

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS UTILIZANDO DIFERENTES ESQUEMAS DE DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL EM MODELAGEM DA TURBULÊNCIA

Alice Rosa da Silva

Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
arsilva@mecanica.ufu.br

Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva

Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
alfsilva@mecanica.ufu.br

Sérgio Said Mansur

Universidade Estadual Paulista - UNESP
mansur@dem.feis.unesp.br

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo. No presente trabalho é apresentada uma análise de estabilidade numérica e física de esquemas de discretização temporal e espacial. A influência da modelagem da turbulência também é analisada. Resultados mostram que o uso de esquemas de segunda ordem no tempo e modelagem da turbulência torna o esquema centrado estável, mesmo para altos números de Reynolds.

Palavras Chaves. Esquemas de discretização temporal, cilindro estacionário, modelo de turbulência.

1. Introdução

O esquema de discretização espacial de diferenças centradas é conhecido como instável para discretização dos termos não lineares das equações de Navier-Stokes. Isto é devido ao fato de que o esquema espacial de segunda ordem não apresenta viscosidade numérica. O uso adequado de um esquema de discretização temporal de segunda ordem, com o esquema centrado espacial torna a metodologia de discretização estável do ponto de vista numérico. Porém, é natural que, à medida que o número de Reynolds aumenta, apareçam instabilidades físicas associadas ao processo de transferência de energia entre as estruturas turbilhonares do escoamento. Assim um modelo de turbulência faz-se necessário. Neste trabalho, experimentos numéricos são apresentados com o objetivo de ilustrar a estabilidade do esquema centrado espacial quando utilizado em conjunto com esquemas temporais de segunda ordem e com modelagem da turbulência.

2. Modelo Matemático

Apresenta-se, a seguir, a formulação que descreve a metodologia utilizada no presente trabalho. A Fig. 1 esquematiza a malha euleriana que representa o domínio de cálculo e a malha lagrangiana para a interface imersa. As duas malhas são independentes do ponto de vista geométrico, mas são acopladas, através do termo fonte de força, inserido nas equações do movimento.

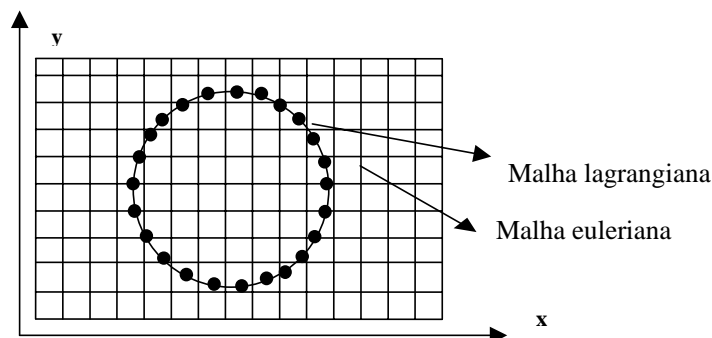


Figura 1. Esquema ilustrativo da malha fixa (euleriana) e da malha móvel (lagrangiana), representando uma interface fluido-sólido.

As equações do movimento e da conservação da massa, são apresentadas na forma tensorial como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

onde ρ e ν são, respectivamente, a densidade e a viscosidade cinemática, p é a pressão, u_i é a componente i do vetor velocidade e F_i é a componente i do vetor campo de força euleriano. O termo fonte de força F_i da Eq. 1 é calculado através da distribuição das componentes do vetor interfacial lagrangiano $\vec{f}(\vec{x}_k, t)$, através da seguinte equação:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \sum_k D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{f}(\vec{x}_k, t) \Delta S^2(\vec{x}_k), \quad (3)$$

onde \vec{x} e \vec{x}_k são, respectivamente, os vetores posição dos pontos eulerianos e lagrangianos, $\Delta S(\vec{x}_k)$ é o comprimento entre dois pontos lagrangianos, $\vec{f}(\vec{x}_k, t)$ é a força interfacial calculada pelo Modelo Físico Virtual, e D_{ij} é uma função de interpolação/distribuição, com propriedades de uma função Gaussiana.

