

UM MÉTODO SEMI-IMPLÍCITO PARA RESOLVER ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM SUPERFÍCIE LIVRE

C. M. Oishi

oishi@lcad.icmc.usp.br

J. A. Cuminato

jacumina@lcad.icmc.usp.br

V. G. Ferreira

pvgf@lcad.icmc.usp.br

A. Castelo

castelo@lcad.icmc.usp.br

M. F. Tomé

murilo@lcad.icmc.usp.br

Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, USP, Av. Trabalhador São Carlense, 400, C.P. 668, 13251-900, São Carlos, SP, Brasil

N. Mangiavacchi

norberto@superig.usp.br

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rua São Francisco Xavier, 524, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. *O presente trabalho concentra-se em um método numérico para resolver escoamentos newtonianos bidimensionais, transientes, incompressíveis e com superfície livre. Os termos difusivos nas equações de Navier-Stokes são tratados implicitamente por meio das formulações Implícita Regressiva (IR), Crank-Nicolson (CN) e Adams-Bashforth/Crank-Nicolson (AB/CN). Os termos convectivos são tratados explicitamente por um esquema upwind de alta ordem limitado. As condições de contorno para o campo de pressão na superfície livre são tratadas implicitamente, e para o campo de velocidade explicitamente. Os resultados numéricos mostram que o método elimina a restrição de estabilidade do método explícito original. Para baixos números de Reynolds, o método é robusto e produz resultados numéricos que comparam muito bem com soluções analíticas e experimentais.*

Palavras chave: *Equações de Navier-Stokes; método de diferenças finitas; método semi-implícito.*

1. Introdução

Em muitos problemas de escoamentos de fluidos, as forças viscosas são predominantes. Várias técnicas numéricas foram desenvolvidas com o objetivo de solucionar problemas viscosos e incompressíveis. Neste tipo de escoamento, o número de Reynolds geralmente é menor que 1. Devido a esse fato, técnicas numéricas que utilizam uma formulação explícita, como a metodologia GENSMAC descrita por Tomé & McKee, 1994, apresentam restrições severas de estabilidade numérica dificultando a aplicação dessas técnicas nestes problemas. Uma motivação no uso de métodos implícitos para equações de Navier-Stokes é explorar a favorável propriedade de estabilidade. Autores como Roache, 1998 e Briley & McDonald, 2001 apresentam, em seus trabalhos, um resumo de vários métodos que utilizam formulações implícitas para resolver as equações de Navier-Stokes. Em particular, no caso de fluidos incompressíveis, alguns dos trabalhos mais conhecidos que utilizam formulações implícitas são: Pracht, 1971, Deville, 1975, Turek, 1996, Armenio, 1997, Manna & Vacca, 1999, Vuik et al., 2000, Bijl et al., 2002, Street, 2003 e muitos outros. Reconhecendo o interesse considerável em soluções numéricas representativas para escoamentos incompressíveis com superfície livre a baixo número de Reynolds, o presente trabalho apresenta um método semi-implícito para resolução numérica de escoamentos onde as forças viscosas são predominantes. Por utilizar formulações implícitas este método pode eliminar as restrições de estabilidade impostas por uma

formulação explícita. Desta forma, neste trabalho será proposta uma modificação na metodologia GENSMAC aplicando-se formulações implícitas e novas equações para as condições de contorno na superfície livre.

Como na metodologia GENSMAC, a formulação matemática do método apresentado neste trabalho baseia-se em um método de projeção (Chorin, 1967 e Gresho, 1990), e utiliza a técnica de diferenças finitas, para resolver as equações de conservação. Em forma adimensional e conservativa, as equações que modelam problemas de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

em que t é o tempo, $\mathbf{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$ é o vetor campo de velocidades, $p = p(x, y, t)$ é a pressão dividida pela massa específica e $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ é o campo gravitacional. Os parâmetros $Re = LU/\nu$ e $Fr = U/\sqrt{gL}$ correspondem, respectivamente, aos números de Reynolds e de Froude. L e U representam, respectivamente, o comprimento e a velocidade característica, e ν a viscosidade cinemática.

2. Método Numérico

Os métodos numéricos propostos neste trabalho para resolver as equações de conservação Eqs. (1) e (2) são, basicamente, alterações do método GENSMAC. A partir da Eq. (1) define-se um campo de velocidade intermediário como

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right\}, \quad (3)$$

onde \tilde{p} é uma pressão provisória. Geralmente, o campo de velocidade $\tilde{\mathbf{u}}$ não é solenoidal, pois $\tilde{p} \neq p$. Para $t = t_0$, considera-se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$ satisfazendo as mesmas condições de contorno. As principais alterações na metodologia GENSMAC foram as aplicações das Formulações Implícitas (FI) apenas nos termos difusivos. Neste trabalho, não foi testado um método totalmente implícito, muito embora o passo de tempo nesta formulação ser possivelmente maior do que os necessários nos métodos semi-implícitos. E a aplicação de um método totalmente implícito resultaria num sistema de equações não-lineares acoplado as velocidades u e v , tornando o método muito caro.

