

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O PROBLEMA INVERSO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

**Rosana P. F. Pinheiro**

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil.  
rpaz@iprj.uerj.br

**Antônio J. Silva Neto**

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil.  
ajsneto@iprj.uerj.br

**Nilson C. Roberty**

Programa de Engenharia Nuclear - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, CP 68.509, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.  
nilson@lmm.con.ufrj.br

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado um estudo de sensibilidade aplicado a um problema de transferência radiativa em um meio participante unidimensional com relação à estimação de algumas propriedades materiais (parâmetros), tais como a espessura óptica, o albedo de espalhamento simples e as reflectividades difusas, na parte interna das superfícies do meio. A influência destes parâmetros foi avaliada na solução do problema direto modelado pela equação de Boltzmann, também conhecida como equação de transporte. Foi empregado o método de ordenadas discretas para a discretização do domínio angular da equação linearizada de Boltzmann e uma aproximação por diferenças finitas para a dependência espacial. Este estudo possibilitou verificar a viabilidade de se estimar os parâmetros através de uma abordagem do problema inverso.

**Palavras chave:** análise de sensibilidade, transferência radiativa, equação linearizada de Boltzmann, diferenças finitas, problema inverso.

### 1. Introdução

A solução de um número cada vez maior de problemas na física e na engenharia implica na resolução da equação de transferência radiativa.

Para a resolução deste problema de transferência radiativa é utilizado o método de ordenadas discretas ( $S_N$ ) (Moura Neto and Silva Neto, 1999; Pinheiro et al., 2000; Pinheiro, 2001) tendo sido apresentada uma comparação dos resultados obtidos com o método de Galerkin (Cengel et al., 1984) e também com os métodos  $P_N$  de alta ordem e Galerkin base global na referência (Silva Neto and Roberty, 1998).

Quando formulações implícitas baseadas em problemas de otimização são empregadas na solução de problemas inversos, onde o problema direto é resolvido várias vezes ao longo do procedimento iterativo, faz-se necessário o uso de um algoritmo para a solução do problema direto que tenha ao mesmo tempo um bom desempenho computacional e forneça resultados com boa precisão, *i.e.* pelo menos da mesma ordem de precisão dos dados experimentais (Pinheiro, 2001).

Neste trabalho, foi abordada uma solução numérica alternativa para o mesmo problema, utilizando o método de diferenças finitas (MDF), sendo que a principal abordagem dos autores está relacionada à análise de sensibilidade para as variações da espessura óptica do meio, do albedo de espalhamento simples e das reflectividades difusas, respectivamente, nas superfícies  $\tau = 0$  e  $\tau = \tau_0$ .

O estudo da sensibilidade permite avaliar a influência destes parâmetros na solução do problema direto, bem como a viabilidade de estimá-los através de uma abordagem do problema inverso (Lugon Junior et al., 2002).

## 2. Formulação matemática e solução do problema direto

### 2.1. Formulação matemática

Considere a equação de transferência radiativa (Özisik, 1973) para a intensidade radiativa  $I(\tau, \mu)$  escrita como

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + S(\tau, \mu) \quad (1)$$

onde  $I(\tau, \mu)$  é a intensidade da radiação,  $\tau \in (0, \tau_0)$  é a variável óptica (adimensional),  $\mu \in [-1, 1]$  é o cosseno do ângulo polar (cosseno do ângulo formado entre o eixo- $\tau$  positivo e a direção da intensidade de radiação) usado para descrever a direção de propagação da radiação e  $\omega$  é o albedo de espalhamento simples. Para os problemas diretos de transferência radiativa, acrescentamos à Eq. (1) as condições de contorno

$$I(0, \mu) = f_1(\mu) + 2\rho_1 \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0 \quad (2)$$

e

$$I(\tau_0, \mu) = f_2(\mu) + 2\rho_2 \int_0^1 I(\tau_0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu < 0 \quad (3)$$

Os valores de  $f_1(\mu)$  e  $f_2(\mu)$  são dados,  $S(\tau, \mu)$  é o termo fonte e  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as reflectividades difusas nas superfícies  $\tau = 0$  e  $\tau = \tau_0$ , na parte interna ao meio.

Os efeitos devidos a uma possível diferença dos índices de refração do meio em estudo com relação a sua vizinhança não são levados em consideração.

O meio participante, isto é, meio absorvedor, emissor e espalhador estudado está representado na Fig. 1.

Sendo as condições de contorno e as propriedades materiais conhecidas, o problema direto, Eqs. (1-3), pode ser resolvido fornecendo, então, os valores da intensidade da radiação em todos os pontos do domínio espacial e angular.

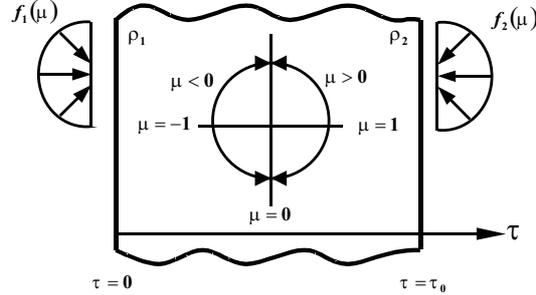


Figura 1: Meio participante unidimensional sujeito à radiação isotrópica.

