

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA COM MOMENTOS DA q -DISCREPÂNCIA

Rosana P. F. Pinheiro

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil.
rpaz@iprj.uerj.br

Antônio J. Silva Neto

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil.
ajsneto@iprj.uerj.br

Nilson C. Roberty

Programa de Engenharia Nuclear - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, CP 68.509, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
nilson@con.ufrj.br

Resumo. A solução de um grande número de problemas inversos, não apenas em engenharia bem como em outras áreas particularmente importantes tais como a astrofísica, oceanografia física (hidrologia óptica), sensoriamento remoto e radiação atmosférica entre outras, parte da solução da equação de transferência radiativa. Quando empregam-se formulações implícitas para resolver os problemas inversos em transferência radiativa em meios participantes unidimensionais com a aplicação de métodos de otimização local, procura-se minimizar o funcional dos resíduos quadrados entre os valores calculados e as medidas experimentais. Como os problemas inversos são matematicamente mal-postos devido ao ruído presente nos dados experimentais, utiliza-se a noção de regularização que tem por objetivo limitar o efeito do aumento do erro proveniente dos dados. O funcional de Tikhonov tem sido usado em diversos trabalhos como termo de regularização. Neste trabalho propõem-se resolver o problema inverso usando um outro funcional, denominado q -discrepância, advindo de uma família de termos de regularização onde é utilizado o conceito de distâncias de Bregman. No problema inverso em questão, tem-se interesse na determinação da espessura óptica, do albedo de espalhamento simples e das reflectividades difusas na parte interna das superfícies de contorno do meio. São empregadas medidas experimentais da intensidade de radiação que sai do meio como uma função do ângulo polar.

Palavras chave: transferência radiativa, problema inverso, método de otimização determinístico, distâncias de Bregman, momentos da q -discrepância.

1. Introdução

A solução de um grande número de problemas inversos, não apenas em engenharia (Varma and Mengüç, 1989; Anderson et al., 1989; Howe and Yang, 1993; Carita Montero et al., 2001; Kauati et al., 2001) como em outras áreas particularmente importantes tais como a astrofísica (Schuster, 1905; Menzel, 1966), oceanografia física - hidrologia óptica - (McCormick, 1992; Yi et al., 1992; Mobley, 1994; McCormick, 1996; Stephany et al., 2000), sensoriamento remoto (Ramos et al., 1999) e radiação atmosférica (Kondratyev et al., 1992) entre outras, parte da solução da equação de transferência radiativa.

Os problemas inversos, segundo Tikhonov e Arsenin (Tikhonov and Arsenin, 1977) são matematicamente *mal-postos* no sentido definido por Hadamard (Hadamard, 1923), isto é, as condições de *existência* e *unicidade* das soluções e *estabilidade* (suavidade) dos problemas direto e inverso não podem ser asseguradas. Isso faz com que os problemas inversos sejam de difícil resolução.

Resolve-se isto com a flexibilização da noção de solução, procurando-se, não uma solução interpolante, mas uma aproximação.

Caso, no problema inverso, a segunda condição não seja satisfeita, são buscadas restrições adicionais que levem à escolha de uma única solução.

A terceira condição para os problemas inversos é tecnicamente a mais complexa. Pode-se falar de *suavidade* ou *continuidade*. É comum entre aqueles de Tipo II e III (Silva Neto and Moura Neto, 1999) ter-se problemas

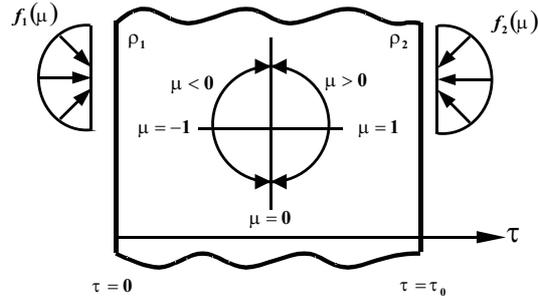


Figura 1: Meio participante unidimensional sujeito à radiação isotrópica.

inversos que são *mal-condicionados*.

É neste contexto que entra o conceito de regularização em que se busca um problema próximo ao original, mas que seja melhor condicionado.

O método da regularização consiste na determinação da solução aproximada mais suave compatível com os dados de observação, para certo nível de ruído. A busca da solução mais suave (regular) é uma informação adicional, que transforma o problema *mal-posto* num problema *bem-posto*.