3.0. Método Numérico

Utilizou-se o método dos passos fracionários com malhas deslocadas, para o acoplamento entre o campo de pressão e os campos de velocidades. Foi utilizado o esquema de diferenças finitas centradas de segunda ordem para a discretização espacial e três métodos para a discretização temporal: Euler, Adams-Bashforth e Runge-Kutta, os dois últimos de segunda ordem.

No método de Euler a derivada temporal $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ pode ser aproximada por:

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = f(u_i^n, u_j^n) - P_i^n + F_i^n \quad (4)$$

onde f representa os termos advectivo e difusivo da equação de Navier-Stokes. O índice sobrescrito, n , representa o tempo e Δt é o passo de tempo. Os termos P_i^n e F_i^n são, respectivamente, o gradiente de pressão e o campo de força na direção i . O termo \tilde{u} é uma estimativa da velocidade, inerente ao método de acoplamento utilizado.

No método de Adams-Bashforth são necessários os termos advectivo e difusivo em n e $n-1$ para os cálculos no tempo $n+1$. O método de segunda ordem utilizado, pode ser representado por:

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f(u_i^n, u_j^n) - \frac{1}{2} f(u_i^{n-1}, u_j^{n-1}) - P_i^n + F_i^n. \quad (5)$$

O método de Euler é utilizado no primeiro passo de tempo.

No método de Runge-Kutta de segunda ordem, para estimar a velocidade no tempo atual, \tilde{u}_i^{n+1} , precisa-se somente das velocidades no tempo precedente, u_i^n, u_j^n . Este método pode ser representado por:

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n}{\frac{\Delta t}{2}} = f(u_i^n, u_j^n) - P_i^n + F_i^n, \quad (6)$$

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = f\left(\tilde{u}_i^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{u}_j^{n+\frac{1}{2}}\right) - P_i^n + F_i^n. \quad (7)$$

onde a Eq. 6, representa o passo preditor e a Eq. 7, representa o passo corretor.

3.1. Modelo de Turbulência

O surgimento do regime turbulento depende do número de Reynolds. Devido às várias implicações práticas em diversos setores, tem-se tornado cada vez maior o número de pesquisas relacionadas ao entendimento e ao controle de escoamentos turbulentos. Reynolds (1894) propôs um processo de decomposição das equações de Navier-Stokes em uma parte média e outra parte flutuante, de modo a resolver os escoamentos turbulentos. Outra forma de decomposição foi proposta por Smagorinsky (1963), passando pelo conceito de filtragem.

As Equações 1 e 2 são reescritas na forma filtrada como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (9)$$

Fazendo a decomposição das componentes da velocidade, que aparecem no produto filtrado do termo advectivo e aplicando as definições necessárias (Silveira-Neto, 2003), as equações globais da turbulência são:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \right] + F_i, \quad (10)$$

onde $\tau_{ij} = -(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)$ é o tensor de Reynolds sub-malha. Este tensor é modelado através do modelo de fechamento, proposto por Boussinesq. Tal modelo expressa o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação, gerada pelo campo de velocidade e da energia cinética turbulenta (k). Aplicando-se o modelo, obtêm-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{\text{efet}} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_i, \quad (11)$$

onde:

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \quad \text{e} \quad \nu_{\text{efet}} = \nu + \nu_t. \quad (12)$$

A viscosidade turbulenta, ν_t , é dada em função da taxa de deformação e da escala de comprimento e é expressa por:

$$\nu_t = (C_S \ell)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}, \quad (13)$$

onde ℓ é o comprimento característico, que depende da malha de discretização, \bar{S}_{ij} é a taxa de deformação, calculada com base no campo filtrado, C_S é a constante de Smagorinsky.

