamento devido à fricção é dado por

$$\frac{dp}{dz_{f,TP}} = \Phi_L^2 \frac{dp}{dz_{f,L}} \quad (10)$$

onde os subscritos f , L e TP denotam fricção, componente líquido e componente bifásico, respectivamente. O gradiente de pressão monofásico, $\frac{dp}{dz_{f,L}}$, é calculado através de relações convencionais para o coeficiente de fricção. Este por sua vez, pode depender de diversos fatores, como por exemplo da rugosidade relativa da superfície do canal.

O multiplicador bifásico, Φ_L^2 , é dado por uma expressão empírica. O multiplicador proposto por Chisholm (1967) a partir de um ajuste da correlação gráfica de Lockhart e Martinelli (1949) é dado por

$$\Phi_L^2 = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2} \quad (11)$$

onde X^2 é a razão entre os gradientes de pressão médios na direção do escoamento para o líquido e para o gás

$$X^2 = \frac{dp}{dz_{f,L}} \bigg/ \frac{dp}{dz_{f,G}} \quad (12)$$

Segundo Chisholm (1967), o parâmetro C possui diferentes valores que dependem da combinação dos regimes de escoamento (laminar ou turbulento) em cada fase caso estas escoassem sozinhas no canal. Para regime laminar em ambas as fases, $C = 5$; para gás laminar e líquido turbulento, $C = 10$; para líquido laminar e gás turbulento, $C = 12$; para escoamento turbulento em ambas as fases, $C = 20$.

Tanto o modelo homogêneo quanto o modelo dos multiplicadores foram (e continuam a ser) largamente empregados para o cálculo da queda de pressão em tubulações utilizando formulações de variáveis médias no tempo e no espaço. O material apresentado acima serve para ilustrar metodologias primitivas para a solução de escoamentos bifásicos em regime turbulento de interesse prático. Em geral, os erros associados a tais previsões são, no mínimo, da ordem de 30%. Este parece ser um valor limite mínimo para essas formulações que não consideram a estrutura local do escoamento. Abordagens didáticas sobre tais formulações são fornecidas por Carey (1992), Collier e Thome (1994) e Levy (1999).

Em alguns casos, o nível de precisão requerido à solução de um determinado problema é tal que o conhecimento da fenomenologia local do escoamento se faz mandatário. Ao definirmos um *padrão de escoamento*, criamos um modelo cuja morfologia, sob determinadas condições de vazões, pressão, presença de forças de campo etc., assemelha-se àquela do escoamento real permitindo um tratamento analítico mais adequado ao problema. Os critérios de determinação dos padrões de escoamento são tanto de natureza subjetiva (observação visual direta, cinematografia clássica, cinematografia ultra-rápida) quanto objetiva (medição de quantidades

locais flutuantes através de sondas e de quantidades globais instantâneas através de técnicas de absorção). A controvérsia existente na literatura acerca da existência de determinados padrões e dos mecanismos que governam as transições entre eles é fruto da grande complexidade destes escoamentos.

No que diz respeito ao estudo da turbulência em sistemas bifásicos gás-líquido, apenas os padrões de geometria mais simples foram estudados mais detalhadamente. Nas seções a seguir, apresentaremos os padrões de escoamento interno para um duto circular de acordo com sua orientação (vertical e horizontal). Escoamentos bifásicos externos também serão explorados.

2.2. Escoamentos internos verticais

Os padrões de escoamento bifásico gás-líquido encontrados em um duto circular vertical são ilustrados na Figura 1 (Collier e Thome, 1994). Os padrões de escoamento são descritos qualitativamente a seguir:

- **Padrão em bolhas (“bubbly flow”)**. Neste padrão, a fase gasosa é distribuída sob a forma de pequenas bolhas dispersas em um meio líquido contínuo. As bolhas podem ser esféricas ou possuir outros formatos — calota esférica, elipsoidal etc. O tamanho das bolhas pode variar, sem no entanto aproximar-se do diâmetro do tubo.
- **Padrão pistonado (“slug flow” ou “plug flow”)**. As bolhas grandes, ou bolhas de Taylor, possuem diâmetro aproximadamente igual ao do tubo. Possuindo formato cilíndrico e topo (ou nariz) esférico, as bolhas de Taylor são separadas da parede por um filme líquido descendente. Bolsões de líquido, ou “slugs”, separam as bolhas de Taylor. Nos bolsões, dependendo das condições, uma quantidade significativa de pequenas bolhas podem estar entranhadas. Este é um padrão de escoamento intermitente.
- **Padrão anular agitado (“churn flow”)**. Este padrão é originado pela desestruturação das bolhas de Taylor. As fases escoam de forma caótica e oscilatória. No padrão anular agitado, inicia-se a formação de um filme líquido contínuo na parede do tubo. Entretanto, o filme não é unidirecional.
- **Padrão anular (“annular flow”)**. No padrão anular, o líquido escoar na forma de um filme fino unidirecional e também como gotículas entranhadas em um núcleo gasoso. A interface do filme é composta por perturbações (ondas), de cujas cristas originam-se as gotículas entranhadas.
- **Padrão anular com filamentos (“wispy-annular flow”)**. Este padrão é característico de escoamentos com altas vazões de líquido. Nele, as gotículas entranhadas aglomeram-se em filamentos irregulares. O filme líquido é espesso e aerado.

Conforme visto anteriormente, a ocorrência de um determinado padrão de escoamento é função de uma série de fatores. Para estimativas não refinadas acerca do padrão de escoamento vigente sob determinadas condições, fazemos uso de gráficos denominados *mapas de padrão*. Nos mapas de padrão, os diferentes padrões

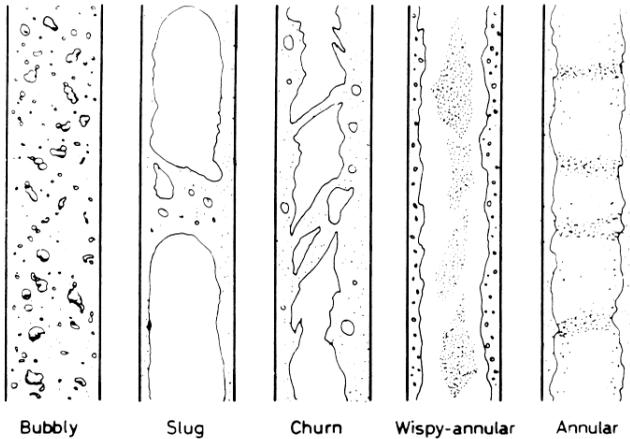


Figura 1: Os padrões de escoamento gás-líquido em dutos verticais (Collier and Thome, 1994).

são representados por áreas e suas coordenadas são as vazões mássicas das fases ou parâmetros generalizados contendo essas vazões. Em escoamentos verticais, o mapa de padrões mais utilizado é o proposto por Hewitt e Roberts (1969), mostrado na Figura 2.

Vale ressaltar que mapas de padrão apenas delimitam zonas de transição aproximadas. É improvável que o mesmo parâmetro seja adequado para representar duas ou mais transições entre padrões, uma vez que estas são governadas por diferentes mecanismos (inércia, tensão superficial, gravidade etc.). O estudo dos mecanismos de transição entre os padrões é objeto corrente de pesquisa e uma revisão recente da literatura neste tópico foi feita por Barbosa (2001).

2.3. Escoamentos internos horizontais

Em dutos horizontais, os padrões de escoamento bifásico tendem a ser mais complexos devido à assimetria causada pela ação da gravidade. Para um duto circular horizontal, os padrões mostrados na Figura 3 são os seguintes:

- **Padrão em bolhas.** Similar ao padrão em bolhas em dutos verticais. Entretanto, as bolhas tendem a migrar para a parte superior do tubo (gravidade).
- **Padrão pistonado.** Também semelhante ao padrão pistonado em tubos verticais. As bolhas de Taylor ocupam a parte superior do tubo.

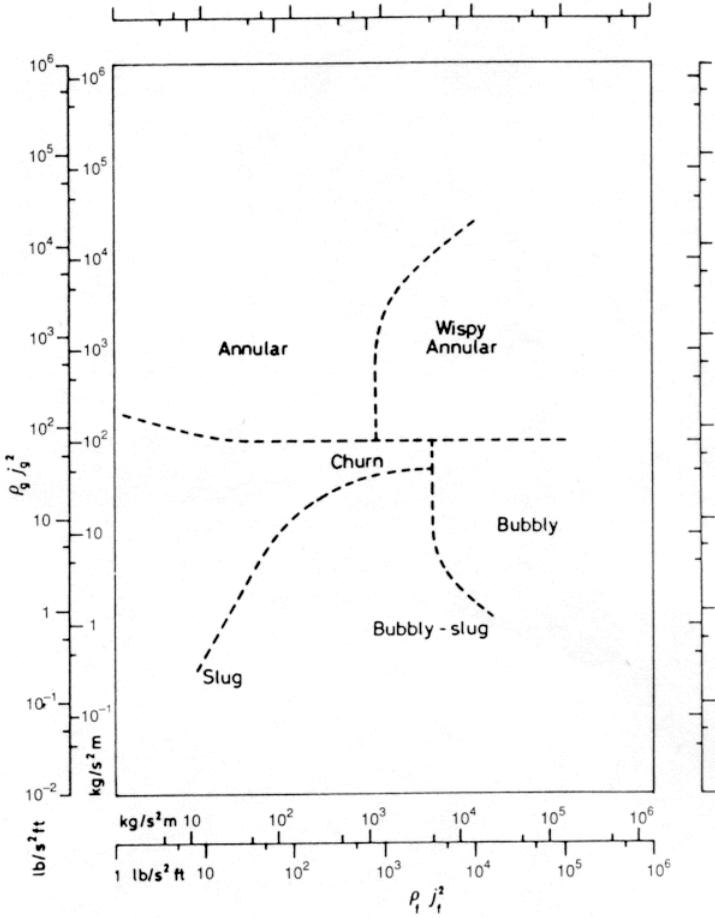


Figura 2: O mapa de padrões de Hewitt e Roberts (1969). j_g e j_f são as velocidades superficiais do gás e do líquido (aqui denominadas v_{GS} e v_{LS}).

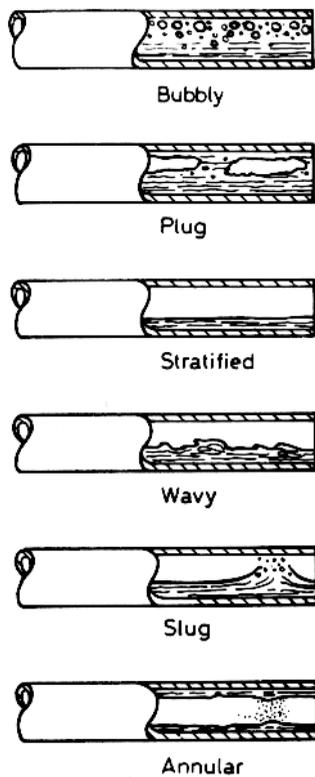


Figura 3: Os padrões de escoamento gás-líquido em dutos horizontais (Collier and Thome, 1994).

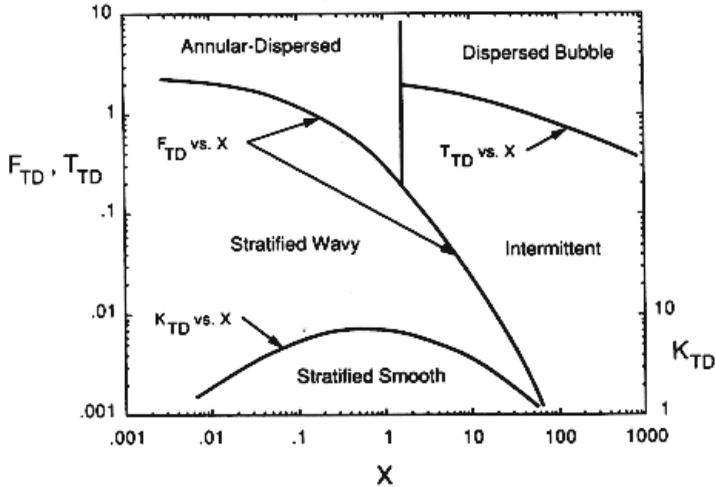


Figura 4: O mapa de padrões de Taitel e Dukler (1976) (Carey, 1992).

- **Padrão estratificado (“stratified flow”)**. Este padrão é característico de baixas vazões. A interface entre as fases é lisa ou quase lisa.
- **Padrão estratificado com ondas (“stratified-wavy flow”)**. Este padrão é formado à medida que a vazão de gás aumenta, gerando instabilidades que dão origem às ondas na interface.
- **Padrão “slug”**. Quando as ondas geradas por instabilidades possuem amplitude da ordem do diâmetro do tubo e bloqueiam a seção. A estrutura líquida formada (“slug”) é então transportada a altas velocidades. Este padrão não deve ser confundido com o pistonado, uma vez que o mecanismo de formação das grandes bolhas é diferente.
- **Padrão anular**. O padrão anular é formado quando a velocidade do gás é suficiente para formar um filme contínuo ao redor do perímetro interno. O filme de líquido é mais espesso na parte inferior do tubo devido à ação da gravidade. Existem também ondas e gotículas entranhadas.

A Figura 4 mostra o mapa de padrões de Taitel e Dukler (1976) para escoamentos horizontais. Os parâmetros F_{TD} , T_{TD} e K_{TD} indicam os mecanismos (forças) preponderantes durante cada transição (Carey, 1992).

2.4. Escoamentos externos

Dos escoamentos externos, o de maior interesse prático é o resultante da injeção de gás na parte inferior de um reservatório repleto de líquido. Aplicações para este

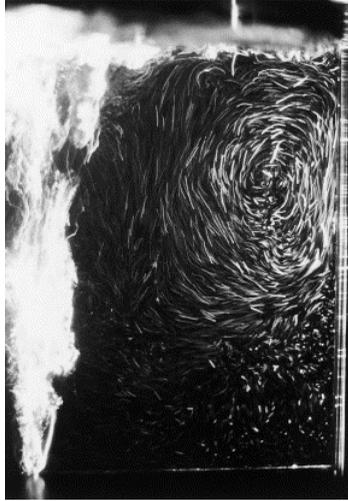


Figura 5: O campo do escoamento em uma pluma de bolhas. Vazão volumétrica de gás igual a $83.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Taniguchi et al., 2002).

problema são encontradas nas indústrias metalúrgica, química e oceânica. Devido ao empuxo, o fluxo de gás em direção à superfície livre induz o movimento do líquido formando uma circulação em larga escala. A esta configuração de escoamento damos o nome de pluma de bolhas (ver Figura 5).

Do ponto de vista experimental, diversas análises visuais e por meio de medidas locais (Milgram, 1983; Castillejos e Brimacombe, 1987; Fannelop et al., 1991; Joo e Guthrie, 1992; Barbosa e Bradbury, 1996) permitiram a caracterização dos diferentes regimes de escoamento em uma pluma de bolhas. Para bolhas originando-se de um orifício (e não através de um meio poroso), podemos identificar quatro regimes ou regiões principais

- **A região de injeção.** Localizada junto ao orifício de saída do gás, esta região é dominada pelas forças de inércia. Tanto a vazão de gás quanto o seu modo de injeção exercem forte influência nas distribuições de velocidade e tamanho das bolhas nesta região.
- **A região de bolhas livres.** Nesta região, as forças de empuxo predominam e a divisão de bolhas não é significativa. Aqui, o escoamento passa a ser independente das condições de injeção.
- **A região de escoamento em pluma.** Na região de pluma propriamente dita, existe quebra e divisão de bolhas produzindo um espectro de tamanho médio de bolhas. As quebras e divisões são resultado de instabilidades das interfaces das bolhas maiores, um processo incentivado pela turbulência e pelo

cisalhamento da fase líquida. Nesta região, os perfis de concentração de bolhas (taxa de presença) e de velocidades médias possuem formato Gaussiano, indicando a natureza estocástica do fenômeno.

- **A região da superfície livre.** Nesta região, a superfície livre passa a exercer uma influência nas distribuições de taxa de presença local e de velocidade das bolhas, principalmente devido à mudança de direção da velocidade da fase líquida.

3. CARACTERÍSTICAS DA TURBULÊNCIA EM SISTEMAS BIFÁSICOS

3.1. A turbulência nos diversos padrões de escoamento

Nesta seção, faremos uma apreciação da natureza da turbulência em sistemas bifásicos. Naturalmente, o que se conhece acerca da turbulência nestes sistemas é fruto da pesquisa experimental nesta área, seja através de medições diretas ou de observações puramente qualitativas. Devido à natureza complexa dos padrões de escoamento e a conseqüente dificuldade em se obter resultados experimentais, pouco se sabe de fato sobre os mecanismos através dos quais a turbulência é criada, transportada e destruída em escoamentos gás-líquido.

A complexidade do fenômeno em questão e a escassez de informações de caráter universal sobre a turbulência em sistemas bifásicos fazem com que o tom da Seção 3 seja um de descrição de alguns dos trabalhos mais importantes sobre a turbulência nos diversos padrões. Apesar do tom descritivo, procuraremos ressaltar quando possível a abrangência e a generalidade dos resultados obtidos.

Talvez pela importância prática aliada à simplicidade com relação a outros padrões de escoamento, os padrões em bolha e anular foram os mais estudados no que se refere à turbulência. Por isso, nos restringiremos a estes dois padrões de escoamento gás-líquido.

Um tópico não explorado sistematicamente no presente documento, porém de extrema utilidade ao entendimento da turbulência no padrão anular é a turbulência em sistemas sólido-fluido. Tais sistemas constituem os mais simples dos sistemas bifásicos pelo fato de não envolverem deformações das interfaces entre as fases. Faremos deste tópico o nosso ponto de partida para a descrição da turbulência em sistemas bifásicos. Em seguida, exploraremos em detalhe as características da turbulência em escoamentos gás-líquido no padrão em bolhas e no padrão anular.

3.2. A turbulência em escoamentos sólido-fluido

Escoamentos contendo partículas sólidas são de grande importância para a indústria. Em particular, escoamentos sólido-gás, como os de aplicação em transporte pneumático, combustão e em leitos fluidizados formam uma área de intensa pesquisa em sistemas bifásicos.

Visando responder à pergunta formulada na Introdução, diversos estudos foram realizados em sistemas sólido-gás. Nesta aplicação, o ponto central das investigações

científicas é a *modulação da turbulência*, ou seja, a influência das partículas nas grandezas turbulentas como a energia cinética turbulenta, κ , e a taxa de dissipação da turbulência, ϵ .

Não é o objetivo da presente seção ir a fundo nas definições das grandezas fundamentais da turbulência, visto que estas são apresentadas em outras referências (Silveira Neto, 1998; Silva Freire e Cruz, 1998; Deschamps, 1998). No contexto de sistemas sólido-gás e das interações entre as fases, Shirolkar et al. (1996) apresentaram de forma clara e conceitual as definições dos parâmetros e escalas da turbulência. Aqui, faremos uso de apenas algumas destas definições.

Resultados experimentais reunidos por Hetsroni (1989) em conjunto com considerações teóricas sugerem que a presença de partículas possuindo baixos números de Reynolds suprime a turbulência no escoamento, enquanto que a presença de partículas possuindo números de Reynolds acima de um determinado valor promove um aumento da turbulência. Segundo Hetsroni, a fronteira entre os dois regimes é dada por

$$Re_p = \frac{\rho_F U_r d_p}{\eta_F} \approx 400 \quad (13)$$

onde ρ_F e η_F são a densidade e a viscosidade do fluido, U_r é a velocidade relativa entre o fluido e a partícula e d_p é o diâmetro da partícula. O argumento físico para a existência de um regime de supressão e um regime de incentivo à turbulência foi proposto por Kada e Hanratty (1960). Segundo eles, as partículas pequenas, sendo menores do que a escala do turbilhão de maior energia, seguirão este turbilhão por pelo menos parte de sua duração. Uma vez que o turbilhão está arrastando a partícula, parte de sua energia é gasta neste processo. Em outras palavras, parte da energia cinética do turbilhão é transformada em energia cinética da partícula, diminuindo a intensidade turbulenta. Partículas maiores promovem turbulência em suas esteiras em escalas próximas à do turbilhão de maior energia, aumentando a turbulência do escoamento. Neste caso, a energia do escoamento médio (que move as partículas) é transformada em energia cinética turbulenta. Baseado em uma análise de ordens de grandeza do fenômeno de emissão de vórtices de uma partícula, Hetsroni (1989) deu suporte aos argumentos de Kada e Hanratty (1960) e mostrou que esse mecanismo pode ser o responsável pelo aumento da turbulência observado em sistemas contendo partículas grandes.

No comentário acima, destacamos duas grandezas que merecem ser exploradas mais a fundo. A primeira delas é a escala ou o comprimento característico, l_e , que é o tamanho do turbilhão de maior energia do escoamento. l_e foi determinado experimentalmente por Hutchinson et al. (1971) para escoamentos em tubos e por Wygnanski e Fiedler (1969) para jatos. Para escoamentos em tubos, Hutchinson et al. (1971) determinaram um comprimento igual a $0.1d_T$ no centro do tubo e próximo de $0.025d_T$ na região adjacente a parede. Para jatos, o comprimento característico da turbulência foi dado por Wygnanski e Fiedler (1969) como sendo igual a $0.081z$, onde z é a distância axial a partir do injetor.

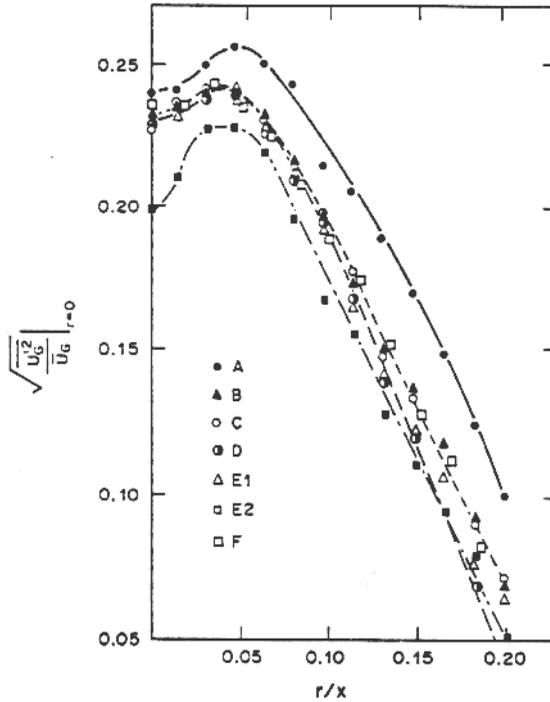


Figura 6: Intensidade turbulenta medida na linha de centro de um jato carregado de partículas (reproduzido de Levy e Lockwood, 1981).

