Proceedings of the 10o Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2004
Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering -- ABCM, Rio de Janeiro, Brazil, Nov. 29 -- Dec. 03, 2004

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DETERMINAÇÃO DE FLUXO DE CALOR EM UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Rubem Mário Figueiró Vargas
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul-PUCRS
Departamento de Engenharia Química-Prédio 30 FENG
Av. Ipiranga 6681 – RS – Porto Alegre – CEP 90619.900
rvargas@pucrs.br

André Brum Fernandes
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul-PUCRS
Departamento de Engenharia Química-Prédio 30 FENG
Av. Ipiranga 6681 – RS – Porto Alegre – CEP 90619.900
abffisica@hotmail.com

Resumo. *A situação de um gás, inicialmente com temperatura uniforme em toda sua extensão, confinado no interior de um tanque esférico de raio interno conhecido, submetido a uma variação súbita na temperatura do ambiente externo, que desencadeia um processo de transferência de calor dependente do tempo, foi estudada, em trabalhos anteriores, no sentido da determinação da temperatura junto à parede do tanque. As soluções apresentadas na literatura para a temperatura adimensionalizada possuem como característica a forma integral e por conseguinte a determinação dos fluxos de calor, de forma analítica, fica comprometida, exceto nas situações em que se despreza a influência da parede no processo de transferência de calor. Neste trabalho, enfrenta-se este problema, utilizando-se a regra de derivação de Leibnitz, que se mostra adequada às características do problema abordado levando-se em conta a presença da parede no modelo matemático. Considera-se apenas a direção radial da transferência de calor, assim como se assume que a temperatura é constante ao longo da parede do reservatório de espessura conhecida. Resultados numéricos são apresentados e discutidos para alguns valores dos parâmetros físicos presentes no modelo.*

Palavras chave: transferência de calor transiente, derivação de Leibnitz, geometria esférica, fluxo de calor

1. Introdução

No projeto e análise de reservatórios esféricos, utilizados para a armazenagem de fluidos, o conhecimento da transferência de calor transiente para o fluido no interior do tanque em função do tempo torna-se necessário. Este processo de transferência de calor é modelado supondo-se uma súbita variação na temperatura do ambiente externo ao reservatório e deseja-se conhecer as conseqüências desta sobre as propriedades do fluido interno. Esta variação como ocorre no ambiente externo, ou seja, na atmosfera, não é controlada, daí a relevância do estudo proposto.

A representação matemática de tal situação pode considerar a presença ou não da parede do tanque. A aproximação mais simples do problema transiente é a análise pseudo-estacionária, vinculada à rapidez do processo de transferência não estacionária. Li (1986) gera soluções para esta aproximação em geometria cilíndrica. Um dos fatores que controla esta rapidez é a razão entre as capacidades térmicas do fluido e da parede, uma análise sobre a dependência da solução e possíveis aproximações com relação a esta razão é feita por Sucec (1988) para o escoamento no interior de um tubo. Krishnan (1982) analisa o caso de transferência transiente de calor em geometria cilíndrica, fazendo uso da transformada de Laplace para a obtenção de uma solução analítica para o problema. Vargas (1990) também trabalhando em geometria cilíndrica, estabeleceu soluções analíticas aproximadas para diferentes situações em relação às capacidades térmicas da parede e do fluido interno, utilizando o cálculo fracionário.

Para a situação de geometria esférica, que é o caso deste trabalho, um modelo matemático foi solucionado analiticamente, lançando previsões quanto ao comportamento da temperatura junto à parede em processo de transferência de calor não estacionária, por Vargas et al (2002). A técnica utilizada é Transformada de Laplace, tendo em vista a representação das funções envolvidas em forma de expansões assintóticas. A solução desenvolvida pelos autores para a temperatura adimensionalizada é restrita a intervalos pequenos de tempo, o que é pertinente visto que a dependência temporal ocorre no início do processo de transferência de calor, que antecede a situação de transporte em estado estacionário.

Em um outro trabalho, o problema é abordado utilizando uma técnica mista que faz uso da Transformada de Laplace e do cálculo fracionário fornecendo uma expressão analítica para o cálculo da temperatura junto à parede do reservatório, Vargas (2002).