Similar à bem conhecida técnica de regularização de Tikhonov, neste trabalho é proposta a solução do problema inverso usando um termo de regularização que foi denominado *q-discrepância*. As distâncias de Bregman usadas estão baseadas na medida de Csiszár (Csiszár, 1991).

Neste problema inverso em transferência radiativa tem-se interesse na determinação da espessura óptica, do albedo de espalhamento simples e das reflectividades difusas na parte interna das superfícies de contorno do meio.

São empregadas medidas experimentais da intensidade de radiação que sai do meio como uma função do ângulo polar.

2. Problema direto em transferência radiativa

O fenômeno associado com a interação de radiação em um meio participante, representado esquematicamente na Fig. (1), isto é, meio absorvedor, emissor e espalhador é normalmente resolvido pela equação linearizada de Boltzmann, adimensionalmente escrita como (Özisik, 1973)

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + S(\tau, \mu) \quad (1)$$

com as seguintes condições de contorno

$$I(0, \mu) = f_1(\mu) + 2\rho_1 \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (2)$$

e

$$I(\tau_0, \mu) = f_2(\mu) + 2\rho_2 \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu < 0 \quad (3)$$

onde I é a intensidade da radiação, τ é a variável óptica, τ_0 é a espessura óptica do meio, μ é o cosseno do ângulo formado entre o eixo- τ positivo e a direção da intensidade de radiação, ou seja, o cosseno do ângulo polar, ω é o albedo de espalhamento simples, f_1 e f_2 são as intensidades de radiação incidente, respectivamente, em $\tau = 0$ e $\tau = \tau_0$. As reflectividades difusas nas superfícies $\tau = 0$ e $\tau = \tau_0$ na parte interna ao meio são dadas, respectivamente, por ρ_1 e ρ_2 , e $S(\tau, \mu)$ é o termo fonte.

Os efeitos devidos a uma possível diferença dos índices de refração do meio em estudo com relação a sua vizinhança não são levados em consideração.

Sendo as condições de contorno e as propriedades materiais conhecidas, o problema direto (1-3) pode ser resolvido fornecendo, então, os valores da intensidade da radiação em todos os pontos do domínio espacial e angular.

3. Problema inverso em transferência radiativa

O problema inverso em transferência radiativa é aquele em que as propriedades do meio, o termo fonte ou as condições de contorno são desconhecidas, mas valores, informações da intensidade da radiação (ou de seus

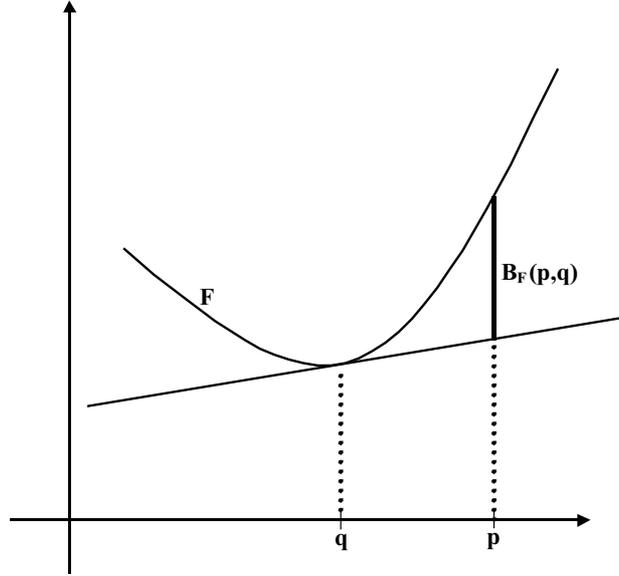


Figura 2: Representação gráfica da distância de Bregman. [FONTE: adaptada de Butnariu and Iusem, 1999].

momentos, onde o momento zero é a densidade da radiação e o primeiro momento é o fluxo radiativo) estão disponíveis, podendo-se, então, tentar estimar as grandezas desconhecidas (Silva Neto and McCormick, 2002).

No problema inverso considerado, a espessura óptica τ_0 , o albedo de espalhamento simples ω e as reflectividades difusas ρ_1 e ρ_2 são desconhecidas. Como não se pode medir estas propriedades diretamente, são medidas as intensidade da radiação que sai do meio em $\tau = 0$ e $\tau = \tau_0$, para diferentes ângulos polares, e a partir desta informação procura-se resolver o problema inverso.

