

# SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR UTILIZANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS FINITOS COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

## André Luíz de Souza Araújo

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica e de Produção  
Bloco 714, Campus do Pici  
CEP.: 60.455-860 – Caixa Postal: 12.144  
Fortaleza – CE  
[araujoals@yahoo.com](mailto:araujoals@yahoo.com)

## José Maurício Alves de Matos Gurgel

Universidade Federal da Paraíba. Centro de Tecnologia.  
Departamento de Tecnologia Mecânica  
CEP: 58051-970 – Caixa Postal: 58051-970  
João Pessoa – PB  
[gurgel@les.ufpb.br](mailto:gurgel@les.ufpb.br)

## Francisco Marcondes

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica e de Produção  
Bloco 714, Campus do Pici  
CEP.: 60.455-860 – Caixa Postal: 12.144  
Fortaleza – CE  
[marconde@dem.ufc.br](mailto:marconde@dem.ufc.br)

*Resumo: escoamentos incompressíveis apresentam diversas dificuldades de serem resolvidos quando tratados por procedimentos segregados, como, por exemplo, a escolha do passo de tempo ótimo, o qual é muito dependente da malha empregada. Este trabalho apresenta a solução do escoamento da convecção natural em geometrias arbitrárias utilizando uma metodologia de volumes finitos baseada em elementos finitos, com arranjo co-localizado das variáveis. As equações da conservação da quantidade de movimento e da continuidade são resolvidas simultaneamente, de modo a se evitar o acoplamento pressão-velocidade, e a equação da energia é resolvida separadamente após o campo de velocidade e pressão ter sido obtido. Apesar da metodologia adotada poder ser utilizada na solução de problemas transientes, apenas a solução de regime permanente foi abordada. Os resultados são apresentados em termos de perfis de velocidade e temperatura ao longo da cavidade.*

Palavras-chave: método dos volumes finitos baseado em elementos, malhas não-estruturadas, solução acoplada.

## 1. Introdução

Escoamentos incompressíveis podem ser resolvidos empregando-se metodologias segregadas ou acopladas. No primeiro caso, as equações de conservação (quantidade de movimento e continuidade) são resolvidas separadamente, de modo que a cada incógnita do problema (componentes  $u$  e  $v$  da velocidade e pressão  $p$ , no caso bidimensional) é associada uma equação evolutiva: conservação da quantidade de movimento em  $x$  e  $y$  para  $u$  e  $v$ , respectivamente, e equação da continuidade para  $p$ . Neste caso, existe um forte acoplamento entre os campos de velocidade e de pressão, uma vez que se deve dispor de uma equação evolutiva para a pressão que produza um campo de pressão que quando inserido nas equações de quantidade de movimento origine velocidades que satisfaçam também a equação de conservação da massa, Patankar (1980), Maliska (2004). Além disso, tais formulações apresentam dificuldades quanto a determinação do passo de tempo ótimo que pode ser empregado. Mesmo em problemas em regime permanente, em que, em princípio, este parâmetro não é importante, existe uma faixa de valores que podem ser utilizados a fim de que se consiga a convergência do programa de cálculo, Marcondes et al. (1998). Este valor geralmente é determinado em um processo de tentativa e erro, sendo altamente dependente da malha empregada.

Uma alternativa interessante é o uso de formulações acopladas, em que as equações governantes são resolvidas simultaneamente, o que, obviamente, elimina a questão do acoplamento pressão-velocidade. Outra vantagem é que tais metodologias não sofrem de restrições quanto ao passo de tempo empregado.

Este trabalho apresenta a solução do problema de convecção natural em cavidades retangular e hexagonal, empregando o Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos, conhecida na literatura internacional como *Control Volume Finite Element Method* (CVFEM). Esta formulação, desenvolvida por Raw (1985), resolve as equações de conservação de forma simultânea e combina características de dois outros esquemas clássicos: Volumes Finitos e Elementos Finitos. Deste modo, as equações discretizadas são obtidas a partir de balanços em volumes elementares e o esquema apresenta a capacidade de tratar geometrias complexas via malhas não-estruturadas.

Os campos de velocidade e de pressão são obtidos simultaneamente. O campo escalar (no caso, a temperatura  $T$ ) é obtido após a determinação dos campos de velocidade e de pressão. Os resultados serão apresentados em termos de perfis de velocidade e pressão para números de Rayleigh variando de  $10^4$  a  $10^6$ .

## 2. Modelo matemático

As equações da conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia para o escoamento bidimensional, incompressível e laminar podem ser escritas como,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + s_{ui} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + s_T \quad (3)$$

onde  $i$  e  $j$  variam de 1 a 2 (para o caso 2-D),  $\rho$  é a massa específica,  $\mu$  é a viscosidade,  $u$  e  $v$  são as componentes cartesianas do vetor velocidade,  $p$  é a pressão termodinâmica,  $T$  é a temperatura e  $s_{ui}$  e  $s_T$  são, respectivamente, os termos fontes da equação da conservação da quantidade de movimento e da conservação da energia. Para o problema de convecção natural, adotando-se a aproximação de Boussinesq, o termo fonte da equação da conservação da quantidade de movimento em  $y$  é dado por,

$$s_{u2} = s_v = \rho g \beta (T - \bar{T}) \quad (4)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido e  $\bar{T}$  é a temperatura de referência (foi adotado  $\bar{T} = 0,5$  por se tratar de cavidades fechadas).

## 3. Metodologia numérica - Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos

Apresenta-se a seguir os fundamentos do Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos, referenciado no texto simplesmente como CVFEM (*Control Volume Finite Element Method*). A descrição detalhada da metodologia pode ser encontrada em Raw (1984), Raw e Schneider (1986), Souza (2000) e Araújo (2004).

Conforme mencionado anteriormente, o CVFEM resolve as equações de transporte simultaneamente. Esta metodologia combina as características de dois esquemas clássicos, o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Elementos Finitos, apresentando assim as vantagens de ambos: esquema estritamente conservativo, discretização das equações governantes a partir de balanços das propriedades em volumes elementares (Volumes Finitos), capacidade de tratamento de geometrias complexas através de malhas não-estruturadas (Elementos Finitos).

