

ESCOAMENTO LAMINAR DESENVOLVIDO EM CONDUTOS ANULARES EXCÊNTRICOS

Luiz Henrique Gomes Pereira

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense.
Endereço para correspondência: Rua Caçu 150 Casa: 376 – Taquara.
22710-074 Rio de Janeiro, RJ – Brasil.
Correio eletrônico: luizuff@ig.com.br

Paulo Murillo de Souza Araújo

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense.
Endereço para correspondência: Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos.
24210-240 Niterói, RJ – Brasil.
Correio eletrônico: pmurillo@bol.com.br

Resumo. É analisado o escoamento laminar permanente, incompressível e desenvolvido de um fluido newtoniano com propriedades constantes, ao longo de um conduto anular excêntrico. A solução é desenvolvida analiticamente, sendo completada por meio da discretização do contorno. Os resultados, em termos dos campos de velocidades e de tensões cisalhantes e do coeficiente de atrito, mostram boa concordância com os obtidos por outros autores.

Palavras chave: mecânica dos fluidos, escoamento anular excêntrico, métodos semi-analíticos, equação de Poisson.

1. Introdução

Nas últimas décadas o uso de métodos numéricos aumentou notavelmente, devido à maior disponibilidade de computadores com grande capacidade de memória. Entretanto, os métodos analíticos ainda são preferíveis devido à facilidade de parametrização. Assim, quando não é possível obter uma solução totalmente analítica, é, às vezes, vantajoso complementá-la com uma análise numérica. O presente trabalho se enquadra neste caso. A literatura é rica em resultados analíticos para o escoamento laminar desenvolvido em condutos de geometria simples, mas, no caso de condutos anulares excêntricos, só se tem notícia de uma solução analítica, a de Piercy et al. (1933), conforme reportado por White (1991). A técnica presentemente empregada, que pode ser facilmente estendida a outros problemas, consiste em levar o desenvolvimento analítico tão longe quanto possível e completá-lo com um método numérico que fica restrito a discretização de parte do contorno.

2. Análise teórica

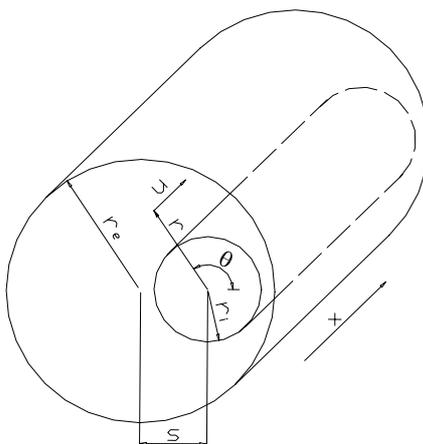


Figura 1 - Esboço do conduto anular excêntrico.

Na Fig. (1) é mostrada um esboço do conduto anular excêntrico, de raio interno r_i , raio externo r_e e excentricidade s . Em coordenadas cilíndricas (r, θ, x) , o escoamento permanente hidrodinamicamente desenvolvido é expresso pelo equilíbrio entre as forças de pressão e de viscosidade. Se dP/dx é o gradiente longitudinal de pressão, escreve-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rx})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\tau_{\theta x})}{\partial \theta} = \frac{dP}{dx}. \quad (1)$$

As tensões cisalhantes τ_{rx} e $\tau_{\theta x}$ podem ser relacionadas à distribuição bidimensional da velocidade longitudinal $u(r, \theta)$:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\tau_{\theta x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (3)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido. A combinação das Eq. (1-3) dá a equação diferencial do problema, conhecida com equação de Poisson:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dP}{dx} = \text{constante} < 0. \quad (4), (5)$$

A solução geral da Eq. (4) pode ser obtida nos textos de cálculo avançado, tais como o de Kreyszig (1999). Portanto,

$$u = -\frac{r^2}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) + c_0 \ln r + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^{\lambda_n} + d_n r^{-\lambda_n}) (a_n \cos \lambda_n \theta + b_n \sin \lambda_n \theta). \quad (6)$$

As constantes de integração a_n , b_n , c_0 , d_0 , c_n e d_n e as constantes de separação λ_n devem ser obtidas a partir de condições de contorno. Duas destas condições são referentes à simetria do campo de escoamento com relação aos planos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Assim, tornando-se $\frac{\partial u(r, 0)}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial u(r, \pi)}{\partial \theta} = 0$, obtêm-se $b_n = 0$ e $\lambda_n = n$, respectivamente.

A terceira condição de contorno é a condição de não deslizamento na superfície $r = r_i$, $u(r_i, \theta) = 0$, que leva a

$$d_0 = -c_0 \ln r_i + \frac{r_i^2}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \quad \text{e} \quad d_n = -c_n r_i^{2n}.$$

Conseqüentemente, a Eq. (6) se reduz a

$$\frac{u(r, \theta)}{\frac{r_i^2}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right)} = 1 - \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 + I_0 \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^n - \left(\frac{r}{r_i} \right)^{-n} \right] \cos n\theta, \quad (7)$$

onde resta determinar as constantes adimensionais $I_0 = \frac{c_0}{\frac{r_i^2}{4\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right)}$ e $I_n = \frac{a_n c_n r_i^n}{\frac{r_i^2}{2\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right)}$.