Utilizando os dados medidos Y_i , $i = 1, 2, \dots, N_d$, determinam-se os elementos do vetor de incógnitas \vec{P} que é definido como

$$\vec{P} = (\tau_0, \omega, \rho_1, \rho_2)^T \quad (4)$$

onde o superescrito T é indicativo da transposta.

4. Solução do problema inverso com o funcional de Tikhonov

Os problemas inversos de transferência radiativa formulados implicitamente requerem a minimização de uma função objetivo representada pelos mínimos quadrados entre os valores calculados e observados de tal medida.

Como o número de dados experimentais disponíveis N_d é superior ao número da parâmetros N_i a ser estimado, o problema inverso é resolvido como um problema de otimização de dimensão finita (Silva Neto and Moura Neto, 1999), onde procura-se minimizar o funcional dos resíduos quadrados mais um termo de regularização.

A noção de regularização tem o objetivo de limitar, na solução do problema, o efeito do aumento do erro proveniente dos dados, através de uma alteração do problema.

Para a solução do problema inverso foi usado o método de Levenberg-Marquardt, que é semelhante ao uso do funcional de Tikhonov com o termo de regularização quadrático (Silva Neto and Moura Neto, 1999). A aplicação deste método na solução de problemas inversos foi descrita com um razoável grau de detalhamento (Pinheiro, 2001), não sendo aqui repetida.

4.1. Distância de Bregman

A distância de Bregman (Bregman, 1967) pode ser interpretada como uma medida da convexidade de $F(\cdot)$. A representação gráfica de $F(\cdot)$, bem como a medida da convexidade de $F(\cdot)$ é mostrada na Fig. (2). No caso unidimensional, a distância de Bregman é facilmente visualizada: desenhe uma linha tangente a F passando pelo ponto q , a distância de Bregman $B_F(p, q)$ é a distância vertical entre esta linha e o ponto $F(p)$ (Butnariu and Iusem, 1999; Della Pietra et al., 2001; Lafferty et al., 1997).

4.2. Momentos da q -discrepância

As distâncias de Bregman $D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)$ usadas foram construídas a partir da medida de Csiszár (Kapur and Kesavan, 1992), que foi denominada q -discrepância. O funcional do momento de i -ésima ordem m da q -discrepância $\eta_{m,q}$ é definido como

$$\eta_{m,q}(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{N_i} p_i^m \frac{1 - p_i^q}{q} \quad (5)$$

Este funcional representa o desvio do valor esperado de cada propriedade do meio p_i elevado a uma potência q das informações da intensidade da radiação disponíveis no problema inverso. O número q é um número real, variável, sendo tomado como $q > 0$.

4.3. Termo de regularização

Neste trabalho é proposta a solução do problema usando um outro funcional, que foi denominado q -discrepância, advindo de uma família de termos de regularização onde é utilizado o conceito de distâncias de Bregman (Bregman, 1967)

$$Q(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i]^2 + \alpha D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R) \quad (6)$$

que de outra forma pode ser escrito como

$$Q(\vec{P}) = \vec{F}^T \vec{F} + \alpha D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R) \quad (7)$$

onde I_{calc_i} e Y_i são respectivamente as intensidades calculadas e medidas que saem do meio em $\tau = 0$ e $\tau = \tau_0$ e os elementos de \vec{F} são dados por

$$F_i = I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_d \quad (8)$$

ou na forma,

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} I_{calc_1} - Y_1 \\ I_{calc_2} - Y_2 \\ \vdots \\ I_{calc_{N_d}} - Y_{N_d} \end{bmatrix} \quad (9)$$