### 2.2. Cálculo dos coeficientes de sensibilidade

Os coeficientes de sensibilidade são dados por

$$CS = \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \vec{P}} \rightarrow CS_i = \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_i \quad (4)$$

onde a intensidade de radiação é representada por  $I$  e a espessura óptica do meio, o albedo de espalhamento simples e as reflectividades difusas, respectivamente nas superfícies  $\tau = 0$  e  $\tau = \tau_0$  (na parte interna das superfícies de contorno do meio) representam os parâmetros  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

#### 2.2.1. Método das ordenadas discretas (MOD) e diferenças finitas (MDF)

As derivadas representadas na Eq. (4) foram calculadas por uma aproximação por diferenças finitas (vide Fig. 2) na forma

$$\frac{\partial I}{\partial p_i} \cong \frac{I_{+\epsilon} - I_{-\epsilon}}{(p_j + \epsilon) - (p_j - \epsilon)} = \frac{I_{+\epsilon} - I_{-\epsilon}}{2\epsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, N_i \quad (5)$$

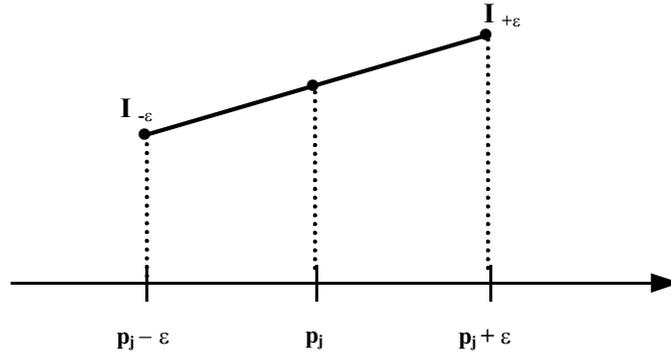


Figura 2: Representação gráfica do cálculo dos coeficientes de sensibilidade.

com erro de truncamento da ordem  $O(\epsilon^2)$  e a solução da equação de transferência radiativa com a aproximação descrita na seqüência.

A solução de uma equação diferencial parcial em uma região implica a obtenção dos valores para a variável dependente em cada ponto da região. Em vez de lidarmos com uma região contínua para a solução do problema, discretizamos a região desejada e então com o auxílio computacional calculamos a solução em qualquer ponto desta região, com uso dessa fórmula. No caso de técnicas numéricas de solução, porém, não é possível tratar a região estudada como contínua, já que o método numérico obtém a solução em pontos discretos  $(\tau, \mu)$  neles calcular a solução do problema. A Fig. 3 mostra o domínio contínuo e respectiva discretização, que é usada na obtenção da solução do problema considerado, assim como as fronteiras do meio onde são impostas as condições de contorno.

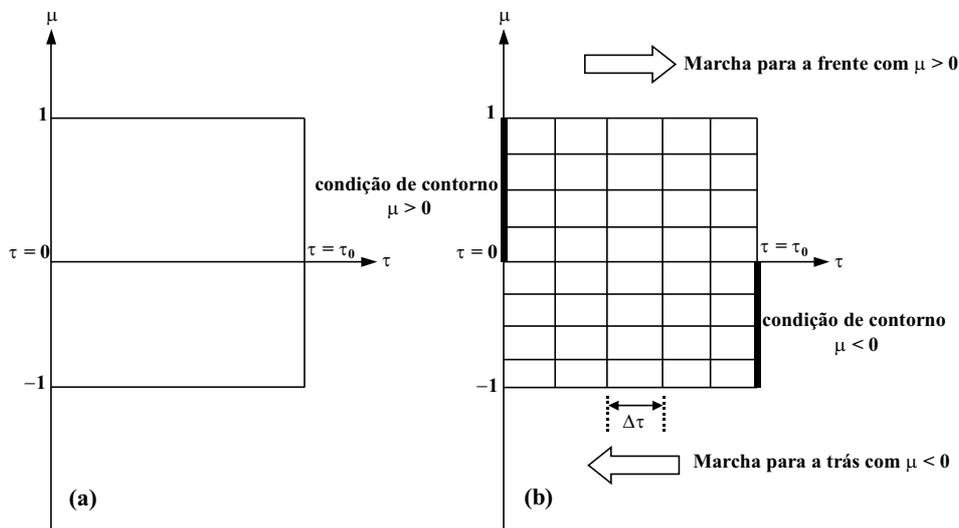


Figura 3: (a) domínio contínuo e (b) malha computacional.

Para a obtenção da solução numérica para a equação linear de Boltzmann com condições de contorno, Eqs. (1-3), empregamos aqui o método de ordenadas discretas (Chandrasekar, 1950; Bell and Glasstone, 1979; Liou, 1980) com quadratura Gauss-Legendre de ordem  $N = 20$ , *i.e.*  $S_{20}$  e com uma aproximação por diferenças finitas para a discretização do domínio espacial.

Considere uma discretização do domínio espacial com  $N_x + 1$  pontos de forma que para um determinado nó da malha computacional,  $i$ , corresponda a coordenada espacial (óptica)  $\tau = i\Delta\tau$  ( $\tau_0 \neq 0$ ), com  $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$ , sendo  $\Delta\tau$  calculado usando  $\Delta\tau = \tau_0/N_x$ .

Para resolvermos as equações discretizadas de ordenadas discretas, é realizada uma seqüência de marchas para a frente (da esquerda para a direita) e de marchas para trás (da direita para a esquerda) na malha computacional, capturando primeiro a condição de contorno em  $\tau = 0$  e depois aquela em  $\tau = \tau_0$  atualizando ao longo do procedimento iterativo a aproximação do termo integral do lado direito da Eq. (1) (Silva Neto and Roberty, 1998). Nas Figuras 4 e 5 são representados os esquemas de marchas para a frente, e para trás, executadas para capturar as informações fornecidas nas fonteiras do meio e atualizar o termo de espalhamento (*in-scattering*).