3.2. Função de Amortecimento

Utilizou-se também, no presente trabalho, uma função de amortecimento na saída do domínio, para que as instabilidades físicas fossem amortecidas gradualmente até zero, à medida que elas são transportadas para fora do domínio. Esta função (Souza *et al.*, 2002) é dada por:

$$f(\varepsilon) = 1 - 6\varepsilon^5 + 15\varepsilon^4 - 10\varepsilon^3, \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{i - i_1}{i_2 - i_1} \quad (15)$$

sendo $i_1 \leq i \leq i_2$. Os pontos i_1 e i_2 correspondem, respectivamente, às malhas inicial e final, da região de amortecimento, conforme Fig. 2.

O papel da função de amortecimento, é eliminar os vórtices na saída do domínio de cálculo, possibilitando desta forma, a aplicação da condição de contorno de escoamento desenvolvido nesta fronteira. Esta função elimina a entrada de massa na saída do domínio que ocorre devido à rotação dos vórtices.

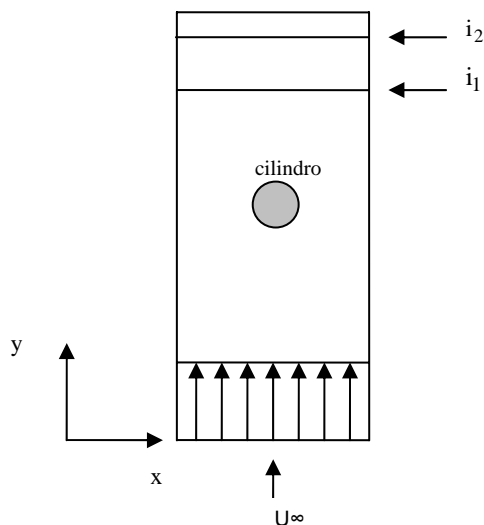


Figura 2. Esquema ilustrativo da posição das malhas inicial e final na saída do domínio de cálculo.

4.0. Resultados

Foram realizadas simulações ao redor de um cilindro estacionário, com os diferentes métodos de discretização temporal citados anteriormente, a diferentes números de Reynolds, com o objetivo de analisar a estabilidade dos mesmos. Para estas simulações, utilizou-se uma malha de 125 x 250 pontos e um domínio retangular de dimensões 15d x 30d, sendo d o diâmetro do cilindro. As coordenadas centrais do cilindro são 7,5d x 16,5d. A Fig. 3 representa um esquema ilustrativo deste domínio.

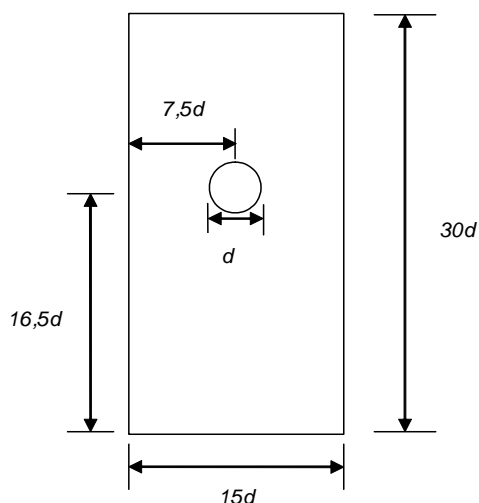


Figura 3. Esquema ilustrativo do domínio de cálculo.

4.1. Visualização do Escoamento para Reynolds igual a 100

A Figura 4 apresenta a visualização do escoamento através dos campos de vorticidade utilizando os três métodos de discretização temporal e número de Reynolds igual a 100.