Duas variações dos métodos de projeção foram empregados. O primeiro método de projeção utilizado pelas FI na metodologia GENSMAC é o método de projeção baseado em Chorin, 1967 e conhecido como *métodos de projeção sem-pressão*, e aqui denotado como *P1*. Este método elimina o gradiente de pressão tentativo da Eq. (3). Outra modificação nesta equação é a aplicação de métodos implícitos para os termos viscosos, tornando a Eq. (3) implícita na integração temporal. Os métodos implícitos utilizados para o método *P1* foram os tradicionais Implícito Regressivo (IR) e Crank-Nicolson (CN). Com o objetivo de tentar melhorar a precisão temporal, um método tipo Adams de 2-passos também foi utilizado. Este método utiliza o método CN para os termos viscosos e o método Adams-Bashforth, que é uma técnica explícita, para os termos convectivos da Eq. (3). Desta forma, este método é conhecido como Adams-Bashforth/Crank-Nicolson (AB/CN). Portanto a Eq. (3), na forma discreta no tempo, aplicando o método *P1* e utilizando as formulações implícitas, é reescrita da seguinte forma

- *P1 - Método IR*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (4)$$

- *P1 - Método CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (5)$$

- *P1 - Método AB/CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{n-1} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (6)$$

Utilizando-se a teoria dos métodos de projeção, tem-se que um campo de velocidade final é decomposto por um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}$ e um gradiente de um potencial escalar $\nabla \psi$. No método *P1*, a função

escalar ψ é calculada em todo domínio. Baseado em um *método de projeção com acréscimo da pressão*, as *FI* foram aplicadas para uma segunda variação dos métodos de projeção. A conservação do gradiente de pressão tentativo na Eq. (3) é a diferença fundamental do método *P1*. No presente trabalho, o método que conserva o gradiente de pressão será denotado como *P2*. Da mesma forma como no método de *P1*, os termos viscosos foram tomados implicitamente, reescrevendo a Eq. (3) para *P2*, da seguinte forma

- *P2 - Método IR*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (7)$$

- *P2 - Método CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (8)$$

- *P2 - Método AB/CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{n-1} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (9)$$

O desenvolvimento do método *P2* utilizando *FI* é análogo ao método *P1*, com a diferença que agora $\tilde{p} \neq 0$ e será calculada. No método GENSMAC, a equação de Poisson para o potencial ψ é aplicada para todo o domínio que contém fluido, com as devidas condições de contorno descritas em Tomé & McKee, 1994. Nos métodos *P1* e *P2* utilizando *FI*, além da equação de Poisson, uma nova equação é imposta sobre o potencial ψ para a superfície livre. Essa nova equação é calculada pela equação da pressão na superfície livre. Quando trabalha-se na superfície livre do fluido, é necessário impor condições sobre a velocidade e pressão. Tais condições, considerando tensão superficial nula, se resumem como

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (10)$$

em que $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ é o vetor unitário normal, externo à superfície, $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$ é o vetor unitário tangente à superfície livre. Substituindo o tensor de tensões total $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$, onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor tensão de cisalhamento e \mathbf{I} o tensor identidade, nas Eqs. (10) obtêm-se

$$-p + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y \right] = 0, \quad (11)$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x m_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_y + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] (n_y m_x + n_x m_y) = 0. \quad (12)$$

Derivam-se as equações para ψ nas superfície livre por meio da equação da pressão Eq. (11) com as velocidade implícitas, ou seja, as condições de contorno nas superfícies livres também são tomadas implícitas. A aplicação dos métodos *P1* e *P2* para as formulações implícitas no GENSMAC resulta em 3 sistemas lineares esparsos: 2 devido as equações que calculam as velocidades intermediárias e 1 devido ao cálculo do potencial escalar ψ . Quando se aplica as formulações implícitas, como o método *IR* ou *CN*, os termos viscosos são tratados de forma implícita, e desta forma é necessário resolver os sistemas provenientes das velocidades \tilde{u} e \tilde{v} . Os sistemas lineares resultantes das equações Eqs. (4)–(9) são esparsos, definidos positivos e simétricos. Devido a essas propriedades, um método iterativo eficiente é o método dos Gradientes Conjugados (GC). O sistema linear resultante para o calculo de ψ é esparso, mas não-simétrico, e portanto o método iterativo utilizado foi o método dos Gradientes Bi-conjugados com Precondicionamento (GBCP). Além do método GBCP existem outras alternativas recomendadas na literatura para problemas esparsos: os métodos GMRES (Generalized Minimal Residual), PCGS (Preconditioned Conjugate Gradient Squared) entre outros. Entretanto, parece não haver consenso de um método que seja claramente melhor. Mais detalhes do método numérico, com as formulações implícitas, e das condições de contorno nas superfícies livres podem ser encontrados em Oishi, 2004.