A segunda grandeza é a intensidade turbulenta, definida pela razão entre a raiz da média quadrática da velocidade local e a média temporal da velocidade local

$$Tu = \frac{\sqrt{v'^2}}{\bar{v}}. \quad (14)$$

A Figura 6, retirada de Levy e Lockwood (1981), ilustra o efeito da presença de partículas de vários tamanhos na intensidade turbulenta medida na linha de centro de um jato de ar descendente a uma distância $z = 20d$ do injetor, onde d é o diâmetro do injetor. A Tabela 1 fornece os valores de vazões, tamanho de partículas e velocidades utilizados por Levy e Lockwood (1981).

Para situações onde a velocidade relativa entre o fluido e a partícula não é conhecida, a alteração da estrutura turbulenta do fluido provocada pela presença da fase dispersa pode ser estimada a partir da análise de razão de escalas proposta

Tabela 1: Condições experimentais da investigação de Levy e Lockwood (1981).

Índice	d_p (μm)	\dot{M}_{ar} (kg s^{-1})	\dot{M}_p (kg s^{-1})	$\overline{u}_{ar}^\dagger$ (m s^{-1})	\overline{u}_p^\dagger (m s^{-1})
A	850-1200	4.29×10^{-3}	15.0×10^{-3}	7.3	8.74
B	600-850	3.62×10^{-3}	8.78×10^{-3}	6.12	8.20
C	380-700	3.62×10^{-3}	8.12×10^{-3}	6.0	8.52
D	300-500	3.62×10^{-3}	4.42×10^{-3}	8.79	13.22
E1	180-250	3.62×10^{-3}	4.13×10^{-3}	9.06	14.9
E2	180-250	3.62×10^{-3}	8.45×10^{-3}	7.57	11.55
F	ar puro	4.29×10^{-3}	—	9.6	—

[†] Velocidades na linha de centro do jato, a uma distância de $20d$ do injetor.

por Gore e Crowe (1989). Nesta análise, que consiste da investigação de dados experimentais disponíveis na literatura para jatos e escoamentos internos carregados, Gore e Crowe relacionam a variação da intensidade turbulenta com a razão entre o diâmetro da partícula e o comprimento característico turbulento, l_e , do escoamento sem partículas. A Figura 7 ilustra a análise de Gore e Crowe.

Na Figura 7, a variação percentual da intensidade turbulenta (eixo y) é definida por

$$\frac{Tu_{TP} - Tu_F}{Tu_F} \times 100 \quad (15)$$

onde as intensidades turbulentas são dadas pela Eq. 14 e referem-se a medidas realizadas na linha de centro. Os subscritos TP e F designam escoamento bifásico e monofásico, respectivamente.

Como podemos observar na figura, valores de

$$\frac{d_p}{l_e} \approx 0.1 \quad (16)$$

configuram um limite entre a supressão e a intensificação da turbulência em escoamentos carregados de partículas de diâmetro d_p . Na análise de Gore e Crowe (1989), l_e foi calculado utilizando as expressões propostas por Hutchinson et al. (1971) e Wagnanski e Fiedler (1969). A Tabela 2 fornece as faixas dos diversos parâmetros utilizados por Gore e Crowe em seu estudo. Tanto as geometrias dos escoamentos, quanto as variações de densidade, de número de Reynolds do fluido e de concentração de partículas são bastante extensas.

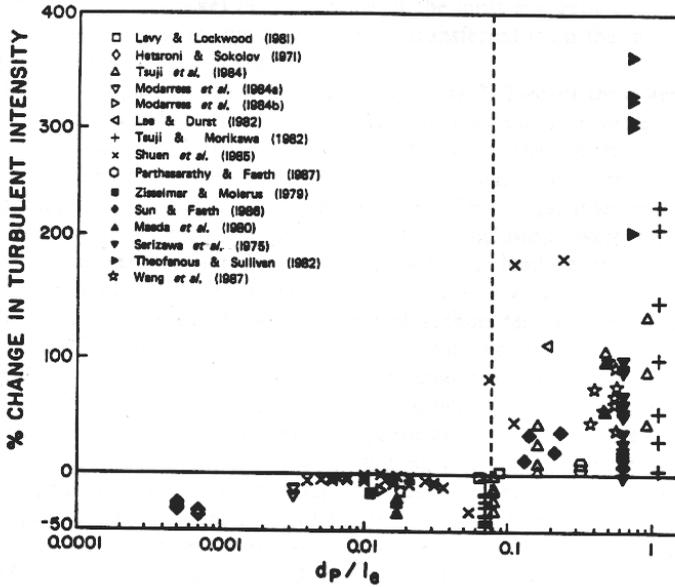


Figura 7: Variação percentual da intensidade turbulenta devido à presença de partículas no escoamento (reproduzida de Gore e Crowe, 1989).

Tabela 2: Condições experimentais dos estudos analisados por Gore e Crowe (1989).

Referência	Geometria	$\frac{\rho_p}{\rho_F}$	$C\%$	Re_F
Levy e Lockwood (1981)	jato SG ↓	2000	6×10^{-4}	2×10^4
Hetsroni e Solokov (1971)	jato LG →	775	2.5×10^{-6}	8.3×10^4
Tsuji et al. (1984)	tubo SG ↑	850	5×10^{-3}	2.25×10^4
Modarress et al. (1984a)	jato SG ↓	2500	2×10^{-4}	1.33×10^4
Tsuji e Morikawa (1982)	tubo SG ↓	833	4×10^{-3}	2×10^4
Shuen et al. (1985)	tubo SG →	2200	2×10^{-4}	1.9×10^4
Parthasarathy e Faeth (1985)	jato SL ↓	2.5	2.4 a 4.8	9×10^3
Modarress et al. (1984b)	tubo SG ↓	2500	3.5×10^{-4}	1.7×10^4
Lee e Dust (1982)	tubo SG ↑	2080	1×10^{-3}	8×10^3
Zisselmar e Molerus (1979)	tubo SL →	2.5	4.0	1×10^5
Maeda et al. (1980)	tubo SG ↑	7500	1.5×10^{-4}	2×10^4

$C\%$ é a concentração volumétrica de partículas.

SG: sólido-gás, LG: líquido-gás, SL: sólido-líquido.

↓: descendente, →: horizontal, ↑: ascendente.

3.3. A turbulência no padrão em bolhas

No padrão em bolhas, assim como em outros escoamentos dispersos, o interesse principal reside no estudo da influência das bolhas na estrutura turbulenta da fase contínua (líquido). Diversos estudos foram realizados com este intuito para diversas configurações do padrão em bolhas.

Em escoamentos internos, o comportamento da taxa de presença local de gás (ou fração de vazio local), ε_G , é função de diversos fatores, tais como a proximidade à parede, o formato da seção transversal do duto, sua inclinação e a direção na qual as fases escoam. Para escoamentos ascendentes no interior de dutos, sob determinadas condições, a velocidade relativa devido ao empuxo e a vorticidade induzida pela presença da parede fazem com que as bolhas se concentrem na região próxima à parede, criando uma região de pico de fração de vazio a uma distância de aproximadamente um diâmetro da bolha da parede. Tal fenômeno é ilustrado nas quatro imagens à esquerda na Figura 8 retirada do trabalho de Hibiki et al. (2001). Nesta figura, perfis radiais de taxa de presença local de gás medidos em duas posições ao longo da seção de testes são mostrados para diferentes condições de vazão das fases (água e ar) conforme indicado na Figura 9.

Para as outras distribuições mostradas na Figura 8, as distribuições de fração vazio assumem outros formatos, que podem estar associados a outros fenômenos,

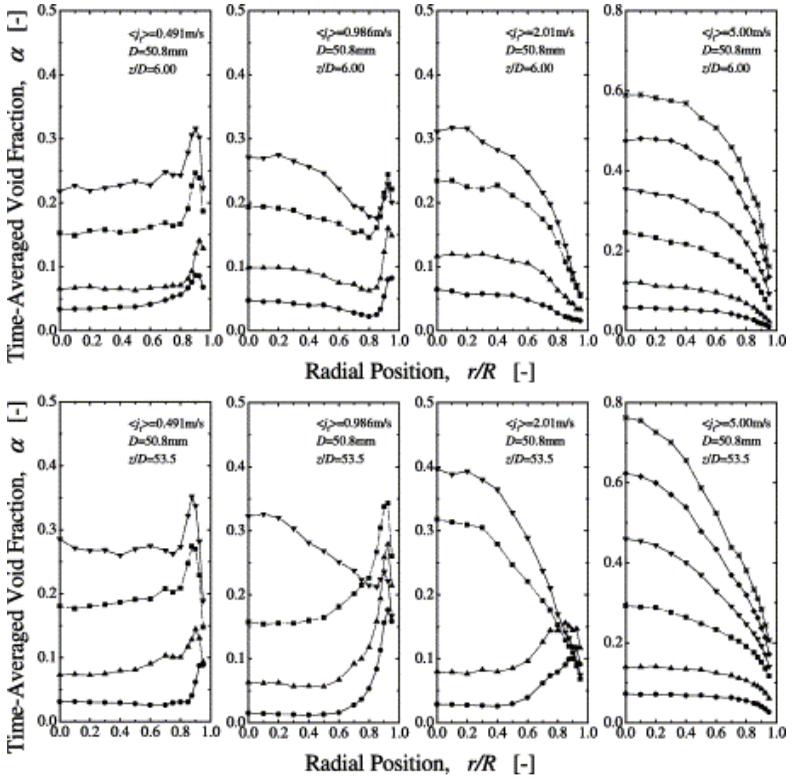


Figura 8: (a) Perfis de fração de vazio num escoamento ascendente no padrão em bolhas (reproduzido de Hibiki et al., 2001).

Symbols	●	▲	■	▼	◆	*
$\langle j_f \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)	$\langle j_{g,0} \rangle$ (m/s)
0.491	0.0275	0.0556	0.129	0.190	N/A	N/A
$Re_f = 2.48 \times 10^4$						
$\langle \alpha_{z/D=53.5} \rangle$ [%]	(4.90)	(9.20)	(19.2)	(25.9)		
$(Re_{g,0})$	(89.6)	(181)	(420)	(619)		
0.986	0.0473	0.113	0.242	0.321^b	N/A	N/A
$Re_f = 4.99 \times 10^4$						
$\langle \alpha_{z/D=53.5} \rangle$ [%]	(5.12)	(10.8)	(20.3)	(23.1)		
$(Re_{g,0})$	(154)	(368)	(788)	(1050)		
2.01	0.103	0.226	0.471^b	0.624^b	N/A	N/A
$Re_f = 1.02 \times 10^5$						
$\langle \alpha_{z/D=53.5} \rangle$ [%]	(5.68)	(10.8)	(18.3)	(22.8)		
$(Re_{g,0})$	(335)	(736)	(1530)	(2030)		
5.00	0.245	0.518	1.11^b	1.79^b	2.87^b	3.90^b
$Re_f = 2.53 \times 10^5$						
$\langle \alpha_{z/D=53.5} \rangle$ [%]	(5.41)	(10.6)	(20.0)	(28.1)	(36.6)	(44.2)
$(Re_{g,0})$	(798)	(1690)	(3610)	(5830)	(9350)	(12700)

Figura 9: Condições experimentais do trabalho de Hibiki et al. (2001) (reproduzido de Hibiki et al., 2001). $\langle j_f \rangle$ é a velocidade superficial do líquido (v_{LS}), $\langle j_{g,0} \rangle$ é a velocidade superficial do gás na seção de entrada ($v_{GS,0}$), Re é o número de Reynolds e $\langle \alpha_{z/D=53.5} \rangle$ é a fração de vazio média na seção a uma distância de $z = 53.5 \times$ o diâmetro do tubo. O sobrescrito b indica que bolhas de calota esférica foram observadas e N/A significa que medições não foram feitas para as referidas condições.

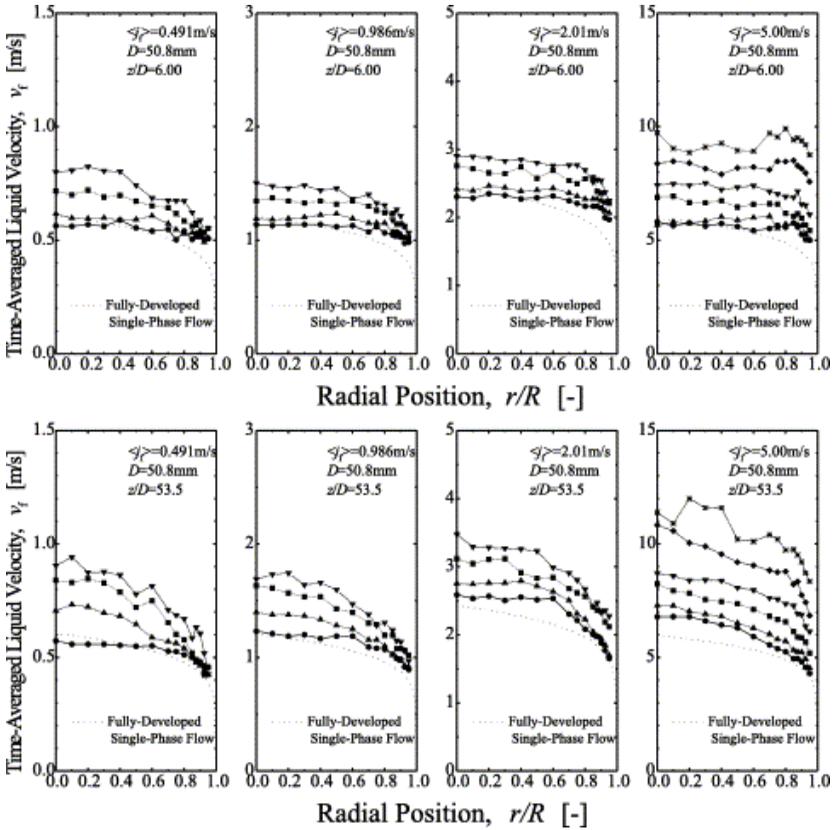


Figura 10: (a) Perfis de velocidade média da fase líquida num escoamento ascendente no padrão em bolhas (reproduzido de Hibiki et al., 2001).

como por exemplo a transição para o padrão pistonado ($v_{LS} = 0.986$ m/s e $v_{GS,0} = 0.321$ m/s). Tais regimes não serão discutidos aqui.

Nas condições onde existem picos de fração de vazio na região próxima à parede, a velocidade da fase líquida torna-se maior nesta região resultando em perfis de velocidade do líquido mais achatados. Tal fato pode ser observado na Figura 10. Nesta figura o perfil de velocidades médias do escoamento monofásico equivalente também é mostrado. Conforme será visto a seguir, o aumento do gradiente de velocidades da fase líquida junto à parede resulta num aumento correspondente da tensão de cisalhamento na parede.

Perfis radiais de intensidade turbulenta na fase líquida obtidos para as condi-

ções das Figuras 8 e 10 são mostrados na Figura 11. Nesta figura, por comparação, os perfis de intensidade turbulenta para um escoamento monofásico de líquido de mesma vazão também é mostrado. Conforme apontado por Hibiki et al. (2001), de uma forma geral, a introdução de bolhas no escoamento causa uma maior turbulência do que no escoamento monofásico. Entretanto, sob algumas condições a turbulência é suprimida localmente.

Os mecanismos físicos por trás do aumento ou da supressão da turbulência devido à introdução das bolhas foram identificados por Serizawa e Kataoka (1990): (i) aumento da dissipação de energia e produção de turbulência na região da parede devido aos maiores gradientes de velocidade nesta região, (ii) movimento relativo entre as fases promovendo a agitação, (iii) maiores gradientes de componentes flutuantes nas vizinhanças das interfaces aumentando a dissipação turbulenta, e (iv) efeitos de amortecimento de energia nas interfaces das bolhas.

Como veremos na Seção 6, a predição numérica do escoamento bifásico no padrão em bolhas requer uma escolha cuidadosa das condições de contorno na região próxima à parede. Um estudo de grande importância à caracterização do escoamento nesta região foi realizado por Marié et al. (1997). Nesse estudo, os autores realizaram um extenso trabalho experimental visando elucidar o efeito da presença de bolhas no perfil universal de velocidades. A geometria estudada por Marié et al. foi a de uma camada limite desenvolvendo-se junto a uma parede vertical para um escoamento ascendente.

Dentre outros fatos, o estudo de Marié et al. (1997) concluiu que a estrutura da camada limite turbulenta monofásica (ver Silva Freire e Cruz, 1998) é mantida com a presença das bolhas. Para as condições investigadas por Marié et al., foram observados picos de fração de vazio na região próxima à parede, sendo uma distribuição transversal típica da taxa de presença de gás ilustrada na Figura 12. O tamanho das bolhas presentes nos experimentos de Marié et al. era da ordem de 3.5 mm.

Vale a pena ressaltar que, apesar da fração de vazio média ser baixa (1.5%), o valor máximo do perfil é de aproximadamente 7% (Fig. 12). A Fig. 13 ilustra os perfis experimentais de velocidade da fase líquida junto à parede em termos das variáveis adimensionais para o escoamento monofásico.

Apesar da estrutura da camada limite com bolhas ser semelhante à monofásica, as escalas empregadas para descrever o perfil de velocidades não são as mesmas para os dois casos. No caso bifásico, de maneira a captar a similaridade entre os perfis, as novas escalas devem levar em consideração os efeitos do empuxo e do perfil da taxa de presença de gás. A fim de caracterizar as novas escalas envolvidas, Marié et al. (1997) propuseram uma lei de parede utilizando novos parâmetros adimensionais

$$\frac{v_L}{v_w^*} = \frac{1}{K} \ln y^* + C^* \quad (17)$$

onde

$$v_w^{*2} = \beta^2 v_w^{\sigma^2} \quad (18)$$

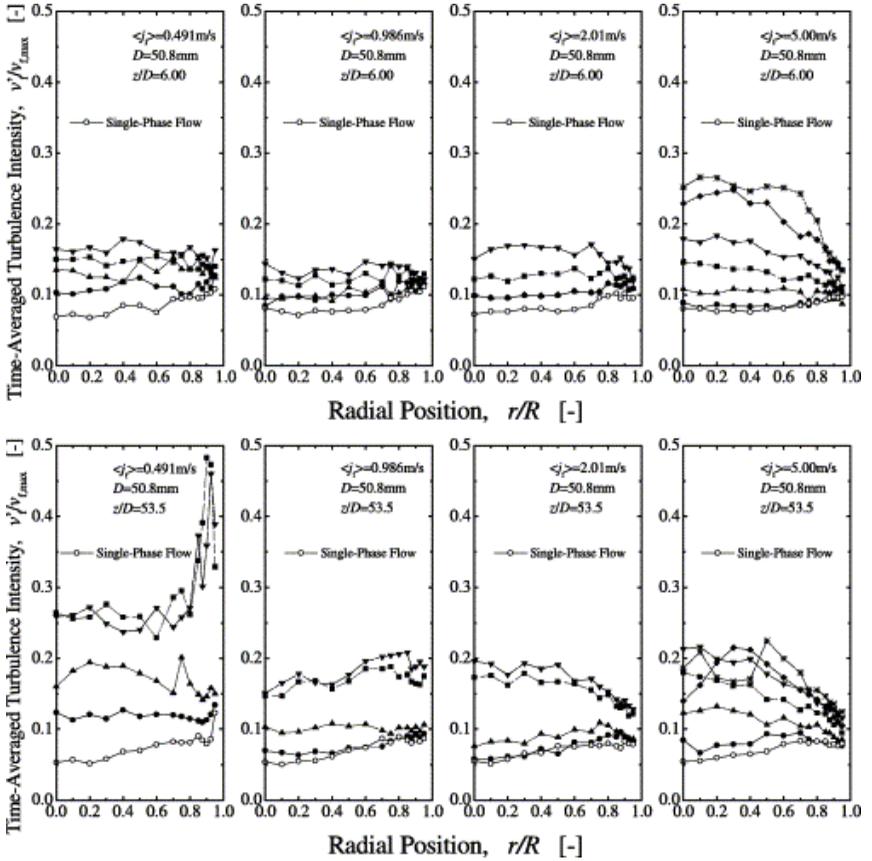


Figura 11: Perfis radiais de intensidade turbulenta na fase líquida de um escoamento ascendente no padrão em bolhas (reproduzido de Hibiki et al., 2001).

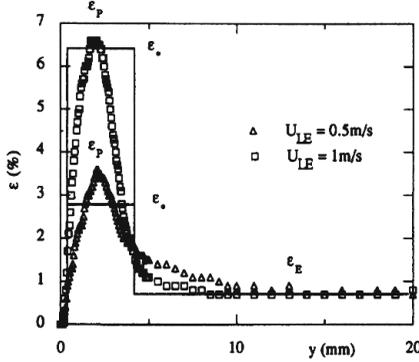


Figura 12: Perfis típicos de fração de vazio junto à parede plana vertical (reproduzido de Marié et al., 1997). U_{LE} é a velocidade média do líquido longe da parede.

$$\beta^2 = \left(1 - \frac{Fr^* \varepsilon^x}{t^2}\right) \quad (19)$$

$$Fr^* = \frac{gd_b}{v_w^{*2}} \quad (20)$$

$$t^2 = \left(\frac{v_w^o}{v_w^*}\right)^2 \quad (21)$$

e

$$C^x = C + s \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) - \frac{1}{K} \ln \beta. \quad (22)$$

Nas equações acima, $K \approx 0.4$ e $C \approx 5$ são os parâmetros da perfil de velocidades logarítmico universal. s é a espessura da subcamada viscosa (suposto constante independente da presença ou não de bolhas). v_w^o é a velocidade de fricção obtida *experimentalmente* e v_w^* é a velocidade de fricção de um escoamento monofásico equivalente possuindo a mesma velocidade média (longe da parede). Fr^* é o número de Froude de fricção e ε^x é a diferença entre a fração de vazio máxima e a fração de vazio longe da parede (ver Fig. 12). y^x é a distância à parede adimensionalizada pela velocidade de fricção v_w^x .

Análises semelhantes à descrita acima, inclusive fazendo uso dos dados de Marié et al. (1997), foram realizadas por Taqi e Ildrissi (2000) e por Troshko e Hassan (2001b). Expressões ligeiramente diferentes da Eq. 17 foram propostas por esses autores (ver Seção 6.1.2).

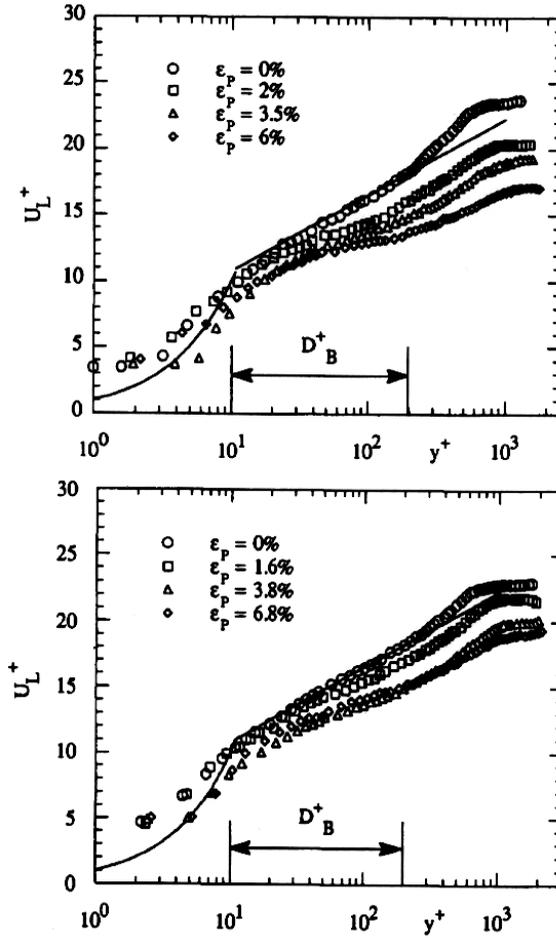


Figura 13: Perfis de velocidade da fase líquida em função das variáveis adimensionais do escoamento monofásico. Figura superior: Velocidade do escoamento livre igual a 0.75 m s^{-1} ; Figura inferior: Velocidade do escoamento livre igual a 1.0 m s^{-1} (reproduzido de Marié et al., 1997).