Visando obter uma solução numérica para a Eq. (1), são feitas primeiramente aproximações por diferenças finitas avançadas

$$\left( \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} \right) \Big|_{i,m} \cong \mu_m \frac{I_m^{i+1} - I_m^i}{\Delta \tau}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (6)$$

e o termo de espalhamento (*in-scattering*) é substituído por uma quadratura gaussiana

$$q^i = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu')|_{\tau=i\Delta\tau} d\mu' \cong \frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^N a_j I_j^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x \quad (7)$$

onde  $I_m^i \equiv I(i\Delta\tau, \mu_m)$ ,  $i$  representa a discretização da coordenada óptica e  $m$  a discretização da coordenada angular,  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  o conjunto de pesos correspondentes à quadratura Gaussiana, e  $\mu_m$  os pontos de colocação, que no caso da quadratura Gauss-Legendre correspondem às raízes dos polinômios de Legendre. Na Tabela 1 são apresentados os valores discretos especificados pela quadratura Gaussiana  $\mu_m$  e os pesos  $a_j$  correspondentes (Abramowitz and Stegun, 1970).

Tabela 1: Pontos de colocação e pesos para quadratura Gauss-Legendre (Abramowitz e Stegun, 1970)

$\mu$	$a$
$\mu_1 = -\mu_{20} = 0,0765265211$	0,1527533871
$\mu_2 = -\mu_{19} = 0,2277858511$	0,1491729864
$\mu_3 = -\mu_{18} = 0,3737060887$	0,1420961093
$\mu_4 = -\mu_{17} = 0,5108670019$	0,1316886384
$\mu_5 = -\mu_{16} = 0,6360536807$	0,1181945319
$\mu_6 = -\mu_{15} = 0,7463319064$	0,1019301198
$\mu_7 = -\mu_{14} = 0,8391169718$	0,0832767415
$\mu_8 = -\mu_{13} = 0,9122344282$	0,0626720483
$\mu_9 = -\mu_{12} = 0,9639719272$	0,0406014298
$\mu_{10} = -\mu_{11} = 0,9931285991$	0,0176140071

Levando as Eqs. (6) e (7) na Eq. (1),

$$\mu_m \frac{I_m^{i+1} - I_m^i}{\Delta \tau} + I_m^i = S_m^i + q^i \quad (8)$$

onde  $S_m^i \equiv S(i\Delta\tau, \mu_m)$  é a versão discretizada do termo fonte. A expressão usada na marcha para a frente é dada por

$$I_m^{i+1} = \left( 1 - \frac{\Delta \tau}{\mu_m} \right) I_m^i + \frac{\Delta \tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\mu > 0) \quad (9)$$

onde para,  $i = 0$ , faz-se uso da condição de contorno (2) reescrita na forma discretizada

$$I_m^0 = f_1(\mu_m) + 2\rho_1 \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N a_j |\mu_j| I_j^0, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (10)$$

Observe que na marcha para a frente são calculadas apenas as intensidades da radiação para  $\mu > 0$ . Do mesmo modo, usando uma aproximação por diferenças finitas atrasadas

$$\left( \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} \right) \Big|_{i,m} \cong \mu_m \frac{I_m^i - I_m^{i-1}}{\Delta \tau}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x, \quad m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N \quad (11)$$

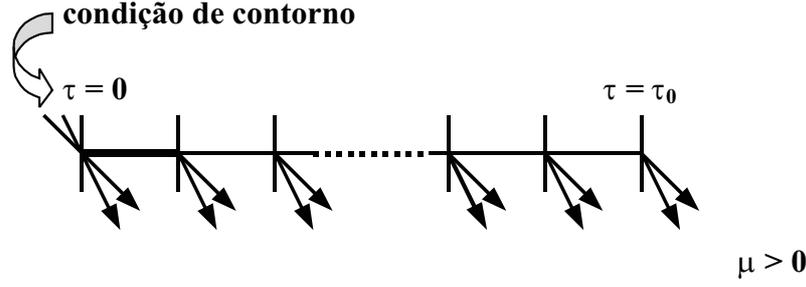


Figura 4: Representação esquemática de uma marcha para a frente.

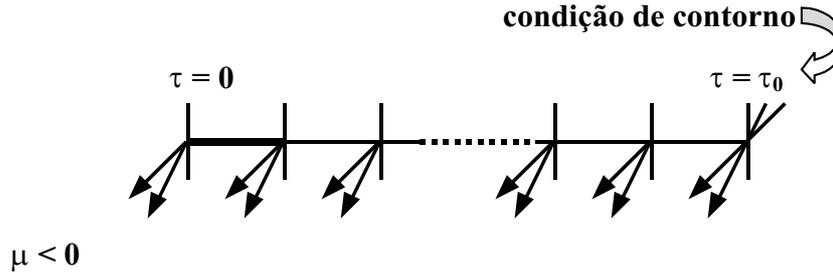


Figura 5: Representação esquemática de uma marcha para trás.

e levando as Eqs. (11) e (7) na Eq. (1),

$$\mu_m \frac{I_m^i - I_m^{i-1}}{\Delta\tau} + I_m^i = S_m^i + q^i \quad (12)$$

de onde se obtém a expressão usada na marcha para trás

$$I_m^{i-1} = \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\mu_m}\right) I_m^i - \frac{\Delta\tau}{\mu_m} (S_m^i + q^i) \quad i = N_x, N_x - 1, \dots, 1, \quad m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N, \quad (\mu < 0) \quad (13)$$

onde para  $i = N_x$  faz-se uso da condição de contorno (3) reescrita na forma discretizada

$$I_m^{N_x} = f_2(\mu_m) + 2\rho_2 \sum_{j=1}^{N/2} a_j \mu_j I_j^{N_x}, \quad m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N, \quad (14)$$

Observe que na marcha para trás são calculadas apenas as intensidades da radiação para  $\mu < 0$ .