2.1. Estabilidade dos Métodos *P1* e *P2* utilizando Formulações Implícitas

A restrição do tratamento explícito dos termos viscosos exige que

$$\delta t_{visc} \leq 0.5 Re [(\delta x)^{-2} + (\delta y)^{-2}]^{-1}, \quad (13)$$

onde δt_{visc} é o passo temporal permitido pela condição sobre os termos viscosos. A aplicação das formulações implícitas, apresentadas neste trabalho, sobre os termos viscosos, como foi feita nas equações Eqs. (4)–(9), em princípio pode eliminar a restrição Eq. (13). Desta forma, as restrições sobre δt para os métodos *P1* e *P2* utilizando *FI* são mais relaxadas que aquelas da metodologia GENSMAC.

2.2. Algoritmo

Após apresentar os métodos *P1* e *P2* utilizando-se FI, pode-se escrever um algoritmo, com os passos inter-relacionados. A seqüência de passos, assim como no algoritmo do método GENSMAC, consiste em atualizar as variáveis discretas, a partir de um tempo inicial t_n . O algoritmo é descrito como segue:

- **Passo 1:** Para o método *P1*, como o gradiente de pressão $\nabla\tilde{p}$ é eliminado da formulação, neste passo, deve-se calcular as velocidades nas superfícies pela Eq. (12). No método *P2*, além do cálculo das velocidades nas superfícies livres, como o gradiente de pressão é conservado, $\tilde{p} = p^n$, onde p^n é a pressão calculada no tempo anterior pela Eq. (11);
- **Passo 2:** Calcular um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ em $t = t_n + \delta t$. Quando utiliza-se o método *P1*, se o método implícito escolhido para os termos viscosos for o *IR*, utiliza-se a Eq. (4), se for *CN* Eq. (5) e se a opção for o método *AB/CN*, então a equação utilizada é Eq. (6). Analogamente, quando o método *P2* é aplicado, a Eq. (7) para o método *IR* é utilizada, se for *CN* utiliza-se a Eq. (8) ou Eq. (9) para *AB/CN*;
- **Passo 3:** Resolver a equação de Poisson para o potencial ψ na região contendo fluido, e nas superfícies livres, calcular ψ por meio das equações impostas pela Eq. (11) com as velocidade implícitas. Detalhes sobre as condições de contorno para a equação de Poisson e das equações para ψ nas superfícies livres podem ser vistas em Oishi, 2004;
- **Passo 4:** Atualizar o campo de velocidade final por meio da equação $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla\psi^{n+1}$, em todo o domínio;
- **Passo 5:** Atualizar o campo de pressão final. No método *P1*, a pressão é atualizada pela equação

$$p^{n+1} = \psi^{n+1}/\delta t, \quad (14)$$

e para o método *P2*, utiliza-se a equação

$$p^{n+1} = \tilde{p} + \psi^{n+1}/\delta t; \quad (15)$$

- **Passo 6:** Determinar as novas posições das partículas marcadoras virtuais resolvendo-se as equações diferenciais ordinárias $\dot{x} = u$ e $\dot{y} = v$, por Euler explícito.

3. Discretização

No presente trabalho, para resolver numericamente as equações Eqs. (1) e (2) utilizado-se formulações implícitas, uma malha diferenciada foi utilizada. Nesse tipo de malha, a indexação das incógnitas na célula, como a pressão, segue a mesma indexação da célula, e as velocidades têm indexação fracionária. A técnica de discretização utilizada para resolver o conjunto de equações Eqs. (1) e (2) é o método de diferenças finitas. Os termos viscosos das equações Eqs. (4)–(9) são tratados de forma implícita e são aproximados por diferenças centrais de segunda ordem. A derivada temporal é aproximada pelo método de Euler explícito, enquanto que o gradiente de pressão é aproximado por diferenças centrais. Os termos convectivos são aproximados pelo esquema monotônico e anti-difusivo VONOS (ver Ferreira et al., 2002). A equação de Poisson é aproximada pelo operador Laplaciano de cinco pontos. Utilizou-se o ambiente de simulação FreeFlow2D (ver Castelo et al., 2000), para a modelagem, simulação e visualização dos dados dos escoamentos com superfícies livres.

4. Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentam-se os resultados de simulações numéricas obtidas com as formulações implícitas. As comparações têm como objetivo mostrar a eficiência dos métodos *P1* e *P2* utilizando-se as formulações *IR*, *CN* e *AB/CN*, em relação ao método explícito em problemas de escoamentos com $Re < 1$. Tal eficiência é clara nos resultados apresentados para tamanho do passo temporal, o número de iterações, o tempo de processamento e outras propriedades importantes para comparar as formulações explícita e implícitas.