3.4. A turbulência no padrão anular

Para um melhor entendimento dos mecanismos da turbulência no escoamento em padrão anular, analisaremos as duas regiões de forma distinta. Primeiro, a região do filme líquido será mostrada e logo em seguida estudaremos a turbulência no núcleo gasoso. Somente escoamentos unidirecionais ascendentes serão revistos.

3.4.1. O filme líquido

No padrão anular, o líquido é transportado sob a forma de um filme líquido revestindo a parede do tubo e também sob a forma de gotículas entranhadas no núcleo gasoso. Por este padrão ser característico de altas frações mássicas de gás, o escoamento no núcleo gasoso é turbulento para a maioria das situações encontradas na prática. No filme líquido, devido ao forte cisalhamento decorrente do escoamento do gás sobre a interface, observamos a presença de perturbações em sua estrutura. As perturbações podem ser de dois tipos, (i) as pequenas perturbações (*ripples*), cujas características principais são a baixa amplitude, o baixo comprimento e a alta frequência e (ii) as grandes perturbações (*disturbance waves*), que caracterizam-se pela alta amplitude, grande comprimento e frequência menor que a das pequenas perturbações. Uma característica importante das grandes perturbações, que as distingue de ondas no sentido clássico da definição, é que elas são responsáveis por uma parte do transporte de massa de líquido ao longo do escoamento. Salvo em dutos de grande diâmetro, as grandes perturbações são coerentes ao redor do perímetro do tubo. A Figura 14 retirada de Sekoguchi et al. (1985) mostra os perfis circunferenciais de espessura do filme líquido em função do tempo e da distância. Tais medições foram obtidas em um duto vertical de 25.8 mm de diâmetro interno utilizando um sistema de múltiplos sensores eletro-resistivos. Como pode ser visto na Figura 14, as grandes perturbações destacam-se em comparação à espessura média do filme. A natureza da relação entre tais estruturas e a turbulência no filme líquido será discutida a seguir em maiores detalhes. Posteriormente, serão descritas as características da turbulência no núcleo gasoso.

Diversas observações experimentais relacionam as grandes perturbações presentes no filme líquido e a turbulência no escoamento. Entretanto, como a medição das flutuações turbulentas é complicada devido à geometria do filme líquido (proximidade à parede e pequena espessura), poucos são os resultados quantitativos. Dentre algumas das observações indiretas da ligação entre a turbulência e as perturbações no filme, podemos citar o trabalho de Thwaites et al. (1976), que investigaram o efeito da adição de um agente redutor de arrasto em um escoamento anular de ar e água. Eles observaram, através da medição instantânea da espessura do filme, que a frequência das perturbações diminuía progressivamente com o aumento da concentração do agente redutor no líquido. Tais observações foram confirmadas qualitativamente no estudo recente de Al-Sarkhi e Hanratty (2001).

Evidência experimental indica que as grandes perturbações no filme líquido têm origem nas eclosões turbulentas (*turbulent bursts*). Tal mecanismo, identificado por Kline et al. (1967) e por Corino e Brodkey (1969) em escoamentos em camadas

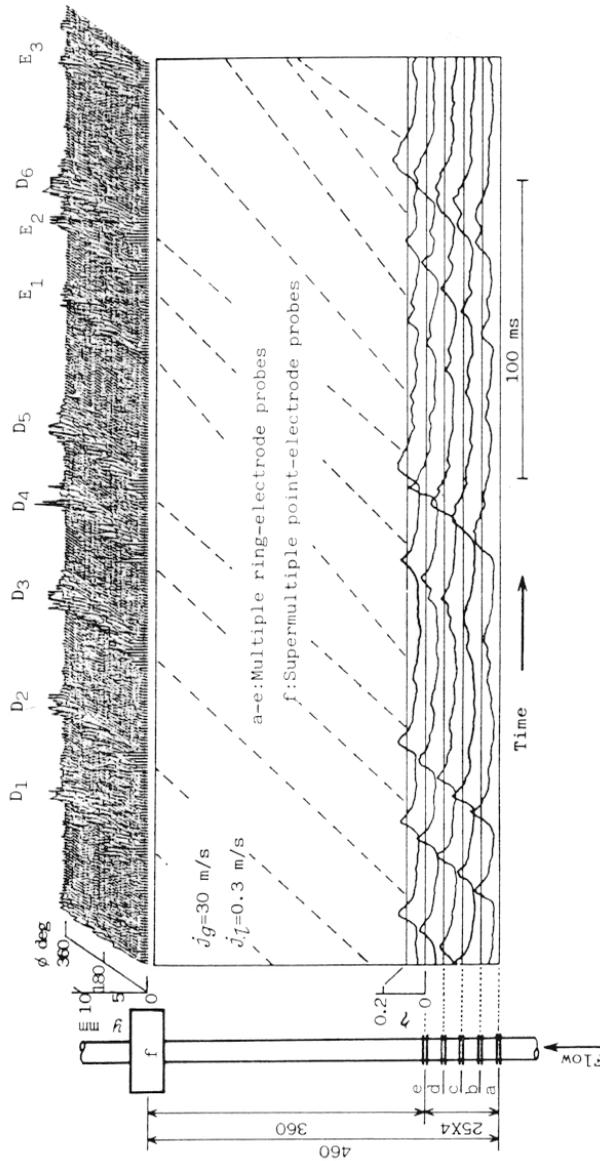


Figura 14: Contornos interfaciais espessura do filme \times posição angular \times tempo. j_G é a velocidade superficial do gás, j_L é a velocidade superficial do líquido (reproduzido de Sekoguchi et al., 1985).

limite monofásicas, é responsável pela produção de turbulência junto à parede e caracteriza-se por um efluxo de massa de regiões de baixa quantidade de movimento para longe da parede, sendo este seguido de um influxo de fluido possuindo alta quantidade de movimento.

A associação entre as eclosões turbulentas e as perturbações no filme foi sugerida por Martin e Azzopardi (1985), que propuseram o seguinte mecanismo para o escoamento anular. Devido à pequena espessura, uma camada limite formando-se no filme líquido junto à parede, rapidamente atingiria a interface englobando todo o filme. Esta camada limite possuiria todas as características usuais da turbulência, inclusive a ocorrência de eclosões turbulentas. Durante uma eclosão, o movimento de uma estrutura para longe da parede causaria uma saliência na interface. Por conservação, o influxo de fluido com alta quantidade de movimento causaria uma depressão nos arredores da saliência. Tal combinação de eventos levaria a protuberância formada a penetrar na região do escoamento de gás e, conseqüentemente, a acelerar dando início às ondas (perturbações). Evidentemente, tais perturbações coalescem à medida que avançam ao longo do escoamento. Entretanto, Martin e Azzopardi argumentam que, se cada eclosão dá origem a uma perturbação, então a freqüência das eclosões deve ser igual à freqüência inicial das perturbações. Alguns dos resultados obtidos por Martin e Azzopardi são apresentados na Figura 15. Como podemos observar, o comportamento das freqüências em função da distância à parede ou espessura do filme adimensionais para os dois fenômenos é bastante similar. Martin e Azzopardi sugerem que os valores das freqüências iniciais das perturbações devem ser ligeiramente maiores do que os mostrados na figura devido a estas terem sido medidas a uma distância de 0.31 m do ponto de injeção do líquido (coalescência das perturbações). Além disso, os valores da velocidade de fricção, v^* , não são idênticos para os dois fenômenos em comparação na Figura 15.

Cabe aqui uma observação de que, para determinar o valor da velocidade de fricção no escoamento anular, é preciso fazer uma hipótese adicional com relação à tensão cisalhante na parede: (i) ou assume-se que o perfil de velocidades no filme líquido obedece a uma lei de parede (lei logarítmica, por exemplo) ou (ii) assume-se que esta é igual à tensão de cisalhamento na interface do filme calculada a partir de uma correlação empírica. Martin e Azzopardi escolheram a alternativa (ii) para a determinação de v^* , sem no entanto fornecer maiores detalhes acerca deste cálculo.

Recentemente, Vassallo (1999) desvendou a estrutura do escoamento no filme líquido através de medições cuidadosas utilizando sensores de anemometria a filme quente e transdutores de pressão do tipo diferencial. A instalação experimental utilizada por Vassallo em seu estudo consistiu de um duto de seção de testes retangular (63.5×6.35 mm) de 170 cm de comprimento, por onde ele fez escoar ar e água a vazões conhecidas e tais que o regime de filme ascendente prevalecesse.

A idéia por trás da técnica de medição usada por Vassallo (1999) é obter uma lei de parede a partir dos valores medidos de velocidade média locais e de energia cinética turbulenta que reproduza a tensão de cisalhamento na parede média

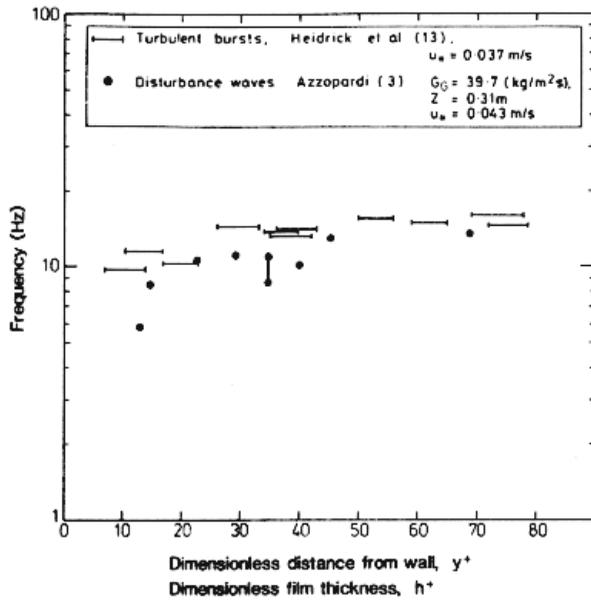


Figura 15: Frequência das grandes perturbações e das eclosões turbulentas e o efeito da distância à parede (reproduzido de Martin e Azzopardi, 1985).

calculada a partir das medições da queda de pressão

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_L}} = \sqrt{\frac{d_H}{4\rho_L} \left. \frac{\Delta p}{\Delta z} \right|_f} \quad (23)$$

onde d_H é o diâmetro hidráulico da seção e $\left. \frac{\Delta p}{\Delta z} \right|_f$ é o gradiente de pressão devido à fricção.

Os perfis logarítmicos de velocidade e os gradientes de pressão devido à fricção obtidos por Vassallo (1999) são mostrados na Figura 16.a e 16.b, respectivamente. Nestes gráficos, para efeito de comparação, o perfil de velocidades e o gradiente de pressão para o escoamento monofásico de líquido também foram incluídos.

Nas legendas da Figura 16, j_L e j_G designam as velocidades superficiais do líquido e do gás. Como pode ser observado nesta figura, o perfil de velocidades para o escoamento monofásico apresenta uma boa concordância com a lei de parede para escoamentos internos (linha cheia) dada por (Laufer, 1951 — cf. Schlichting, 1987)

$$v^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0. \quad (24)$$

para a zona logarítmica onde ($14 < y^+ < 300$). Para duas das três situações de escoamento anular mostradas na Figura 16, o perfil de velocidades no filme líquido aproxima-se bem da Eq. 24. Entretanto, para o caso em que a velocidade do gás é menor e a do líquido maior (12.8 m s^{-1} e 1.3 m s^{-1}), a concordância não é tão satisfatória; em particular, o valor da constante C na Eq. 24 torna-se menor do que 5.0 nesta situação. Em termos físicos, uma redução no valor de C implica em uma menor espessura da sub-camada laminar. Desta forma, a tensão cisalhante na parede é afetada pela estrutura do filme e, de fato, aquela aumenta para um dado perfil de velocidades no filme líquido. Vassallo (1999), baseado em observações semelhantes para escoamentos no padrão em bolhas (Velidandla et al., 1996; Marié et al., 1997), atribui tal comportamento à presença de bolhas de gás entranhadas no filme líquido. Devido à maior espessura do filme líquido no caso explorado do que naqueles onde a lei de parede monofásica se aplica, as bolhas nele entranhadas subsistem por mais tempo explicando a diferença entre as três situações.

Nesta seção, examinamos brevemente a natureza da turbulência na região do filme líquido no padrão anular. Apesar dos estudos nesta área não serem numerosos, eles evidenciam as peculiaridades da turbulência neste escoamento. Na Seção 6.2, veremos como a turbulência no filme líquido é tratada durante a modelagem do escoamento anular.

3.4.2. O núcleo gasoso

O conhecimento acerca da turbulência no núcleo gasoso do padrão anular é significativamente maior do que no filme líquido. Isto certamente é fruto das semelhanças entre o escoamento no núcleo gasoso e escoamentos carregados de partículas (notadamente gás-sólido). Como um exemplo destas semelhanças, veremos que sob

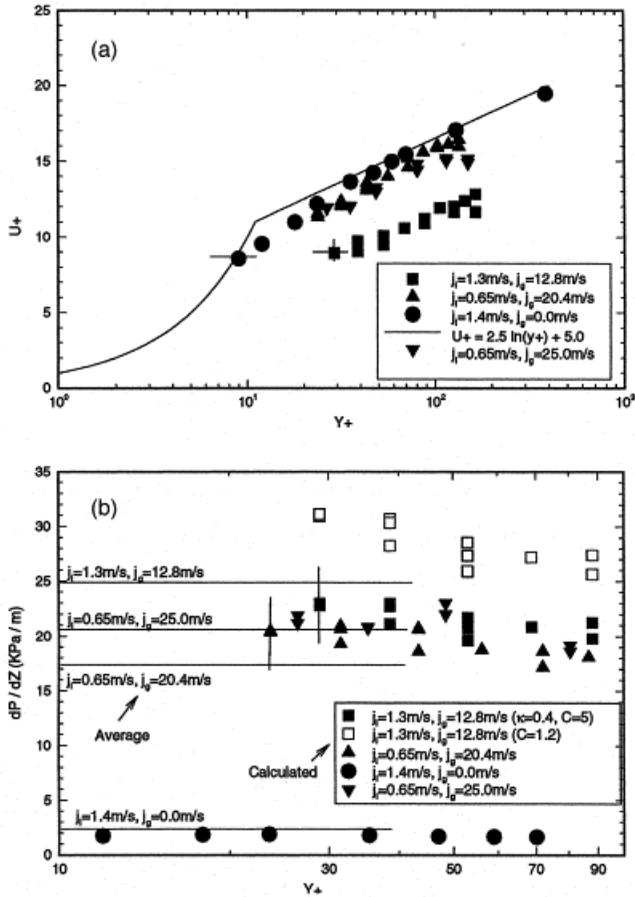


Figura 16: (a) Perfis de velocidade no filme líquido em função das variáveis adimensionais; (b) comparação entre os gradientes de pressão devido à fricção experimentais e obtidos através da integração do perfil de velocidades logarítmico (reproduzido de Vassallo, 1999).

determinadas condições, a presença de gotículas entranhadas no núcleo gasoso podem exibir características de supressão da intensidade turbulenta.

Entretanto, conforme apontado por Azzopardi e Teixeira (1994a, 1994b), precisamos lembrar de que existem duas diferenças fundamentais entre escoamentos carregados de partículas e o escoamento na região do núcleo gasoso do padrão anular. Primeiro, em escoamentos carregados, não existe um filme de líquido revestindo a parede do duto. No padrão anular, do ponto de vista do núcleo gasoso, o filme líquido comporta-se como uma parede rugosa. A segunda diferença diz respeito à condição de regime permanente. Enquanto esta pode ser atingida em escoamentos sólido-fluido, no escoamento anular onde o processo de criação e de destruição (deposição) de gotículas a partir do filme líquido é contínuo, essa condição (em sua definição mais rigorosa) nunca é alcançada.

Azzopardi e Teixeira (1994a, 1994b) conduziram um estudo cuidadoso sobre a natureza das gotículas entranhadas no núcleo gasoso. Eles realizaram medidas de velocidade e tamanho das bolhas e também de grandezas turbulentas associadas ao escoamento na região do núcleo gasoso. Os experimentos foram conduzidos em um tubo de seção transversal circular, cujo diâmetro interno era de 32 mm. Os fluidos de trabalho utilizados eram ar e água e a técnica de medição anemometria a laser. Os fluxos mássicos de gás e de líquido variaram de 24.5 a 55.6 kg m⁻² s⁻¹ e de 15.9 a 47.6 kg m⁻² s⁻¹, respectivamente. As medições de Azzopardi e Teixeira permitiram a comprovação de alguns mecanismos interessantes. Os resultados mais expressivos compreendem os seguintes:

1. Os perfis de velocidade média no núcleo gasoso são bem descritos pela expressão

$$\frac{v}{v_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n \quad (25)$$

onde v_{max} é o valor máximo da velocidade. Apesar dos valores de n serem maiores do que aqueles para os escoamentos monofásicos correspondentes, quando comparados ao fator de fricção (determinado a partir de uma extrapolação até a parede dos valores experimentais das tensões de Reynolds), estes apresentam uma boa correlação (ver Fig. 17) com os dados clássicos de Nikuradse (1932) e de Nunner (1956) (cf. - Azzopardi e Teixeira, 1994a, 1994b) para tubos rugosos.

2. Os valores medidos de intensidade turbulenta no núcleo gasoso são consideravelmente maiores do que os valores correspondentes para tubos rugosos. Tal fato é comprovado através da análise da Figura 18, onde distribuições radiais da razão entre a intensidade turbulenta e a velocidade de fricção são exibidas. A linha tracejada corresponde à curva para um tubo cuja rugosidade equivale àquela da interface do filme (estimada a partir do cálculo da tensão de cisalhamento na interface).

Os resultados da Figura 18 de Azzopardi e Teixeira (1994b) são uma indicação clara de que, pelo menos para a faixa de vazões investigadas por eles, existe

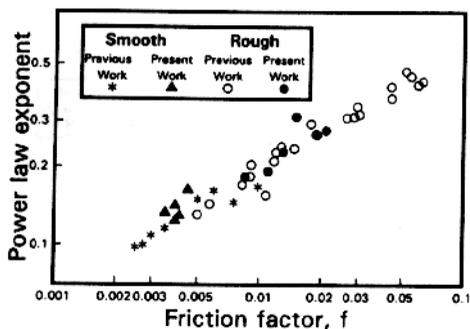


Figura 17: Relação entre o expoente da lei de potência, n , e o fator de fricção para tubos de parede lisa e rugosa (reproduzido de Azzopardi e Teixeira, 1994b).

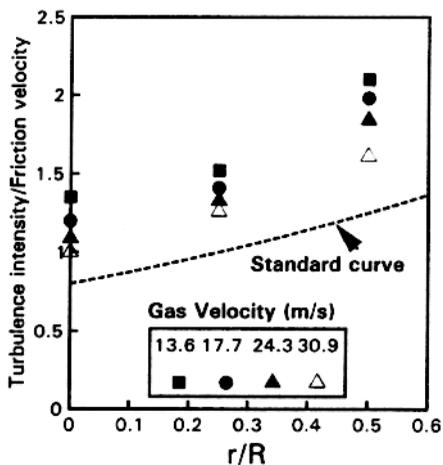


Figura 18: Efeito da velocidade do gás na intensidade turbulenta no escoamento anular (fluxo mássico de líquido: $15.9 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$). (reproduzido de Azzopardi e Teixeira, 1994b).

um aumento da intensidade da turbulência no núcleo gasoso devido à presença das gotículas.

A existência do padrão anular ao longo de uma faixa extensa de vazões de líquido e de gás sugere que devemos ser cautelosos na extrapolação de resultados (tanto de forma qualitativa quanto quantitativa) como os de Azzopardi e Teixeira (1994a, 1994b) para outras condições. Para ilustrar tal afirmativa, citamos os experimentos de Owen et al. (1985) em escoamentos em padrão anular de misturas água-ar sob condições de elevados fluxos mássicos de líquido. O aparato experimental utilizado por Owen et al. consistia de um duto vertical de seção circular de diâmetro interno igual a 31.8 mm e de comprimento total de aproximadamente 23 m (suficiente para garantir o alcance de uma condição de *equilíbrio hidrodinâmico*). As faixas de vazão de água e de ar utilizadas foram de 0 a 400 kg m⁻² s⁻¹ e de 0 a 200 kg m⁻² s⁻¹, respectivamente. Para experimentos no padrão anular, Owen et al. realizaram medidas de vazão mássica de líquido no filme e de gradiente de pressão.

A Figura 19 mostra os dados de gradiente de pressão na região anular em função dos fluxos mássicos de gás para uma condição onde o fluxo mássico de líquido é mantido constante (Owen et al., 1985). A curva correspondente ao escoamento monofásico de gás (ar) é mostrada para efeitos comparativos. Duas características marcantes desta figura são: (i) a ocorrência de um aumento brusco do gradiente de pressão devido à adição da fase líquida (mesmo que em pequenas quantidades) e (ii) a presença de pontos de máximo e mínimo nas curvas correspondentes às maiores vazões de líquido, ou seja, 297 kg m⁻² s⁻¹ e 399 kg m⁻² s⁻¹.

A fim de identificar os mecanismos por trás do comportamento descrito no item (ii) acima, Owen et al. (1985) reconheceram que os seguintes processos podem ocorrer no padrão anular à medida que a vazão de gás é aumentada:

1. Uma tendência ao aumento da tensão de cisalhamento interfacial com um aumento da vazão de gás. Tal comportamento é semelhante àquele do escoamento monofásico.
2. Com um aumento da vazão de gás, devido à maior quantidade de gotículas arrancadas do filme, a espessura do filme líquido e sua vazão diminuem rapidamente. Isto causa uma redução na atividade das perturbações na interface e uma conseqüente redução no fator de fricção interfacial.

Na região do escoamento onde o gradiente de pressão diminui com o aumento da vazão de gás, há o predomínio do segundo mecanismo acima. Entretanto, quando quase todo o líquido ora presente no filme for 'entranhado', o primeiro mecanismo voltará a prevalecer e o gradiente voltará a crescer com o aumento da vazão de gás. A combinação destes dois processos confere o formato peculiar do perfil do gradiente de pressão para altas vazões de líquido.