### 3. Resultados

#### 3.1. Análise de sensibilidade

O estudo de sensibilidade consiste em avaliar, numericamente ou analiticamente, as derivadas do valor calculado para a grandeza que pode ser observada (medida experimentalmente) com relação aos parâmetros que se deseja estudar. Essas derivadas são analisadas através de gráficos e correspondem à sensibilidade do fenômeno a pequenas variações nos parâmetros de entrada. Através da análise desses coeficientes pode-se concluir se o propósito de estimar certos parâmetros tem chance de ser bem sucedido.

Quanto maior a sensibilidade do parâmetro a ser estimado melhor será a solução do problema inverso (Lugon Junior et al., 2002).

Quando busca-se estimar diversos parâmetros simultaneamente os efeitos de cada um deles na intensidade de radiação devem ser diferentes, ou seja independentes. Se os coeficientes de sensibilidade relativos a dois parâmetros diferentes têm a mesma forma, significa que eles afetam a intensidade de radiação da mesma maneira, sendo difícil distinguir suas influências e conseqüentemente estimá-lo.

Nos resultados obtidos com o método de ordenadas discretas ( $S_{20}$ ) a malha espacial foi discretizada em 4000 intervalos (Pinheiro, 2001).

A análise de sensibilidade foi efetuada para quatro casos, sendo que dois deles, Caso 1 e Caso 2, apresentavam termo fonte [ $S(\tau, \mu) = 1$ ], e dois, Caso 3 e Caso 4, sem fonte interna [ $S(\tau, \mu) = 0$ ]. Os valores de todos os parâmetros relatados a cada caso são apresentados na Tab. (2).

Tabela 2: Parâmetros associados aos casos estudados

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
$\tau_0$	1,0	2,0	1,0	1,0
$\omega$	0,5	0,5	0,5	0,5
$\rho_1$	0,95	0,1	0,1	0,95
$\rho_2$	0,5	0,0	0,95	0,5
$f_1$	1,0	1,0	1,0	1,0
$f_2$	0,0	0,0	0,0	0,0
$S$	1	1	0	0

Os Casos 1 e 2 são apresentados, respectivamente, nas Figs. 7-10 e Figs. 11-14 e os Casos 3 e 4, respectivamente, nas Figs. 15-18 e Figs. 19-22.

Para cada Caso será feita uma análise de sensibilidade individualizada para cada parâmetro estudado e uma análise simultânea de parâmetros a fim de avaliar aqueles que sejam relevantes na solução do problema inverso.

O melhor entendimento dos intervalos referentes a  $\mu \in [\mu_1, \mu_{20}]$  é feito observando-se a Tab. (1).

### 3.1.1. Análise de sensibilidade - Caso 1

Analisando a Fig. 7 vê-se que para a espessura óptica ( $\tau_0$ ) a região de maior sensibilidade está situada no intervalo de  $\mu_{14}$  a  $\mu_{16}$  ( $\mu < 0$ ), *i. e.*  $\mu \in [-0,83912, -0,63605]$ . Para  $\mu > 0$ , o coeficiente de sensibilidade tem pequena amplitude, apresentando variação entre 0 e  $-0,1$ .

Com relação a Fig. 8, pode-se observar que a sensibilidade do parâmetro  $\omega$  é relativamente alta entre  $\mu_{17} - \mu_{20}$ , *i. e.*  $\mu \in [-0,51087, -0,076527]$ . Observa-se que o coeficiente de sensibilidade deste parâmetro para  $\mu > 0$  aumenta diretamente proporcional a  $\mu$  (vide Fig. 6).

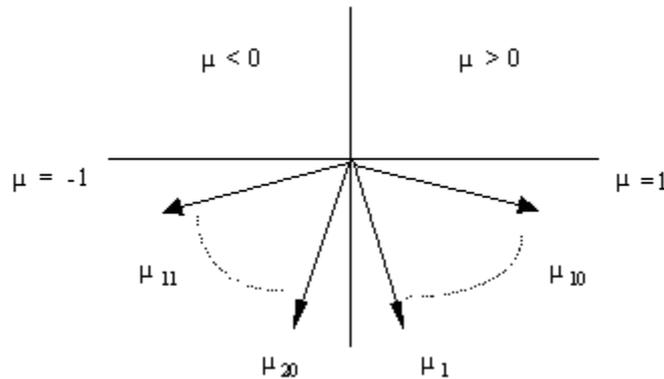


Figura 6: Discretização do domínio angular.

Analisando a Fig. 9 para  $\rho_1$ , identifica-se um aumento da sensibilidade tanto para  $\mu < 0$  quanto para  $\mu > 0$  com valores crescentes de  $\mu$ . As informações contidas entre  $\mu_{18} - \mu_{20}$  e  $\mu_8 - \mu_{10}$  são as de maior relevância.

Já para a reflectividade difusa  $\rho_2$ , Fig. 10, observa-se apenas para  $\mu < 0$  uma região em que a sensibilidade é relativamente alta. Esta faixa está compreendida aproximadamente entre  $\mu_{11} - \mu_{14}$ . Aqui como em  $\rho_1$  os coeficientes de sensibilidade aumentam conforme  $\mu$  também aumenta ( $\mu < 0$ ). Para  $\mu > 0$  a sensibilidade é pequena.

### 3.1.2. Análise de sensibilidade - Caso 2

As áreas de sensibilidade significativamente altas para  $\tau_0$  estão situadas onde os valores de  $\mu$  são menores ( $\mu < 0$ ). Conforme é vista na Fig. 11, para  $\mu > 0$ , a sensibilidade é muito pequena com o aumento de  $\mu$ .