4.1. Validação

Para a validação dos métodos numéricos *P1* e *P2* com *FI*, utilizou-se o escoamento de *Hagen-Poiseuille*, isto é, o problema de escoamento de um fluido entre duas placas paralelas. Este problema confinado particular foi escolhido porque, até presente, os autores não conhecem na literatura especializada dados de um problema com

superfícies livres envolvendo número de Reynolds menor que 1. Nesta validação foram realizadas comparações entre as soluções numéricas e a solução analítica para este problema, que pode ser encontrada em Batchelor, 1970. Nesta simulação, as placas paralelas estão separadas pela distância adimensional $L = 1$, formando um canal inicialmente vazio. Ao injetar fluido na seção de entrada utilizando um perfil parabólico, este vai escoando com superfície livre até a saída do canal, e o estado estacionário se estabelece. Os métodos $P1$ e $P2$ utilizando as FI foram aplicados para o escoamento de *Hagen-Poiseuille* sobre três malhas, definidas respectivamente, como grossa (**M1**, onde $\delta x = \delta y = 0,1m$); intermediária (**M2**, onde $\delta x = \delta y = 0,05m$), e fina (**M3**, onde $\delta x = \delta y = 0,025m$). Para avaliar os resultados numéricos e mostrar a convergência dos métodos apresentados neste trabalho foi feito o cálculo do erro relativo na norma l_2 entre as soluções numéricas e a analítica. Esses resultados são apresentados na Tab. (1). Para uma melhor visualização, a Fig. (1) apresenta os resultados numéricos. Como pode-se observar nesta figura os resultados são bastante semelhantes à solução analítica, ou seja, os valores numéricos obtidos pelos métodos $P1$ e $P2$ utilizando as FI , sobre as três malhas, estão em boa concordância com a solução analítica.

Tabela 1: Resultados do δt e do erro relativo (Er) para o escoamento de *Hagen-Poiseuille* para $Re = 0.1$ nas malhas **M1**, **M2** e **M3**.

Método	M1		M2		M3	
	$\delta t(s)$	Er	$\delta t(s)$	Er	$\delta t(s)$	Er
Explícito	$1,0 \times 10^{-4}$	2,5E-05	$2,5 \times 10^{-5}$	1,8E-06	$6,25 \times 10^{-6}$	1,3E-07
$P1-IR$	$1,25 \times 10^{-3}$	7,1E-04	$2,5 \times 10^{-4}$	3,7E-05	$6,25 \times 10^{-5}$	3,2 E-06
$P1-CN$	$2,0 \times 10^{-3}$	5,6E-04	$5,0 \times 10^{-4}$	4,5E-05	$1,25 \times 10^{-4}$	3,2E-06
$P1-AB/CN$	$2,0 \times 10^{-3}$	1,6E-04	$5,0 \times 10^{-4}$	2,5E-05	$1,25 \times 10^{-4}$	2,1E-06
$P2-IR$	$1,0 \times 10^{-2}$	2,5E-05	$1,25 \times 10^{-2}$	1,8E-06	$6,25 \times 10^{-3}$	1,2E-07
$P2-CN$	$2,0 \times 10^{-3}$	2,5E-05	$5,0 \times 10^{-4}$	1,8E-06	$5,0 \times 10^{-4}$	1,1E-07
$P2-AB/CN$	$2,0 \times 10^{-3}$	2,5E-05	$5,0 \times 10^{-4}$	1,8E-06	$5,0 \times 10^{-4}$	1,1E-07

Para problemas tipo *creep flow*, as FI apresentaram ser mais estáveis que o método explícito. A Tab. (2) mostra os resultados dos valores máximos de δt permitidos pelas formulações implícitas e pelo método explícito. Como já era de se esperar, os métodos que utilizam a formulação IR admitiram valores de δt maiores que a formulação explícita. Entretanto, para nossa surpresa, o δt usando IR tornou-se maior que os das formulações CN e AB/CN . Apesar de Re diminuir, a restrição do passo temporal para o método explícito Eq. (13) foi superada pelos métodos $P1$ e $P2$ utilizando as FI . Como pode ser visto na Tab. (2), os métodos que utilizam a formulação IR exigiram δt cerca de 500 à 500000 vezes maiores que o método explícito, quando Re diminuiu, enquanto que as formulações CN e AB/CN apresentaram δt cerca de 20 vezes maiores para toda faixa de números de Reynolds considerada.

Tabela 2: Limite de estabilidade para $\delta t(s)$ no escoamento de *Hagen-Poiseuille* sobre a malha **M2**, com diferentes valores para Re .

Método	$Re = 0,1$	$Re = 0,01$	$Re = 0,001$	$Re = 0,0001$
Explícito	$2,5 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-6}$	$2,5 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{-8}$
$P1-IR$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$
$P1-CN$	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-7}$
$P1-AB/CN$	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-7}$
$P2-IR$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$
$P2-CN$	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-7}$
$P2-AB/CN$	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-7}$