O parâmetro de regularização α fornece um ajuste para a precisão e a estabilidade da solução, sendo normalmente um valor pequeno, e $D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)$ é a distância de Bregman entre \vec{P} e \vec{P}^R , definida como

$$\begin{aligned} D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R) &= D_{m,q}[\eta_{m,q}(\vec{P}), \eta_{m,q}(\vec{P}^R)] \\ &= \eta_{m,q}(\vec{P}) - \eta_{m,q}(\vec{P}^R) - \left\langle \nabla \eta_{m,q}(\vec{P}^R), \vec{P} - \vec{P}^R \right\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

onde

$$\nabla \eta_{m,q} = \frac{\partial \eta_{m,q}(\vec{P}^R)}{\partial \vec{P}^R} = \left\{ \left. \frac{\partial \eta_{m,q}}{\partial p_1} \right|_{\vec{P}^R}, \left. \frac{\partial \eta_{m,q}}{\partial p_2} \right|_{\vec{P}^R}, \dots, \left. \frac{\partial \eta_{m,q}}{\partial p_{N_i}} \right|_{\vec{P}^R} \right\}$$

e $\eta_{m,q}$ é uma função de Bregman (Della Pietra et al., 2001).

A variante do funcional de Tikhonov é o método de Levenberg-Marquardt, que resulta em

$$Q(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i]^2 + \alpha (\vec{P} - \vec{P}^R)^2 \quad (11)$$

A solução do método de Levenberg-Marquardt é baseada na minimização do funcional dado pela Eq. (11). São introduzidas, neste ponto, notações que serão usadas no decorrer do desenvolvimento das equações

$$D \equiv D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R); \quad D_{\vec{P}} \equiv \frac{\partial D}{\partial p_i}; \quad Q \equiv Q(\vec{P}); \quad I_{calc_i} \equiv I_{calc_i}(\vec{P})$$

Aplicando o funcional $\eta_{m,q}(\vec{P})$, definido na Eq. (5), na distância de Bregman Eq. (10), obtém-se

$$D = \sum_{i=1}^{N_i} p_i^m \frac{1 - p_i^q}{q} - \sum_{i=1}^{N_i} p_i^{R^m} \frac{1 - p_i^{R^q}}{q} - \sum_{i=1}^{N_i} (p_i - p_i^R) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{k=1}^{N_i} p_k^{R^m} \frac{1 - p_k^{R^q}}{q} \right) \quad (12)$$

A forma final da distância de Bregman pode ser escrita como

$$D = \sum_{i=1}^{N_i} p_i^m \frac{1 - p_i^q}{q} - \sum_{i=1}^{N_i} p_i^{R^m} \frac{1 - p_i^{R^q}}{q} - \sum_{i=1}^{N_i} (p_i - p_i^R) p_i^{R^{m-1}} \left(m \frac{m - (m + q) p_i^{R^{m-1}}}{q} \right) \quad (13)$$

5. Minimização do funcional de Tikhonov

Para minimizar o funcional dado pela Eq. (6), aplicando-se a Eq. (13), escreve-se a equação do ponto crítico,

$$\frac{\partial Q(\vec{P})}{\partial \vec{P}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Q(\vec{P})}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_i \quad (14)$$

A diferencial $\frac{\partial Q}{\partial \vec{P}}$, com relação a cada incógnita do problema, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p_1} &\rightarrow 2 \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i] \frac{\partial I_{calc_i}(\vec{P})}{\partial p_1} + \alpha \frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial p_2} &\rightarrow 2 \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i] \frac{\partial I_{calc_i}(\vec{P})}{\partial p_2} + \alpha \frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_2} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial p_j} &\rightarrow 2 \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i] \frac{\partial I_{calc_i}(\vec{P})}{\partial p_j} + \alpha \frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_j} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial p_{N_i}} &\rightarrow 2 \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i] \frac{\partial I_{calc_i}(\vec{P})}{\partial p_{N_i}} + \alpha \frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_{N_i}} = 0 \end{aligned}$$

ou, na forma geral

$$\frac{\partial Q(\vec{P})}{\partial p_j} = 2 \sum_{i=1}^{N_d} [I_{calc_i}(\vec{P}) - Y_i] \frac{\partial I_{calc_i}(\vec{P})}{\partial p_j} + \alpha \frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_i \quad (15)$$

A Eq. (15) pode, ainda, ser reescrita do seguinte modo

$$J^T \vec{F} + \alpha D_{\vec{P}} = 0 \quad (16)$$

onde a matriz Jacobiana é definida como

$$J_{rs} = \frac{\partial I_{calc_r}}{\partial p_s}, \quad r = 1, 2, \dots, N_d, \quad s = 1, 2, \dots, N_i \quad (17)$$

sendo que J e $D_{\vec{P}}$ podem ser escritos na forma matricial, respectivamente, na forma