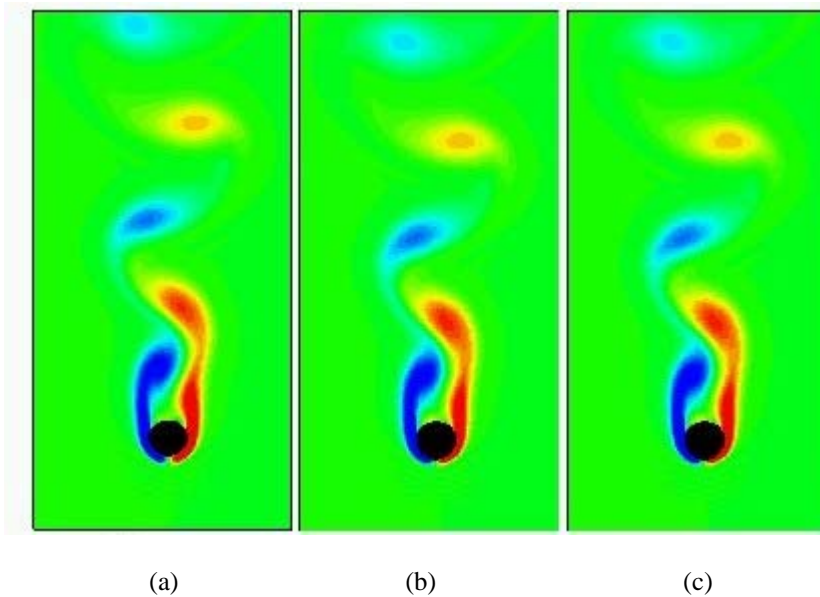


Figura 4. Campos de vorticidade, para $Re = 100$; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Os três esquemas de discretização apresentaram resultados semelhantes, do ponto de vista qualitativo.

4.2. Visualização do Escoamento para Reynolds igual a 300

A Figura 5 apresenta a visualização do escoamento, através dos campos de vorticidade, utilizando os três métodos de discretização temporal e número de Reynolds igual a 300.

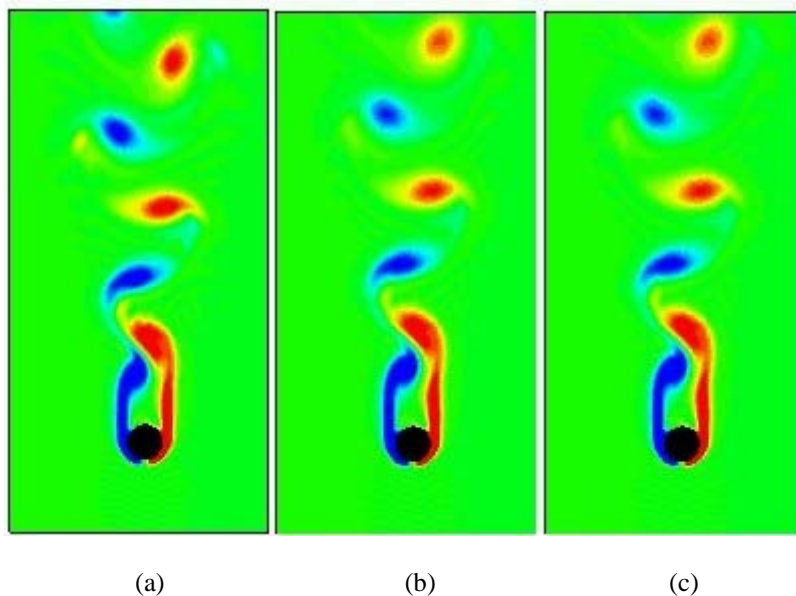


Figura 5. Campos de vorticidade para $Re = 300$; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Observa-se, nesta figura, o início do aparecimento de instabilidades numéricas, nos três esquemas de discretização temporal.

4.3. Visualização do Escoamento para Reynolds igual a 1.000

A Figura 6 apresenta a visualização do escoamento, através dos campos de vorticidade, utilizando os três métodos de discretização temporal e número de Reynolds igual a 1.000. As instabilidades numéricas são muito pronunciadas em todos os esquemas, porém mais acentuadas no método de Euler. Este comportamento era esperado, uma vez que o uso conjunto do esquema centrado espacial, com esquemas temporais de baixa ordem é instável.