4.2. Preenchimento de uma caixa

Na simulação apresentada a seguir, considera-se o preenchimento de uma caixa por um fluido newtoniano com $Re = 0,1$. Nesta simulação foi realizada uma comparação de tempo de processamento utilizando os métodos $P1$ e $P2$ com as FI , e o método explícito. Para estes modelos, uma malha de $\delta_x = \delta_y = 0,00050m$ foi utilizada para todos os métodos. O campo gravitacional age sob o escoamento e o tempo final das simulações foi $t = 5s$. Uma ilustração dessa simulação é apresentada na Fig. (2) onde pode-se observar o comportamento do fluido. Como os resultados obtidos pelo método $P1$ utilizando as formulações IR , CN e AB/CN e aqueles do método $P2$ utilizando as formulações IR e AB/CN foram muito próximos daquele do método $P2$ utilizando a formulação

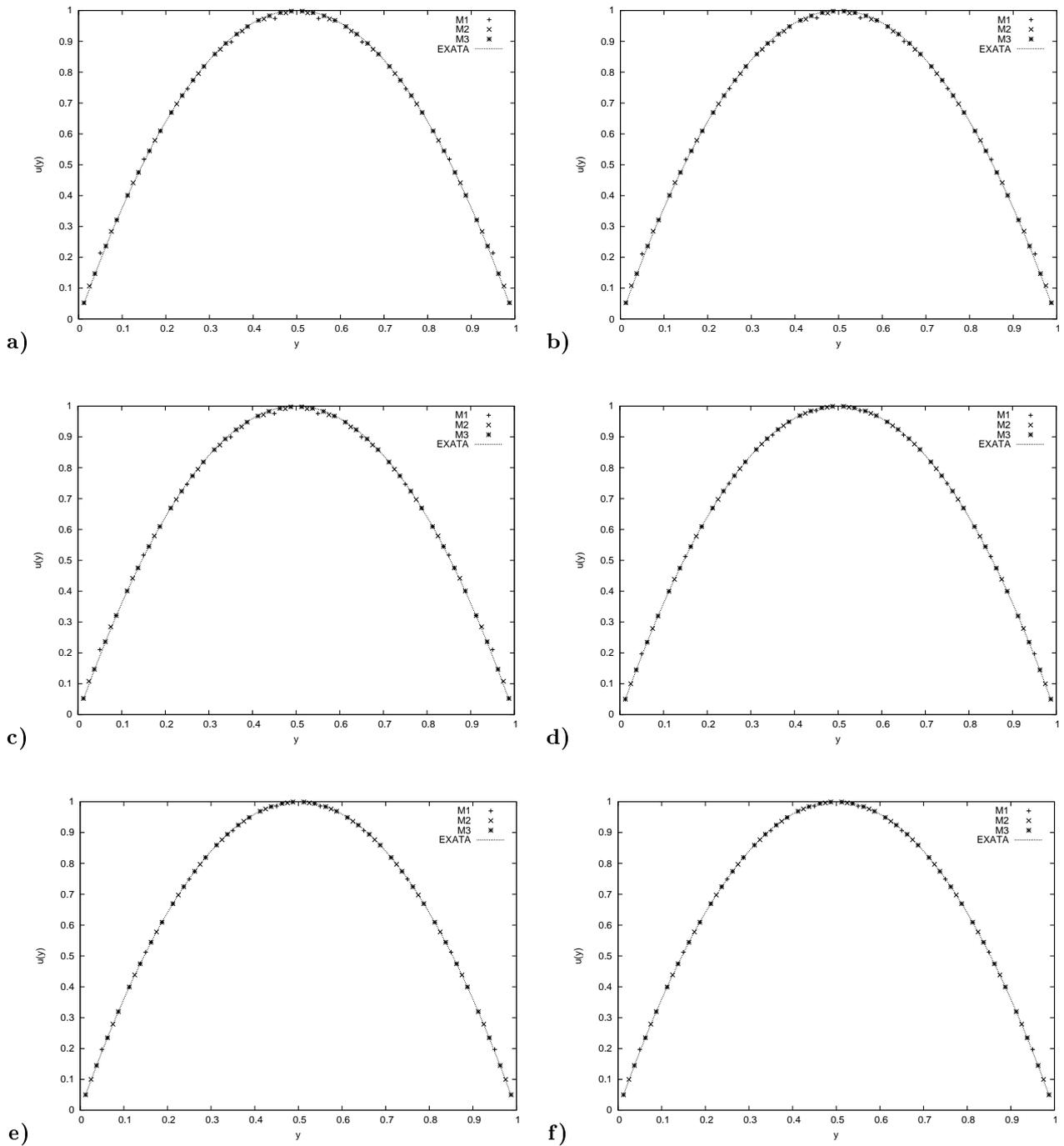


Figura 1: Comparação entre soluções numéricas obtida pelo método $P1$ e $P2$ utilizando FI e a solução analítica, sobre as três malhas, com $Re = 0,1$. As figuras a)-c) correspondem ao método $P1$ utilizando as formulações IR, CN e AB/CN, e d)-f) o método $P2$ utilizando as formulações IR, CN e AB/CN respectivamente.