Nas soluções apresentadas, nos dois últimos trabalhos mencionados, o perfil de temperatura vem expresso em forma integral ao incorporar a presença da parede do reservatório no modelo matemático, mas não apresenta a determinação do fluxo de calor.

Neste trabalho apresenta-se uma técnica de solução para o conhecimento do fluxo de calor a partir dos perfis de temperatura anteriormente obtidos. As duas situações, quais sejam o modelo com e sem a presença da parede, podem ser analisadas a partir do formalismo desenvolvido. A partir destas soluções pode-se ter então uma idéia do comprometimento do problema real com as hipóteses simplificadoras. Resultados serão apresentados para o fluxo de calor transferido, considerando-se valores pré-estabelecidos de coeficientes de transferência de calor e outros parâmetros físicos e geométricos presentes no modelo matemático.

2. Análise

Na situação física, um gás, inicialmente com temperatura uniforme T_i em toda sua extensão, está no interior de um tanque esférico de raio interno R. Uma variação súbita na temperatura do ambiente externo para T_L, inicia o processo de transferência de calor dependente do tempo. Considera-se apenas a direção radial da transferência de calor, assim como se assume que a temperatura é constante ao longo da parede do reservatório de espessura, b, conforme ilustrado na Figura 1.

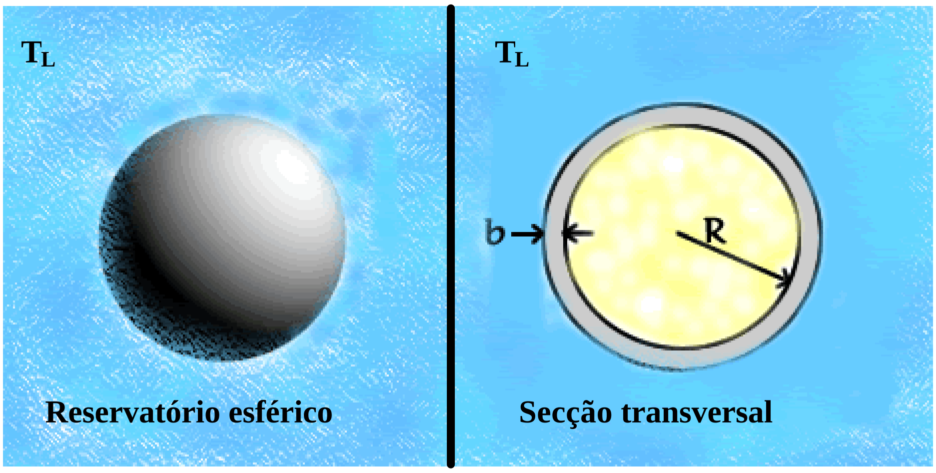

Figura 1. Ilustração do problema físico e suas dimensões características.

Para as condições estabelecidas, um balanço de energia para o fluido e então para a parede de espessura b, além do uso da condição de conjugação dos fluxos e continuidade da temperatura na interface parede-fluido, determina um conjunto de equações diferenciais e condições que são apresentadas a seguir.

Seja, então a equação de energia em coordenada esférica somente na direção radial, Ozisik (1980):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\text{, } 0<r<R, \quad (1.a)$$

sujeito à seguinte condição de contorno em r=R:

$$kA\frac{\partial T}{\partial r}=UA(T_L-T)-V_w r_w c_{p_w}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.b)$$

Além da imposição de que em todo o domínio do problema a temperatura deva ser limitada e com a condição inicial sendo.

$$T = T_i \text{ em } t = 0 \quad (1.c)$$

onde T = T(r,t) é a temperatura; r é a coordenada radial; α, a difusividade térmica do fluido interno; U é o coeficiente global de transferência de calor entre o fluido externo ao reservatório e a parede interna baseado na área superficial interna; A é a área da esfera de raio R; V, o volume da parede; k, é a condutividade térmica do fluido interno; ρ, a massa específica, c_p, o calor específico; sendo o sub-índice w indicador de que as propriedades referem-se à parede.