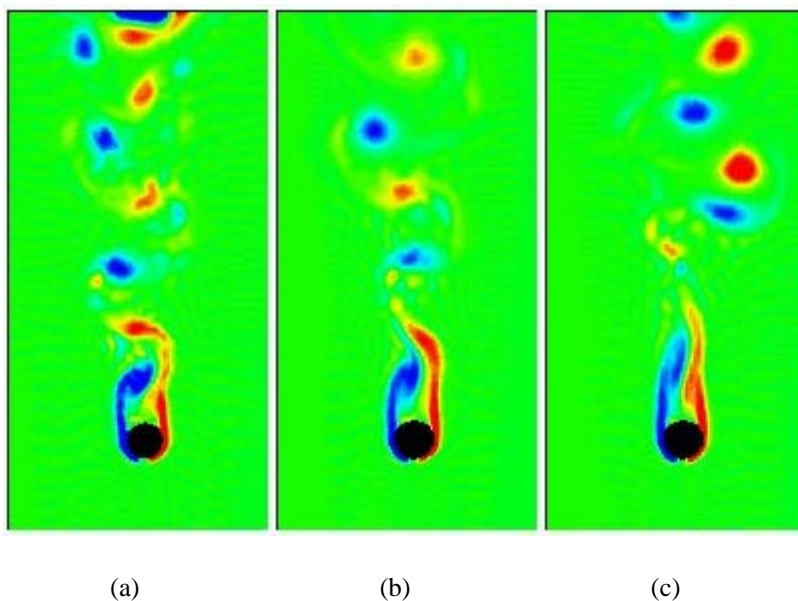


Figura 6. Campos de vorticidade para $Re = 1.000$; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Este comportamento é melhor visualizado na Fig. 7, através da evolução temporal do coeficiente de arrasto.

4.3.1. Variação Temporal do Coeficiente de Arrasto para Reynolds igual a 1.000

Na Figura 7 verifica-se a evolução temporal do coeficiente de arrasto para cada um dos esquemas de discretização temporal mencionados.

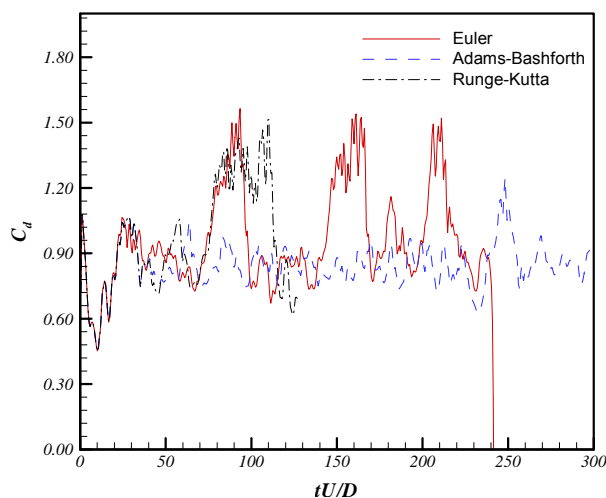


Figura 7. Evolução temporal do coeficiente de arrasto para Reynolds igual a 1.000.

Verifica-se um aumento significativo da amplitude das oscilações no coeficiente de arrasto, para os três métodos, à medida que o número de Reynolds aumenta. O método de Runge-Kutta teve comportamento mais semelhante ao de Euler. O cálculo com os métodos de Runge-Kutta e Euler divergem, conforme pode ser observado. Assim sendo, para um número de Reynolds elevado, é necessária a modelagem da turbulência para garantir a estabilidade da metodologia. Ressalta-se que os esquemas centrados espaciais não possuem viscosidade numérica, para transferir energia cinética ligada às flutuações de velocidade, sobre a frequência de corte, que é determinada pelo tamanho da malha. Os esquemas *upwind* são estáveis sem modelo de turbulência, mesmo a altos Reynolds, devido à alta viscosidade numérica.

4.4. Simulações com Modelo de Turbulência

Utilizou-se no presente trabalho o modelo sub-malha de Smagorinsky (1963), com o objetivo de buscar a estabilidade dos esquemas. A constante de Smagorinsky utilizada foi de 0,18.

4.4.1. Visualização do Escoamento para Reynolds igual a 1.000

A Figura 8 apresenta a visualização do escoamento, através dos campos de vorticidade, utilizando os três métodos de discretização temporal e número de Reynolds igual a 1.000.