A função de interpolação para cada variável é obtida a partir da própria equação diferencial da variável em questão. Desta forma, obtém-se uma aproximação algébrica de cada equação de transporte que representa adequadamente todos os processos físicos relevantes do problema.

### 3.1. Discretização do domínio físico

Basicamente, assim como no Método dos Elementos Finitos padrão, o domínio de cálculo é dividido em regiões menores, os chamados elementos. No CVFEM adotado neste trabalho os elementos são quadriláteros, em cujos vértices são armazenadas todas as variáveis físicas do problema, implicando assim em um arranjo co-localizado. Em cada elemento (tratado de forma independente dos demais) um sistema de coordenadas local e não-ortogonal  $s$ - $t$  é estabelecido. As coordenadas  $s$  e  $t$  variam de  $-1$  a  $1$ , e os nós do elemento são numerados de 1 a 4 (em relação ao elemento), Fig. 1.

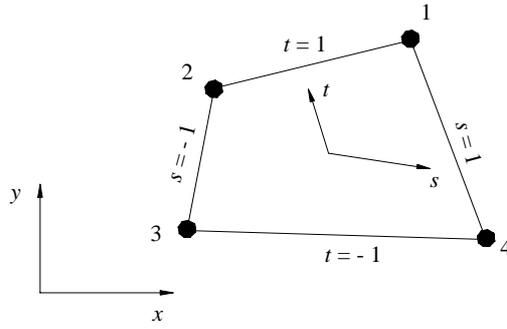


Figura 1. Definição do elemento.

O elemento é do tipo isoparamétrico, ou seja, todas as variáveis do problema, físicas e geométricas, são avaliadas no seu interior em função dos seus valores nodais através da mesma relação,

$$\Phi(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) \Phi_i \quad (5)$$

onde  $\Phi$  representa uma variável qualquer,  $\Phi_i$  é o seu valor no  $i$ -ésimo nó e as funções  $N_i(s, t)$ , denominadas funções de forma, são definidas pelas relações,

$$N_1(s, t) = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \quad (6)$$

$$N_2(s, t) = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \quad (7)$$

$$N_3(s, t) = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \quad (8)$$

$$N_4(s, t) = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \quad (9)$$

As derivadas de  $\Phi$  em relação a  $x$  e  $y$  são obtidas a partir da Eq. (5),

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{(s,t)} = \sum_{i=1}^4 \left. \frac{\partial N_i}{\partial x} \right|_{(s,t)} \Phi_i \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{(s,t)} = \sum_{i=1}^4 \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \right|_{(s,t)} \Phi_i \quad (11)$$

onde,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \quad (13)$$

e  $J$ , o jacobiano da transformação entre os sistemas  $x$ - $y$  e  $s$ - $t$ , é dado por,

$$J = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (14)$$

As expressões para as derivadas funções de forma em relação a  $s$  e a  $t$  são obtidas a partir das Eqs. (6) a (9).

Como as equações discretizadas são obtidas a partir de balanços das propriedades em um volume apropriado, é estabelecido então um volume de controle para cada nó. Para tanto, as linhas  $s = 0$  e  $t = 0$  dos elementos de têm o referido nó em comum definem as fronteiras do volume, Fig. (2). Cada elemento então possui quatro quadrantes de quatro diferentes volumes de controle, sendo esses quadrantes denominados sub-volumes de controle (SCV), Fig. (3).

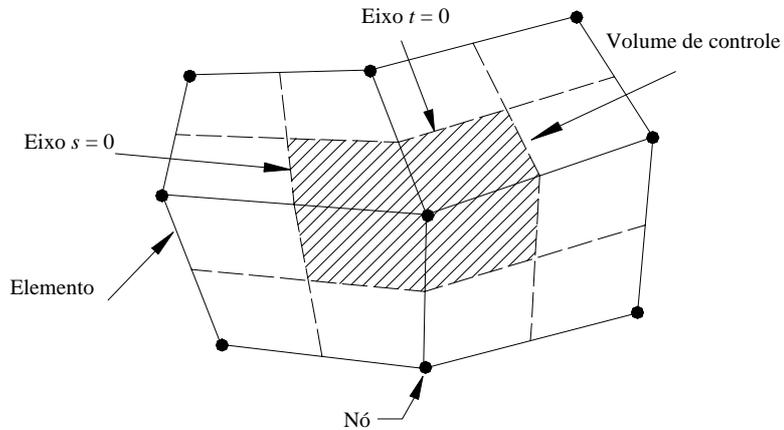


Figura 2. Definição do volume de controle.

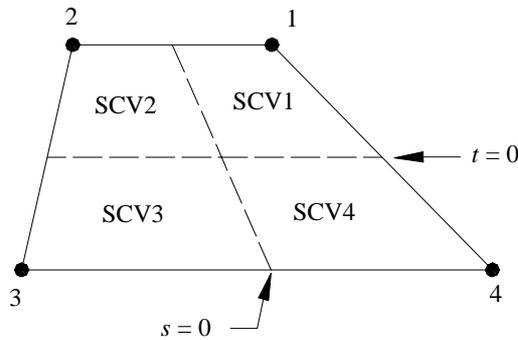


Figura 3. Definição dos sub-volumes de controle.

A obtenção das equações algébricas requer que os termos de fluxo das equações de conservação sejam integrados na superfície de controle. Estas integrais são avaliadas nos pontos médios de cada segmento de reta que define o contorno do volume. Estes pontos são denominados pontos de integração ou ip (*integration point*) e os segmentos, sub-superfícies de controle (SS), Fig. 4.

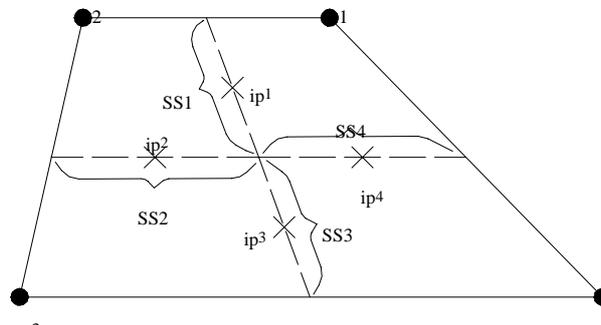


Figura 4. Definição dos pontos de integração e das sub-superfícies de controle.