Owen et al. (1987) postularam que na região onde o gradiente de pressão atinge um mínimo local, há uma diminuição na taxa de deposição de gotículas do núcleo gasoso para o filme líquido. Tal mecanismo seria resultado de uma supressão da turbulência no núcleo gasoso devido a uma elevada concentração de gotículas,

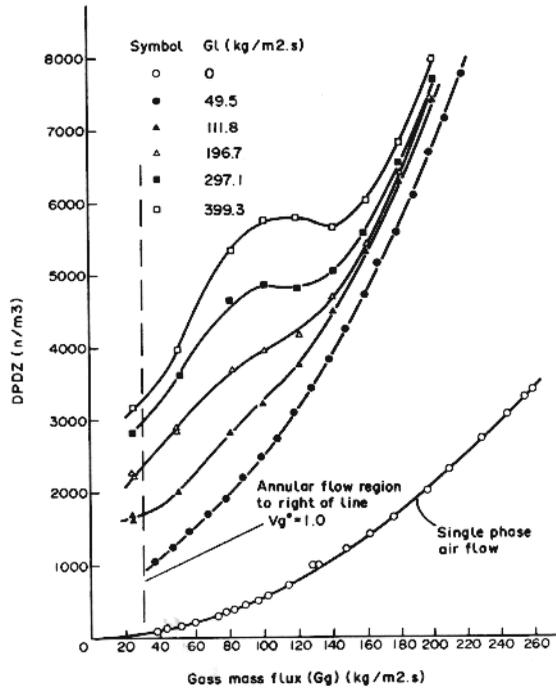


Figura 19: Gradiente de pressão no escoamento anular (reproduzido de Owen et al., 1985).

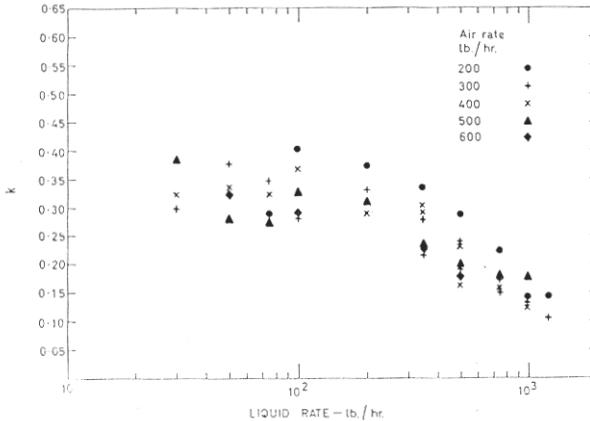


Figura 20: O valor da constante de von Kármán modificada (reproduzido de Gill et al., 1964).

acarretando também uma redução na taxa de entranhamento das mesmas. Infelizmente, até a presente data, não foram realizadas medições diretas das grandezas turbulentas sob essas condições de maneira a confirmar as suposições de Owen et al. (1985). A única evidência experimental de que, sob condições semelhantes às de Owen et al. (1985), a presença de gotículas no núcleo gasoso pode ser um fator inibidor da intensidade turbulenta é encontrada nos estudos experimentais de Gill et al. (1963, 1964). Nestes estudos, apenas os perfis médios de velocidade no núcleo gasoso foram medidos. Gill et al. (1964) observaram que estes perfis obedeciam a uma lei logarítmica, porém possuindo valores da constante de von Kármán menores do que 0.4 para vazões de líquido maiores do que um determinado valor. Os resultados de Gill et al. são mostrados na Figura 20.

Apesar de conciso, o material apresentado nesta seção serviu para ilustrar nossa análise com alguns resultados experimentais sobre a turbulência em alguns padrões. Ficou clara a necessidade de realização de experimentos para levar à frente o conhecimento nesta área.

Na próxima seção, iniciaremos a segunda parte do presente estudo, onde a modelagem dos escoamentos bifásicos turbulentos será explorada.

4. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DA MODELAGEM

4.1. Variável característica de fase

Em escoamentos multifásicos, o caráter aleatório muitas vezes assumido pelas grandezas de interesse de cada fase (tais como velocidades, temperaturas, pressões,

etc.) se deve não somente à turbulência desta fase, mas também ao movimento complexo das interfaces e à interação entre esses dois mecanismos. Desta forma, para que possamos investigar os escoamentos multifásicos de forma realista, assegurando a reprodutibilidade do fenômeno estudado, precisamos definir variáveis e procedimentos que permitam a obtenção de grandezas médias no tempo e no espaço.

A variável característica de fase, χ_k indica a presença ou a ausência da fase k em um ponto \mathbf{x} do domínio no instante t . Assim

$$\chi_k(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se em } t, \text{ o ponto } \mathbf{x} \in \text{ fase } k \\ 0 & \text{se em } t, \text{ o ponto } \mathbf{x} \notin \text{ fase } k \end{cases} \quad (26)$$

Para escoamentos bifásicos gás-líquido, $k = G, L$. Desta forma

$$\chi_G(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{quando o ponto } \mathbf{x} \in \text{ fase gasosa} \\ 0 & \text{quando o ponto } \mathbf{x} \notin \text{ fase gasosa} \end{cases} \quad (27)$$

$$\chi_L(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{quando o ponto } \mathbf{x} \in \text{ fase líquida} \\ 0 & \text{quando o ponto } \mathbf{x} \notin \text{ fase líquida} \end{cases} \quad (28)$$

4.2. Promediação espacial instantânea

Médias espaciais são importantes em escoamentos multifásicos uma vez que o movimento da(s) interface(s) de fase pode assumir um comportamento não-estacionário no espaço. A complexidade deste comportamento nos impede de descrever local e instantaneamente escoamentos de interesse prático, onde co-existem inúmeras escalas. Somente através de um processo de médias, escoamentos desta natureza poderão ser resolvidos de maneira eficiente.

Definimos o domínio de fase D_{kn} como o conjunto de pontos no domínio D_n ocupados pela fase k num instante t

$$D_{kn} = \{\mathbf{x} \in D_n : \chi_k(\mathbf{x}, t) = 1\} \quad (29)$$

onde n é o número de dimensões do domínio D .

Sendo F_k um campo qualquer da fase k , os seguintes operadores de média espacial instantânea podem ser definidos

$$\langle F_k \rangle \equiv \frac{1}{D_n} \int_{D_n} F_k dD_n \quad \text{média espacial bifásica} \quad (30)$$

$$\langle F_k \rangle_k \equiv \frac{1}{D_{kn}} \int_{D_{kn}} F_k dD_n \quad \text{média espacial fásica} \quad (31)$$

O operador $\langle \rangle$ representa uma média no domínio ocupado por todas as fases, enquanto que $\langle \rangle_k$ representa uma média no domínio ocupado somente pela fase k .

A partir do operador $\langle \rangle$, definimos a média espacial instantânea de $\chi_k(\mathbf{x}, t)$ sobre o domínio D_n ou simplesmente a *taxa de presença instantânea*, R_{kn}

$$R_{kn} \equiv \langle \chi_k(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{D_{kn}}{D_n} \quad (32)$$

Para um domínio de dimensão $n = 1$ (um segmento de comprimento L), a taxa de presença instantânea da fase k é dada por

$$R_{k1} = \frac{L_k}{\sum L_k} = \frac{L_k}{L_G + L_L} = \frac{L_k}{L} \quad (33)$$

Analogamente, para domínios de dimensão $n = 2$ (superfície de área A) e $n = 3$ (volume V) temos

$$R_{k2} = \frac{A_k}{\sum A_k} = \frac{A_k}{A_G + A_L} = \frac{A_k}{A} \quad (34)$$

$$R_{k3} = \frac{V_k}{\sum V_k} = \frac{V_k}{V_G + V_L} = \frac{V_k}{V} \quad (35)$$

4.3. Promediação temporal local

De forma semelhante aos escoamentos monofásicos, as variáveis de interesse locais podem apresentar características não-estacionárias no tempo associadas à turbulência. A promediação temporal local é então análoga àquela para escoamentos monofásicos, onde a escolha do período de promediação (ou integração) deve ser tal que o comportamento médio da variável no tempo não seja descaracterizado.

Definimos o período de promediação de fase T_k como a fração do período de promediação T em que o ponto de interesse do domínio encontra-se imerso na fase k

$$T_k = \{t \in T : \chi_k(\mathbf{x}, t) = 1\}. \quad (36)$$

De forma análoga à promediação espacial instantânea, os seguintes operadores de média temporal local podem ser definidos

$$\overline{\overline{F_k}} \equiv \frac{1}{T} \int_T F_k dt \quad \text{média temporal bifásica} \quad (37)$$

$$\overline{\overline{F_k}}^* \equiv \frac{1}{T_k} \int_{T_k} F_k dt \quad \text{média temporal fásica} \quad (38)$$

O operador $\overline{\overline{\quad}}$ representa uma média sobre todo o período de promediação, sem levar em conta a porção deste período durante a qual o ponto \mathbf{x} encontra-se em contato com a fase k . A partir deste operador, definimos a *taxa de presença local*, α_k , definida como a média sobre T da variável característica de fase $\chi_k(\mathbf{x}, t)$

$$\alpha_k \equiv \overline{\overline{\chi_k(\mathbf{x}, t)}} = \frac{T_k(\mathbf{x}, t)}{T} \quad (39)$$

4.4. Comutatividade dos operadores

Resultados importantes podem ser obtidos através da análise dos operadores de média. A propriedade comutativa destes operadores é a mais importante delas. Para uma variável F_k qualquer, podemos provar que

$$\overline{\overline{R_{kn}(F_k)}_k} \equiv \langle \alpha_k \overline{F_k}^* \rangle. \quad (40)$$

Para o caso especial onde $F_k = \chi_k(\mathbf{x}, t) = 1$,

$$\overline{\overline{R_{kn}}} \equiv \langle \alpha_k \rangle. \quad (41)$$

A Eq. 41 representa um resultado poderoso: a média temporal da taxa de presença instantânea é igual à média espacial da taxa de presença local da fase k .

Em termos práticos num escoamento bifásico, R_{kn} é obtida através de técnicas experimentais que registram instantaneamente regiões macroscópicas do espaço (técnicas de absorção de raios X, de raios γ etc), ao passo que α_k é obtida através de técnicas que registram eventos em um único ponto ao longo de um intervalo de tempo (sonda de agulha eletroresistiva, de índice de refração etc). Com a utilização da propriedade comutativa, resultados obtidos através das diferentes técnicas podem ser comparados entre si e utilizados de maneira conjunta na elaboração de modelos matemáticos para descrever os processos físicos.

4.5. Promediação conjunta

A média conjunta (*ensemble average*) é fruto do processo de média mais fundamental. Uma de várias formas de sua definição é dada por Drew (1992)

$$\overline{F}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{\mathbb{E}} F(\mathbf{x}, t; \mu) dm(\mu) \quad (42)$$

onde $dm(\mu)$ é a probabilidade de ocorrência do 'evento' μ e \mathbb{E} é o conjunto de todos os eventos possíveis do 'processo' de interesse. O 'processo' é definido como o coletivo dos possíveis escoamentos, dadas condições de contorno e iniciais apropriadas à descrição do processo físico. O 'evento' é definido como um dos possíveis escoamentos. A média conjunta permite a interpretação de um dado fenômeno em termos da repetibilidade dos eventos. Nenhum evento pode ser repetido; entretanto a repetição do fenômeno levará a um novo evento, ou um novo membro do conjunto.

As médias temporais e espaciais devem ser vistas como casos especiais da média conjunta para fenômenos estacionários e homogêneos, respectivamente. Sendo assim, estipulamos serem estas as condições para as quais a relação dada pela Eq. 40 é válida. Enquanto que do ponto de vista experimental as médias temporais e espaciais são mais palpáveis, a média conjunta retem seu caráter fundamental. Por isso, ela será usada no contexto da derivação das equações de transporte médias.

Propriedades da média conjunta

As regras de Gauss e Leibiniz são aplicáveis à média conjunta uma vez que o campo F seja uma função bem comportada (Drew, 1992). Portanto

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} \quad (43)$$

e

$$\overline{\nabla F} = \nabla \overline{F}. \quad (44)$$

Dentro de cada fase

$$\overline{\chi_k \frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k F} - \overline{F \frac{\partial \chi_k}{\partial t}} \quad (45)$$

e

$$\overline{\chi_k \nabla F} = \nabla \overline{\chi_k F} - \overline{F \nabla \chi_k}. \quad (46)$$

5. EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

5.1. Promediação e variáveis médias

A forma canônica das equações de transporte para um escoamento monofásico ou para o escoamento em uma região envolvendo uma única fase em uma mistura de duas ou mais fases pode ser escrita convenientemente por

$$\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \Psi = \nabla \cdot \mathbf{J} + \rho f \quad (47)$$

onde Ψ é a grandeza conservada, \mathbf{J} seu fluxo molecular, f sua fonte e \mathbf{v} o vetor velocidade.

Para a região da interface, o princípio de conservação é dado por

$$[\rho \Psi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{n} = M_i \quad (48)$$

onde \mathbf{v}_i é a velocidade da interface, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à interface e M_i é a fonte interfacial de Ψ .

Os valores para Ψ , \mathbf{J} , f e M_i a serem utilizados nas Eqs. 47 e 48 para os três princípios de conservação são mostrados na Tabela 3.

Na Tabela 3, \mathbf{T} representa o tensor tensão dado por

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (49)$$

onde p é a pressão mecânica para um fluido em movimento e $\boldsymbol{\tau}$ é a tensão de cisalhamento, que para um fluido Newtoniano é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right] \quad (50)$$

Tabela 3: Variáveis nas equações de conservação genéricas.

Princípio de conservação	Ψ	\mathbf{J}	f	M_i
Massa	1	0	0	0
Quantidade de movimento	\mathbf{v}	\mathbf{T}	\mathbf{g}	\mathbf{m}_i^σ
Energia	$u + \frac{1}{2}v^2$	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}$	$\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - r$	e_i^σ

onde η é a viscosidade dinâmica.

Na Tabela 3, \mathbf{g} é a aceleração gravitacional, u é a energia interna específica, $\frac{1}{2}v^2$ é a energia cinética específica definida por

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (51)$$

\mathbf{q} é o fluxo de calor e r é a fonte de energia interna por unidade de massa. \mathbf{m}_i^σ é a tração (que possui dimensões de tensão) associada à tensão superficial e e_i^σ é a energia de superfície associada à interface (Slattery, 1999).

Na promediação das equações de conservação representadas pelas Eqs. 47 e 48 a seguir, faremos uso do seguinte resultado

$$\frac{D_i \chi_k}{Dt} = \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (52)$$

que representa a derivada material de χ_k seguindo a interface. A justificativa física para a Eq. 52 foi dada por Drew (1992). Para pontos fora da interface, $\chi_k = 1$ ou $\chi_k = 0$. Em ambos os casos, as derivadas parciais são nulas e o valor da expressão acima é zero. Para um ponto na interface, visto de um referencial movendo-se com a interface, a função χ_k é vista sempre como uma descontinuidade (ou salto). Portanto, por definição sua derivada material deve ser nula.

Para obter as equações médias, devemos multiplicar a equação de conservação em sua forma exata (Eq. 47) pela variável característica de fase χ_k e aplicar a média conjunta. Assim,

$$\overline{\chi_k \frac{\partial \rho \Psi}{\partial t}} + \overline{\chi_k \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \Psi} - \overline{\chi_k \nabla \cdot \mathbf{J}} - \overline{\chi_k \rho f} = 0. \quad (53)$$

De forma análoga ao tratamento da turbulência em escoamentos monofásicos, as variáveis podem ser escritas como uma superposição de um campo médio e de um campo aleatório

$$x = \bar{x} + x' \quad (54)$$

Sendo a promediação conjunta uma operação linear, além das propriedades apresentadas na Seção 4.5, as seguintes também são válidas para este operador

$$\bar{x} = \overline{\bar{x} + x'} = \bar{\bar{x}} + \bar{x}' = \bar{x} + \bar{x}', \text{ ou seja, } \bar{x}' = 0 \quad (55)$$

$$\overline{\overline{x} \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}} = \overline{x} \overline{y} \quad (56)$$

$$\overline{\overline{x} \overline{y}'} = \overline{\overline{x}} \overline{\overline{y}'} = \overline{x} \overline{y}' = 0, \text{ pois, } \overline{y}' = 0 \quad (57)$$

e

$$\overline{x y} = \overline{(\overline{x} + x') (\overline{y} + y')} = \overline{\overline{x} \overline{y}} + \overline{\overline{x} y'} + \overline{y' x'} + \overline{x' y'} = \overline{x} \overline{y} + \overline{x' y'} \quad (58)$$

Na forma canônica, as grandezas que caracterizam o campo do escoamento são decompostas e escritas da seguinte forma

$$\rho = \overline{\rho} + \rho' \quad (59)$$

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (60)$$

$$\Psi = \overline{\Psi} + \Psi' \quad (61)$$

$$\mathbf{J} = \overline{\mathbf{J}} + \mathbf{J}'. \quad (62)$$

Reescreveremos agora termo a termo a Eq. 53, primeiro introduzindo as variáveis médias e aleatórias e depois aplicando as propriedades da média conjunta (Seção 4.5). Desta forma,

$$\begin{aligned} \overline{\chi_k \frac{\partial \rho \Psi}{\partial t}} &= \overline{\chi_k \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} - \overline{(\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi})} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\rho' \Psi')} - \overline{(\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \overline{\chi_k \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \Psi} &= \overline{\chi_k \nabla \cdot (\overline{\rho} + \rho') (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') (\overline{\Psi} + \Psi')} \\ &= \overline{\chi_k \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi} + \rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} \\ &= \nabla \cdot \overline{\chi_k (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi} + \rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} - \\ &\quad \overline{(\overline{\rho \mathbf{v} \Psi} + \rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} \nabla \chi_k \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_k \nabla \cdot \mathbf{J}} &= \overline{\chi_k \nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}')} \\
&= \overline{\chi_k \nabla \cdot \mathbf{J}} + \overline{\chi_k \nabla \cdot \mathbf{J}'} \\
&= \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{J}} - \overline{\mathbf{J} \cdot \nabla \chi_k} - \overline{\mathbf{J}' \cdot \nabla \chi_k}
\end{aligned} \tag{65}$$

Substituindo as Eqs. 63, 64 e 65 na Eq. 53 e rearranjando os termos, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi})} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi})} - \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{J}} - \overline{\chi_k (\overline{\rho} + \rho')} f = \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\rho' \Psi')} - \nabla \cdot \overline{\chi_k (\rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \overline{\mathbf{v}} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} + \\
&\quad \overline{(\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \overline{(\overline{\rho \mathbf{v} \Psi} + \rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \overline{\mathbf{v}} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} \cdot \nabla \chi_k - \\
&\quad \overline{\mathbf{J} \cdot \nabla \chi_k} - \overline{\mathbf{J}' \cdot \nabla \chi_k}
\end{aligned} \tag{66}$$

onde, ao fazermos uso da Eq. 52, o terceiro e o quarto termos ao lado direito do sinal podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi})} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi})} - \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{J}} - \overline{\chi_k (\overline{\rho} + \rho')} f = \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\rho' \Psi')} - \nabla \cdot \overline{\chi_k (\rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \overline{\mathbf{v}} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} + \\
&\quad \overline{(\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} \left[\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla \chi_k \right] - \overline{\mathbf{J} \cdot \nabla \chi_k} - \overline{\mathbf{J}' \cdot \nabla \chi_k}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi})} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi})} - \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{J}} - \overline{\chi_k (\overline{\rho} + \rho')} f = \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\rho' \Psi')} - \nabla \cdot \overline{\chi_k (\rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \overline{\mathbf{v}} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} + \\
&\quad \overline{(\overline{\rho \Psi} + \rho' \Psi')} [-\mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k + (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla \chi_k] - \overline{(\mathbf{J} + \mathbf{J}') \cdot \nabla \chi_k}
\end{aligned} \tag{68}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\overline{\rho \Psi})} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\overline{\rho \mathbf{v} \Psi})} - \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{J}} - \overline{\chi_k (\overline{\rho} + \rho')} f = \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\rho' \Psi')} - \nabla \cdot \overline{\chi_k (\rho' \mathbf{v}' \overline{\Psi} + \overline{\rho \mathbf{v}'} \Psi' + \rho' \overline{\mathbf{v}} \Psi' + \rho' \mathbf{v}' \Psi')} +
\end{aligned}$$

$$\overline{\{ [\bar{\rho}\bar{\Psi} + \rho'\Psi'] [(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] - (\bar{\mathbf{J}} + \mathbf{J}') \}} \cdot \nabla \chi_k. \quad (69)$$

Os termos à esquerda do sinal na Eq. 69 representam a conservação da variável $\bar{\Psi}$. O primeiro e o segundo termos ao lado direito do sinal são reponsáveis pela modificação do transporte de $\bar{\Psi}$ provocada pela turbulência do escoamento. O terceiro termo à direita do sinal representa a fonte de Ψ na interface. Na Eq. 69, ao substituírmos $\bar{\Psi} = 1$, $\mathbf{J} = 0$ e $f = 0$ obtemos a conservação da massa; $\bar{\Psi} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$, $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}'$ e $f = \mathbf{g}$ obtemos a conservação da quantidade de movimento e $\bar{\Psi} = \bar{u} + u' + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}')$, $\mathbf{J} = (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}') \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - (\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}')$ e $f = \mathbf{g} \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') + r$ obtemos a conservação da energia para cada componente.

Para um escoamento onde a densidade pode ser considerada constante, $\rho = \bar{\rho}$, $\rho' = 0$ e a Eq. 69 é escrita na forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k (\bar{\Psi})} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\bar{\mathbf{v}} \bar{\Psi})} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\chi_k \bar{\mathbf{J}}} - \overline{\chi_k f} = \\ & -\nabla \cdot \overline{\chi_k (\mathbf{v}' \Psi')} + \overline{\left\{ \bar{\Psi} [(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] - \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\mathbf{J}} + \mathbf{J}') \right\}} \cdot \nabla \chi_k. \end{aligned} \quad (70)$$

A partir da Eq. 70, os seguintes princípios de conservação podem ser escritos

Conservação da massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k} + \nabla \cdot \overline{\chi_k \bar{\mathbf{v}}} = \overline{[(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k} \quad (71)$$

Conservação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k \bar{\mathbf{v}}} + \nabla \cdot \overline{\chi_k (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}})} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\chi_k \bar{\mathbf{T}}} - \overline{\chi_k \mathbf{g}} = -\nabla \cdot \overline{\chi_k (\mathbf{v}' \mathbf{v}')} + \\ & \overline{\left\{ \bar{\mathbf{v}} [(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] - \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}') \right\}} \cdot \nabla \chi_k \end{aligned} \quad (72)$$

onde para um escoamento incompressível

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}' &= -\bar{p}\mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}} - p'\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}' \\ &= -\bar{p}\mathbf{I} + \eta (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T) - p'\mathbf{I} + \eta (\nabla \mathbf{v}' + \nabla \mathbf{v}'^T) \end{aligned} \quad (73)$$

Conservação da energia

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{\chi_k \left(\bar{u} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \kappa \right)} + \nabla \cdot \overline{\chi_k \bar{\mathbf{v}} \left(\bar{u} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \kappa \right)} = \\
& \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\chi_k \left(\overline{\bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}}} + \overline{\bar{\mathbf{T}}' \cdot \mathbf{v}'} - \bar{\mathbf{q}} \right)} - \nabla \cdot \overline{\chi_k \mathbf{v}' \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right)} + \\
& \mathbf{g} \cdot \overline{\chi_k \bar{\mathbf{v}}} + \overline{\chi_k r} + \left\{ \overline{\left(\bar{u} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \kappa \right) [(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i]} \right\} \cdot \nabla \chi_k - \\
& \frac{1}{\bar{\rho}} \left\{ \overline{\left(\bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{T}}' \cdot \mathbf{v}' - \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}' + \bar{\mathbf{T}}' \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{q}' \right)} \right\} \cdot \nabla \chi_k
\end{aligned} \tag{74}$$

onde κ é a energia cinética turbulenta específica definida por

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} \tag{75}$$

e $\frac{1}{2} v'^2$ é o termo envolvendo o produto dos termos médio e flutuante na definição da energia cinética do escoamento

$$\frac{1}{2} v'^2 = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \bar{\mathbf{v}}) \tag{76}$$

Os princípios de conservação derivados acima podem ser reescritos em função de variáveis médias que descrevam os escoamentos multifásicos de forma mais conveniente.