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{calc_1}}{\partial p_1} & \frac{\partial I_{calc_1}}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial I_{calc_1}}{\partial p_{N_i}} \\ \frac{\partial I_{calc_2}}{\partial p_1} & \frac{\partial I_{calc_2}}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial I_{calc_2}}{\partial p_{N_i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial I_{calc_{N_d}}}{\partial p_1} & \frac{\partial I_{calc_{N_d}}}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial I_{calc_{N_d}}}{\partial p_{N_i}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

e

$$D_{\vec{P}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial D}{\partial p_1} \\ \frac{\partial D}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial D}{\partial p_{N_i}} \end{array} \right\} \quad (19)$$

O \vec{F} é expandido em uma série de Taylor, sendo apenas retidos os termos até a primeira ordem

$$\vec{F}(\vec{P}^{n+1}) = \vec{F}(\vec{P}^n) + J^n \Delta \vec{P}^n \quad (20)$$

onde

$$\vec{P}^{n+1} = \vec{P}^n + \Delta \vec{P}^n \quad (21)$$

sendo n o contador de iterações.

Também é feita uma expansão de Taylor para o termo de regularização $(\alpha D_{\vec{P}})$, onde também são mantidos apenas os termos até a primeira ordem.

$$D_{\vec{P}}(\vec{P}^{n+1}) = D_{\vec{P}}(\vec{P}^n) + J^n \Delta \vec{P}^n \quad (22)$$

onde os elementos da matriz Jacobiana de D são dados por

$$J_{D_{st}} = \frac{\partial D_{p_s}}{\partial p_t}, \quad s = 1, 2, \dots, N_i, \quad t = 1, 2, \dots, N_i \quad (23)$$

Como

$$D_{p_s} = \frac{\partial D}{\partial p_s}, \quad s = 1, 2, \dots, N_i \quad (24)$$

os elementos da matriz J_D correspondem a

$$J_{D_{st}} = \frac{\partial}{\partial p_t} \left(\frac{\partial D}{\partial p_s} \right), \quad s = 1, 2, \dots, N_i, \quad t = 1, 2, \dots, N_i \quad (25)$$

Agora, deriva-se a distância de Bregman dada pela Eq. (13) com relação as incógnitas do problema

$$\frac{\partial D_{m,q}(\vec{P}, \vec{P}^R)}{\partial p_j} = p_j^{m-1} \left(\frac{m - (m+q)p_j^q}{q} \right) - p_j^{R^{m-1}} \left(\frac{m - (m+q)p_j^{R^q}}{q} \right) \quad (26)$$

A Eq. (26) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial D}{\partial p_s} = \frac{m p_s^{m-1} - (m+q)p_s^{m+q-1}}{q} - p_s^{R^{m-1}} \left(\frac{m - (m+q)p_s^{R^q}}{q} \right) \quad (27)$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial p_t} \left(\frac{\partial D}{\partial p_s} \right) = \frac{\partial}{\partial p_t} \left[\frac{m p_s^{m-1} - (m+q)p_s^{m+q-1}}{q} \right] \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_t} \left(\frac{\partial D}{\partial p_s} \right) = \left[\frac{m(m-1)p_s^{m-2} - (m+q)(m+q-1)p_s^{m+q-2}}{q} \right] \delta_{st} \quad (29)$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial p_t} \left(\frac{\partial D}{\partial p_s} \right) = p_s^{m-2} \left[\frac{m(m-1) - (m+q)(m+q-1)p_s^q}{q} \right] \delta_{st}, \quad s = 1, 2, \dots, N_i, \quad t = 1, 2, \dots, N_i \quad (30)$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial p_t} \left(\frac{\partial D}{\partial p_s} \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 D}{\partial p_t^2} = p_t^{m-2} \left[\frac{m(m-1) - (m+q)(m+q-1)p_t^q}{q} \right] & \text{se } s = t \\ 0 & \text{se } s \neq t \end{cases} \quad (31)$$

então,

$$J_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial p_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 D}{\partial p_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 D}{\partial p_{N_i}^2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Levando as Eqs.(20) e (22) na Eq.(16), obtém-se

$$J^n{}^T (\vec{F}^n + J^n \Delta \vec{P}^n) + \alpha (D_{\vec{P}}^n + J_D^n \Delta \vec{P}^n) = 0 \quad (33)$$