CN, apenas um desses resultados foi apresentado na Fig. (2). A comparação entre os métodos que utilizam as formulações implícitas e explícita, verificando o valor de δt permitido para cada método, o número de iterações e o tempo de processamento, para o tempo de simulação $t = 0,28s$ podem ser vistos na Tab. (3). Novamente, as formulações implícitas superaram a restrição de estabilidade do método explícito, como era de se esperar, e utilizaram menos iterações para se obter a solução no tempo $t = 0,28s$.

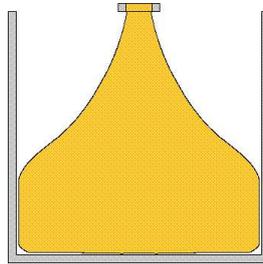


Figura 2: Resultado numérico para a simulação do preenchimento de uma caixa, com $Re = 0,1$ e tempo de simulação $t = 0,28s$, para o método $P2$ utilizando a formulação CN.

Tabela 3: Resultados para o escoamento de um jato preenchendo um caixa de $L = 0,05m$, $U = 1,0 \text{ ms}^{-1}$, $Re = 0,1$ no instante $t = 0,28s$.

Método	$\delta t(s)$	Número de iterações	Tempo de processamento-(m:s)
Explícito	$5,0 \times 10^{-7}$	559998	430 : 59
$P1-IR$	$3,0 \times 10^{-5}$	11200	41 : 52
$P1-CN$	$1,0 \times 10^{-5}$	28000	99 : 16
$P1-AB/CN$	$1,0 \times 10^{-5}$	28000	106 : 18
$P2-IR$	$6,0 \times 10^{-5}$	8960	21 : 41
$P2-CN$	$1,0 \times 10^{-5}$	28000	92 : 51
$P2-AB/CN$	$1,0 \times 10^{-5}$	28000	96 : 25

4.3. Comparação com resultados experimentais

Finalmente, apresenta-se comparações qualitativas das simulações numéricas com os experimentos descritos em Tomé et al., 1999. Para este modelo, uma malha de $\delta_x = \delta_y = 0,00050m$ foi utilizada para todos os métodos, com o campo gravitacional agindo sobre o escoamento e o tempo final das simulações foi $t = 5s$. A Fig. (3) apresenta a comparação entre as soluções numéricas e o experimento. Nesta figura, o método numérico utilizado foi o método $P2$ com a formulação IR . Os outros métodos que utilizam as formulações implícitas, não são apresentados com o resultado experimental de Tomé et al., 1999, pois apresentaram resultados bastante semelhantes ao método $P2$ utilizando a formulação IR . As formulações implícitas apresentaram, como anteriormente, valores maiores para δt , superando a restrição do método explícito descrito por Tomé et al., 1999. Apenas como ilustração, na Fig. (4) são apresentadas comparações entre o método explícito (método original GENSMAC) e os métodos $P1$ e $P2$ utilizando as FI, para a velocidade v .

5. Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas modificações na metodologia GENSMAC. Essas modificações incluem formulações implícitas em variações do método de projeção. Outra modificação é o tratamento implícito das condições de contorno nas superfícies livres para a pressão. As formulações implícitas apresentaram um desempenho satisfatório para problemas transientes com superfície livre. A validação mostrou a comparação entre a solução analítica e a solução numérica dos métodos $P1$ e $P2$ utilizando FI. Nas simulações de jatos, os resultados numéricos obtidos foram próximos entre si. Os resultados comprovaram a capacidade desses métodos de simular problemas com superfícies livres. Entretanto, as formulações CN e AB/CN introduziram oscilações numéricas, e como consequência, o valor de δt permitido foi mais restrito do aquele da formulação IR . Mais detalhes sobre as oscilações numéricas do método CN podem ser encontrados em Hirsch, 1989 e Turek, 1996. Embora as formulações CN e AB/CN tenham permitido um passo temporal maior que o método explícito, a formulação IR mostrou ser mais estável permitindo valores de δt bem maiores. Recomenda-se escolher o valor do passo temporal com muito cuidado, para que a precisão numérica não seja afetada. Em todas as

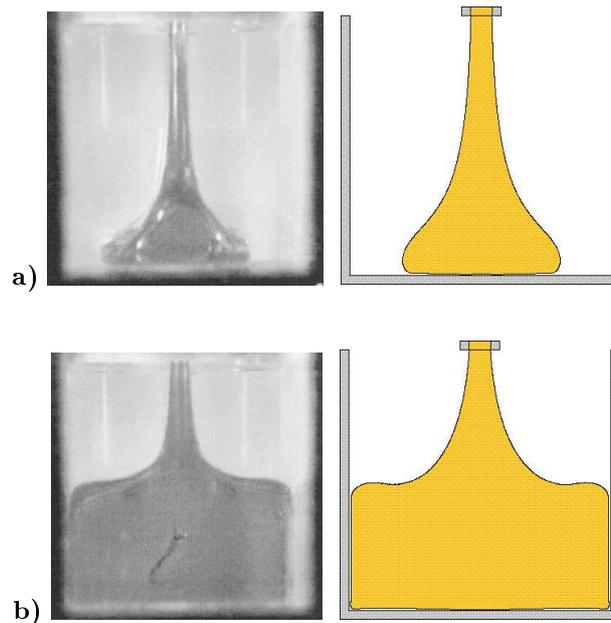


Figura 3: Solução experimental (esquerda) e numérica (a solução da direita é obtida pelo método *Projeção-2* utilizando a formulação *IR*). **a)** $t = 0,14s$ e **b)** $t = 0,34s$.