### 3.2. Discretização das equações governantes

Apresenta-se a seguir uma breve discussão acerca do processo de obtenção das equações algébricas, através do tratamento da equação conservação da quantidade de movimento em  $x$ . No desenvolvimento que se segue, considera-se apenas o SVC1, Fig. 3, o qual possui suas sub-superfícies, SS1 e SS4, Fig. 4, sobre as quais são avaliados os termos de fluxo. Adota-se ainda a seguinte convenção: valores nodais são indicados por letras maiúsculas e valores referentes aos pontos de integração, por letras minúsculas. O primeiro sobrescrito se refere à equação discretizada ( $u$  para conservação da quantidade movimento em  $x$ , por exemplo), o segundo, indica que variável está sendo multiplicado pelo coeficiente. O sobrescritos  $c$ ,  $d$ ,  $t$  e  $s$  se referem, respectivamente, aos termos convectivo, difusivo, transiente e fonte, enquanto o índice  $i$  indica o sub-volume de controle e  $j$  o nó ou ponto de integração, dependendo da grafia do coeficiente (em letra maiúscula ou minúscula). Integrando-se a Eq. (2) sobre um volume de controle, obtém-se,

$$\int_A \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dA + \int_S (\rho u_j u_i) dn_j - \int_S \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dn_j + \int_S p dn_i - \int_A s_{u_i} dA = 0 \quad (15)$$

onde  $i = 1$  corresponde à equação de conservação da quantidade de movimento em  $x$ , e  $d\vec{n} = -dx\vec{i} + dy\vec{j}$  é o vetor normal à superfície de controle. Considerando-se o SCV1, Fig. 3, tem-se,

$$\int_{SVC1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dA \approx \rho J_1 \left( \frac{U_1 - U_1^0}{\Delta t} \right) \equiv \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{unt} U_j - B_1^{ut} \quad (16)$$

$$- \int_{SVC1} s_u dA \approx -s_u \Big|_{(1/2, 1/2)} J_1 \equiv -B_1^{us} \quad (17)$$

$$\int_{SS1 \& SS4} (\rho u_j u) dn_j \approx \rho u_1^* u_1 \Delta y_1 - \rho v_1^* u_1 \Delta x_1 + \rho u_4^* u_4 \Delta y_4 - \rho v_4^* u_4 \Delta x_4 \equiv \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{unc} u_j \quad (18)$$

O sobrescrito \* na equação (18) indica que o termo é avaliado com os valores da iteração anterior. Os fluxos convectivos e difusivos, para o SCV1, são avaliados nos pontos de integração 1 e 4 (Fig. 4). Os termos difusivos no ponto de integração 1 são calculados como,

$$\begin{aligned} - \int_{SS1} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dn_j &\approx -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{ip1} \Delta y_1 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{ip1} \Delta x_1 \equiv \\ &-2\mu \left( \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial x} \Big|_{ip1} U_j \right) \Delta y_1 + \mu \left[ \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \Big|_{ip1} U_j + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Big|_{ip1} V_j \right) \right] \Delta x_1 \end{aligned} \quad (19)$$

As contribuições do ponto de integração 4 podem ser determinadas de modo semelhante, de modo que,

$$- \int_{SS1 \& SS4} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dn_j \equiv \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{und} U_j + \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{uvd} V_j \quad (20)$$

O termo de pressão é escrito como,

$$\int_{SS1 \& SS4} p dn \approx p_1 \Delta y_1 + p_4 \Delta y_4 \equiv \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{upp} p_j \quad (21)$$

Finalmente, a partir das Eqs. (15) a (20), obtém-se a “equação” para o SCV,

$$\sum_{j=1}^4 (A_{1,j}^{unt} + A_{1,j}^{und}) U_j + \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{uvd} V_j + \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{unc} u_j + \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{upp} p_j \doteq B_i^{ut} + B_i^{us} \quad (22)$$

que, na forma matricial,

$$[A^{uuu} + A^{uud}] \{U\} + [A^{uvd}] \{V\} + [a^{uuc}] \{u\} + [a^{upp}] \{P\} = \{B^{ut}\} + \{B^{us}\} \quad (23)$$

Os valores de  $u$  nos pontos de integração são avaliados empregando-se funções de interpolação completas, as quais correspondem ao análogo direto da equação diferencial referente à variável em questão. Detalhes podem ser encontrados em Raw (1985), Souza (2000) e Araújo (2004). Em forma matricial, tem-se,

$$\{u\} = [CC^{uu}] \{U\} + [CC^{up}] \{P\} + [RCC^u] \quad (24)$$

A pressão nos ips é avaliada através das funções de forma, de modo que,

$$\{P\} = [CC^{pp}] \{P\} \quad (25)$$

onde  $CC_{i,j}^{pp} = N_j|_{ipi}$ . Substituindo-se as Eqs. (25) e (26) em (22), obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned} & [[A^{uuu} + A^{uud}] + [a^{uuc}] [CC^{uu}]] \{U\} + [A^{uvd}] \{V\} + \\ & [[a^{upp}] [CC^{pp}] + [a^{uuc}] [CC^{up}]] \{P\} = \{B^{ut}\} + \{B^{us}\} - [a^{uuc}] [RCC^u] \end{aligned} \quad (26)$$

A equação anterior pode ser reescrita em uma forma mais compacta:

$$[E^{uu}] \{U\} + [E^{uv}] \{V\} + [E^{up}] \{P\} = \{R^u\} \quad (27)$$

Na equação matricial anterior, cada linha representa a contribuição do sub-elemento para um respectivo volume de controle. Assim, a equação (23) não representa a equação para um simples volume, mas sim quatro contribuições para quatro volumes de controle diferentes. A equação final de cada volume é obtida através de um processo posterior de montagem, a partir da contribuição de cada elemento.

#### 4. Resultados

Foram selecionados dois problemas de convecção natural, em cavidade retangular e hexagonal, para números de Rayleigh iguais a  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ , baseados na distância  $L$  entre as paredes verticais (cavidade retangular) e na distância  $2D$  entre dois vértices (cavidade hexagonal). A Fig. 5 apresenta a geometria e as condições de contorno. O fluido confinado é o ar, cujas propriedades foram assumidas a  $Pr = 0,707$ . Estes mesmos problemas foram resolvidos por Polina (1988), que empregou um esquema de volumes finitos baseado em coordenadas generalizadas, com formulação segregada. Os resultados por ele obtidos são comparados com os deste trabalho.