A condição de contorno para r = R pode ser dividida por kA sendo então reescrita levando-se em conta a geometria do problema como:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{U}{k}(T_L-T)-\left[1+\frac{b}{R}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]\frac{r_w c_{pw} b}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

introduzindo-se os seguintes adimensionais:

$$f(Z,F)=\frac{T(r,t)-Ti}{T_L-Ti}\,;\,F=\frac{at}{R^2}\,;\,Z=\frac{r}{R}\,;\,S=\frac{UR}{k}\,, \tag{3}$$

sendo $f(z,F)$ a temperatura adimensionalizada, F o tempo adimensionalizado, z a coordenada radial adimensionalizada e S é um coeficiente que relaciona a resistência à transferência de calor do fluido interno com a resistência associada à parede e ao fluido externo, o problema (1) pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{2}{z}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial F} \tag{4.a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=S(1-f)-\left[1+\frac{b}{R}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]\frac{1}{\hat{a}}\frac{\partial f}{\partial F} \tag{4.b}$$

em z = 1;

$$f=0 \text{ em F=0.} \tag{4.c}$$

Sendo $\hat{a}=\frac{r\,c_pR}{r_wc_{p_w}b}$, o parâmetro comparativo entre as capacidades térmicas do fluido interno e do material da parede. Para simplificar-se a notação define-se:

$$G=\left[1+\frac{b}{R}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]\frac{1}{\hat{a}} \tag{5}$$

Note que G é praticamente governado pelo termo $1/\hat{a}$, visto que o termo entre colchetes tende a um, devido a espessura, b, ser usualmente muito menor que o raio do reservatório, sendo assim G representa a comparação entre a capacidade térmica do material da parede e a capacidade térmica do fluido interno.

Neste trabalho apresenta-se a solução analítica para o fluxo de calor transferido no sistema físico descrito, partindo-se do estabelecido anteriormente para o perfil de temperatura descrito por, Vargas et al. (2002),

$$f_w=S\int_0^{F/G}e^{-(S-1)u}erfc\left(\frac{u}{2\sqrt{F-Gu}}\right)du \tag{6}$$

para melhor prosseguirmos abrimos a integral anterior como segue

$$f_w=S\left[\int_0^{F/G}e^{-(S-1)u}du-\int_0^{F/G}e^{-(S-1)u}erf\left(\frac{u}{2\sqrt{F-Gu}}\right)du\right]. \tag{7}$$

Adotamos, neste trabalho, as formas adimensionalizadas por Sucec (1988), para o fluxo de calor superficial temos

$$Q_w=\frac{2Rq_w}{k(T_L-T_i)} \tag{8}$$

onde q_w é o fluxo de calor superficial instantâneo junto à superfície interna do reservatório, dado pela lei de Fourier, o que remete à escrita de Q_w como:

$$Q_w=2\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=1} \tag{9}$$

Tendo em vista a Eq. (9), para sua avaliação tem-se a condição de contorno em z=1, Eq.(4.b), obviamente que para um problema onde não exista a parede no modelo

$$Q_w=2S(1-f_w), \tag{10}$$

no entanto, quando se pretende considerar os efeitos térmicos da parede do reservatório no processo de transferência de calor no gás confinado, o fluxo de calor adimensional na superfície é:

$$Q_w = 2S(1 - f_w) - 2G\frac{\partial f_w}{\partial F} \quad . \tag{11}$$

Conhecendo-se a Eq.(6), que traduz o comportamento da temperatura adimensionalizada com o tempo adimensional junto à parede interna do reservatório, a Eq.(11) pode ser completamente avaliada. Entretanto o caráter integral do perfil da temperatura além do fato do limite dessa integral ser dependente do tempo, variável com relação a qual estamos derivando ϕ_w , nos remete ao uso da derivação de Leibnitz, (Abramowitz e Stegun, 1965), expressa na forma:

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_{g_1(a)}^{g_2(a)} F(a,e)da = \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} \frac{\partial}{\partial a}F(a,e)da + F(g_2,e)\frac{\partial}{\partial a}g_2 - F(g_1,e)\frac{\partial}{\partial a}g_1 \quad . \tag{12}$$

Ao aplicar-se a regra de derivação de Leibnitz na Eq.(6) obtém-se a seguinte expressão para a derivada de ϕ_w

$$\frac{\partial f_w}{\partial F} = \frac{S}{2\sqrt{p}}\left[\int_0^{F/G} \frac{u e^{u(1 - S - \frac{u}{4(F-Gu)})}}{\sqrt{(F-Gu)^3}} du\right] \tag{13}$$