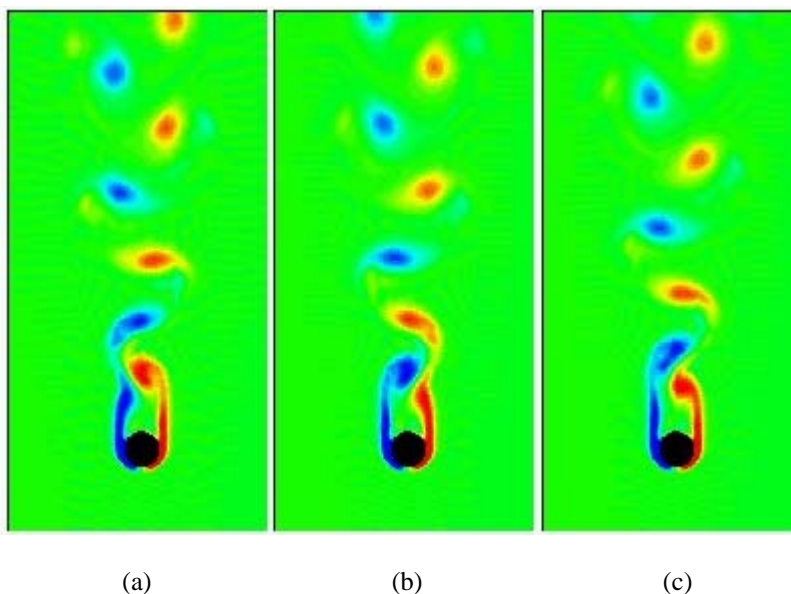


Figura 8. Campos de vorticidade, para $Re = 1.000$; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Observa-se que com o modelo de turbulência, todos os esquemas mencionados se tornaram estáveis. Isto é claramente verificado através da comparação entre as Figs. 6 e 8. Este comportamento pode ser também visualizado através da evolução do coeficiente de arrasto com o tempo, conforme apresentado a seguir.

4.4.2. Variação Temporal do Coeficiente de Arrasto para Reynolds igual a 1.000

Na Figura 9 verifica-se a evolução temporal do coeficiente de arrasto, para cada um dos esquemas de discretização temporal mencionados, com o modelo de turbulência. Observa-se também um aumento nos valores médios do coeficiente de arrasto nos três esquemas, quando comparado com a Fig. 7.

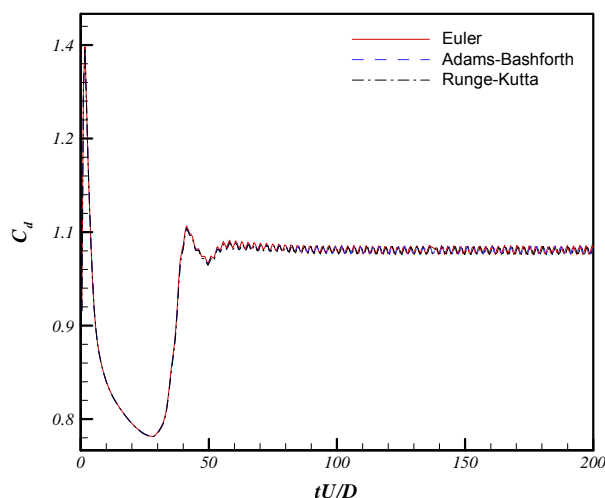


Figura 9. Evolução temporal do coeficiente de arrasto para Reynolds igual a 1.000.

4.4.3. Visualização do Escoamento para Reynolds igual a 10.000

A Figura 10 apresenta a visualização do escoamento, através dos campos de vorticidade, utilizando os três métodos de discretização temporal e número de Reynolds igual a 10.000, com modelagem da turbulência.