Logo,

$$(J^{nT} J^n + \alpha J_D^n) \Delta \vec{P}^n = -(J^{nT} \vec{F}^n + \alpha D_{\vec{P}}^n) \quad (34)$$

A solução da Eq. (34) fornece correções para os valores das incógnitas a serem utilizadas no procedimento iterativo sendo esta solução representada formalmente por

$$\Delta \vec{P}^n = - \left[(J^{nT} J^n + \alpha J_D^n) \right]^{-1} (J^{nT} \vec{F}^n + \alpha D_{\vec{P}}^n) \quad (35)$$

Um procedimento iterativo pode então ser construído para a determinação do vetor de incógnitas \vec{P} que minimize o funcional \vec{Q} sendo conhecidos os dados experimentais, Y_i , e valores calculados, I_i , que dependem das incógnitas a serem determinadas, \vec{P} .

Partindo-se de uma estimativa inicial \vec{P}^0 , são calculadas, de forma seqüencial, correções obtidas a partir da Eq. (35), ou em alguns casos da solução direta do sistema (34), sendo as novas estimativas para o vetor de incógnitas $\vec{P}^{n+1} = \vec{P}^n + \Delta \vec{P}^n$ obtidas, calculando-se as correções $\Delta \vec{P}^n$ com a Eq. (34), até que um critério de parada

$$\left| \frac{\Delta \vec{P}_i^n}{P_i} \right| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N_i \quad (36)$$

seja satisfeito, onde ϵ é um número pequeno, por exemplo, 10^{-5} e n é um contador de iterações.

Ao longo do procedimento iterativo, busca-se reduzir o parâmetro de regularização α para que ao se atingir a convergência tenha-se a solução do problema original.

6. Resultados numéricos e discussões

Como dados reais não estavam disponíveis, foram gerados dados experimentais sintéticos da intensidade da radiação que sai do meio, Y_{medido} , a partir da adição de erros aleatórios e apresentando distribuição normal com média zero e desvio padrão σ , às intensidades I_{exato} , calculadas pela solução do problema direto com valores exatos de τ_0 , ω , ρ_1 e ρ_2 , i.e.

$$Y_{medido} = I_{exato} + \sigma e \quad (37)$$

É considerado que para cada ponto de colocação empregado na quadratura Gauss-Legendre (Abramowitz and Stegun, 1970), um dado experimental possa ser obtido de forma que o número total de dados experimentais é idêntico à ordem da quadratura, i.e., $N_d = N$, onde $N = 20$ (Pinheiro, 2001).

Inicialmente, o problema inverso foi resolvido para alguns casos-teste empregando o método de Levenberg-Marquardt (LM).

No exemplo foi assumido o vetor da solução exata como sendo $\vec{P}_{exato} = (1, 0; 0, 5; 0, 1; 0, 95)$ e a estimativa inicial como sendo $\vec{P}^0 = (5, 0; 0, 95; 0, 95; 0, 1)$. Neste caso, não foi considerada uma fonte interna ao meio termo fonte, i.e. $S(\tau, \mu) = 0$ na Eq. (1). O LM não convergiu para a solução exata. Os resultados são apresentados na Tab. (1).

Tabela 1: Resultados para $\vec{P}_{exato} = (1, 0; 0, 5; 0, 1; 0, 95)$ e $\vec{P}^0 = (5, 0; 0, 95; 0, 95; 0, 1)$ usando LM.

Iteração	τ_0	ω	ρ_1	ρ_2	Função objetivo
0	5,0	0,95	0,95	0,1	10,0174
1	5,7602	0,9624	$7,51e-2$	$1,0e-4$	1,7609
2	6,9969	0,9952	$1,0e-4$	$1,0e-4$	2,4828
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	9,1117	0,9950	$1,0e-4$	$1,0e-4$	2,4584
Solução exata	1,0	0,5	0,1	0,95	0,0

A dificuldade encontrada na convergência para a solução exata no método LM se deve ao platô que existe no espaço de projeto para valores de τ_0 entre 6,0 e 10,0. Neste intervalo, a função objetivo tem uma pequena variação.

Usando o funcional geral de regularização chamado q -discrepância foi possível obter a convergência para a solução exata com uma malha espacial discretizada em 4000 intervalos conforme a Tab. (2).