De modo que se completa a determinação do fluxo de calor adimensional expresso pela Eq.(11):

$$Q_w = 2S\left[1 - S\int_0^{F/G} e^{-(S-1)u} erfc\left(\frac{u}{2\sqrt{F-Gu}}\right)du\right] - \frac{GS}{\sqrt{p}}\left[\int_0^{F/G} \frac{u e^{u(1-S-\frac{u}{4(F-Gu)})}}{\sqrt{(F-Gu)^3}} du\right] \tag{14}$$

3. Resultados e Discussão

As integrais envolvidas na equação para o fluxo de calor adimensional junto à parede, Eq. (14), foram determinadas utilizando-se a técnica numérica de quadratura de Gauss-Legendre com 200 pontos. Cabe ressaltar que a avaliação do termo de fluxo que envolve a derivada com o tempo foi executada mediante a expressão integral apresentada neste trabalho, mas também se utilizando esquemas de diferenças finitas. Ao se utilizar diferenças finitas necessita-se de um passo extremamente pequeno para se obter resultados confiáveis, enquanto que com a expressão integral não se depara com tal situação.

Os resultados demonstram que ao incorporar a presença da parede no modelo matemático o fluxo de calor que ingressa no gás confinado é nulo no tempo zero e a partir daí cresce até encontrar um valor máximo e então começa a decrescer conforme a solução do modelo sem parede, o que condiz com o fato da diferença de temperatura se atenuar na medida em que o processo evolui.

Tabela 1: Valores da quantidade G, definido pela Eq. 5, em função da razão entre a espessura da parede e o raio do reservatório assim como de diferentes materiais envolvidos no sistema.

b/R	G	
0	0	
0,001	3,15	aço/ar
	5,18	aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-4}$	aço/água
	$1,2 \times 10^{-3}$	aço/glicerina
0,01	31,8	aço/ar
	52,3	aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-3}$	aço/água
	$1,2 \times 10^{-2}$	aço/glicerina
0,1	315	aço/ar
	572	aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-2}$	aço/água
	$1,3 \times 10^{-1}$	aço/glicerina

A fim de visualizarem-se as predições dos resultados alcançados neste trabalho adotam-se alguns valores para os parâmetros do modelo. Na tabela 1, coloca-se para diferentes valores de G, parâmetro definido de forma a considerar a relação entre as capacidades térmicas do fluido e da parede, valores para esta quantidade considerando-se alguns pares de materiais referentes à substância que constitui o fluido interno e a parede do reservatório. Note que â tende ao infinito, o que equivale a G tender a zero, quando a capacidade térmica do material da parede é pequena quando comparada a do fluido, esta condição pode ocorrer se um líquido estiver no interior do tanque.

A partir de alguns valores de G da Tabela 1, de coeficientes de transferência de calor convectivo usuais e da condutividade térmica do fluido interno plotou-se o comportamento do fluxo de calor na interface parede-fluido interno, que são apresentados nas Figuras 2 e 3.