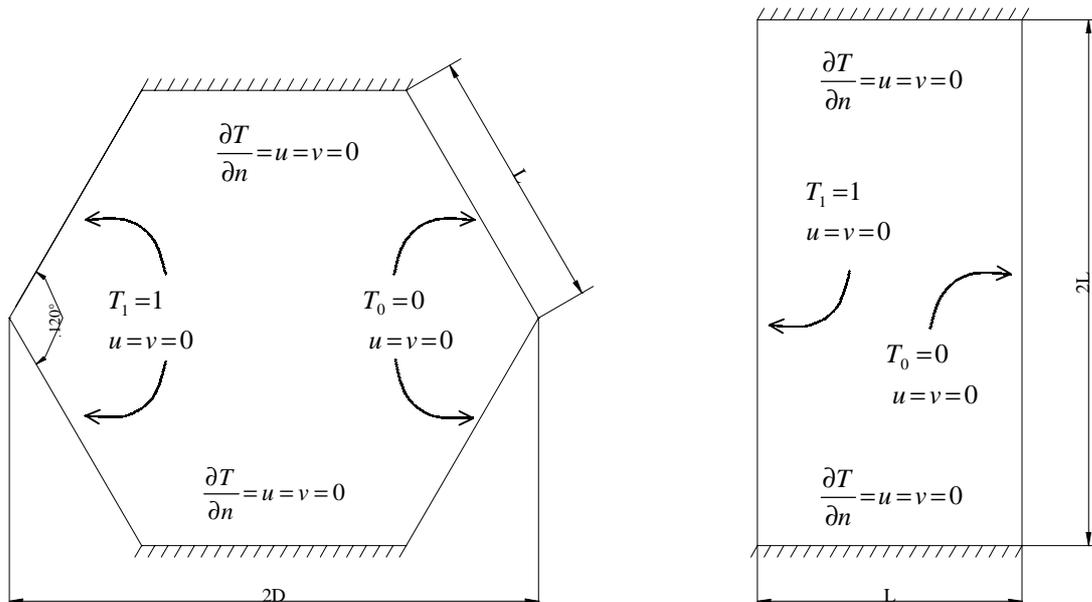


Figura 5. Geometria e condições de contorno, problema de convecção natural em cavidade hexagonal e retangular.

Polina (1988) utilizou malhas com espaçamento não-uniforme, concentrando linhas próximo às paredes da cavidade, a fim de melhor captar os gradientes. O mesmo procedimento foi adotado neste trabalho, não se obtendo, entretanto, diferenças significativas entre os resultados. Deste modo, foram utilizadas malhas uniformemente espaçadas em todos os problemas resolvidos. As malhas estruturadas empregadas têm o mesmo número de volumes adotado por Polina (1988), 754 para as duas cavidades, número este que foi confirmado em um estudo de refino de malha. Entretanto, as malhas não-estruturadas exigiram um número maior de elementos, a fim de se obterem malhas mais uniformes, com volumes menos distorcidos (do contrário, a captura dos gradientes seria muito dificultada). Este procedimento foi necessário para especialmente para valores mais altos do número de Rayleigh, onde os gradientes são maiores. A Fig. 6 apresenta as malhas com espaçamento não-uniforme e não-estruturada utilizadas para a cavidade retangular e as malhas estruturada e não-estruturada para a cavidade hexagonal.

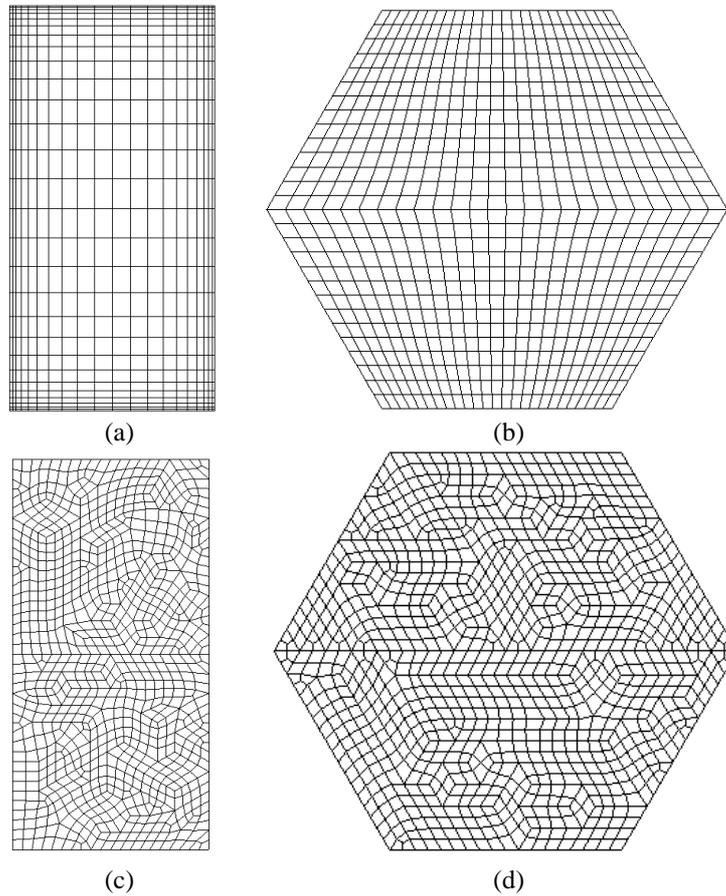


Fig. 6. Malhas empregadas: (a) espaçamento não-uniforme, 754 volumes; (b) estruturada, 754 volumes (c) não-estruturada 937 volumes; (d) não-estruturada, com 1056 volumes.