simulações, as formulações implícitas superaram o valor do passo temporal do método explícito, sendo que em alguns casos, como no escoamento no canal, o δt foi aproximadamente 500000 vezes maior que o do método explícito. Portanto, no problema de *Hagen-Poiseuille*, os métodos *P1* e *P2* utilizando as formulações implícitas apresentaram erros relativos próximos ao do método explícito com número de iterações bem menor. Em todas as simulações, o tempo de processamento exigido pelas formulações implícitas foram significativamente menores que a formulação explícita. Portanto, os métodos *P1* e *P2* utilizando as formulações implícitas mostraram ser capazes de resolver problemas viscosos com superfícies livres.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP (Processos 01/12540-2 e 00/03385-0).

7. Referências

- Armenio, V., 1997, An improved MAC method (SIMAC) for unsteady high-reynolds free surface flows, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 24, pp. 185–214.
- Batchelor, G. K., 1970, “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge.
- Bijl, H., Ampenter, M. H., Vatsa, V., and Kennedy, C., 2002, Implicit time integration schemes for the unsteady compressible Navier-Stokes equations : laminar flows, “Journal of Computational Physics”, Vol. 179, pp. 313–329.
- Briley, W. R. and McDonald, H., 2001, An overview and generalization of implicit Navier-Stokes algorithms and approximate factorization, “Computers & Fluid”, Vol. 30, pp. 807–828.
- Castelo, A., Tomé, M., Cesar, M., Cuminato, J., and McKee, S., 2000, Freeflow: An integrated simulation system for three-dimensional free surface flows, “Journal of computers and visualization in science”, Vol. 2, pp. 199–210.
- Chorin, A., 1967, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, “Journal of Computational Physics”, Vol. 2, pp. 12–26.
- Deville, M. O., 1975, An alternating direction implicit algorithm for viscous free surface flows, “J. de Mécanique”, Vol. 14, pp. 161–187.
- Ferreira, V., Tomé, M., Castelo, A., Cuminato, J., Mangiavacchi, N., and McKee, S., 2002, High order upwinding and the hydraulic jump, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 39, pp. 549–583.
- Gresho, P. M., 1990, On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 11, pp. 587–620.