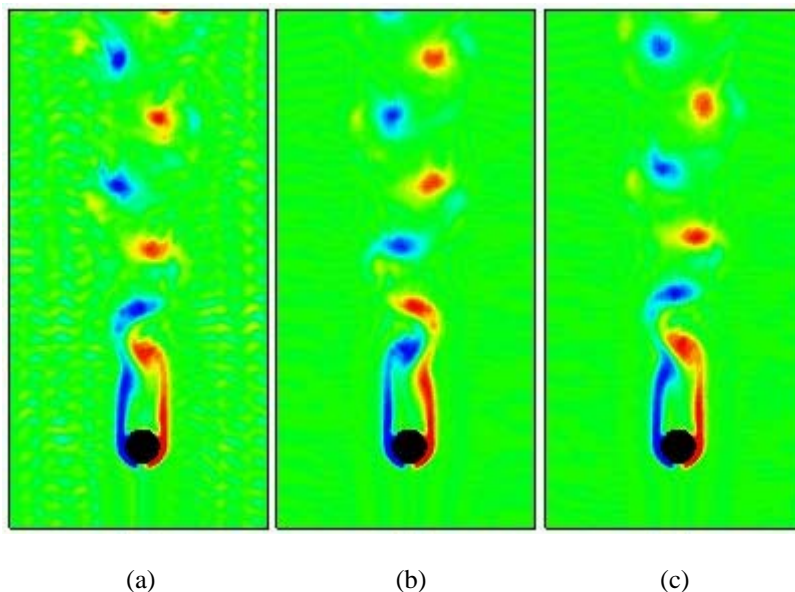


Figura 10. Campos de vorticidade, para $Re = 10.000$; Euler (a), Adams-Bashforth (b) e Runge-Kutta (c).

Observa-se que, com o aumento do número de Reynolds, as instabilidades apareceram, porém são mais acentuadas no método de Euler. Para os esquemas de Runge-Kutta e de Adams-Bashforth, a metodologia pode ser considerada estável.

4.4.4 Variação Temporal do Coeficiente de Arrasto para Reynolds igual a 10.000

A Figura. 11 apresenta a evolução temporal do coeficiente de arrasto, para o esquema de discretização temporal de Adams-Bashforth, com e sem modelagem de turbulência.

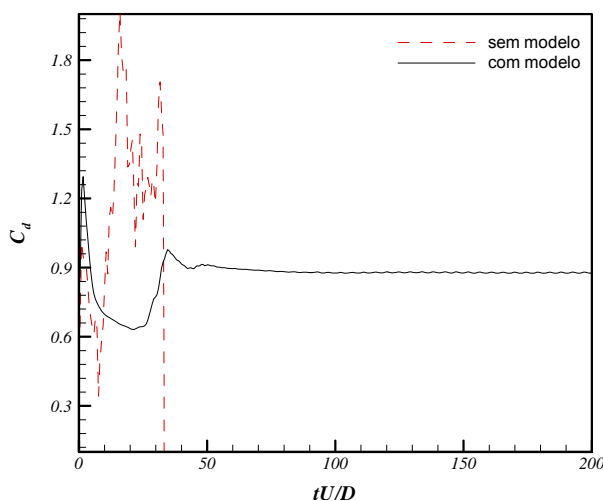


Figura 11. Evolução temporal do coeficiente de arrasto, Adams-Bashforth, com e sem modelo de turbulência

Verifica-se que, para Reynolds elevado, é necessário a modelagem para a estabilidade da metodologia. A metodologia sem modelagem diverge mesmo com o uso simultâneo de esquemas temporais e espaciais de segunda ordem.

4.5. Simulações com Função de Amortecimento

A Figura 12 apresenta a visualização do escoamento, para o método de Adams-Bashforth, para um número de Reynolds igual a 1.000 e uma malha de 250 x 500 pontos.

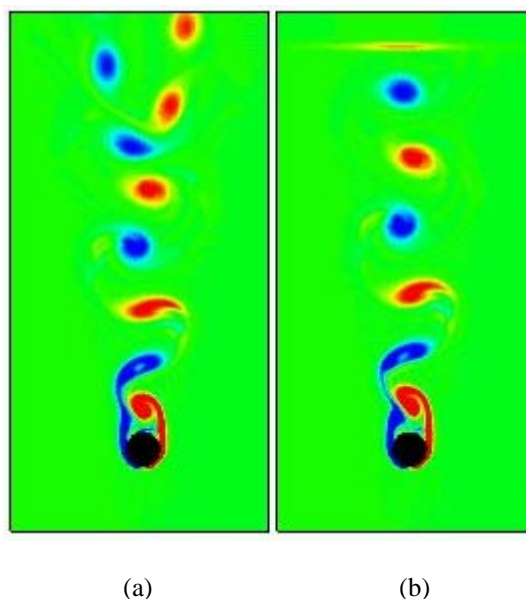


Figura 12. Campos de vorticidade para Re 1.000; Adams-Bashforth; sem função de amortecimento (a), com função de amortecimento (b).