O critério de convergência adotado é dado por  $\epsilon_{\bar{u}}$  e  $\epsilon_p < 10^{-4}$ , onde,

$$\epsilon_{\bar{u}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [(U_i - U_i^*)^2 + (V_i - V_i^*)^2]}{\sum_{i=1}^N (U_i^2 + V_i^2)}} \quad (28)$$

$$\epsilon_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (P_i - P_i^*)^2}{\sum_{i=1}^N P_i^2}} \quad (29)$$

sendo  $N$  é o número total de volumes e o sobrescrito \* indica iteração anterior. O campo de velocidade e de pressão é obtido simultaneamente, conforme já mencionado, resolvendo-se o campo de temperatura em seguida, a cada iteração.

As Figs. 7 e 8 apresentam os perfis adimensionais de  $v$  e de temperatura para a cavidade retangular com malha cartesiana (754 volumes), ao longo da linha média horizontal. Observa-se que os resultados são fisicamente consistentes, concordando satisfatoriamente com os de Polina (1988). Para  $Ra = 10^3$ , o perfil de temperatura é linear, demonstrando que a transferência de calor no interior da cavidade ocorre primordialmente por condução, o que fica evidenciado pelos baixos valores da componente  $v$  da velocidade exibidos na Fig. 7. À medida, entretanto, que a convecção torna-se mais intensa, com o aumento do número de Rayleigh (a magnitude de  $v$  aumenta), os perfis de temperatura se distanciam deste padrão. Percebe-se, ainda, o fenômeno da inversão térmica, principalmente para valores mais altos do número de Rayleigh.

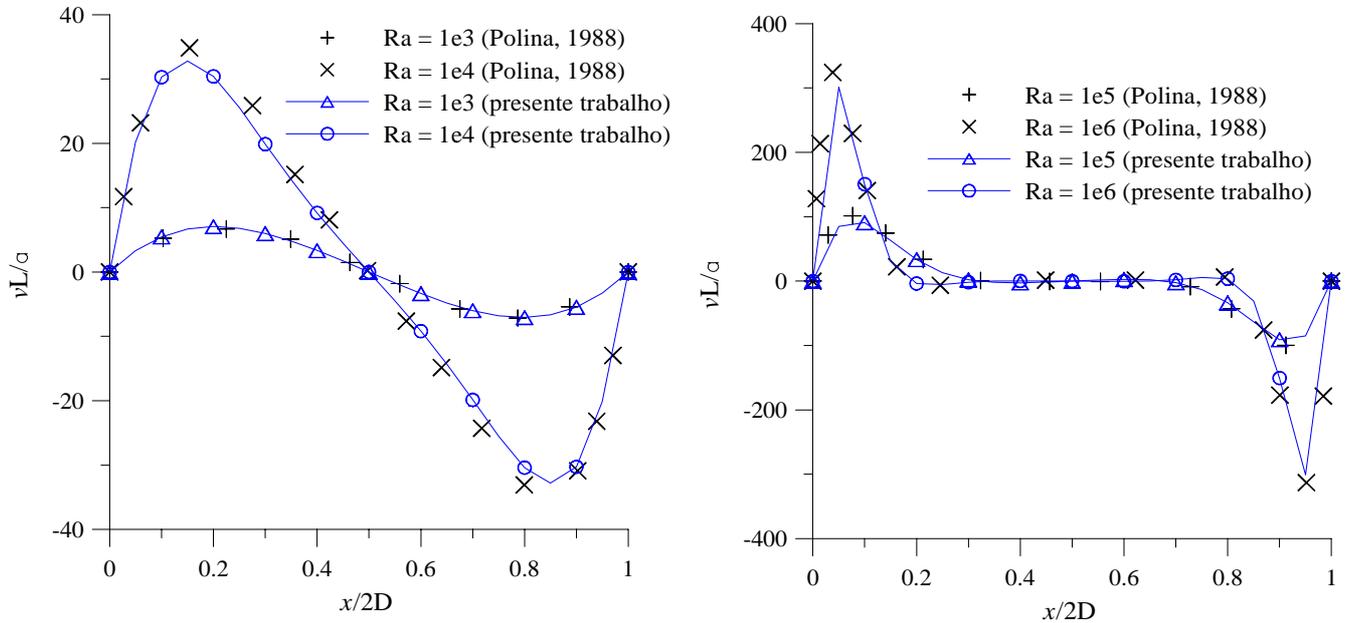


Fig. 7. Perfis de  $v$  (adimensional) ao longo da linha média horizontal, cavidade retangular.