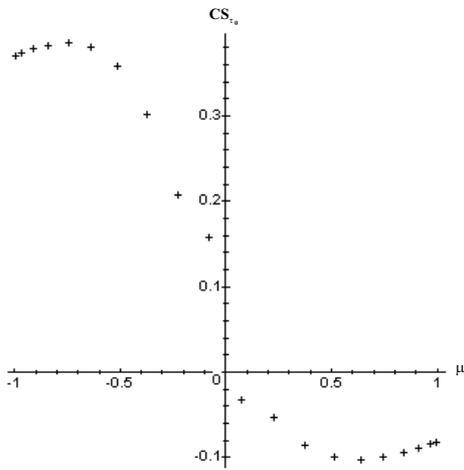


Figura 7: Sensibilidade para a espessura óptica  $\tau_0$  (Caso 1).

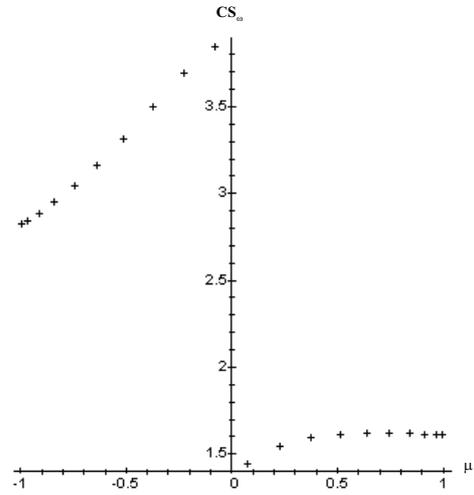


Figura 8: Sensibilidade para o albedo de espalhamento simples  $\omega$  (Caso 1).

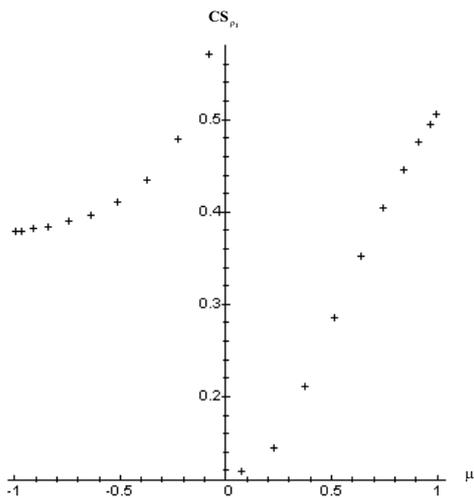


Figura 9: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_1$  (Caso 1).

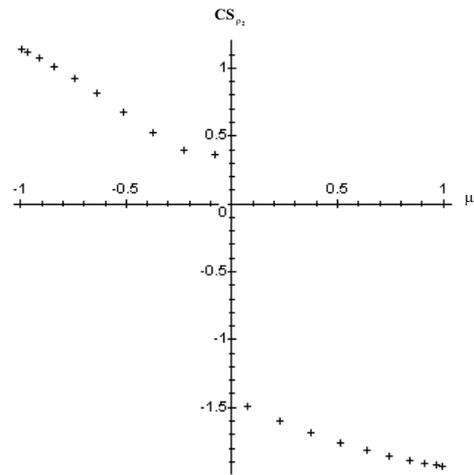


Figura 10: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_2$  (Caso 1).

Já para  $\omega$  a sensibilidade é relativamente alta para  $\mu < 0$ , sendo que os valores melhores de serem usados são aqueles entre  $\mu_{11} - \mu_{14}$ . Para  $\mu > 0$  o coeficiente de sensibilidade é praticamente constante para quaisquer valores de  $\mu$  (vide Fig. 12).

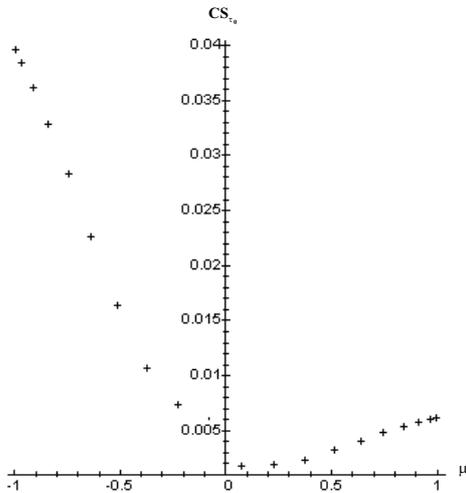


Figura 11: Sensibilidade para a espessura óptica  $\tau_0$  (Caso 2).

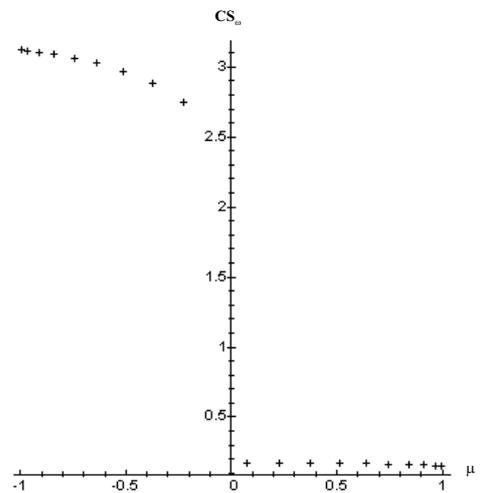


Figura 12: Sensibilidade para o albedo de espalhamento simples  $\omega$  (Caso 2).