De forma análoga à realizada nas Seções 4.2 e 4.3, definimos a média conjunta de χ_k , que é a fração das ocorrências da fase k no ponto \mathbf{x} no instante t

$$\varepsilon_k = \overline{\chi_k}. \tag{77}$$

Em termos de ε_k , podemos reescrever a equação da conservação da massa (Eq. 71) na seguinte forma

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon_k \bar{\mathbf{v}}_k = \frac{\Gamma_k}{\bar{\rho}_k} \tag{78}$$

onde

$$\bar{\rho}_k = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho}}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho}}}{\varepsilon_k} \tag{79}$$

e

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}}{\overline{\chi_k \bar{\rho}}} = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}}{\varepsilon_k \bar{\rho}_k} \tag{80}$$

são a densidade da fase k e o vetor velocidade média da fase k . O fluxo de massa interfacial é dado por

$$\Gamma_k = \overline{\rho[(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k}. \quad (81)$$

De forma análoga, para a equação da conservação da quantidade de movimento (Eq. 72), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varepsilon_k \bar{\mathbf{v}}_k} + \overline{\rho_k \nabla \cdot \varepsilon_k \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k} = -\nabla \varepsilon_k \overline{\rho_k} + \nabla \cdot \varepsilon_k (\overline{\boldsymbol{\tau}}_k + \boldsymbol{\tau}_k^{Re}) + \\ \varepsilon_k \overline{\rho_k} \mathbf{g} + \mathbf{M}_k + \mathbf{v}_{ki} \Gamma_k \end{aligned} \quad (82)$$

onde $\overline{\rho_k}$ é a pressão média da fase k definida por

$$\overline{\rho_k} = \frac{\overline{\chi_k \bar{p}}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \bar{p}}}{\varepsilon_k} \quad (83)$$

e o tensor de tensões cisalhantes,

$$\overline{\boldsymbol{\tau}}_k = \frac{\overline{\chi_k \boldsymbol{\tau}}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \boldsymbol{\tau}}}{\varepsilon_k}. \quad (84)$$

$\boldsymbol{\tau}_k^{Re}$ é o chamado tensor de Reynolds da fase k , dado por

$$\boldsymbol{\tau}_k^{Re} = -\overline{\rho} \frac{\overline{\chi_k \mathbf{v}' \mathbf{v}'}}{\varepsilon_k}. \quad (85)$$

\mathbf{M}_k é a fonte interfacial de quantidade de movimento, ou seja, a resultante das forças que atuam na interface. \mathbf{M}_k é definida como

$$\mathbf{M}_k = -\overline{\mathbf{T} \cdot \nabla \chi_k} = -\overline{\overline{\mathbf{T}} \cdot \nabla \chi_k}, \quad (86)$$

uma vez que $\overline{\overline{\mathbf{T}} \cdot \nabla \chi_k} = 0$. $\mathbf{v}_{ki} \Gamma_k$ é o fluxo interfacial de quantidade de movimento dado por

$$\mathbf{v}_{ki} \Gamma_k = \overline{\rho \bar{\mathbf{v}}[(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k}. \quad (87)$$

Finalmente, para a equação de conservação da energia (Eq. 74) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho_k} \varepsilon_k \left[\overline{u}_k + \frac{1}{2} (\overline{v}_k)^2 + \kappa_k \right] + \overline{\rho_k \nabla \cdot \varepsilon_k \bar{\mathbf{v}}_k} \left[\overline{u}_k + \frac{1}{2} (\overline{v}_k)^2 + \kappa_k \right] = \\ \nabla \cdot \varepsilon_k \left[(\overline{\mathbf{T}}_k \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) + (\overline{\mathbf{T}'_k \cdot \mathbf{v}'_k}) - \overline{\mathbf{q}}_k - \mathbf{q}_k^{Re} \right] + \varepsilon_k \overline{\rho_k} (r_k + \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{v}}_k) + \\ E_k + W_k + \left\{ u_{ki} + \frac{1}{2} (\overline{v}_k)^2 + \kappa_{ki} \right\} \Gamma_k \end{aligned} \quad (88)$$

onde a energia interna e a energia cinética médias da fase k são dadas por

$$\overline{u_k} = \frac{\overline{\chi_k \overline{\rho u}}}{\overline{\chi_k \overline{\rho}}} = \frac{\overline{\chi_k \overline{\rho u}}}{\varepsilon_k \overline{\rho_k}} \quad (89)$$

$$\frac{1}{2} \overline{v_k^2} = \frac{\overline{\chi_k \overline{\rho \frac{1}{2} v^2}}}{\overline{\chi_k \overline{\rho}}} = \frac{\overline{\chi_k \overline{\rho \frac{1}{2} v^2}}}{\varepsilon_k \overline{\rho_k}}. \quad (90)$$

A energia cinética turbulenta (ou de Reynolds) da fase k é definida por

$$\kappa_k = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \tau_k^{Re} = \frac{\overline{\frac{1}{2} \chi_k \overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}}{\overline{\chi_k \overline{\rho}}} = \frac{\overline{\frac{1}{2} \chi_k \overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}}{\varepsilon_k \overline{\rho_k}}. \quad (91)$$

O fluxo de calor (molecular) é dado por

$$\overline{\mathbf{q}_k} = \frac{\overline{\chi_k \mathbf{Q}}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \mathbf{Q}}}{\varepsilon_k}. \quad (92)$$

e os termos de fonte interfaciais de calor e de trabalho são definidos como

$$E_k = \overline{\mathbf{q} \cdot \nabla \chi_k} \quad (93)$$

e

$$W_k = -\overline{[(\mathbf{T} \cdot \overline{\mathbf{v}}) + (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}')] \cdot \nabla \chi_k}, \quad (94)$$

uma vez que a média dos produtos escalares restantes é nula.

Da mesma forma, os fluxos interfaciais de energia interna de energia cinética e de energia cinética turbulenta são dados por

$$\overline{u_{ki}} \Gamma_k = \overline{\overline{\rho u} [(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k} \quad (95)$$

$$\frac{1}{2} \overline{(v_{ki})^2} \Gamma_k = \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho v^2} [(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k}. \quad (96)$$

$$\frac{1}{2} \overline{(\kappa_{ki})} \Gamma_k = \frac{1}{2} \overline{\overline{\rho \kappa} [(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') - \mathbf{v}_i] \cdot \nabla \chi_k}. \quad (97)$$

Na equação da energia para a fase k , é conveniente combinarmos os termos de fluxo de energia interna de Reynolds com os termos de fluxo de energia turbulenta. Portanto

$$\mathbf{q}_k^{Re} = \hat{\mathbf{q}}_k^{Re} + \mathbf{q}_k^{KE} \quad (98)$$

onde os componentes flutuantes do fluxo de energia são o fluxo de energia cinética de Reynolds

$$\mathbf{q}_k^{KE} = -\frac{\overline{\chi_k \overline{\rho \mathbf{v}' \frac{1}{2} (v')^2}}}{\overline{\chi_k}} = -\frac{\overline{\chi_k \overline{\rho \mathbf{v}' \frac{1}{2} (v')^2}}}{\varepsilon_k} \quad (99)$$

e o fluxo de energia interna de Reynolds

$$\hat{\mathbf{q}}_k^{Re} = -\frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}'}}{\overline{\chi_k}} = -\frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}'}}{\varepsilon_k}. \quad (100)$$

Finalmente, o trabalho de Reynolds é dado por

$$\overline{\mathbf{T}'_k \cdot \mathbf{v}'_k} = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} (\overline{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}'})}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{\chi_k \bar{\rho} (\overline{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}'})}}{\varepsilon_k}. \quad (101)$$

Uma importante variável geométrica utilizada na caracterização dos processos de transferência através da interface é a densidade de área interfacial definida por

$$A_i = -\frac{\overline{\partial \chi_k}}{\partial \mathbf{n}_k} \quad (102)$$

onde \mathbf{n}_k é o vetor unitário externo normal à fase k .

Com o intuito de separar efeitos do campo médio de efeitos locais na força realizada sobre a interface (Drew, 1992), definimos a pressão interfacial média, p_{ki} , e a tensão de cisalhamento interfacial, τ_{ki}

$$p_{ki} = \frac{1}{A_i} \overline{p \frac{\partial \chi_k}{\partial \mathbf{n}_k}} \quad (103)$$

$$\tau_{ki} = \frac{1}{A_i} \overline{\tau_k \frac{\partial \chi_k}{\partial \mathbf{n}_k}}. \quad (104)$$

5.2. As equações para a interface

Para a região da interface entre duas fases (aqui chamadas de fase 1 e de fase 2), as equações médias são obtidas através da multiplicação da Eq. 48 por $\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \chi_1$ seguida da promediação conjunta. Assim

Conservação da massa

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0 \quad (105)$$

Conservação da quantidade de movimento

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{v}_{1i} \Gamma_1 + \mathbf{v}_{2i} \Gamma_2 = \overline{\mathbf{m}_i^\sigma} \quad (106)$$

Conservação da energia

$$E_1 + W_1 + E_2 + W_2 + \left[u_{1i} + \frac{1}{2} (v_{1i})^2 \right] \Gamma_1 + \left[u_{2i} + \frac{1}{2} (v_{2i})^2 \right] \Gamma_2 = \overline{e_i^\sigma} \quad (107)$$

5.3. Relações de fechamento

As Eqs. 78, 82 e 88 em conjunto com as relações para a interface fornecem princípios de conservação diferenciais para um escoamento multifásico de $k = 1, 2, \dots$ NP fases, transiente e tri-dimensional. Relações de fechamento nos fornecem expressões adicionais de modo que o sistema de equações possa ser resolvido. Para o modelo multifásico em questão, tais relações são: condições iniciais, condições de contorno, equações de estado, relações constitutivas e relações de interação entre as diferentes fases.

Condições iniciais nos permitem conhecer como o escoamento se inicia. Condições de contorno especificam as formas através das quais o escoamento interage com as vizinhanças. Equações de estado especificam o estado termodinâmico dos materiais em função de variáveis como a temperatura e a pressão. Tais expressões são de grande importância para a correta solução e análise dos escoamentos multifásicos. Entretanto, o desafio da modelagem destes escoamentos é a descrição adequada dos termos de interação interna em cada fase ($\overline{\mathbf{T}}_k, \mathbf{T}_k^{Re}, \overline{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k^{Re}, \dots$) e dos termos de interação entre as fases ($\mathbf{M}_k, E_k, W_k, \dots$) em função das variáveis de campo como $\varepsilon_k, \overline{\mathbf{v}}_k$ etc.

Para descrever a estrutura da turbulência em sistemas bifásicos, podemos fazer uso das equações de conservação derivadas acima em conjunto com diversos modelos capazes de descrever a turbulência em cada fase para diversos níveis de complexidade. Os modelos turbulentos serão apresentados e discutidos na próxima seção.

5.4. Modelando os termos relativos às flutuações turbulentas

5.4.1. O conceito de difusividade turbulenta

Conforme dito anteriormente, o ponto básico da modelagem turbulenta, seja ela em sistemas monofásicos ou multifásicos, reside na interpretação das variáveis τ^{Re} e \mathbf{q}^{Re} em função de variáveis de campo do escoamento. No âmbito dos escoamentos bifásicos, reveremos os modelos mais básicos, a saber, os baseados no conceito de difusividade turbulenta. Uma descrição mais aprofundada sobre estes modelos e sobre modelos mais complexos associados à modelagem monofásica é fornecida por Deschamps (1998).

Por simplicidade, nossa discussão se limitará aos processos de difusão de quantidade de movimento. Os processos relativos à difusão de energia podem ser tratados de maneira análoga.

O procedimento natural da modelagem do escoamento de uma fase de um escoamento multifásico é a distinção dos processos inerentes a cada fase (e portanto de natureza monofásica) daqueles cuja existência pode ser atribuída à presença das outras fases. No tocante à turbulência, vimos nas seções anteriores que somente a presença de uma segunda fase não necessariamente implica na promoção da turbulência no escoamento da primeira. Há situações onde a turbulência pode ser suprimida de acordo com as propriedades ou condições do escoamento. Entretanto,

também foi visto que para algumas situações de interesse, o *princípio da superposição* pode ser válido e extremamente útil do ponto de vista da modelagem. Desta forma, conhecendo razoavelmente as condições estudadas, podemos escrever

$$\boldsymbol{\tau}_k^{Re} = \boldsymbol{\tau}_{k_{FI}}^{Re} + \boldsymbol{\tau}_{k_{PI}}^{Re} \quad (108)$$

onde os subscritos *FI* e *PI* designam turbulência induzida pelo escoamento monofásico (*flow induced*) e induzida pelas outras fases (*phase induced*), respectivamente.

A hipótese clássica acerca da turbulência na fase *k* é a de que a deformação do escoamento médio é proporcional às tensões de Reynolds (Hipótese de Boussinesq). O termo de proporcionalidade é denominado difusividade turbulenta, ν^t , e possui analogia direta com a viscosidade cinemática, ν . Assim, para a fase *k*, temos (considerando os fluidos Newtonianos)

$$\boldsymbol{\tau}_k^{Re} = -\bar{\rho} \frac{\overline{\chi_k \mathbf{V}' \mathbf{V}'^T}}{\varepsilon_k} = \bar{\rho}_k \left[\nu_k^t (\nabla \bar{\mathbf{v}}_k + (\nabla \bar{\mathbf{v}}_k)^T) - \frac{2}{3} \mathbf{I} \kappa_k \right]. \quad (109)$$

Estendendo o princípio da superposição (Eq. 108) à difusividade turbulenta, temos que

$$\nu_k^t = \nu_{k_{FI}}^t + \nu_{k_{PI}}^t. \quad (110)$$

Fica claro a partir de agora que, para escoamentos onde os conceito de difusividade turbulenta e o princípio da superposição podem ser aplicados sem muito comprometimento, o problema passa a ser a modelagem das parcelas de ν^t na Eq. 110.

Nos escoamentos monofásicos, ν^t pode ser estimado com vários níveis de complexidade (ver Deschamps, 1998). Os modelos mais simples são os modelos algébricos baseados no conceito de comprimento de mistura concebido por Prandtl. Nestes modelos, a difusividade turbulenta é definida por

$$\nu^t = l_m^2 |\nabla \bar{\mathbf{v}}| \quad (111)$$

onde l_m é o comprimento de mistura modelado de acordo com a natureza do escoamento (camadas limite, tubos, jatos, ...).

Modelos mais sofisticados envolvem equações de conservação diferenciais para grandezas a partir das quais podemos calcular a difusividade turbulenta baseados em argumentos dimensionais. A difusividade turbulenta e a energia cinética podem relacionar-se da seguinte forma

$$\nu^t = a l_c \kappa^{1/2} \quad (112)$$

onde a é um parâmetro de ajuste experimental e l_c é um comprimento característico relacionado ao tamanho dos turbilhões. Como será mostrado na próxima seção, a energia cinética turbulenta pode ser descrita localmente através de uma equação de transporte.

Outras grandezas, como a vorticidade e dissipação da energia cinética turbulenta também podem ser descritas localmente a partir de manipulações algébricas das equações de conservação para as variáveis médias. Modelos que empregam uma equação de transporte diferencial (geralmente para a energia cinética turbulenta) para o cálculo da viscosidade turbulenta são denominados modelos de uma equação. Naturalmente, os modelos que fazem uso de duas equações diferenciais são os modelos de duas equações.

Modelos de turbulência de duas equações (energia cinética turbulenta e dissipação turbulenta) são os mais difundidos dentre os aplicados em problemas monofásicos. Na extensão a problemas bifásicos, os modelos $\kappa - \epsilon$ também são os mais utilizados. Nestes modelos, por argumentos dimensionais e através de uma análise de escalas utilizando a hipótese do comprimento de mistura, a taxa de dissipação turbulenta pode ser dada por (Kays e Crawford, 1993)

$$\epsilon = \frac{a^3 \kappa^{3/2}}{K^4 l_c} \quad (113)$$

onde K é a constante de von Kármán. Combinando as Eqs. 112 e 113, temos

$$\nu^t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (114)$$

onde $C_\mu = \frac{a^4}{K}$ é um parâmetro ajustado com base em dados experimentais.

No contexto dos escoamentos bifásicos, a taxa de dissipação turbulenta da fase k é definida por (para fluidos Newtonianos)

$$\epsilon_k = \frac{\nu_k}{\varepsilon_k} \left[\overline{\nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}'} + \overline{\nabla \mathbf{v}' : (\nabla \mathbf{v}')^T} \right]. \quad (115)$$

Assumindo que a turbulência seja isotrópica (Tennekes e Lumley, 1972)

$$\epsilon_k = \frac{\nu_k}{\varepsilon_k} \left[\overline{\nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}'} \right]. \quad (116)$$

Conforme visto acima, a Eq. 114 é uma aproximação baseada na teoria de comprimento de mistura em um escoamento monofásico. Entretanto, num escoamento bifásico, podemos conceber a existência de dois comprimentos característicos (ver Eq. 110), o primeiro relacionado à escala turbulenta monofásica em cada fase separadamente e o segundo relacionado à configuração interfacial (na realidade, inversamente proporcional à densidade de área interfacial). Ambas escalas precisam ser levadas em conta na análise da dissipação turbulenta em sistemas bifásicos (Kataoka e Serizawa, 1989). Sob este aspecto, a validade da Eq. 114 necessita de uma verificação rigorosa embora sua utilização seja, em alguns casos, justificável.

5.4.2. Equações de conservação

Da mesma forma que obtivemos equações de conservação para as variáveis médias, podemos também, através de manipulações algébricas derivar equações de conservação para os componentes do tensor de Reynolds e para a energia cinética turbulenta. A derivação de uma equação de conservação para esta variável é o objetivo da presente seção.

Os princípios de conservação para a parte flutuante da variável conservada Ψ' são obtidos a partir da subtração da Eq. 69 multiplicada por χ_k da Eq. 47 (Kataoka e Serizawa, 1989). Para a obtenção do princípio de conservação para a energia cinética turbulenta, tomamos a equação resultante para \mathbf{v}' e efetuamos o produto escalar $\frac{1}{2}\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'$.

Para um escoamento adiabático, em equilíbrio, sem mudança de fase e com propriedades aproximadamente constantes, a equação de conservação da energia cinética turbulenta para a fase k é dada por (Kataoka e Serizawa, 1989; Troshko e Hassan, 2001a)

$$\begin{aligned} \overline{\rho_k} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_k \kappa_k + \overline{\rho_k} \nabla \cdot \varepsilon_k \overline{\mathbf{v}_k} \kappa_k &= \varepsilon_k \overline{\boldsymbol{\tau}_k^{Re}} : \nabla \overline{\mathbf{v}_k} - \nabla \cdot (\varepsilon_k \overline{\rho_k \kappa_k \mathbf{v}'_k}) - \\ &\nabla \cdot (\varepsilon_k \overline{\mathbf{v}'_k p'_k}) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \overline{\mathbf{v}'_k \cdot \boldsymbol{\tau}'_k}) - \varepsilon_k \overline{\rho_k} \epsilon_k + \\ &\overline{\mathbf{v}'_{k,i} \cdot (-p'_{k,i} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'_{k,i}) \cdot \nabla \chi_k} + \kappa_k \frac{\Gamma_k}{\rho_k} \end{aligned} \quad (117)$$

Na Eq. 117, o primeiro e o segundo termos ao lado esquerdo do sinal representam a taxa de variação local e a taxa de transporte de κ_k por convecção. O primeiro termo ao lado direito do sinal representa a produção de turbulência monofásica através da taxa de deformação do escoamento médio da fase k . O segundo, o terceiro e o quarto termo deste lado representam a difusão de energia através de flutuações de velocidade, pressão e viscosidade molecular na fase k . O quinto termo é responsável pela dissipação viscosa da energia turbulenta na fase k . Os dois últimos termos representam o transporte interfacial de energia cinética turbulenta, seja por trabalho das forças atuando na interface e expressas através de uma correlação entre os termos flutuantes na interface (sexto termo) ou por transporte convectivo através da interface (sétimo termo).