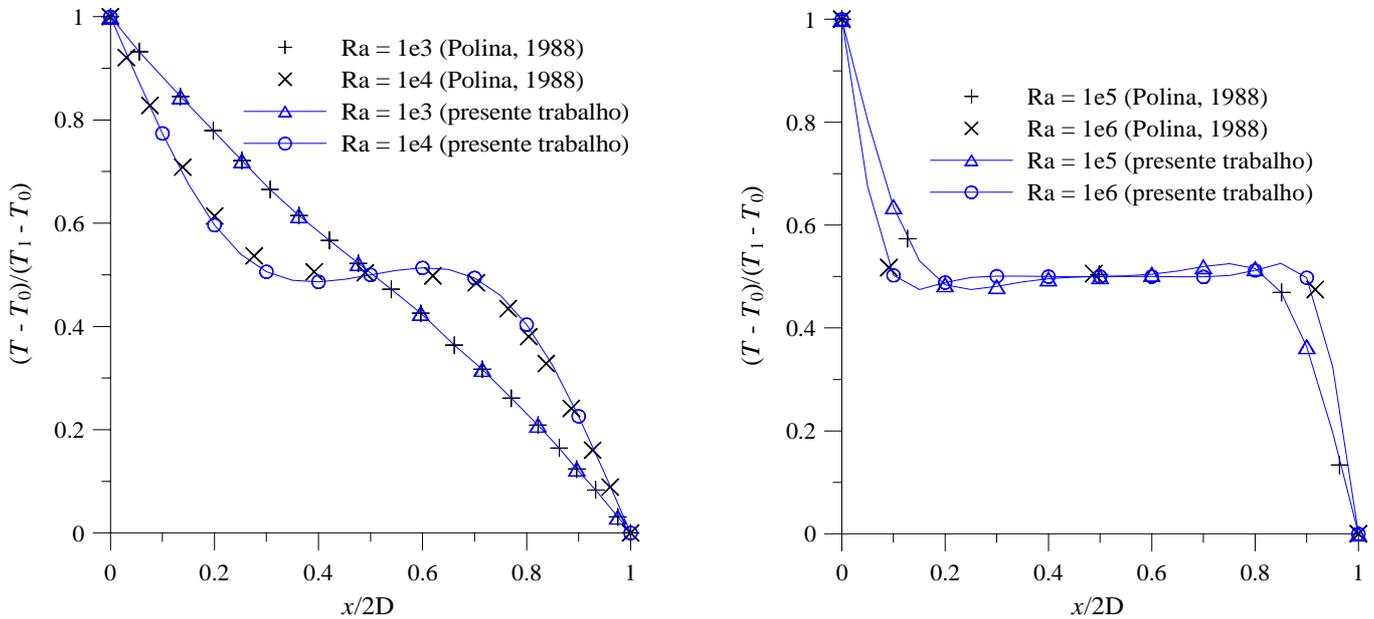


Fig. 8. Perfis de temperatura adimensional ao longo da linha média vertical, cavidade retangular.

A Fig. 9 apresenta os perfis adimensionais de  $v$  e da temperatura ao longo da linha média horizontal,  $Ra = 10^6$ , para a cavidade retangular, obtidos com uma malha cartesiana mais refinada (1581 volumes) e com refino próximo às paredes (754 volumes) Fig. 6(a), e com a malha não-estruturada da Fig. 6(c). Os resultados de Polina (1988) são rerepresentados, observando-se novamente a boa concordância entre as curvas, indicando que a solução está independente da malha. Além disso, conclui-se que não há necessidade de refino próximo às paredes. O número maior

de volumes da malha não-estruturada foi necessário, conforme mencionado anteriormente, a fim de se evitarem volumes muito distorcidos, o que dificultaria a captura dos gradientes.

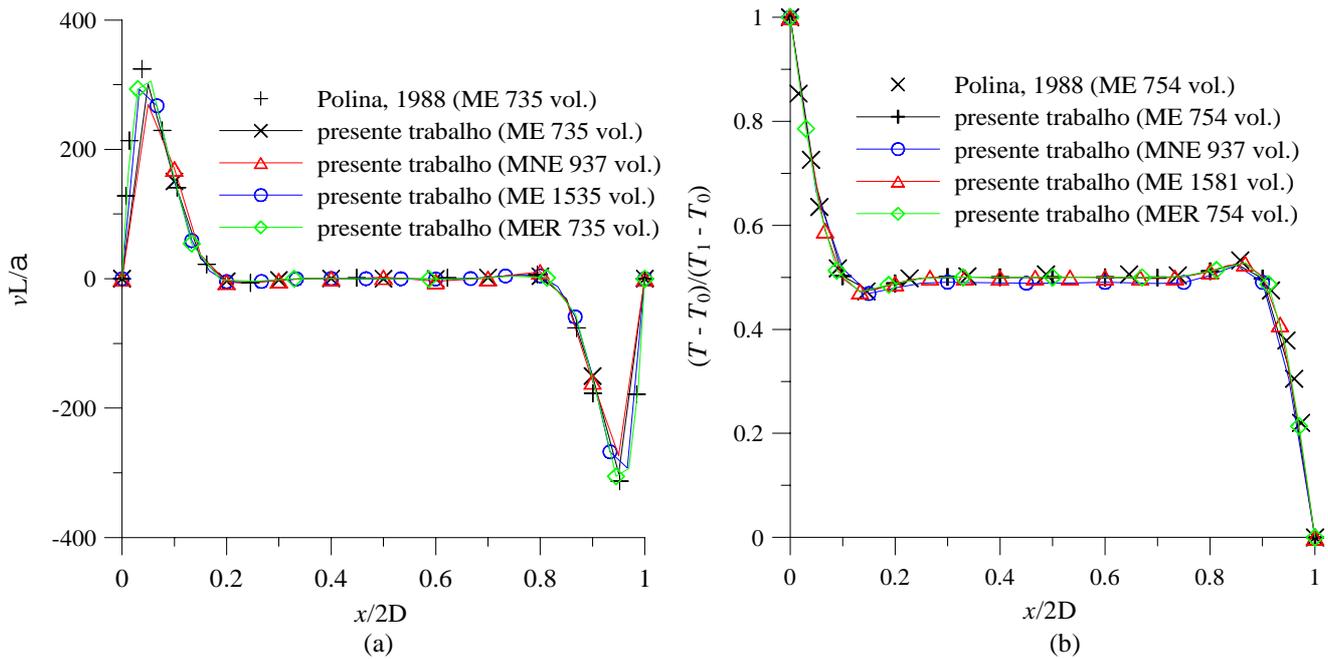


Figura 9. Perfis adimensionais ao longo da linha média horizontal para cavidade retangular,  $Ra = 10^6$  (ME indica malha estruturada, MNE, não-estruturada, MER, estruturada com refino nas paredes): (a)  $v$ ; (b) temperatura.

As Figs. 10 e 11 apresentam os perfis adimensionais de  $v$  e da temperatura ao longo da linha média horizontal, para a cavidade hexágona, malha estruturada. Os padrões do escoamento e da distribuição de velocidade são semelhantes aos apresentados pela cavidade retangular. Observa-se, entretanto, o aparecimento do fenômeno da inversão térmica para  $Ra = 10^4$ , o que não ocorre com a cavidade retangular. Novamente, há uma boa concordância com os resultados de Polina (1988).