Tabela 2: Resultados para $\vec{P}_{exato} = (1, 0; 0, 5; 0, 1; 0, 95)$ e $\vec{P}^0 = (5, 0; 0, 95; 0, 95; 0, 1)$ usando o funcional geral de regularização ($q = 1$ e $m = 0$).

Iteração	τ_0	ω	ρ_1	ρ_2	Função objetivo
0	5,0	0,95	0,95	0,1	10,0174
1	15,9316	1,1269	0,9321	$1,0e - 4$	$2,8823e - 1$
2	21.2195	$9.9500e - 1$	$9.9500e - 1$	$1,0e - 4$	$1.8332e - 2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	1,0000	0,4999	0,0999	0,9994	$2,7755e - 17$
Solução exata	1,0	0,5	0,1	0,95	0,0

Nos casos apresentados foram considerados dados experimentais sintéticos sem ruído experimental, *i.e.* $\sigma = 0$ na Eq. (37).

Nos casos em que $q = 1$ para $m = 0$, $m = 1$ e $m = 2$, respectivamente, observa-se que com o aumento do valor de m a convergência se torna mais rápida, ou seja, os resultados foram obtidos com um número inferior a 20 iterações.

7. Conclusões

Com a abordagem proposta empregando como termo de regularização no funcional de Tikhonov as distâncias de Bregman construídas com momentos da q -discrepância foi possível resolver o problema inverso de estimativa de propriedades radiativas mesmo usando estimativas iniciais distantes do valor real que com o método de Levenberg-Marquardt não levavam à convergência do método.

8. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq e da FAPERJ.

9. Referências

Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1970, “Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, Dover Publications Inc., New York.

Anderson, R. R., Bech, H., Bruggemann, U., Farinelli, W., Jacques, S. L., and Parrish, J., 1989, Pulsed Photothermal Radiometry in Turbid Media: Internal Reflection of Backscattered Radiation Strongly Influences Optical Dosimetry, “Applied Optics”, Vol. 28, No. 12, pp. 2256–2262.

Bregman, I. M., 1967, The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and its Application to the Solution of Problems in Convex Programming, “USSR Comput. Math and Math. Phys.”, Vol. 7, No. 3, pp. 200–217.

Butnariu, D. and Iusem, A. N., 1999, “Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization”, Kluswer Academic Publishers.

Carita Montero, R. F., Roberty, N. C., and Silva Neto, A. J., 2001, Absorption Coefficient Estimation in Heterogeneous Media Using a Domain Partition Consistent With Divergent Beams, “Inverse Problems in Engineering”, Vol. 9, pp. 587–617.

Csiszár, I., 1991, Why Least Squares and Maximum Entropy? An Axiomatic Approach to Inference for Linear Inverse Problems, “The Annals of Statistics”, Vol. 19, No. 4, pp. 2032–2066.

Della Pietra, S., Della Pietra, V., and Lafferty, J., 2001, Duality and Auxiliary Functions for Bregman Distances, TR CMU-CS-01-109, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, <http://citeseer.ist.psu.edu/article/pietra01duality.html>.

Hadamard, J., 1923, “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations”, Yale Univ. Press.

Howe, J. T. and Yang, L., 1993, Earth Atmosphere Entry Thermal Protection by Radiation Backscattering Ablating Materials, “Journal of Thermophysics and Heat Transfer”, Vol. 7, No. 1, pp. 74–81.

Kapur, J. N. and Kesavan, H. K., 1992, “Entropy Optimization Principles With Applications”, Academic Press Inc.

Kauati, A. T., Silva Neto, A. J., and Roberty, N. C., 2001, A Source-Detector Methodology for the Construction and Solution of the One-Dimensional Inverse Transport Equation, “Journal of Inverse Problems in Engineering”, Vol. 9, pp. 45–66.