A energia cinética turbulenta total do escoamento é calculada através da equação de conservação resultante da soma da Eq. 117 para as k fases. Para o caso de um escoamento bifásico

$$\sum_{k=1}^2 \overline{\rho_k} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_k \kappa_k + \sum_{k=1}^2 \overline{\rho_k} \nabla \cdot \varepsilon_k \overline{\mathbf{v}_k} \kappa_k = \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k \overline{\boldsymbol{\tau}_k^{Re}} : \nabla \overline{\mathbf{v}_k} -$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 (\varepsilon_k \rho_k \overline{\kappa_k \mathbf{v}'_k}) - \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 (\varepsilon_k \overline{\mathbf{v}'_k p'_k}) + \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 (\varepsilon_k \overline{\mathbf{v}'_k \cdot \boldsymbol{\tau}'_k}) - \\ & \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k \overline{\rho_k \varepsilon_k} + \sum_{k=1}^2 \overline{\mathbf{v}'_{k,i} \cdot (-p'_{k,i} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'_{k,i}) \cdot \nabla \chi_k} + \sum_{k=1}^2 \overline{\kappa_k \frac{\Gamma_k}{\rho_k}}. \end{aligned} \quad (118)$$

Equações de conservação exatas para ε_k foram derivadas por Kataoka e Serizawa (1989) e por Lahey e Drew (2001). Em coordenadas cartesianas $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$, para as quais as regras da notação de Einstein devem ser aplicadas a α, β e γ , a equação para ε_k é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_k \overline{\varepsilon'_k} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \varepsilon_k \overline{\varepsilon'_k v_{\beta k}} = -2\nu_k \varepsilon_k \frac{\partial \overline{v_{\alpha k}}}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v'_{\beta k}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v'_{\gamma k}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v'_{\gamma k}}{\partial x_\beta} \right) - \\ & 2\nu_k \varepsilon_k v'_{\beta k} \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 \overline{v_{\alpha k}}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - 2\nu_k \varepsilon_k \frac{\partial v'_{\beta k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\beta} - 2\nu_k^2 \varepsilon_k \left(\frac{\partial^2 v'_{\gamma k}}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \right)^2 - \\ & 2 \frac{\nu_k}{\rho_k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon_k \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial p'_k}{\partial x_\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varepsilon_k \overline{\varepsilon'_k v'_{\beta k}}) + \nu_k \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} (\varepsilon_k \overline{\varepsilon'_k}) + D_k \end{aligned} \quad (119)$$

onde

$$\varepsilon'_k = \nu_k \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} D_k = & 2 \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial v'_{\alpha k}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial p'_k}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\alpha} - \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\overline{\varepsilon'_k \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\beta}} \right) - \nu \frac{\partial \overline{\varepsilon'_k}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\beta} + \\ & 2\nu v v'_\alpha \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial \overline{v_{\alpha k}}}{\partial t} + v_{\beta k} \frac{\partial \overline{v_{\alpha k}}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \overline{v_{\alpha k}}}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} - g_\alpha \right) + \\ & 2 \frac{\nu}{\rho'} p'_k \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\frac{\partial \overline{v_{\alpha k}}}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (121)$$

Na Eq. 119, o termo ao lado esquerdo do sinal corresponde à variação local e ao transporte da dissipação turbulenta da fase k por convecção. O primeiro e o segundo termos ao lado direito do sinal representam os mecanismos de geração de dissipação na fase k associados à vorticidade e ao escoamento médio. O terceiro termo corresponde à geração de dissipação devido ao alongamento dos vórtices na fase k e o quarto à geração de dissipação pela ação da viscosidade molecular. O quinto, o sexto e o sétimo termos são responsáveis pela difusão da dissipação turbulenta na fase k . Finalmente, o último termo (Eq. 121) corresponde ao transporte de dissipação turbulenta através da interface. Como pode ser visto pela Eq. 121, a dis-

sipação turbulenta na fase k é fortemente relacionada aos processos de transferência através da interface.

Da mesma forma que a energia cinética turbulenta total de um escoamento bifásico foi obtida a partir da soma das energias cinéticas turbulentas de cada fase, também podemos derivar uma equação para a dissipação turbulenta total do escoamento bifásico. Por simplicidade, omitiremos tal equação da presente seção e retornaremos à modelagem dos termos envolvidos na Seção 6.1.2.

5.5. Fechamento do sistema

Para um escoamento bifásico ($k = 1, 2$) turbulento, adiabático, sem mudança de fase e de propriedades constantes, o problema é formulado em termos de um sistema composto pelas seguintes equações de conservação: (i) 2 de conservação da massa (1 para cada fase, Eq. 78), (ii) 2 de conservação da quantidade de movimento (1 para cada fase, Eq. 82), (iii) 1 conservação da quantidade de movimento na interface (Eq. 106)¹. Admitindo que a turbulência pode ser modelada usando um modelo de duas equações (por exemplo, o modelo $\kappa - \epsilon$), adicionamos (iv) 2 equações de transporte da energia cinética turbulenta (1 para cada fase) e (v) 2 de transporte para a dissipação da energia cinética turbulenta (1 para cada fase). Admitindo também que se conhecem os modelos constitutivos que podem ser formulados para os termos envolvendo a variável τ_k em função das variáveis de campo, temos para este problema um total de 11 incógnitas: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{p_1}, \overline{p_2}, \kappa_1, \kappa_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ e A_i . Desse modo, precisamos de mais duas equações para completar o fechamento do sistema. A primeira equação é a identidade

$$\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_2 \quad (122)$$

e a segunda é uma equação de transporte para a densidade de área interfacial, A_i . Tal equação geralmente é formulada em função do padrão de escoamento em questão. Por exemplo, no padrão em bolhas, A_i é diretamente proporcional à fração de vazio e inversamente proporcional ao diâmetro das bolhas. Por isso, um embasamento fenomenológico forte a respeito do padrão é desejado a fim de que o problema possa ser formulado adequadamente. Uma análise detalhada da derivação de uma equação para a densidade de área interfacial foge do escopo da presente lição. Exemplos de formulações são apresentadas por Ishii e colaboradores (Kocamustafaogullari e Ishii, 1995; Wu et al., 1998; Hibiki e Ishii, 2002) e por Valenti et al. (1991) (cf. Lahey e Drew, 2001). No modelo diferencial de duas equações apresentado na Seção 6.1.2, o diâmetro médio das bolhas é suposto conhecido e, portanto, uma equação de transporte para a densidade de área interfacial não é necessária.

Nos escoamento monofásicos, é uma prática comum utilizar uma formulação de Lei de Parede no lugar de uma condição de contorno de não deslizamento na parede. Como foi visto anteriormente, as Leis de Parede são extensíveis aos escoamentos

¹Para um problema sem mudança de fase, a conservação da massa na interface (Eq. 105) é identicamente nula.

bifásicos, uma vez que sejam obedecidas novas leis de similaridade levando em consideração a interação entre as fases (Marié et al., 1997; Vassallo, 1999).

6. APLICAÇÕES

Nesta seção, apresentaremos os modelos utilizados para descrever alguns dos padrões de escoamento bifásico gás-líquido. Como será visto, apenas os modelos para escoamentos dispersos (padrão em bolhas e em névoa) e para algumas situações de padrão estratificado fazem uso da modelagem diferencial apresentada na seção anterior. A dificuldade em conciliar a natureza intermitente de padrões como o pistonado e o anular agitado a uma modelagem diferencial multidimensional faz com que os modelos de maior aplicação sejam os unidimensionais, onde as relações de fechamento são baseadas em modelos macroscópicos. Além disso, a falta de um conhecimento detalhado sobre os processos locais de transporte de quantidade de movimento, de energia e de energia turbulenta através das interfaces (por exemplo, a de um filme líquido característico do padrão anular) impossibilita a utilização de modelos diferenciais multidimensionais devido à falta de relações de fechamento apropriadas.

6.1. Modelagem do escoamento turbulento no padrão em bolhas

O padrão em bolhas é o mais estudado dos padrões gás-líquido. Inúmeros modelos encontram-se disponíveis na literatura, onde este padrão é estudado para uma gama de geometrias sob diferentes níveis de complexidade.

Geralmente, a validação de modelos para o escoamento em bolhas considera o escoamento bifásico adiabático e sem mudança de fase de um líquido e um gás não condensável (por exemplo, água e ar). Salvo em situações específicas, estas condições serão preservadas nos exemplos apresentados nesta seção.

6.1.1. Modelos algébricos

Modelos algébricos foram propostos por Sato et al. (1981a) e mais recentemente por Nikitopoulos e Michaelides (1995) para o escoamento em bolhas em um duto circular. Nestes modelos, foram feitas as hipóteses adicionais de regime permanente e de velocidade média na direção radial aproximadamente nula (escoamento unidimensional, longe da entrada). No modelo mais simples, o de Sato et al., o escoamento foi analisado sob o ponto de vista da fase líquida com base no princípio da superposição. Dessa forma, em coordenadas cilíndricas, as Eqs. 78 e 82 se reduzem a

$$\frac{d}{dz} \varepsilon_k \bar{p}_k = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \varepsilon_k \eta_k \left(\frac{d}{dr} \bar{v}_{zk} + \tau_k^{Re} \right) \right] - \varepsilon_k \bar{\rho}_k g + (-p_{ki} + \tau_{ki}) A_i \quad (123)$$

onde r é a coordenada radial, z é a coordenada longitudinal e $k = G, L$.

Somando as Eqs. 123 para $k = G$ e L utilizando a identidade $\varepsilon_G = 1 - \varepsilon_L$, a

equação para a interface (Eq. 106), e levando em conta as seguintes hipóteses: (i) as pressões médias são iguais para ambas as fases, (ii) as tensões viscosas e turbulentas são muito maiores para o líquido do que para o gás e (iii) o peso específico do gás é muito menor do que o do líquido, temos

$$\frac{1}{\rho_L} \frac{d}{dz} p = \frac{\nu_L}{r} \frac{d}{dr} \left[r (1 - \varepsilon_G) \left(\frac{d}{dr} \overline{v_{zL}} + \frac{1}{\rho_L} \tau_L^{Re} \right) \right] - (1 - \varepsilon_G) g. \quad (124)$$

Sato et al. (1981a) propuseram a seguinte formulação para a tensão de Reynolds baseada no princípio de superposição

$$\tau^{Re} = -\rho_L \overline{v'_{zL} v'_{rL}} - \rho_L \overline{v''_{zL} v''_{rL}} \quad (125)$$

onde o primeiro termo é independente da presença de bolhas e o segundo termo é devido à turbulência causada pelo movimento das bolhas. Utilizando o conceito de difusividade turbulenta, a tensão cisalhante total é dada por

$$\tau = \rho_L (1 - \varepsilon_k) \left(\nu_L + \nu_L^{t'} + \nu_L^{t''} \right) \frac{d}{dr} \overline{v_{zL}} \quad (126)$$

onde

$$\nu_L^{t'} = \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right]^2 \left[1 - \frac{11}{6} \left(\frac{y^+}{R^+} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{y^+}{R^+} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{y^+}{R^+} \right)^3 \right] \times \nu_L K y^+ \quad (127)$$

e

$$\nu_L^{t''} = \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right]^2 c_{1\varepsilon G} \left(\frac{d_b}{2} \right) U_r \quad (128)$$

onde d_b é o diâmetro da bolha corrigido para as regiões próximas à parede de acordo com dados experimentais. Como visto nas expressões acima, para a região próxima à parede, Sato et al. (1981a) fizeram uso de uma função de amortecimento de van Driest. Na realidade, a função para $\nu_L^{t'}$ é uma combinação dos modelos de van Driest e de Reichardt (Kays e Crawford, 1993).

O modelo de Nikitopoulos e Michaelides (1995) considera o escoamento bifásico como sendo equivalente ao de uma mistura homogênea. Assim, existe uma relação direta entre a fração de vazio, ε_G , e a densidade do fluido hipotético. As flutuações de densidade aparente devido à presença das bolhas é considerada a partir da seguinte formulação para as tensões de Reynolds do escoamento homogêneo

$$\tau^{Re} = - \left(\rho \overline{v'_z v'_r} + v_z \overline{\rho' v'_r} \right) \quad (129)$$

onde

$$-\overline{v'_z v'_r} = l_{mv}^2 \left| \frac{dv_z}{dr} \right| \left| \frac{dv_z}{dr} \right| \quad (130)$$

$$-\overline{\rho' v'_r} = l_{mv} l_{m\rho} \left| \frac{d\rho}{dr} \right| \left| \frac{dv_z}{dr} \right|. \quad (131)$$

Os comprimentos de mistura l_{mv} e $l_{m\rho}$ são obtidos a partir da relação de Nikuradse (cf. Nikitopoulos e Michaelides, 1995). No modelo de Nikitopoulos e Michaelides, os efeitos devido à velocidade relativa entre as fases (utilizando um modelo do tipo ‘drift-flux’) são incorporadas no termo devido à gravidade.

Em comparação com metodologias mais sofisticadas, os modelos algébricos apresentam a vantagem de serem de mais fácil implementação, tornando-se atrativos para cálculos de engenharia. A maior desvantagem é, sem dúvida, a falta de generalidade devido à natureza das relações de fechamento. Por exemplo, nos modelos de Sato et al. (1981a) e de Nikitopoulos e Michaelides (1995), para que distribuições de velocidade média sejam calculados, perfis de fração de vazio devem ser fornecidos como dados de entrada, bem como o tamanho médio das bolhas.

6.1.2. Modelos diferenciais

O aumento no volume de publicações observado nos últimos anos aponta para o fato de que os modelos diferenciais de duas equações tem sido os de maior sucesso na descrição de escoamentos no padrão em bolhas para diversas configurações.

Destes modelos, praticamente todos fazem uso de uma formulação $\kappa - \epsilon$. Para ilustrar a aplicação deste modelo ao escoamento em bolhas em um duto vertical, nos basearemos no modelo proposto por Troshko e Hassan (2001a). Entretanto, diversos modelos aplicados a diferentes problemas encontram-se disponíveis na literatura. Por exemplo, o modelo de Wang et al. (2001) e o de Yuan et al. (2001) para escoamentos turbulentos com cavitação, o de Joshi (2001) e o de Sanyal et al. (1999) para colunas de borbulhamento, o de Smith (1998) e o de Hua e Wang (2000) para plumas de bolhas.

O modelo de Troshko e Hassan (2001a) é válido para escoamentos ascendentes no padrão em bolhas, sem mudança de fase e de fases incompressíveis. Forças devido à tensão interfacial são desprezadas, bem como a diferença de pressão entre as fases. Além disso, o diâmetro médio das bolhas é conhecido, eliminando a necessidade de formularmos um equação para a densidade de área interfacial. A partir destas hipóteses, as equações de conservação para as variáveis médias podem ser escritas como (para $k = G, L$)

Conservação da massa

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon_k \overline{\mathbf{v}_k} = 0 \quad (132)$$

Conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial \varepsilon_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k} = -\varepsilon_k \nabla \overline{p_k} + \nabla \cdot \varepsilon_k (\overline{\boldsymbol{\tau}_k} + \boldsymbol{\tau}_k^{Re}) + \varepsilon_k \overline{\rho_k} \mathbf{g} + \mathbf{M}_k \quad (133)$$

Conservação da quantidade de movimento na interface

$$\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_G = 0 \quad (134)$$

Equação das frações fásicas

$$\varepsilon_L + \varepsilon_G = 1 \quad (135)$$

Modelagem da turbulência

Evidência experimental (Serizawa et al., 1975; Nakoryakov et al., 1981; Hibiki et al., 2001) permite a elaboração da seguinte hipótese acerca da turbulência no escoamento no padrão em bolhas

$$\frac{\|\boldsymbol{\tau}_G^{Re}\|}{\|\boldsymbol{\tau}_L^{Re}\|} = O\left(\frac{\rho_G}{\rho_L}\right). \quad (136)$$

Se a norma do tensor de Reynolds, $\|\cdot\|$, é definida de forma que

$$\|\boldsymbol{\tau}_k^{Re}\| = \rho_k \kappa_k \quad (137)$$

então

$$\rho_L \kappa_L \gg \rho_G \kappa_G \quad (138)$$

para $\rho_L \gg \rho_G$. Ao aplicarmos a Eq. 138, a energia cinética turbulenta na fase gasosa é desprezível e a energia cinética turbulenta da fase líquida é calculada a partir da equação de conservação para a energia cinética turbulenta total do escoamento (Eq. 118). Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_L \kappa_L + \overline{\rho_L} \nabla \cdot \varepsilon_L \overline{\mathbf{v}_L} \kappa_L &= \varepsilon_L \boldsymbol{\tau}_L^{Re} : \nabla \overline{\mathbf{v}_L} - (\varepsilon_L \rho_L \overline{\kappa_L \mathbf{v}_L'}) - \\ &\nabla \cdot (\varepsilon_L \overline{\mathbf{v}_L' p_L'}) + \nabla \cdot (\varepsilon_L \overline{\mathbf{v}_L' \boldsymbol{\tau}_L'}) - \varepsilon_L \overline{\rho_L} \varepsilon_L \\ &\sum_{k=L,G} \overline{\mathbf{v}'_{k,i} \cdot (-p'_{k,i} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'_{k,i}) \cdot \nabla \chi_k} \end{aligned} \quad (139)$$

O sexto termo ao lado direito do sinal da Eq. 139 foi analisado e modelado em detalhe por Kataoka e Serizawa (1989). Para escoamentos com densidade constante e sem mudança de fase, eles provaram a seguinte identidade

$$\sum_{k=L,G} \overline{\mathbf{v}'_{k,i} \cdot (-p'_{k,i} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'_{k,i}) \cdot \nabla \chi_k} = \sum_{k=L,G} \overline{[(p - p_i) \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] \cdot \nabla \chi_k \cdot \mathbf{v}'_k} + \sum_{k=L,G} \overline{[(p_i - p_k) + \boldsymbol{\tau}_k] : \mathbf{v}'_k \nabla \chi_k} \quad (140)$$

onde o segundo termo ao lado direito do sinal é nulo sob a hipótese de que o componente do movimento da interface devido à flutuação é isotrópico, ou seja, $\overline{\mathbf{v}'_k \nabla \chi_k} = 0$. O primeiro termo ao lado direito é a média de uma correlação entre a fonte interfacial de quantidade de movimento e a componente flutuante do vetor velocidade da fase k . Kataoka e Serizawa (1989) mostraram que este termo pode ser escrito como

$$\sum_{k=L,G} \overline{[(p - p_i) \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] \cdot \nabla \chi_k \cdot \mathbf{v}'_k} = \overline{\mathbf{v}_r} \cdot \mathbf{M}_L \quad (141)$$

onde $\overline{\mathbf{v}_r}$ é o vetor velocidade relativa média entre as fases dado por $\overline{\mathbf{v}_r} = \overline{\mathbf{v}_G} - \overline{\mathbf{v}_L}$.

Adotando uma modelagem para os termos de difusão de energia cinética turbulenta semelhante àquela empregada para os escoamentos monofásicos (ver Deschamps, 1998), podemos escrever a Eq. 139 na seguinte forma

$$\overline{\rho_L} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_L \kappa_L + \overline{\rho_L} \nabla \cdot \varepsilon_L \overline{\mathbf{v}_L} \kappa_L = \varepsilon_L \boldsymbol{\tau}_L^{Re} : \nabla \overline{\mathbf{v}_L} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_L \nu_L^t}{P_r^{ke}} \nabla \kappa_L \right) - \varepsilon_L \overline{\rho_L} \varepsilon_L + \overline{\mathbf{v}_r} \cdot \mathbf{M}_L. \quad (142)$$

Apresentaremos agora o modelo para a dissipação da energia cinética turbulenta no escoamento gás-líquido no padrão em bolhas. A primeira hipótese (implícita na derivação da Eq. 119) é de que a turbulência é isotrópica. A partir da ordem de grandeza das energias cinéticas turbulentas das fases expressa pela Eq. 138, podemos também assumir que a dissipação da turbulência na fase gasosa também é muito baixa em comparação com a no líquido. Assim todos os termos multiplicados pela densidade do gás na equação para o transporte da dissipação total do escoamento bifásico são desprezados.

No modelo $\kappa - \varepsilon$ monofásico (Deschamps, 1998), a equação de transporte para ε é modelada de acordo com a hipótese de Kolmogorov de que a escala de tempo da destruição da turbulência é determinada pela escala de tempo dos menores turbilhões responsáveis pela dissipação. Desta forma, sob esta hipótese, as taxas de produção e de dissipação de ε são proporcionais às taxas de produção e de dissipação de κ multiplicadas pela frequência característica dos menores turbilhões, $\omega = \frac{\varepsilon}{\kappa}$.

Mantendo o mesmo raciocínio e seguindo a hipótese de Kolmogorov, a modelagem do termo interfacial na equação para ϵ é realizada de forma que este seja proporcional ao termo de produção de energia cinética turbulenta através da interface (quarto termo ao lado direito da Eq. 142) multiplicado pela frequência característica da destruição da turbulência induzida pelas bolhas. Após uma análise da física do processo de decaimento da turbulência (Lopez de Bertodano et al., 1994), pode ser mostrado que

$$\omega_b = \left(\frac{2C_{vm}d_b}{3C_D|\mathbf{v}_r|} \right)^{-1} \quad (143)$$

onde C_{vm} e C_D são os coeficientes de massa virtual e de arrasto (ver Seção 6.1.2) e d_b é o diâmetro das bolhas. A Eq. 143 fornece a escala de tempo característica do decaimento da turbulência induzida pela presença das bolhas. Segundo Troshko e Hassan (2001a), para um escoamento em bolhas típico, $\omega_b \gg \omega$, e a turbulência induzida pelas bolhas se dissipa muito mais rapidamente do que a turbulência induzida pelo cisalhamento monofásico.

Introduzindo os conceitos delineados acima à filosofia de modelagem para a equação da dissipação da energia cinética turbulenta nos escoamentos monofásicos, podemos escrever

$$\overline{\rho_L} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_L \epsilon_L + \overline{\rho_L} \nabla \cdot \epsilon_L \overline{\mathbf{v}_L} \epsilon_L = \omega \left(C_1 \epsilon_L \tau_L^{Re} : \nabla \overline{\mathbf{v}_L} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_L \nu_L^t}{Pr^{dr}} \nabla \kappa_L \right) - \omega C_2 \epsilon_L \overline{\rho_L} \epsilon_L + \omega_b C_3 \overline{\mathbf{v}_r} \cdot \mathbf{M}_L \quad (144)$$

onde $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$ e $Pr^{dr} = 1.272$ são parâmetros de ajuste do modelo monofásico (Deschamps, 1998). A constante $C_3 = 0.45$ foi obtida através de um ajuste por Troshko e Hassan (2001a) para escoamentos ascendentes em dutos verticais de geometrias circulares e triangulares.

Tendo completado a derivação das equações de transporte, passemos agora ao fechamento do problema, mais especificamente à determinação de uma expressão para \mathbf{M}_k e à dedução das condições de contorno.

Fonte interfacial de quantidade de movimento

Uma discussão detalhada acerca da modelagem e do fechamento dos termos interfaciais \mathbf{M}_k na Eq. 133 foge do escopo do presente trabalho, uma vez que tal tarefa ainda é assunto de intensa pesquisa na literatura. Aqui, apresentaremos, de forma concisa, o modelo empregado na metodologia de Troshko e Hassan (2001a).

Para o padrão em bolhas, é comum e conveniente decompor \mathbf{M}_G em vários componentes (Lopez de Bertodano et al., 1994; Troshko e Hassan, 2001a)

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{F}_G^d + \mathbf{F}_G^{vm} + \mathbf{F}_G^l + \mathbf{F}_G^w + \mathbf{F}_G^{td}. \quad (145)$$

Cada um dos componentes acima está associado a um mecanismo de transferência de quantidade de movimento através da interface. A força de arrasto por unidade de volume é dada por

$$\mathbf{F}_G^d = \frac{3}{4} \frac{C_D}{d_b} \varepsilon_G \rho_L |\mathbf{v}_r| \mathbf{v}_r. \quad (146)$$

O coeficiente de arrasto, C_D é geralmente uma função do número de Reynolds das bolhas e do número de Eötvös (Ishii e Zuber, 1979), respectivamente dados por

$$Re_b = \frac{\rho_L d_b |\mathbf{v}_r|}{\eta_L} \quad (147)$$

$$Eo = \frac{|\mathbf{g}| (\rho_L - \rho_G) d_b^2}{\sigma}. \quad (148)$$

Forças de massa virtual são aquelas geradas por aceleração relativa entre as fases

$$\mathbf{F}_G^{vm} = \varepsilon_G C_{vm} \rho_L \left(\frac{D_G}{Dt} \mathbf{v}_G - \frac{D_L}{Dt} \mathbf{v}_L \right) \quad (149)$$

onde $\frac{D_k}{Dt}$ é a derivada material na fase k . C_{vm} é o coeficiente de massa virtual. Para o escoamento invíscido ao redor de uma esfera, $C_{vm} = 0.5$.