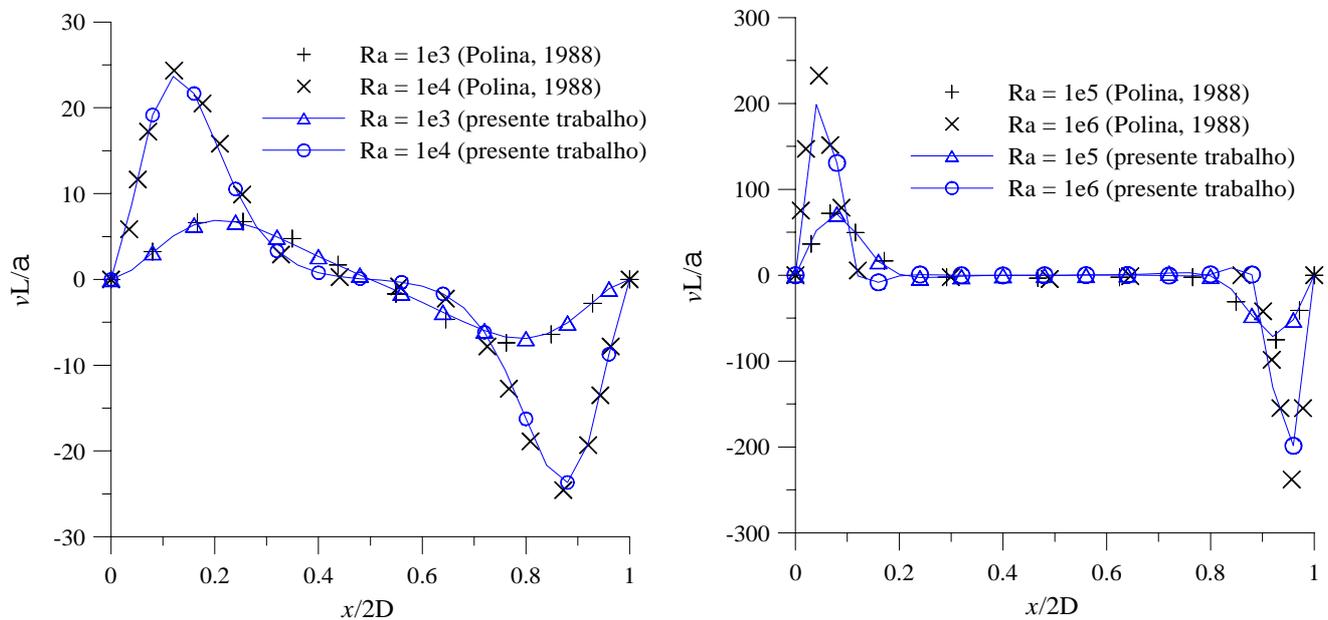


Figura 10. Perfis de  $v$  (adimensional) ao longo da linha média horizontal, cavidade hexagonal.

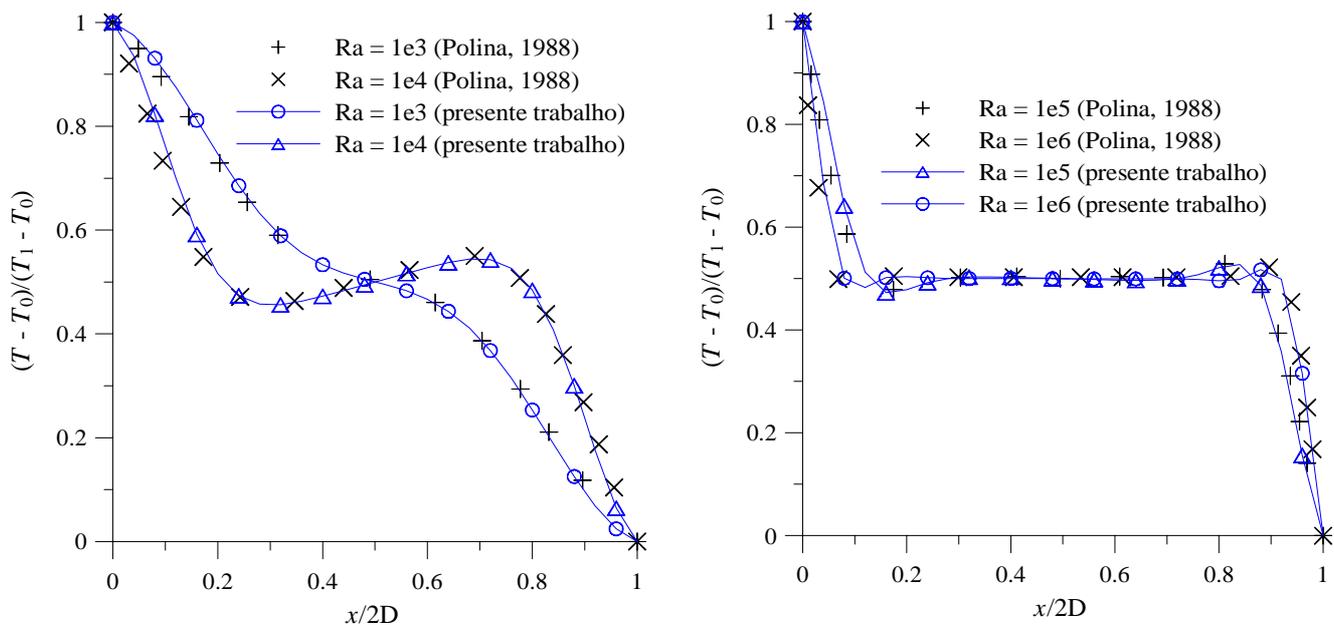


Figura 11. Perfis de temperatura adimensional ao longo da linha média vertical, cavidade hexagonal.

A Fig. 12 mostra os perfis adimensionais de  $v$  e de temperatura, para a cavidade hexagonal,  $Ra = 10^6$ , obtidos com a malha não-estruturada da Fig. 6 (b). Novamente, há uma boa concordância entre os resultados das malhas estruturada, não-estruturada e os de Polina (1988).