No caso de  $\rho_1$  a sensibilidade é relativamente alta para valores de  $\mu$  crescentes ( $\mu < 0$ ) (vide Fig. 13).

Para  $\rho_2$  os coeficientes de sensibilidade mais são altos em  $\mu > 0$  apesar da amplitude de variação ser pequena. Os valores mais elevados para  $\mu < 0$  no intervalo  $\mu_{11} - \mu_{13}$  (vide Fig. 14).

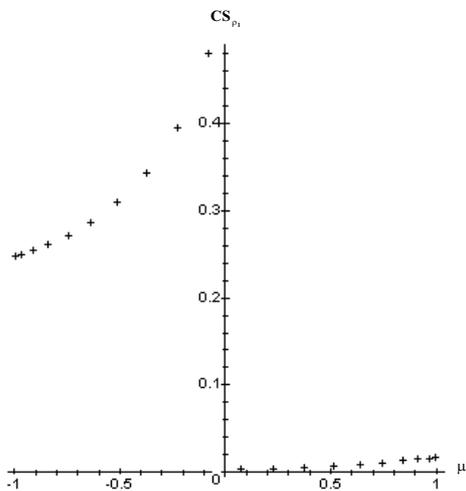


Figura 13: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_1$  (Caso 2).

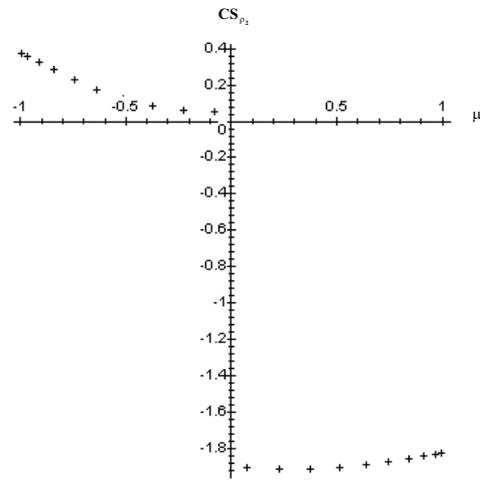


Figura 14: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_2$  (Caso 2).

### 3.1.3. Análise de sensibilidade - Caso 3

A maior sensibilidade para  $(\tau_0)$ , Fig. 15, é dada pelos maiores valores de  $\mu$  para  $\mu < 0$  ( $\mu_{19}$  e  $\mu_{20}$ ) e menores valores de  $\mu$  para  $\mu > 0$  ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ).

O mesmo acontece para  $\omega$  na Fig. 16 no que se refere a  $\mu < 0$ . Já para  $\mu > 0$  a sensibilidade é muito baixa, quase que inexistente.

A área mais sensível para  $\rho_1$  apresentada na Fig. 17 é aquela cujos valores de  $\mu$  ( $\mu_{19}$  e  $\mu_{20}$ ) são os maiores  $\mu < 0$ .

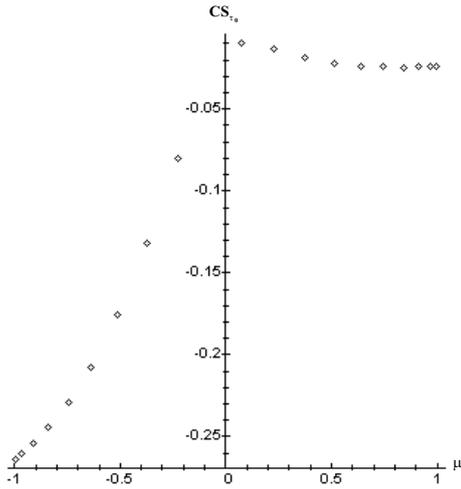


Figura 15: Sensibilidade para a espessura óptica  $\tau_0$  (Caso 3) .

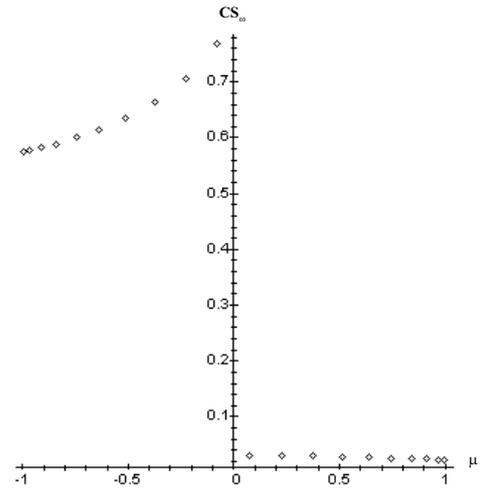


Figura 16: Sensibilidade para o albedo de espalhamento simples  $\omega$  (Caso 3).

Já para  $\rho_2$  (vide Fig. 18) as áreas mais sensíveis para  $\mu > 0$  são àquelas correspondentes a  $\mu \in [\mu_6-\mu_{10}]$  e para  $\mu < 0$  os maiores valores de  $\mu$  são encontrados entre  $(\mu_{11}-\mu_{13})$ .

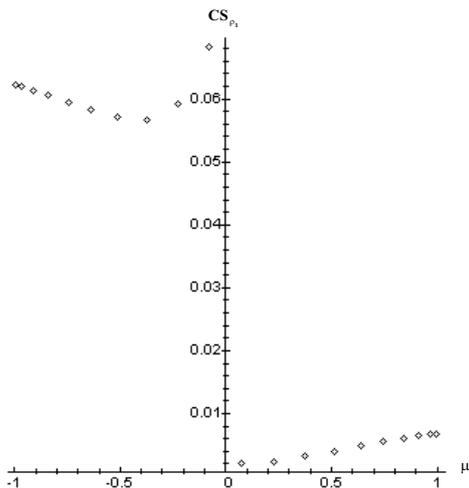


Figura 17: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_1$  (Caso 3).