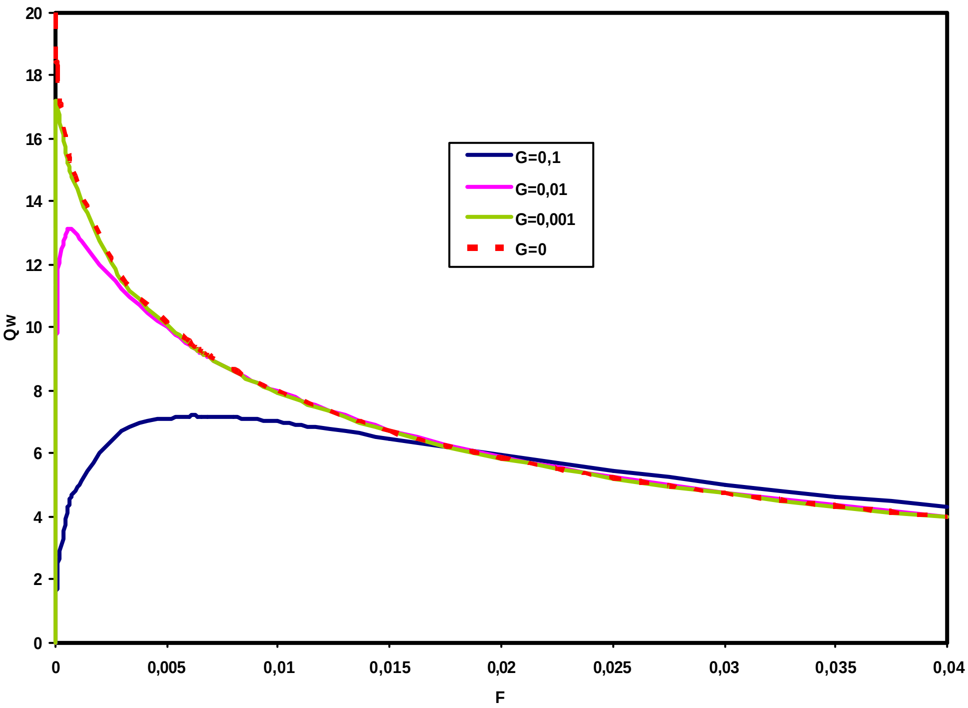

Figura 2. Gráfico do fluxo de calor Q_w adimensionalizado em função do tempo adimensional para um coeficiente de transferência de calor adimensional S=10.

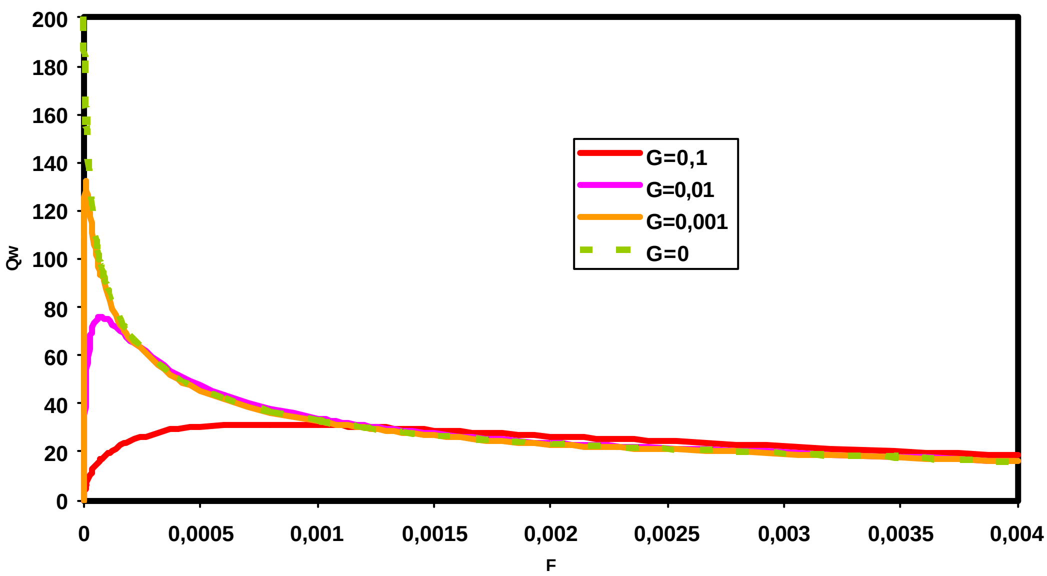

Figura 3. Gráfico do fluxo de calor Q_w adimensionalizado em função do tempo adimensional para um coeficiente de transferência de calor adimensional S=100.

Observa-se pelo comportamento do gráfico que ao se incorporar a parede no modelo matemático as curvas partem do zero e aumentam até chegar aproximadamente ao comportamento previsto no modelo sem parede. O fluxo Q_v representa o calor que chega ao gás confinado a partir do ambiente externo e passando pela parede do reservatório. À medida que o parâmetro G cresce, amplia-se a relevância da parede no processo o que faz com que o fluxo que ingressa no gás interior seja nulo no início, isto por que a quantidade de calor que entra no sistema está sendo utilizada para aquecer a parede, até o momento em que este efeito é sobreposto pela transferência mais significativa para o gás interior. A rapidez deste efeito é verificada a partir da análise dos gráficos anteriores, quanto maior o G, mais relevante o efeito da parede, mais tempo leva para a maior parte da energia que ingressa no sistema, representada pela curva tracejada nos gráficos apresentados nas Figuras 2 e 3, ser destinada ao aquecimento do gás interior.