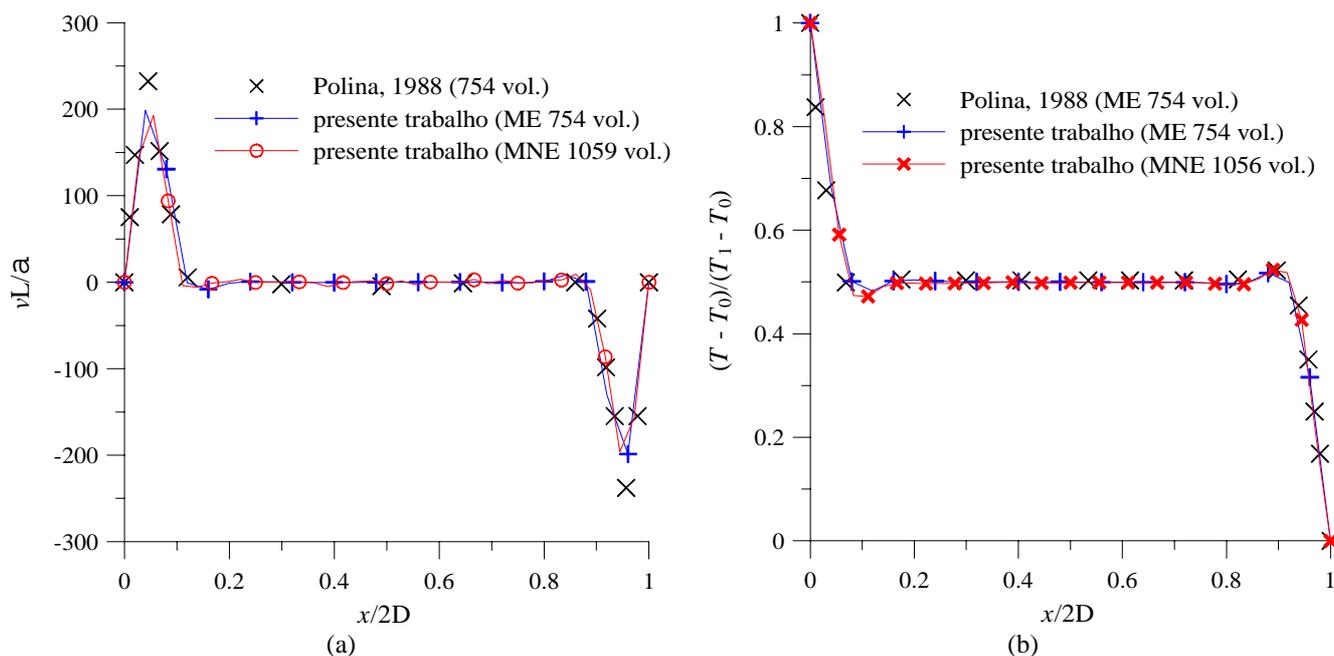


Figura 12. Perfis adimensionais ao longo da linha média horizontal para cavidade hexagonal,  $Ra = 10^6$  (ME indica malha estruturada e MNE, não-estruturada): (a)  $v$ ; (b) temperatura.

## 5. Conclusões

O problema de convecção natural em uma cavidade retangular e hexagonal foi abordado, empregando-se o Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos (CVFEM). Nesta metodologia, as equações de transporte são resolvidas simultaneamente, o que elimina o problema do acoplamento pressão-velocidade inerente às formulações segregadas. No caso, em cada ciclo iterativo, as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento são resolvidas ao mesmo tempo, obtendo-se, em seguida, o campo de temperatura via equação da energia.

Os resultados, expressos na forma de perfis adimensionais de velocidade e de temperatura, foram comparados àqueles obtidos por Polina (1988), que estudou os mesmos problemas, empregando o método dos volumes finitos, com

formulação segregada. Observaram-se os mesmos padrões e consistência física entre os dois trabalhos, apesar dos mesmos não coincidirem quanto aos valores máximos obtidos. Destaca-se que a presente formulação apresentou soluções independentes da malha com malhas razoavelmente grosseiras e sem necessidade de refino localizado próximos das paredes. Outra característica importante da metodologia baseada em elementos é a convergência para um largo espectro de passos de tempo. No presente caso foram empregados passos de tempo para o problema acoplado (massa e quantidade de movimento) da ordem de  $10^2$ .

## 6. Referências

- Araújo, A. L. S., “Solução de Escoamentos de Fronteira Livre Usando Malhas Não-Estruturadas e Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos Finitos”, tese de doutorado, UFPB, Paraíba, 2004.
- Maliska, C. R., 2004, “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, LTC, Rio de Janeiro, Brasil.
- Patankar, S. V., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere/McGraw-Hill, New York, pp. 96-100.
- Raw, M. J., “A New Control-Volume-Based Finite Element Procedure for the Numerical Solution of the Fluid Flow and Scalar Transport Equations”, tese de doutorado, University of Waterloo, 1985.
- Raw, M. J. e Schneider, G. E., “A Skewed Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite Element Convection-Diffusion Computation”, *Num. Heat Transfer*, 9, 1-26, 1986.
- Polina, S., “Previsão Numérica da Convecção Natural Laminar em Cavidades Hexagonais”, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- Souza, J. A., “Implementação de um Método de Volumes Finitos com Sistema de Coordenadas Locais para a Solução Acoplada das Equações de Navier-Stokes”, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

### **Heat transfer and incompressible fluid flows using an element based finite volume method with unstructured meshes**

#### **André Luiz de Souza Araújo**

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica e de Produção  
Bloco 714, Campus do Pici - CEP.: 60.455-860 – Caixa Postal: 12.144  
Fortaleza – CE  
[araujoals@yahoo.com](mailto:araujoals@yahoo.com)

#### **José Maurício Alves de Matos Gurgel**

Universidade Federal da Paraíba. Centro de Tecnologia.  
Departamento de Tecnologia Mecânica  
CEP: 58051-970 – Caixa Postal: 58051-970  
João Pessoa – PB  
[gurgel@les.ufpb.br](mailto:gurgel@les.ufpb.br)

#### **Francisco Marcondes**

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica e de Produção  
Bloco 714, Campus do Pici - CEP.: 60.455-860 – Caixa Postal: 12.144  
Fortaleza – CE  
[marconde@dem.ufc.br](mailto:marconde@dem.ufc.br)

#### **Abstract**

*Incompressible flows present several drawbacks when solved by segregated procedures such as the optimal time-step choice and sometimes demands several CPU time just to solve steady state problems. The present work presents the solution of the natural convection problems in generalized cavities using the finite volume framework based in elements with a colocated variable arrangement. The momentum and mass equations are solved simultaneously in order to avoid the pressure-velocity couple. After the pressure and velocity field are gotten the energy equation is solved in an isolated basis. Although the methodology can be used to solve transient problems just results to the steady state natural convection are presented. The results obtained with structured and non-structured meshes are presented in terms of velocity and temperature profiles for several Raleigh numbers for two kind of cavities: a rectangular and a hexagonal one.*

Key words: Finite volume method, unstructured meshes, coupled solution.