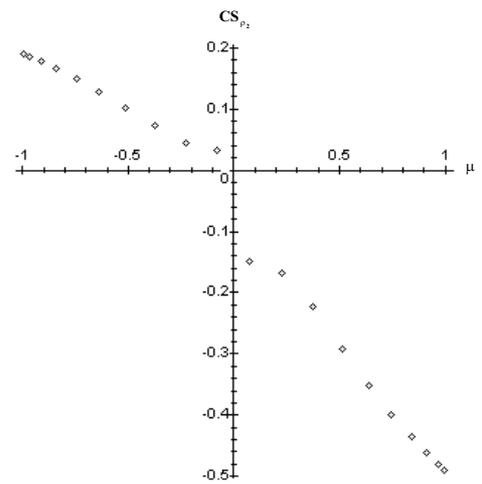


Figura 18: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_2$  (Caso 3).

### 3.1.4. Análise de sensibilidade - Caso 4

Na Figura 19 para  $\tau_0$  vê-se como áreas de maior sensibilidade aquelas cujos  $\mu$  são maiores tanto para  $\mu < 0$  como para  $\mu > 0$ .

Observando a Fig. 20 para  $\omega$  é identificada como área importante aquela cujos valores estão compreendidos entre  $\mu_{18}-\mu_{20}$  ( $\mu < 0$ ).

### 3.1.5. Análise de sensibilidade com simultaneidade de parâmetros

Já pela Fig. 21 pode-se observar que para  $\mu < 0$  e  $\mu > 0$ , respectivamente, as áreas de maior sensibilidade estão entre os maiores valores de  $\mu$ ,  $\mu_{18}-\mu_{20}$  e  $\mu_7-\mu_{10}$ .

A Figura 22 nos mostra que existe sensibilidade apesar de pequena nas áreas de menores  $\mu$  ( $\mu_{17}-\mu_{20}$ ) para

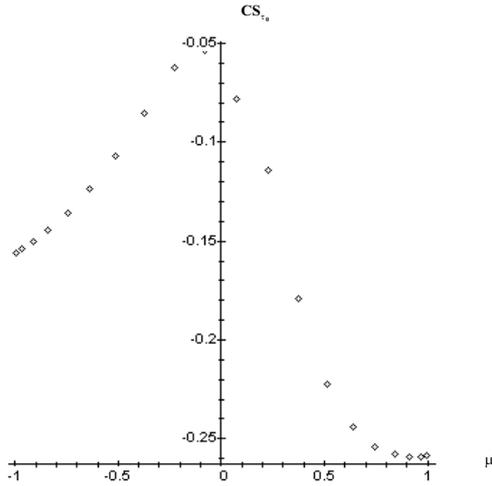


Figura 19: Sensibilidade para a espessura óptica  $\tau_0$  (Caso 4) .

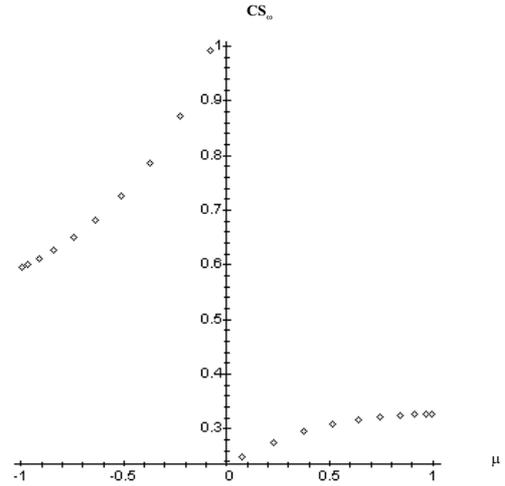


Figura 20: Sensibilidade para o albedo de espalhamento simples  $\omega$  (Caso 4) .

$\mu < 0$  e maiores  $\mu$  ( $\mu_8 - \mu_{10}$ ) para  $\mu > 0$ .

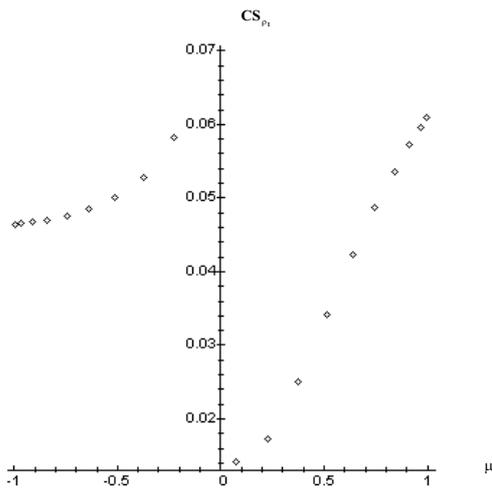


Figura 21: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_1$  (Caso 4) .

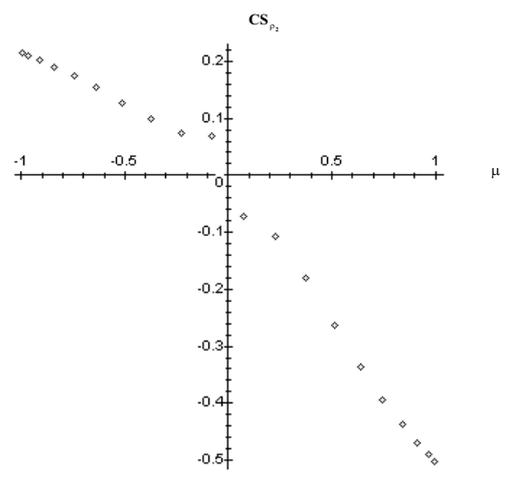


Figura 22: Sensibilidade para a reflectividade difusa  $\rho_2$  (Caso 4) .