Além disso, mesmo quando as linhas estão aproximadas elas não são coincidentes, isto demonstra a influência da parede na previsão que o modelo permite. A coincidência somente é forte para os casos de G=0,001 e G=0 (modelo sem parede) o que nos alerta de que nem sempre o modelo sem parede descreve adequadamente o sistema.

4 Conclusão

Com o uso da derivação de Leibnitz chegou-se a uma solução analítica para o fluxo de transferência de calor em um reservatório esférico, onde não foi negligenciado o efeito da capacidade térmica da parede frente à capacidade térmica do fluido, em função do tempo adimensional, F. A partir de tal solução chega-se ao caso limite onde a parede é negligenciada no modelo matemático e comparações podem ser verificadas no sentido de clarificar, que muitas vezes o modelo simplificado pode não corresponder a situação que se tenta modelar. As soluções reproduzem adequadamente o comportamento físico esperado do sistema além de apresentarem caráter analítico, o que implica em baixo esforço computacional para implementá-las. A facilidade demonstrada quando da solução do problema com parede espessa, sem a necessidade de técnicas baseadas em diferenças finitas, faz com que este método matemático pareça bastante atraente. Neste trabalho ao determinar-se o fluxo de calor a partir do conhecimento do perfil de temperatura fornecido pelo mesmo método, agregamos um maior conhecimento acerca do sistema sob a ótica do estudo de transferência de calor e fortalecemos a viabilidade do tratamento matemático proposto.

5. Referências

Abramowitz, M. e Stegun,I., 1965, Handbook of Mathematical Functions, 1ª edição, Dover Publications Inc., NY.

Krishnan, B., 1982, "On Conjugated Heat Transfer in Fully Developed Flow", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, vol.25, 288-291.

Li, Chung-Hsiung, 1986, "Exact Transient Solutions of Paralel-Current Transfer Processes", ASME - Journal of Heat Transfer, vol.108, 365-369.

Ozisik, N.M., 1980, Heat Conduction, 1ª edição John Wiley & Sons Inc., NY.

Sucec, J., 1988, "Analytical Solutions for Unsteady Heat Transfer in a Pipe", ASME Journal of Applied Mechanics, vol.110, 850-854, NY.

Vargas, R.M.F., 1990, "Estudo de Temperatura Não Estacionária num Tubo pelo Método do Cálculo Fracionário", dissertação de mestrado, UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre.

Vargas, R.M.F., 2002, Uma Solução Analítica para a Temperatura Transiente junto a Paredes Esféricas Utilizando Transformada de Laplace, Anais do VII ERMAC-Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, Porto Alegre, Brasil.

Vargas, R.M.F., Gomes, G.M.F. e Cassel, E., 2002, Determinação de Temperatura Não Estacionária junto à Parede em Problemas de Geometria Esférica, Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Química, Natal, Brasil.

ANALYTICAL SOLUTION FOR DETERMINATION OF HEAT FLUX IN A SPHERICAL GEOMETRY PROBLEM

Rubem Mário Figueiró Vargas
Pontificial University Catholic of Rio Grande do Sul-PUCRS
Building 30 – FENG – Chemical Engineering Department
Av. Ipiranga 6681 – RS – Porto Alegre – 90619.900
e-mail – rvargas@pucrs.br

André Brum Fernandes
Pontificial University Catholic of Rio Grande do Sul-PUCRS
Building 30 – FENG – Chemical Engineering Department
Av. Ipiranga 6681 – RS – Porto Alegre – 90619.900
e-mail – abffisica@hotmail.com

Abstract

In the physical situation, a fluid, initially at known temperature throughout, is within a spherical reservoir of radius R. A sudden change in the outside ambient medium temperature T_L initiates the unsteadiness. The temperature drop across the reservoir wall of thickness b is neglected. This situation was studied in previous works, in the sense to predict the wall temperature profile. In the literature, the attained solutions for temperature are presented in integral form when the wall is considered in the mathematical model. This characteristic becomes difficult the heat fluxes determination in analytical form. In this work, we face this problem using the Leibnitz derivation that showed to be efficient in the problem with wall. We consider only radial dependence and the constant temperature along for the wall of the reservoir. Considering several physical parameters of the mathematical model, numerical results are presented e discussed.

Keywords: unsteady heat transfer, Leibnitz' Derivation, spherical geometry, heat flux