Verifica-se claramente a abertura da esteira na saída do domínio, Fig 12a. Este comportamento é anormal, uma vez que a esteira de vórtices deve ser alinhada para escoamentos bidimensionais. Com o uso da função de amortecimento, Fig. 12b, a abertura na esteira de vórtices foi eliminada.

5. Comparação dos resultados com outros autores

A Tabela 1 apresenta os valores médios dos coeficientes de arrasto obtidos no presente trabalho em comparação com os resultados obtidos por outros autores.

Tabela 1. Comparação dos valores médios dos coeficientes de arrasto.

Re	Presente trabalho	Braza <i>et al.</i> (1986)	Lima e Silva (2002)	Sucker e Brauer (1975)
100	1,38	1,36	1,39	1,45
300	1,22	-	1,22	1,22
1.000	1,16	1,20	-	0,96
10.000	0,91	-	-	1,10

Observa-se que os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os demais autores.

6. Conclusões

O esquema de Adams-Bashforth se mostrou mais estável que o esquema de Runge-Kutta também de ordem dois. Verificou-se também que, à medida que se aumenta o número de Reynolds, a metodologia baseada em esquema centrado de segunda ordem se mostrou instável para todos os esquemas temporais de segunda ordem. Este resultado era esperado, uma vez que o esquema centrado não apresenta difusão numérica. Assim, fez-se necessário o uso simultâneo de um modelo de turbulência, para modelar o processo de transferência de energia entre as maiores e as menores escalas turbilhonares dos escoamentos. Verificou-se também que o uso da função de amortecimento foi fundamental para a estabilidade da metodologia a altos números de Reynolds.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

8. Referências

- Braza, M., Chassaing, P. e Minh, H. H., 1986, "Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder", *J. Fluid Mech.*, 165, 79.
- Lima e Silva, A. L. F., 2002, "Desenvolvimento e Implementação de uma nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual", Tese de Doutorado.
- Smagorinsky, J. 1963, "General Circulation Experiments with Primitive Equations", *Mon. Weather Rev.*, Vol. 91, pp 99-164.
- Reynolds, O. 1894, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 186, Part I, pp 122-164.
- Silveira-Neto, A., 2003, "Apostila do curso de Turbulência".
- Souza, L. F., Mendonça, M. T., Medeiros, M. A. e Kloker, M., 2002, "Three Dimensional Code Validation for Transition Phenomena", III Escola de Turbulência.
- Sucker, D. e Brauer, H., 1975, "Fluidodynamik bei der angestromten Zilindern", *Wärme und Stoffübertragung*, 8, 149.

9. Direitos autorais

NUMERICAL STABILITY ANALYSIS OF METHODS USING DIFFERENTS TIME DISCRETIZATION SCHEMES AND TURBULENCE MODELLING

Alice Rosa da Silva
Federal University of Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
arsilva@mecanica.ufu.br

Ana Lúcia Fernandes de Lima e Silva
Federal University of Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
alfsilva@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto
Federal University of Uberlândia - UFU, Av. João Naves de Ávila, 2160
aristeus@mecanica.ufu.br

Sérgio Said Mansur
Estadual University Paulista – UNESP
mansur@dem.feis.unesp.br

Abstract. In this work is presented a analyze of the physical and numerical stability of the spatial and time discretization schemes. The influence of the turbulence model is too analyzed. Results shown that the use of the second order scheme in time and turbulence model provide the central scheme more stable, for high Reynolds numbers.

Keywords: Scheme of the time discretization, stationary cylinder, turbulence model.