Forças de sustentação originam-se das interações entre a bolha e o perfil de tensões cisalhantes na fase líquida. A expressão geral para a força de sustentação por unidade de volume é dada por

$$\mathbf{F}_G^l = \varepsilon_G \rho_L C_l \mathbf{v}_r \times (\nabla \times \mathbf{v}_L) \quad (150)$$

onde C_l é o coeficiente de sustentação da bolha. Os valores extremos de C_l são 0.01 (escoamento laminar) e 0.5 (escoamento invíscido ao redor de uma esfera). Lopez de Bertodano et al. (1994) sugerem que $C_l = 0.1$ para escoamentos em dutos verticais. A orientação da força de sustentação depende da orientação da velocidade relativa com respeito ao vetor aceleração da gravidade. Por exemplo, em escoamentos ascendentes esta força faz com que as bolhas desloquem-se em direção à parede. Em escoamentos descendentes, a força de sustentação empurra as bolhas em direção ao centro do tubo.

A chamada força de parede (por unidade de volume) é dada por

$$\mathbf{F}_G^w = \frac{\varepsilon_G \rho_L |\mathbf{v}_r|^2}{d_b} \max \left(0, C_{w1} + C_{w2} \frac{d_b}{y_w} \right) \mathbf{n}_w \quad (151)$$

onde \mathbf{n}_w é o vetor unitário perpendicular à parede e y_w é a distância da parede à bolha. Valores para as constantes C_{w1} e C_{w2} (que determinam a distância efetiva à parede) são fornecidos por Lahey (1992) e Lahey e Drew (2001).

A força de parede é uma força devido à diferença de pressão hidrodinâmica e faz com que a bolha afaste-se da parede. Ela origina-se da diferença entre a vazão de líquido entre a bolha e a parede e entre a bolha e o restante do escoamento.

A força de dispersão turbulenta \mathbf{F}_G^{td} é concebida de forma a demonstrar uma analogia com o processo no nível molecular. Ela representa a difusão turbulenta das bolhas pelos turbilhões presentes na fase líquida. Esta força é aproximada por

$$\mathbf{F}_G^{td} = -C_{td}\rho_L\kappa_L\nabla\varepsilon_G \quad (152)$$

onde κ_L é a energia cinética turbulenta por unidade de massa da fase líquida e C_{td} é o coeficiente de dispersão turbulenta (Lahey, 1992; Lopez de Bertodano et al., 1994).

Lahey e Drew (2001) apresentam valores recomendados e expressões para o cálculo de C_p , C_{td} , C_{w1} , C_{w2} , C_l , C_{vm} e C_d .

Condições de contorno

Para escoamentos monofásicos a altos números de Reynolds, a utilização do perfil universal de velocidades na região próxima à parede é um atrativo em face à potencial diminuição do tempo de processamento associado ao refino da malha numérica naquela região.

Sob esse ponto de vista, a utilização da chamada função de parede em escoamentos multifásicos também é um atrativo. Como vimos na Seção 3.3, em algumas condições, uma lei de similaridade para a camada limite junto à parede é mantida (Marié et al., 1997; Vassallo, 1999).

Para escoamentos ascendentes no padrão em bolhas, Troshko e Hassan (2001b) formularam uma lei de parede baseada nos dados experimentais de Marié et al. (1997), Nakoryakov et al. (1981, 1996) e Sato et al. (1981b). Em resumo, a expressão de Troshko e Hassan (2001b) é dada por

$$v_z^+ = \frac{1}{K^{TP}} \ln(y^+) + C^{TP} \quad (153)$$

onde v_z^+ é a componente do vetor velocidade da fase líquida na direção tangencial à parede na forma adimensional e y^+ é a distância à parede adimensional. Estas são dados por

$$v_z^+ = \frac{v_z}{v_w^{TP}} \quad (154)$$

$$y^+ = \frac{v_z}{v_w^{TP}} \quad (155)$$

onde v_w^{TP} é a velocidade de fricção bifásica definida como

$$v_w^{TP} = \sqrt{\frac{\tau_w^{TP}}{\rho_L}} \quad (156)$$

e τ_w^{TP} é a tensão de cisalhamento na parede exercida sobre o líquido. K^{TP} e C^{TP} são as constantes bifásicas dadas por

$$K^{TP} = \frac{K^{SP}}{\beta} \quad (157)$$

$$C^{TP} = 11 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) - \frac{\ln(\beta)}{K^{SP}} \quad (158)$$

onde o fator de correção bifásico é dado por

$$\beta = \left[(1 - \varepsilon_{max}) \left(1 + \frac{K_1 \varepsilon_{max} |\mathbf{v}_r|}{K^{SP} v_w^{TP}} \right) \right]^{-1} \quad (159)$$

onde

$$\varepsilon_{max} = \max(\varepsilon_G | 12 < y^+ < 300) \quad (160)$$

é a fração de vazio máxima na camada limite. A função de não-linearidade empírica é dada por

$$K_1 = 4.9453 \exp(-40.661 v_w^{TP}); \quad v_w^{TP} \text{ em } [\text{m s}^{-1}] \quad (161)$$

e a velocidade relativa, para bolhas de formato irregular, é aproximada por

$$\mathbf{v}_r = \left[\frac{4g\sigma(\rho_L - \rho_G)}{\rho_L} \right]^{1/4} (1 - \varepsilon_{max})^{3/4}. \quad (162)$$

Para as escalas turbulentas, as condições de contorno são dadas por

$$\kappa_L = \frac{v_w^{TP^2}}{\sqrt{C_\eta}} \quad (163)$$

$$\epsilon_L = \frac{\beta v_w^{TP^3}}{K^{SP} y} = \frac{v_w^{TP^3}}{K^{TP} y}. \quad (164)$$

6.2. Modelagem do escoamento turbulento no padrão anular

No padrão anular, uma análise local do problema da turbulência é dificultada pelos seguintes aspectos

1. o complexo comportamento dinâmico da interface entre o filme e o núcleo gasoso,
2. os processos de transporte de massa de líquido do filme para as gotículas entranhadas e vice-versa, que envolvem mecanismos de atomização e deposição,

3. a caracterização da influência do filme líquido e da presença de gotículas entranhadas na estrutura da turbulência no núcleo gasoso.

Tendo em vista as dificuldades acima, poucos são os estudos que buscam uma descrição local a partir de equações de conservação na forma diferencial considerando explicitamente a tridimensionalidade do escoamento. Sendo assim, a maioria dos modelos de aplicação geral resolve o escoamento anular a partir de modelos unidimensionais e recupera as informações perdidas na promediação espacial (inclusive da turbulência em ambas as fases) através da utilização de relações de fechamento predominantemente empíricas.

Considerando um escoamento gás-líquido ascendente no padrão anular em um tubo vertical adiabático, sem mudança de fase e de densidade da fase líquida constante, podemos escrever equações de conservação da massa e da quantidade de movimento na forma unidimensional para os três *campos* (líquido contínuo, líquido entranhado e gás — ver Fig. 21.a) em função de variáveis médias na seção. Assim, fazendo a promediação espacial descrita na Seção 4.2 nas Eqs. 78 e 82, temos (Banerjee, 1999)

Conservação da massa do líquido no filme

$$\rho_L \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{LF} \rangle + \rho_L \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_{LF} \rangle \langle v_{LF} \rangle_{LF}) = \hat{A}_{LF,w} (D - E) \quad (165)$$

Conservação da massa do líquido entranhado

$$\rho_L \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{LE} \rangle + \rho_L \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_{LE} \rangle \langle v_{LE} \rangle_{LE}) = \hat{A}_{LF,w} (E - D) \quad (166)$$

Conservação da quantidade de movimento do líquido no filme

$$\begin{aligned} \rho_L \frac{\partial}{\partial t} (\langle \varepsilon_{LF} \rangle \langle v_{LF} \rangle_{LF}) + \rho_L \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_{LF} \rangle \langle v_{LF} \rangle_{LF}^2) = -\langle \varepsilon_{LF} \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle p_{LF} \rangle_{LF} + \\ \langle p_{LF,i} - \langle p_{LF} \rangle_{LF} \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle \varepsilon_{LF} \rangle - \rho_L \langle \varepsilon_{LF} \rangle g - \hat{A}_{LF,w} \hat{\tau}_{LF,w} + \hat{A}_{LF,i} \hat{\tau}_{LF,i} + \\ \hat{A}_{LF,w} (\langle v_D \rangle_D D - \langle v_E \rangle_E E) \end{aligned} \quad (167)$$

Conservação da quantidade de movimento do gás

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \varepsilon_G \rangle \langle \rho_G v_G v_G \rangle_G) + \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_G \rangle \langle \rho_G v_G v_G \rangle_G) = -\langle \varepsilon_G \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle p_G \rangle_G + \\ \langle p_{G,i} - \langle p_G \rangle_G \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle \varepsilon_G \rangle - \langle \rho_G \varepsilon_G \rangle g - \hat{A}_{LF,i} \hat{\tau}_{LF,i} - \hat{A}_{LE,i} \hat{\tau}_{LE,i} \end{aligned} \quad (168)$$

Conservação da quantidade de movimento do líquido entranhado

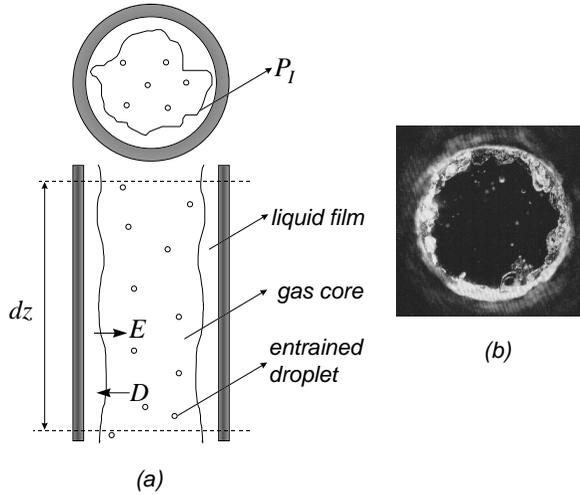


Figura 21: Balanço de massa no escoamento anular.

$$\begin{aligned} \rho_L \frac{\partial}{\partial t} (\langle \varepsilon_{LE} \rangle \langle v_{LE} \rangle_{LE}) + \rho_L \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_{LE} \rangle \langle v_{LE} \rangle_{LE}^2) = - \langle \varepsilon_{LE} \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle p_{LE} \rangle_{LE} + \\ (p_{LE,i} - \langle p_{LE} \rangle_{LE}) \frac{\partial}{\partial z} \langle \varepsilon_{LE} \rangle - \rho_L \langle \varepsilon_{LE} \rangle g + \hat{A}_{LE,i} \hat{\tau}_{LE,i} + \\ \hat{A}_{LF,w} (\langle v_E \rangle_E E - \langle v_D \rangle_D D) \quad (169) \end{aligned}$$

Nas equações acima, E e D são as taxas de entranhamento e deposição de gotículas por unidade de área do filme líquido em contato com a parede (em $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$). $\hat{A}_{w,k}$ é a densidade de área da fase k em contato com a parede e $\hat{A}_{k,i}$ é a densidade de área interfacial da fase k (em m^{-1}). $\langle v_E \rangle_E$ e $\langle v_D \rangle_D$ são as velocidades das gotículas no momento de seu entranhamento e de sua deposição, respectivamente. $\hat{\tau}_{k,i}$ é a tensão de cisalhamento média interfacial da fase k e $\hat{\tau}_{k,w}$ a tensão de cisalhamento na parede média.

A modelagem e a solução do sistema definido pelas Eqs. 165 a 169 não são uma tarefa fácil. Na verdade, ela torna-se ainda mais complicada quando o cálculo envolve transferência de calor e de massa, processos comuns na maioria das aplicações do escoamento anular. Além disso, em algumas situações de interesse prático, condições iniciais e/ou de contorno para a conservação da massa do líquido (em outras palavras, a fração de líquido entranhada na transição para o padrão anular) nem sempre são conhecidas. Barbosa e colaboradores (Barbosa e Hewitt, 2001a, 2001b; Barbosa et al., 2002a, 2002b) quantificaram a importância destas

condições iniciais no escoamento anular com mudança de fase de misturas binárias e multicomponentes.

As Eqs. 165 a 169 (ou versões simplificadas delas) formam o ponto de partida para inúmeros modelos para o escoamento anular propostos ao longo dos últimos 30 anos. Dentre muitos outros modelos, podemos citar os desenvolvidos por Moeck e Stachiewicz (1972), Whalley et al. (1974), Dobran (1983), Schadel et al. (1990), Govan (1990), Nigmatulin et al. (1996) e Fu e Klausner (1997). O objetivo desta seção não é rever cada um desses modelos em separado, mas sim, de uma forma geral, concentrar as atenções no desenvolvimento de um tratamento simplificado da turbulência no padrão anular.

Observações fenomenológicas acerca do padrão anular podem servir para simplificar o sistema de equações apresentado. Por exemplo, na derivação do sistema acima a presença de bolhas de gás no filme líquido foi ignorada. Podemos também supor, sem muito comprometer a solução do problema, que a pressão é uniforme em uma seção reta do escoamento, ou seja,

$$\langle p \rangle = \langle p_{LF} \rangle_{LF} = \langle p_G \rangle_G = \langle p_{LE} \rangle_{LE} \quad (170)$$

e

$$p_{k,i} = \langle p_k \rangle_k. \quad (171)$$

Um recurso que simplifica consideravelmente as equações de conservação de quantidade de movimento é a hipótese de que o núcleo gasoso consiste de uma mistura homogênea de gás e gotículas. Desta forma, a velocidade relativa entre as gotículas dispersas e o gás é suposta nula e as propriedades do fluido homogêneo são obtidas a partir de médias das propriedades das duas fases.

Com as hipóteses acima, as Eqs. 167 a 169 podem ser reduzidas a

Conservação da quantidade de movimento do líquido no filme

$$\begin{aligned} \rho_L \frac{\partial}{\partial t} (\langle \varepsilon_{LF} \rangle_{LF}) + \rho_L \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_{LF} \rangle_{LF} \langle v_{LF} \rangle_{LF}^2) = - \langle \varepsilon_{LF} \rangle_{LF} \frac{\partial}{\partial z} \langle p \rangle - \\ \rho_L \langle \varepsilon_{LF} \rangle g - \hat{A}_{LF,w} \hat{\tau}_{LF,w} + \hat{A}_{LF,i} \hat{\tau}_{LF,i} + \hat{A}_{LF,w} (\langle v_D \rangle_D D - \langle v_E \rangle_E E) \end{aligned} \quad (172)$$

Conservação da quantidade de movimento do núcleo homogêneo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \varepsilon_C \rangle_C \rho_C v_C) + \frac{\partial}{\partial z} (\langle \varepsilon_C \rangle_C \rho_C v_C \langle v_C \rangle_C) = - \langle \varepsilon_C \rangle_C \frac{\partial}{\partial z} \langle p \rangle - \\ \rho_C \langle \varepsilon_C \rangle g - \hat{A}_{LF,i} \hat{\tau}_{LF,i} + \hat{A}_{LF,w} (\langle v_E \rangle_E E - \langle v_D \rangle_D D). \end{aligned} \quad (173)$$

A Eq. 173 é obtida somando as equações de conservação da quantidade de movimento para o núcleo gasoso e para as gotículas entranhadas. O subscrito C refere-se às propriedades homogêneas do gás mais líquido entranhado.

De uma maneira geral, no modelo unidimensional, a interação entre o filme líquido e o núcleo homogêneo é modelada através de um fator de fricção interfacial, f_i . Da analogia com os escoamentos monofásicos temos que

$$f_i = \frac{2\tau_{L F, i}}{\rho_C v_C^2} = f(Re_G, sr) \quad (174)$$

onde sr é a rugosidade equivalente de Nikuradse (*sand roughness*), expressa em [m]. ρ_C é a densidade homogênea do núcleo e v_C sua velocidade média

Com o intuito de formular uma expressão para f_i que fornecesse resultados satisfatórios para o padrão anular, diversos autores propuseram relações empíricas para este parâmetro envolvendo sr e a espessura do filme líquido, δ (Gill et al., 1963). Estas relações serviriam para estabelecer a ligação entre a espessura do filme líquido e a tensão de cisalhamento interfacial e o gradiente de pressão. Exemplos de tais expressões são as propostas por Wallis (1969),

$$f_i = f_G \left(1 + 360 \frac{\delta}{d_T} \right) \quad (175)$$

onde,

$$f_G = 0.079 Re_G^{-0.25} \quad (176)$$

e por Hewitt e Whalley (1978)

$$f_i = f_{SC} \left[1 + 24 \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{1/3} \frac{\delta}{d_T} \right] \quad (177)$$

onde f_{SC} é o fator de fricção de Fanning para um escoamento monofásico em um tubo de diâmetro d_T , densidade do fluido homogêneo ρ_C , velocidade do fluido homogêneo v_C e viscosidade dinâmica igual àquela da fase gasosa, calculada através da correlação de Blasius para o fator de fricção (Eq. 176).

Uma correlação mais refinada para f_i foi proposta por Owen (1986), que mostrou que o comprimento de mistura da turbulência no núcleo gasoso é reduzido com a presença de gotículas. A relação de f_i de Owen foi adaptada da relação clássica de Nikuradse sob a forma

$$\sqrt{\frac{2}{f_i}} = A_r + \frac{1}{K_{tp}} \left[\ln \left(\frac{r_i}{sr_e} \right) - 1.5 + \frac{2\delta}{r_T} \ln \left(\frac{r_T}{\delta} \right) \frac{\delta}{r_T} \right], \quad (178)$$

onde r_i e r_T são os raios da interface e do tubo, respectivamente. A_r é o parâmetro de rugosidade de Nikuradse determinado experimentalmente. sr_e é a altura da rugosidade interfacial efetiva, a qual somente influencia o escoamento no núcleo gasoso se sr excede a espessura da subcamada laminar do escoamento no núcleo gasoso, ou seja

$$sr_e = sr - \frac{5d_T}{Re_G} \sqrt{\frac{2}{f_G}}. \quad (179)$$

A constante de von Kármán modificada, K_{tp} , é dada por

$$K_{tp} = \exp \left(-1.9786 + 0.9381 \frac{\rho_G v_{GS}^2}{\rho_C v_C^2} \right) \quad (180)$$

onde v_{GS} é a velocidade superficial do gás.

Uma forma simplificada de descrevermos a distribuição de velocidades no filme líquido é através da adoção do perfil universal de velocidades. Como visto na Seção 3.4.1 através da confirmação experimental de Vassallo (1999), tal hipótese pode ser satisfatória a princípio para algumas condições. De fato, Hewitt e Hall-Taylor (1970) mostraram que, quando aplicados ao escoamento no filme líquido, métodos propostos para escoamentos monofásicos forneciam bons resultados para parâmetros como a vazão mássica de líquido no filme e a espessura do filme. Na forma adimensional, a vazão mássica do filme é dada por,

$$\dot{M}_{LF}^+ = \frac{\dot{M}_{LF}}{\pi d_T \eta_L} = \int_0^{\delta^+} v_{LF}^+ dy^+ \quad (181)$$

onde y^+ e δ^+ são a distância à parede ($y = r_T - r$) e a espessura do filme na forma adimensional dadas por

$$y^+ = \frac{\rho_L v^* y}{\eta_L} \quad (182)$$

e

$$\delta^+ = \frac{\rho_L v^* \delta}{\eta_L}. \quad (183)$$

v_{LF}^+ é a velocidade local do filme líquido na forma adimensional

$$v_{LF}^+ = \frac{v_{LF}}{v^*} \quad (184)$$

e v^* é a velocidade de fricção

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_L}}. \quad (185)$$

Sendo o perfil universal de velocidades de von Kármán utilizado

$$u_{LF}^+ = \begin{cases} y^+ & \text{for } y^+ \leq 5 \\ -3.05 + 5 \ln(y^+) & \text{for } 5 < y^+ \leq 30 \\ 5.46 + 2.5 \ln(y^+) & \text{for } y^+ > 30 \end{cases} \quad (186)$$

podemos integrar a Eq. 186 a fim de obtermos uma relação entre a vazão mássica adimensional do filme líquido e sua espessura adimensional. Assim

$$M_{LF}^+ = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta^+{}^2 & \text{for } 0 < \delta^+ \leq 5 \\ 12.45 - 8.05\delta^+ + 5\delta^+ \ln(\delta^+) & \text{for } 5 < \delta^+ \leq 30 \\ -214 + 8\delta^+ + 2.5\delta^+ \ln(\delta^+) & \text{for } \delta^+ > 30. \end{cases} \quad (187)$$

A espessura média típica de filmes líquidos característicos do padrão anular é da ordem de 1 mm ou menos. Na maioria dos casos, o efeito da curvatura da parede do tubo pode também ser desprezado.

Ao analisarmos as expressões acima, percebemos a existência de uma relação triangular entre a vazão mássica de líquido no filme, a tensão de cisalhamento na parede e a espessura do filme líquido (Hewitt, 1961). Portanto, em qualquer seção ao longo do escoamento, se dois destes parâmetros forem conhecidos, o terceiro pode ser calculado. A validação experimental da relação triangular foi realizada utilizando os dados experimentais de Gill et al. (1963, 1964) e de Gill e Hewitt (1966).

O fechamento do sistema de equações para a solução do escoamento no padrão anular é obtido com a introdução das correlações para as taxas de entranhamento e de deposição de gotículas E e D . Uma revisão bibliográfica extensa da literatura experimental e de modelagem acerca dos fenômenos de transporte de massa entre o filme líquido e o núcleo gasoso foi feita por Barbosa (2001) e não será repetida aqui. As correlações de Govan (1990) compreendem o conjunto de correlações mais completas para o cálculo de E e D . Elas são dadas por

$$E = \begin{cases} 0 & \text{se } G_{LF} \leq G_{LFC} \\ 5.75 \times 10^{-5} G_G \left[\frac{\rho_L d_T}{\sigma \rho_G^2} (G_{LF} - G_{LFC})^2 \right]^{0.316} & \text{se } G_{LF} > G_{LFC}, \end{cases} \quad (188)$$

onde G_{LFC} é o fluxo mássico de líquido no filme abaixo do qual não há entranhamento (Owen, 1986)

$$G_{LFC} = \frac{\eta_L}{d_T} \exp \left[5.8504 + 0.4249 \left(\frac{\eta_G}{\eta_L} \right) \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0.5} \right]. \quad (189)$$

A taxa de deposição de gotículas é dada por

$$D = k_D C \quad (190)$$

onde C é a concentração de gotículas no núcleo dada por

$$C = \frac{G_{LE}}{\frac{G_G}{\rho_G} + \frac{G_{LE}}{\rho_{LE}}} \quad (191)$$

e o coeficiente de transferência por deposição, k_D , é obtido a partir de

$$k_D = \begin{cases} 0.18 \left(\frac{\sigma}{\rho_G d_T} \right)^{0.5} & \text{if } \frac{C}{\rho_G} \leq 0.3 \\ 0.083 \left(\frac{\rho_G}{C} \right)^{0.65} \left(\frac{\sigma}{\rho_G d_T} \right)^{0.5} & \text{if } \frac{C}{\rho_G} > 0.3. \end{cases} \quad (192)$$

Desenvolvimentos recentes

Alguns dos avanços mais recentes na modelagem do escoamento anular empregam as ferramentas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) a fim de obter um maior entendimento sobre o comportamento das grandes perturbações existentes no filme líquido. Os estudos de Wolf (1995) e de Jayanti e Hewitt (1997) confirmaram o fato de que as grandes perturbações são regiões de recirculação e de turbulência ‘deslizando’ sobre um substrato laminar. Neste estudo, Jayanti e Hewitt foram capazes de quantificar os efeitos da tensão cisalhante interfacial e de forças de pressão normais à interface na interação entre as fases líquida e gasosa. De acordo com esses cálculos, as forças de pressão normais à interface contribuem com apenas aproximadamente 10% das forças interfaciais no padrão anular.