- Kondratyev, K. Y., Kozoderov, V. V., and Smokly, O. I., 1992, “Remote Sensing of the Earth from Space: Atmospheric Correction”, Springer Verlag, Heidelberg, 478 p.
- Lafferty, J., Della Pietra, S., and Della Pietra, V., 1997, Statistical Learning Algorithms Based on Bregman Distances, “Proceedings of 1997 Canadian Workshop on Information Theory”, pp. 77–80, Fields Institute, Toronto, Canadá.
- McCormick, N. J., 1992, Inverse Radiative Transfer Problems: a Review, “Nucl. Sci. Eng.”, Vol. 112, pp. 185–198.
- McCormick, N. J., 1996, Analytical Transport Theory Applications on Optical Oceanography, “Annals Nuclear Energy”, Vol. 23, No. 4/5, pp. 381–395.
- Menzel, D. H., 1966, “Selected Papers on the Transfer Radiation”, Dover Publications Inc., New York.
- Mobley, C. D., 1994, “Light and Water - Radiative Transfer in Natural Waters”, Academic Press, San Diego, USA.
- Pinheiro, R. P. F., 2001, Problemas Diretos e Inversos em Transferência Radiativa em Meios Unidimensionais, Master’s thesis, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
- Ramos, F. M., Campos Velho, H. F., Carvalho, J. C., and Ferreira, N. J., 1999, Novel Approaches on Entropic Regularization, “Inverse Problems”, Vol. 15, No. 5, pp. 1139–1148.
- Schuster, A., 1905, Radiation Through a Foggy Atmosphere, “Astrophysical Journal”, Vol. 21, No. 1, pp. 1–22.
- Silva Neto, A. J. and McCormick, N. J., 2002, An Explicit Formulation Based on the Moments of the Exit Radiation Intensity for the One-Dimensional Inverse Radiative Transfer Problem, “Proceedings of the 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice”, Angra dos Reis, Rio de Janeiro.
- Silva Neto, A. J. and Moura Neto, F. D., 1999, Escolha de Modelos - Problemas Inversos em Engenharia - Mini-Curso, “XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional”, Santos, SP.
- Stephany, S., Campos Velho, H. F., Ramos, F. M., and Mobley, C. D., 2000, Identification of Inherent Optical Properties and Bioluminescence Source Term in a Hydrologic Optics Problem, “JQSRT”, Vol. 67, No. 2, pp. 113–123.
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977, “Solutions of Ill-Posed Problems”, John Wiley & Sons.
- Varma, K. R. and Mengüç, M. P., 1989, Effects of Particulate Concentrations on Temperature and Heat Flux Distributions in a Pulverized - Coal Fired Furnace, “International Journal of Energy Research”, Vol. 13, pp. 555–572.
- Yi, H. C., Sanches, R., and McCormick, N. J., 1992, Bioluminescence Estimation from Ocean *in Situ* Irradiances, “Applied Optics”, Vol. 31, No. 6, pp. 822–830.
- Özisik, M. N., 1973, “Radiative Transfer and Interactions With Conduction and Convection”, John Wiley & Sons.

SOLUTION OF AN INVERSE RADIATIVE TRANSFER PROBLEM WITH THE MOMENTS OF THE q -DISCREPANCY

Rosana P.F. Pinheiro

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brazil. rpaz@iprj.uerj.br

Antônio J. Silva Neto

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brazil. ajsneto@iprj.uerj.br

Nilson C. Roberty

Nuclear Engineering Program - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, CP 68.509, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil. nilson@lmm.con.ufrj.br

Abstract. *The solution of inverse radiative transfer problems has several relevant applications, not only in engineering, but in many different areas such as astrophysics, physical oceanography (optical hydrology), remote sensing and atmosphere/hydrosphere optics, among many others. When formulated implicitly inverse radiative problems usually require the minimization of a cost functional related to the squared residues between an observable quantity and the calculated value for such quantity. As inverse problems are usually ill-posed they are affected by noise present in the experimental data. An effective strategy is to replace the original inverse problem of interest by another one that is close to the former but is less affected by the experimental data noise. Such approach was put forward by Tikhonov. In Tikhonov’s approach is developed a regularized functional. In the present work we build a family of regularizing terms using Bregman’s distances*

constructed using moments of a q-discrepancy functional. Such approach is applied for the solution of inverse radiative transfer problems. In these problems we are interested in the estimation of the single scattering albedo, optical thickness and inner boundary diffuse reflectivities in a one-dimensional participating medium. Only experimental data acquired by external detectors is considered. As experimental data we consider the intensity of the exit radiation as a function of the polar angle.

Keywords: *radiative transfer, inverse problem, deterministic optimization method, Bregman's distances, moments of the q-discrepancy.*