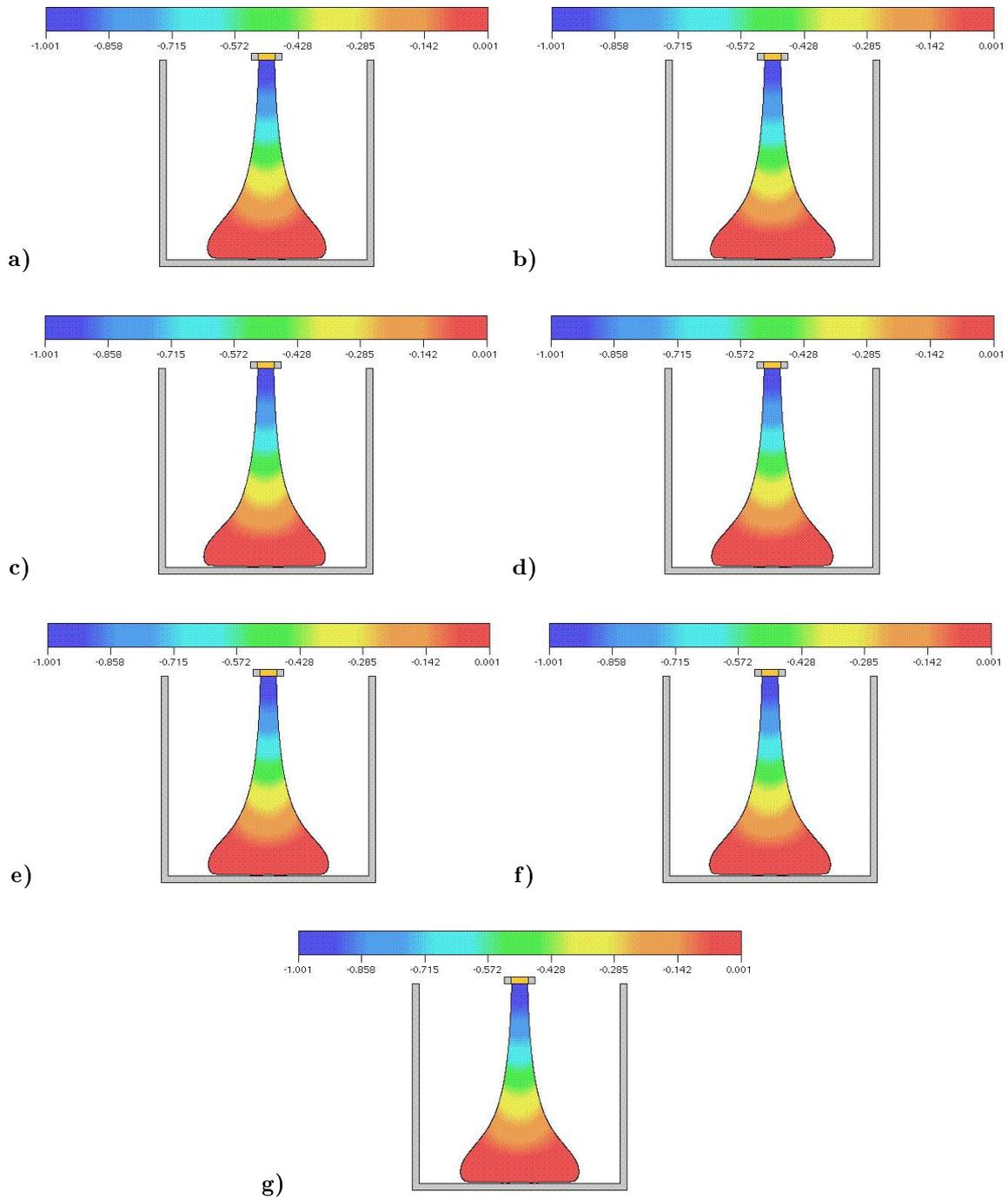


Figura 4: Comparação entre a velocidade v para o **Modelo 1** - $Re = 0,8$, no tempo $t = 0,14s$. Métodos: **a)** Explícito, **b)-d)** $P1$ utilizando as formulações IR , CN e AB/CN , respectivamente, e **e)-g)** $P2$ utilizando as formulações IR , CN e AB/CN .

- Hirsch, C., 1989, “Numerical Computational of Internal and External Flows”, Vol. 1, A Wiley-Interscience Publication.
- Manna, M. and Vacca, A., 1999, An efficient method for the solution of the Incompressible Navier-Stokes equations in cylindrical geometries, “Journal of Computational Physics”, Vol. 151, pp. 563–584.
- Oishi, C. M., 2004, “Análise e implementação de métodos implícitos no sistema FreeFlow2D”, Dissertação de Mestrado, ICMC, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Pracht, W. E., 1971, A numerical method for calculating transient creep flows, “Journal of Computational Physics”, Vol. 7, pp. 46–60.
- Roache, P. J., 1998, “Fundamental of Computational Fluid Dynamics”, Albuquerque, Hermosa Publishers.
- Street, S. A. R., 2003, The pressure accuracy of fractional-step methods for the Navier-Stokes equations on staggered grids, “ANZIAM. Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics”, Vol. 44, pp. 20–39.
- Tomé, M., McKee, S., Barratt, L., Jarvis, D., and Patrick, A., 1999, An experimental and numerical investigations of container filling with viscous liquids, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 31, pp. 1333–1353.
- Tomé, M. F. and McKee, S., 1994, GENSMAC: A computational marker-and-cell method for free surface flows in general domains, “Journal of Computational Physics”, Vol. 110, pp. 171–186.
- Turek, S., 1996, A comparative study of some time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: From fully implicit nonlinear schemes to semi-implicit projection methods, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 22, pp. 987–1011.
- Vuik, C., Saghier, A., and Boerstoel, G. P., 2000, The Krylov accelerated SIMPLE(R) method for flow problems in industrial furnace, “International Journal for Numerical Methods in Fluids”, Vol. 33, pp. 1027–1040.

A SEMI-IMPLICIT METHOD FOR SOLVING INCOMPRESSIBLE FREE SURFACE FLOWS

C. M. Oishi

oishi@lcad.icmc.usp.br

J. A. Cuminato

jacumina@lcad.icmc.usp.br

V. G. Ferreira

pvgf@lcad.icmc.usp.br

A. Castelo

castelo@lcad.icmc.usp.br

M. F. Tomé

murilo@lcad.icmc.usp.br

Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Av. Trabalhador São Carlense, 400, C.P. 668, 13251-900, São Carlos, SP, Brazil

N. Mangiavacchi

norberto@superig.usp.br

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rua São Francisco Xavier, 524, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Abstract. *The present work is concerned with a numerical method to solve the two-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables formulation. The diffusive terms are treated by Implicit Backward and Crank-Nicolson methods, and the convection terms are, explicitly, approximated by the high order upwind VONOS (Variable-Order Non-oscillatory Scheme) scheme. The boundary conditions for the pressure field at the free surface are treated implicitly, and for the velocity field explicitly. The numerical method is then applied to the simulation of free surface and confined flows, and the numerical results show that the method eliminates the stability restriction in the original explicit method. For low Reynolds number flow dynamics, the method is robust and produces numerical results that compare very well with the analytical solutions.*

Keywords *Navier-Stokes equations; Finite-Difference method; Semi-Implicit method.*