No que se refere à transferência de calor, Jayanti e Hewitt (1997) mostraram que, ao considerar este processo nas regiões da onda (perturbação) e do substrato laminar separadamente, uma melhor concordância entre os valores previstos e experimentais é obtida para o caso onde evaporação é o mecanismo dominante. Neste caso, as análises unidimensionais que fazem uso do perfil logarítmico de velocidades em conjunto com a analogia de Reynolds entre quantidade de movimento e energia costumam superestimar o coeficiente de transferência de calor em até 50% (Hewitt e Hall-Taylor, 1970).

Uma tentativa de incorporar efeitos multidimensionais explicitamente a uma análise do escoamento anular em tubos horizontais foi proposta por Adechi e Issa (2000). Nesse trabalho, os autores derivaram equações médias de conservação da massa e da quantidade de movimento para o líquido no filme utilizando um modelo algébrico de viscosidade turbulenta. Para a fase gasosa, além das equações médias, equações de transporte para κ e para ϵ foram resolvidas, sem no entanto, levar em consideração a presença das gotículas entranhadas através de termos interfaciais. A condição de contorno para o escoamento do gás foi formulada utilizando uma lei de parede onde a tensão de cisalhamento empregada é aquela calculada através da correlação de Wallis (1969) para a tensão de cisalhamento na interface. Finalmente, o transporte das gotículas é modelado através de um enfoque Lagrangeano, onde as forças de arrasto e devido à gravidade são levadas em conta. O fechamento do sistema é realizado através de relações empíricas para o balanço entre o entranhamento e deposição de gotículas no filme líquido e para a tensão de cisalhamento interfacial na direção angular. Adechi e Issa obtiveram resultados satisfatórios para os perfis circunferenciais de espessura do filme líquido e de velocidade na direção axial. Resultados e previsões de gradiente de pressão não foram apresentados.

7. CONCLUSÕES

Neste documento, uma revisão geral do problema da turbulência em escoamentos bifásicos (gás-líquido) foi apresentada. Inicialmente, as características gerais da turbulência nestes sistemas foram delineadas utilizando resultados experimentais disponíveis na literatura. Em seguida, modelos para dois padrões de maior aplicação prática (em bolhas e anular) foram descritos detalhadamente.

Apesar do volume de conhecimento acerca da turbulência em escoamentos bifásicos já ser considerável, o caminho à frente ainda permanece extenso. Principalmente, do ponto de vista da modelagem e previsão de escoamentos interesse e escala industrial.

8. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro e a C. J. Deschamps e A. T. Prata pela revisão do manuscrito.

9. REFERÊNCIAS

- Adechi, D. e Issa, R. I., 2000, A numerical model for annular flow, “UK-Japan Seminar on Multiphase Flow and Nuclear Safety”, Imperial College, London, UK.
- Al-Sarkhi, A. e Hanratty, T. J., 2001, Effect of pipe diameter on the performance of drag-reducing polymers in annular gas-liquid flows, “Chemical Engineering Research and Design: Transactions of the IChemE”, Vol. 79A, pp. 402–409.
- Azzopardi, B. J. e Teixeira, J. C. F., 1994a, Detailed measurements of vertical annular two-phase flow: Part I: drop velocities and sizes, “Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME”, Vol. 116, pp. 792–795.
- Azzopardi, B. J. e Teixeira, J. C. F., 1994b, Detailed measurements of vertical annular two-phase flow: Part II: gas core turbulence, “Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME”, Vol. 116, pp. 796–800.
- Banerjee, S., 1999, Multifield models, “Modelling and Computation of Multiphase Flows”, Vol. Part I: Bases, ETH, Zurich.
- Barbosa-Jr., J. R., 2001, “Phase change of single component fluids and mixtures in annular flow”, PhD thesis, University of London, Imperial College.
- Barbosa-Jr., J. R. e Bradbury, L. J. S., 1996, Experimental investigations in round bubble plumes, “Anais do VI ENCIT/LATCYM”, pp. 1073–1078, Florianópolis, SC, Brasil. ABCM.
- Barbosa-Jr., J. R. e Hewitt, G. F., 2001a, Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part I: liquid phase mass transport, “International Journal of Heat Mass Transfer”, Vol. 44(8), pp. 1465–1474.
- Barbosa-Jr., J. R. e Hewitt, G. F., 2001b, Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part II: heat and mass transfer, “International Journal of Heat Mass Transfer”, Vol. 44(8), pp. 1475–1484.
- Barbosa-Jr., J. R., Hewitt, G. F., e Richardson, S. M., 2002a, Improved annular flow modelling of pure fluids and multicomponent mixtures, “Chemical Engineering Research and Design: Transactions of the IChemE”, Vol. 80(3), pp. 262–266.
- Barbosa-Jr., J. R., Kandlbinder, T., e Hewitt, G. F., 2002b, Forced convective boiling of ternary mixtures at high qualities, “International Journal of Heat Mass Transfer”, Vol. 45(13), pp. 2655–2665.
- Beattie, D. R. H. e Whalley, P. B., 1982, A Simple Two-Phase Frictional Pressure

- Drop Calculation Method, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 8(1), pp. 83-87.
- Carey, V. P., 1992, "Liquid-Vapor Phase-Change Phenomena: An Introduction to the Thermophysics of Vaporization and Condensation Processes in Heat Transfer Equipment", Hemisphere Publishing Co., Washington.
- Castillejos, A. H. e Brimacombe, J. K., 1987, Measurement of physical characteristics of bubbles in gas-liquid plumes, "Metallurgical Transactions", Vol. 18B, pp. 649-671.
- Chisholm, D., 1967, A Theoretical Basis for the Lockhart-Martinelli Correlation for Two-Phase Flow, NEL Report No. 310.
- Cicchitti, A., Lombardi, C., Silvestri, M., Soldaini, G., e Zavatarelli, R., 1960, Two-phase cooling experiments - pressure drop, heat transfer and burnout measurements, "Energia Nucleare", Vol. 7, pp. 407-425.
- Collier, J. G. e Thome, J. R., 1994, "Convective Boiling and Condensation", Oxford University Press, Oxford, third edition.
- Corino, E. R. e Brodkey, R. S., 1969, A visual investigation of the wall region in turbulent flow, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 37, pp. 1.
- Deschamps, C. J., 1998, Modelos algébricos e diferenciais, Silva-Freire, A. P., Menut, P. P. M., e Su, J., editors, "I Escola de Primavera em Transição e Turbulência - Mini Cursos", pp. 99-155, Rio de Janeiro, Brasil.
- Dobran, F., 1983, Hydrodynamic and heat transfer analysis of two-phase annular flow with a new liquid film model of turbulence, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 26, No. 8, pp. 1159-1171.
- Drew, D. A., 1992, Analytical modelling of multiphase flows, Lahey-Jr., R. T., editor, "Boiling Heat Transfer: Modern Developments and Advances", pp. 31-83, Amsterdam. Elsevier Science.
- Dukler, A. E., Wicks, M., e Cleveland, R. G., 1964, Pressure drop and hold-up in two-phase flow, "AIChE Journal", Vol. 10, pp. 38-51.
- Fannelop, T. K., Hirschberg, S., e Kuffer, J., 1991, Surface current and recirculating cells generated by bubble curtains and jets, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 229, pp. 629-657.
- Fu, F. e Klausner, J., 1997, A separated flow model for predicting two-phase pressure drop and evaporative heat transfer for vertical annular flow, "International Journal of Heat and Fluid Flow", Vol. 18, No. 6, pp. 541-549.
- Gill, L. E. e Hewitt, G. F., 1966, Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: III, Distribution of velocity and droplet flowrate after injection through an axial jet, Technical report, UKAEA Report AERE-M 1202.
- Gill, L. E., Hewitt, G. F., Hitchon, J. W., e Lacey, P. M. C., 1963, Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: I, The effect of length on phase velocity distribution, Technical report, UKAEA Report AERE-R 3954, (also: *Chemical Engineering Science*, 18, pp. 525-535).
- Gill, L. E., Hewitt, G. F., e Lacey, P. M. C., 1964, Sampling probe studies of the gas core in two-phase flow: II, Studies of the effect of phase flowrates on phase velocity distribution, Technical report, UKAEA Report AERE-R 3955, (also:

- Chemical Engineering Science*, 19, pp. 665-682).
- Gore, R. A. e Crowe, C. T., 1989, Effect of particle size on modulating turbulent intensity, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 15(2), pp. 279-285.
- Govan, A. H., 1990, "Modelling of vertical annular and dispersed two-phase flows", PhD thesis, University of London, Imperial College.
- Hetsroni, G., 1989, Particles-turbulence interaction, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 15(5), pp. 735-746.
- Hetsroni, G. e Solokov, M., 1971, Distribution of mass, velocity and intensity of turbulence in a two-phase turbulent jet, "Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME", Vol. 38, pp. 315-327.
- Hewitt, G. F., 1961, Analysis of annular two-phase flow; application of the Dukler analysis to vertical upward flow in a tube, Technical report, UKAEA Report AERE-3680.
- Hewitt, G. F. e Hall-Taylor, N., 1970, "Annular Two-Phase Flow", Pergamon Press, Oxford.
- Hewitt, G. F. e Roberts, D. N., 1969, Studies of in two-phase flow patterns by simultaneous X-ray and flash photography, Technical report, UKAEA Report AERE-M 2159.
- Hewitt, G. F. e Whalley, P. B., 1978, The correlation of liquid entrained fraction and entrainment rate in annular flow, Technical report, UKAEA Report AERE-9187.
- Hibiki, T. e Ishii, M., 2002, Development of one-group interfacial area transport equation in bubbly flow systems, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 45, pp. 2351-2372.
- Hibiki, T., Ishii, M., e Xiao, Z., 2001, Axial interfacial area transport of vertical bubbly flows, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 44, pp. 1869-1888.
- Hua, J. e Wang, C. H., 2000, Numerical simulation of bubble-driven liquid flows, "Chemical Engineering Science", Vol. 55, pp. 4159-4173.
- Hutchinson, P., Hewitt, G. F., e Dukler, A. E., 1971, Deposition of liquid or solid dispersion from turbulent gas streams: a stochastic model, "Chemical Engineering Science", Vol. 26, pp. 419-439.
- Ishii, M. e Zuber, N., 1979, Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, "AIChE Journal", Vol. 25, pp. 843-856.
- Jayanti, S. e Hewitt, G. F., 1997, Hydrodynamics and heat transfer in wavy annular gas-liquid flow: a computational fluid dynamics study, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 40, pp. 2445-2460.
- Joo, S. e Guthrie, R. I. L., 1992, Modeling flows and mixing in the steelmaking ladles designed for single- and dual-plug bubbling operations, "Metallurgical Transactions", Vol. 23B, pp. 765-778.
- Joshi, J. B., 2001, Computational flow modelling and design of bubble column reactors, "Chemical Engineering Science", Vol. 56, pp. 5893-5933.
- Kada, H. e Hanratty, T. J., 1960, Effect of solids on turbulence in a fluid, "AIChE Journal", Vol. 6, pp. 624-630.

- Kataoka, I. e Serizawa, A., 1989, Basic equations of turbulence in gas-liquid two-phase flow, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 15(5), pp. 843-855.
- Kays, W. M. e Crawford, M. E., 1993, "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, New York, third edition.
- Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A., e Runstadler, P. W., 1967, The structure of turbulent boundary layers, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 30, pp. 741.
- Kocamustafaogullari, G. e Ishii, M., 1995, Foundation of the interfacial area transport equation and its closure relation, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 38, pp. 481-495.
- Lahey-Jr., R. T., 1992, The prediction of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models, Lahey-Jr., R. T., editor, "Boiling Heat Transfer: Modern Developments and Advances", pp. 85-122, Amsterdam. Elsevier Science.
- Lahey-Jr., R. T. e Drew, D. A., 2001, The analysis of two-phase flow and heat transfer using a multidimensional, four-field, two-fluid model, "Nuclear Engineering and Design", Vol. 204, pp. 29-44.
- Laufer, J., 1951, Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, NACA Report 1053.
- Lee, S. L. e Durst, F., 1982, On the motion of particles in turbulent duct flows, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 8, pp. 125-146.
- Levy, S., 1999, "Two-Phase Flow in Complex Systems", John Wiley & Sons, New York.
- Levy, Y. e Lockwood, F. C., 1981, Velocity measurements in a particle laden turbulent free jet, "Combustion and Flame", Vol. 40, pp. 333-339.
- Lockhart, R. W. e Martinelli, R. C., 1949, Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase Two-Component Flow in Pipes, "Chemical Engineering Progress", Vol. 45, pp. 39.
- Lopez-deBertodano, M., Jones-Jr., O. C., e Lahey-Jr., R. T., 1994, Development of a $k-\epsilon$ model for bubbly two-phase flow, "Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME", Vol. 116 (1), pp. 128-134.
- Maeda, M., Hishida, K., e Furutani, T., 1980, Optical measurements of local gas and particle velocity in an upward flowing dilute gas-solids suspension, "Polyphase Flow and Transport Technology", Vol. 8, p. 211, San Francisco, CA.
- Marié, J. L., Moursali, E., e Tran-Cong, S., 1997, Similarity law and turbulence intensity profiles in a bubbly boundary layer at low void fractions, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 23(2), pp. 227-247.
- Martin, C. J. e Azzopardi, B. J., 1985, Waves in vertical annular flow, "Physico-Chemical Hydrodynamics", Vol. 6(1/2), pp. 257-265.
- McAdams, W. H., Woods, W. K., e Bryan, R. L., 1942, Vaporization inside horizontal tubes - II - Benzene-oil mixtures, "Transactions of the ASME", Vol. 64, pp. 193.
- Milgram, J. H., 1983, Mean flow in round bubble plumes, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 133, pp. 345-376.

- Modarress, D., Tan, H., e Elgobashi, S., 1984a, Two-component LDA measurement in a turbulent round two-phase jet, "AIAA Journal", Vol. 22, pp. 624–630.
- Modarress, D., Wuerer, J., e Elgobashi, S., 1984b, An experimental study of a turbulent two-phase jet, "Chemical Engineering Communications", Vol. 28, pp. 341–354.
- Moock, E. e Stachiewicz, J., 1972, A droplet interchange model for annular-dispersed, two-phase flow, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 15, pp. 637–653.
- Nakoryakov, V. E., Kashinsky, O. N., Burdukov, A. P., e Odnoral, V. P., 1981, Local characteristics of upward gas-liquid flows, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 7, pp. 63–81.
- Nakoryakov, V. E., Kashinsky, O. N., Randin, V. V., e Timkin, L. S., 1996, Gas-liquid bubbly flow in vertical pipes, "Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME", Vol. 118, pp. 167–190.
- Nigmatulin, R., Nigmatulin, B., Khodzaev, Y., e Kroshilin, V., 1996, Entrainment and deposition rates in a dispersed-film flow, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 22, pp. 19–30.
- Nikitopoulos, D. E. e Michaelides, E. E., 1995, Phenomenological model for dispersed bubbly flow in pipes, "AIChE Journal", Vol. 41(1), pp. 12–22.
- Owen, D. G., 1986, "An experimental and theoretical analysis of equilibrium annular flow", PhD thesis, University of Birmingham.
- Owen, D. G., Hewitt, G. F., e Bott, T. R., 1985, Equilibrium annular flows at high mass fluxes; data and interpretation, "PhysicoChemical Hydrodynamics", Vol. 6(1/2), pp. 115–131.
- Parthasarathy, R. N. e Faeth, G. M., 1987, Structure of a turbulent particle-laden water jet in still water, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 13, pp. 699–716.
- Sanyal, J., Vásquez, S., Roy, S., e Dudukovic, M. P., 1999, Numerical simulation of gas-liquid dynamics in cylindrical bubble columns, "Chemical Engineering Science", Vol. 54, pp. 5071–5083.
- Sato, Y., Sadatomi, M., e Sekoguchi, K., 1981a, Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow. Part I: Theory, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 7, pp. 167–177.
- Sato, Y., Sadatomi, M., e Sekoguchi, K., 1981b, Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow. Part II: A comparison between experimental data and theoretical calculations, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 7, pp. 179–190.
- Schadel, S., Leman, G., Binder, J., e Hanratty, T., 1990, Rates of atomisation and deposition in vertical annular flow, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 16, pp. 363–374.
- Schlichting, H., 1987, "Boundary-Layer Theory", McGraw-Hill, New York.
- Sekoguchi, K., Takeishi, M., e Ishimatsu, T., 1985, Interfacial structure in vertical upward annular flows, "PhysicoChemical Hydrodynamics", Vol. 6(1/2), pp. 239–255.

- Serizawa, A. e Kataoka, I., 1990, Turbulent suppression in bubbly two-phase flow, "Nuclear Engineering and Design", Vol. 122, pp. 1-16.
- Serizawa, A., Kataoka, I., e Michiyoshi, I., 1975, Turbulence structure of air-water bubbly flow, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 2, pp. 221-259.
- Shirolkar, J. S., Coimbra, C. F. M., e Queiroz-McQuay, M., 1996, Fundamental aspects of modeling turbulent particle dispersion in dilute flows, "Progress in Energy and Combustion Science", Vol. 22, pp. 363-399.
- Shuen, J., Solomon, A. S. P., Zhang, Q. F., e Faeth, G. M., 1985, Structure of particle-laden jets: measurements and predictions, "AIAA Journal", Vol. 23, pp. 396-404.
- Silva-Freire, A. P. e Cruz, D. O. A., 1998, Equações do movimento e resultados assintóticos aplicados à teoria de camada limite, Silva-Freire, A. P., Menut, P. P. M., e Su, J., editors, "I Escola de Primavera em Transição e Turbulência - Mini Cursos", pp. 49-98, Rio de Janeiro, Brasil.
- Silveira-Neto, A., 1998, Fundamentos da turbulência nos fluidos, Silva-Freire, A. P., Menut, P. P. M., e Su, J., editors, "I Escola de Primavera em Transição e Turbulência - Mini Cursos", pp. 1-48, Rio de Janeiro, Brasil.
- Slattery, J. C., 1999, "Advanced Transport Phenomena", Cambridge University Press, U.K.
- Smith, B. L., 1998, On the modelling of bubble plumes in a liquid pool, "Applied Mathematical Modelling", Vol. 22, pp. 773-797.
- Taitel, Y. e Dukler, A. E., 1976, A model for predicting flow regime transition in horizontal and near horizontal gas-liquid flow, "AIChE Journal", Vol. 22, pp. 47-55.
- Taniguchi, S., Kawaguchi, S., e Kikuchi, A., 2002, Fluid flow and gas-liquid mass transfer in gas-injected vessels, "Applied Mathematical Modelling", Vol. 26, pp. 249-262.
- Taqi, M. e Ildrissi, A., 2000, Modélisation du frottement pariétal dans un écoulement à bulles, "Comptes Rendus de la Academie de Sciences de Paris", Vol. 328(IIb), pp. 741-747.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L., 1972, "A First Course in Turbulence", MIT Press, Cambridge, MA.
- Thwaites, G. R., Kulov, N. N., e Nedderman, R. M., 1976, Liquid film properties in two-phase annular flow, "Chemical Engineering Science", Vol. 31, pp. 481.
- Troshko, A. A. e Hassan, Y. A., 2001a, A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows, "International Journal of Multiphase Flow", Vol. 27, pp. 1965-2000.
- Troshko, A. A. e Hassan, Y. A., 2001b, Law of the wall for two-phase turbulent boundary layers, "International Journal of Heat Mass Transfer", Vol. 44, pp. 871-875.
- Tsuji, Y. e Morikawa, Y., 1982, LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a horizontal pipe, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 120, pp. 385-409.
- Tsuji, Y., Morikawa, Y., e Shiomi, H., 1984, LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe, "Journal of Fluid Mechanics", Vol. 139, pp.

- 417–434.
- Valenti, S., Clause, A., Drew, D. A., e Lahey-Jr., R. T., 1991, A contribution to the mathematical modelling of bubbly/slug flow regime transition, “Chemical Engineering Communications”, Vol. 102, pp. 69–85.
- Vassallo, P., 1999, Near wall structure in vertical air-water annular flows, “International Journal of Multiphase Flow”, Vol. 25, pp. 459–476.
- Velidandla, V., Putta, S., e Roy, R. P., 1996, Velocity field in isothermal turbulent bubbly gas-liquid flow through a pipe, “Experiments in Fluids”, Vol. 21, pp. 347–356.
- Wallis, G. B., 1969, “One-Dimensional Two-Phase Flow”, McGraw-Hill, New York.
- Wang, G., Senocak, I., Shyy, W., Ikohagi, T., e Cao, S., 2001, Dynamics of attached turbulent cavitating flows, “Progress in Aerospace Sciences”, Vol. 37, pp. 551–581.
- Whalley, P., Hutchinson, P., e Hewitt, G., 1974, The calculation of critical heat flux in forced convective boiling, “Proceedings of the Fifth International Heat Transfer Conference”, Tokyo. Paper B6.11.
- Wolf, A., 1995, “Liquid film structure in annular two-phase flow”, PhD thesis, University of London, Imperial College.
- Wu, Q., Kim, S., Ishii, M., e Beus, S. G., 1998, One-group interfacial area transport in vertical bubbly flow, “International Journal of Heat Mass Transfer”, Vol. 41, pp. 1103–1112.
- Wyganski, I. e Fiedler, H., 1969, Some measurements in the self-preserving jet, “Journal of Fluid Mechanics”, Vol. 38, pp. 577–612.
- Yuan, W., Sauer, J., e Schnerr, G. H., 2001, Modeling and computation of unsteady cavitation flows in injection nozzles, “Mecanique et Industrie”, Vol. 2, pp. 383–394.
- Zisselmar, R. e Molerus, O., 1979, Investigation of solid-liquid pipe flow with regard to turbulence modification, “Chemical Engineering Journal”, Vol. 18, pp. 233.