Pode-se observar nas Figs. 7-10, correspondentes ao Caso 1 que a sensibilidade para  $\tau_0$  e  $\omega$  são relativamente elevadas para  $\mu < 0$ . A forma das curvas também é distinta, significando que deverá ser possível estimá-los simultaneamente. Para  $\mu > 0$  a sensibilidade é baixa.

Observando-se as Figs. 11-14, relativas ao Caso 2, vê-se que para  $\mu < 0$  temos a sensibilidade relativamente alta para  $\tau_0$ ,  $\omega$  e  $\rho_1$ .

Para os casos sem fonte interna, Figs. 15-18 pode-se trabalhar simultaneamente com os parâmetros  $\tau_0$  e  $\rho_2$  para  $\mu > 0$  e  $\mu < 0$  e, Figs. 18-22, com  $\tau_0$  e  $\omega$  ou  $\tau_0$  e  $\rho_1$  para  $\mu > 0$  e  $\mu < 0$ .

### 3.2. Validação da solução do problema direto

A validação dos resultados obtidos com a solução do problema direto foi efetuada em vários trabalhos (Silva Neto and Roberty, 1998; Moura Neto and Silva Neto, 1999; Pinheiro et al., 2000; Pinheiro, 2001; Pinheiro et al., 2002).

#### 4. Conclusões

A importância da análise de sensibilidade reside em permitir que se avalie *a priori* a possibilidade de se estimar os parâmetros de interesse a partir de uma determinada situação física. Dos resultados apresentados depreende-se por exemplo que algumas faixas do domínio angular devem ser evitadas para a obtenção de dados experimentais, bem como deve ser avaliado com cuidado o uso da informação relativa à radiação transmitida através do meio.

Este estudo nos permite a identificação de parâmetros que possam ser estimados através da solução dos problemas inversos.

#### 5. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq e da FAPERJ.

#### 6. Referências

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1970, “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, Dover Publications Inc., New York.
- Bell, G. I. and Glasstone, S., 1979, “Nuclear reator theory”, Robert E. Krieger Publishing.
- Cengel, Y. A., Özisik, M. N., and Yener, Y., 1984, Determination of Angular Distribution of Radiation in an Isotropically Scattering Slab, “Journal of Heat Transfer”, Vol. 106, pp. 248–252.
- Chandrasekar, S., 1950, “Radiative transfer”, Oxford University Press.
- Liou, K.-N., 1980, “An introduction to atmospheric radiation”, Academic Press.
- Lugon Junior, J., Pinheiro, R. P. F., Vasconcellos, J. F. V., and Silva Neto, A. J., 2002, Estudo de Sensibilidade Aplicado ao Problema Simultâneo de Difusão de Calor e Massa, “Anais do XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computação Científica”.
- Moura Neto, F. D. and Silva Neto, A. J., 1999, Solução da Equação de Transporte Unidimensional com Separação do Operador e com Fator Integrante, “XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica”. Águas de Lindóia, SP.
- Pinheiro, R. P. F., 2001, Problemas Diretos e Inversos em Transferência Radiativa em Meios Unidimensionais, Master’s thesis, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
- Pinheiro, R. P. F., Moura Neto, F. D., and Silva Neto, A. J., 2000, Solução da Equação de Boltzmann com Separação do Operador e com Fator Integrante em um Meio Unidimensional com Fontes internas e Superfícies Refletoras, “Anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas”. Porto Alegre, RS.
- Pinheiro, R. P. F., Silva Neto, A. J., and Moura Neto, F. D., 2002, Operator Splitting Techniques for Radiative Transfer in a Participating Medium, “Proc. Fifth World Congress on Computational Mechanics”.
- Silva Neto, A. J. and Roberty, N. C., 1998, Uma Comparação do Método de Ordenadas Discretas com Outras Técnicas Para a Solução da Equação de Transporte Unidimensional, “Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas”, Vol. II, pp. 878–883, Rio de Janeiro, RJ.
- Özisik, M. N., 1973, “Radiative Transfer and Interactions With Conduction and Convection”, Jonh Willey & Sons.

### A SENSITIVITY ANALYSIS FOR INVERSE RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS

#### Rosana P.F. Pinheiro

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brazil. [rpaz@iprj.uerj.br](mailto:rpaz@iprj.uerj.br)

#### Antônio J. Silva Neto

Instituto Politécnico - IPRJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, CP 97.282, CEP 28601-970, Nova Friburgo, RJ, Brazil. [ajsneto@iprj.uerj.br](mailto:ajsneto@iprj.uerj.br)

#### Nilson C. Roberty

Nuclear Engineering Program - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, CP 68.509, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil. [nilson@lmn.con.ufrj.br](mailto:nilson@lmn.con.ufrj.br)

**Abstract.** *In this work is presented a sensitivity analysis applied in a radiative transfer problem in a one-dimensional participating medium regarding in the estimation of materials properties (parameters), such as the optical thickness, the single scattering albedo and the diffuse reflectivities, at the inner boundary surfaces of the medium. The influence of these*

parameters was evaluated in the solution of the direct problem, modeled using the linearized Boltzmann equation, also known as transport equation. The method of discrete ordinates was used for the discretization of the angular dependence of Boltzmann's equation and a finite difference approach for the spatial dependence. This study validated the possibility to estimate parameters through an inverse problem approach.

**Keywords:** sensitivity analysis, radiative transfer, linearized Boltzmann equation, finite difference, inverse problem.