A quarta condição de contorno é a condição de não-deslizamento na superfície do tubo externo e pode ser expressa como

$$u[r_p(\theta), \theta] = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{onde } r_p(\theta) = (r_e^2 - s^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - s \cos \theta \quad (8), (9)$$

é a equação da circunferência de raio r_e , cujo centro está deslocado de s com relação à origem. Esta condição, se aplicada à Eq. (7), mostra que as constantes I_0 e I_n não podem ser achadas como coeficientes de uma série de Fourier e um outro enfoque deve ser usado.

3. Análise numérica

Dispõe-se neste ponto da análise de uma única equação para determinação dos coeficientes I_0 e I_n , a qual é obtida aplicando-se a condição de contorno, Eq. (8), à Eq. (7):

$$\left(\ln \frac{r_p}{r_i} \right) I_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{r_p}{r_i} \right)^n - \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{-n} \right] (\cos n\theta) I_n = \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^2 - 1. \quad (10)$$

Nota-se que, substituindo a série da Eq. (7) por uma somatório de $N-1$ termos na Eq. (10), fica-se com N coeficientes a determinar.

O método numérico presentemente empregado foi proposto por Sparrow e Loeffler (1959) e consiste em aplicar a Eq. (10) a N pontos igualmente espaçados da parede do tubo externo, de coordenadas angulares θ_i , $i=1,2,\dots,N$. Obtém-se assim um sistema linear de N equações a N incógnitas (I_0, I_1, \dots, I_{N-1}). Pode-se começar, por exemplo, com 3 pontos no contorno e ir aumentando gradativamente este número, até que os coeficientes obtidos não mais apresentem variações significativas, quando então se considera que o procedimento numérico convergiu.

Para fins de parametrização, os dados de entrada de cada problema são a razão de raios α e a excentricidade adimensional β , definidas por $\alpha = r_e/r_i$ e $\beta = s/r_i$. Assim, a razão r_p/r_i da Eq. (10) é uma função de θ dada por

$$\frac{r_p(\theta)}{r_i} = (\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - \beta \cos \theta. \quad (11)$$

A Tab. (1) é um exemplo típico da análise de convergência de um problema onde $\alpha=3$ e $\beta=1$. Vê-se que $N=10$ é suficiente para boa precisão dos resultados.

Tabela 1 - Análise de convergência dos coeficientes I_n , para N pontos na parede, num conduto com $\alpha=3$ e $\beta=1$.

$\ln N$	3	4	5	6	7	8	9	10
I_0	6.9647E+00	6.9702E+00	6.9701E+00	6.9701E+00	6.9701E+00	6.9701E+00	6.9701E+00	6.9701E+00
I_1	-6.4751E-01	-6.5634E-01	-6.5605E-01	-6.5605E-01	-6.5605E-01	-6.5605E-01	-6.5605E-01	-6.5605E-01
I_2	1.5326E-02	1.6514E-02	1.6072E-02	1.6092E-02	1.6091E-02	1.6091E-02	1.6091E-02	1.6091E-02
I_3	-	8.7333E-04	9.3681E-04	9.1872E-04	9.2029E-04	9.2024E-04	9.2024E-04	9.2024E-04
I_4	-	-	4.8107E-05	4.9303E-05	4.9770E-05	4.9888E-05	4.9884E-05	4.9884E-05
I_5	-	-	-	1.7779E-06	1.4082E-06	1.6758E-06	1.6839E-06	1.6835E-06
I_6	-	-	-	-	-9.4814E-08	-1.8043E-07	-1.3125E-07	-1.3084E-07
I_7	-	-	-	-	-	-3.6089E-08	-4.9597E-08	-4.2383E-08
I_8	-	-	-	-	-	-	-6.3056E-09	-8.1566E-09
I_9	-	-	-	-	-	-	-	-9.0543E-10

4. Discussão dos resultados

As Fig. (2a) e (2b) mostram as linhas de velocidade constante $u(r, \theta)/u_{\max}$ em condutos anulares com razão de raios $\alpha=3$ e excentricidades $\beta=0.2$ e $\beta=1.4$, respectivamente. Nota-se que a velocidade máxima u_{\max} ocorre sempre num ponto onde $\theta = \pi$. Com o aumento da excentricidade, a região mais estreita do conduto apresenta velocidades progressivamente menores, indicando que o escoamento vai ficando bloqueado nesta região.

Um resultado importante é o coeficiente de atrito de Darcy, f , definido por

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{f}{D_h} \frac{\rho U^2}{2}, \quad \text{onde } D_h = \text{diâmetro hidráulico} = 2(r_e - r_i), \quad (12), (13)$$

ρ é a massa específica do fluido e U é a velocidade média na seção reta do conduto,

$$U = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_p} u(r, \theta) r dr d\theta. \quad (14)$$

Definindo-se o número de Reynolds $Re = \rho U D_h / \mu$ e usando as definições dadas pelas Eq. (12) e (13), pode-se mostrar facilmente que o produto $f Re$ fica expresso por meio de

$$f Re = \frac{16}{J} (\alpha^2 - 1) (\alpha - 1)^2, \quad \text{onde } J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_p} \frac{u(r, \theta)}{r_i^4} \left(-\frac{dP}{dx} \right) r dr d\theta. \quad (15), (16)$$

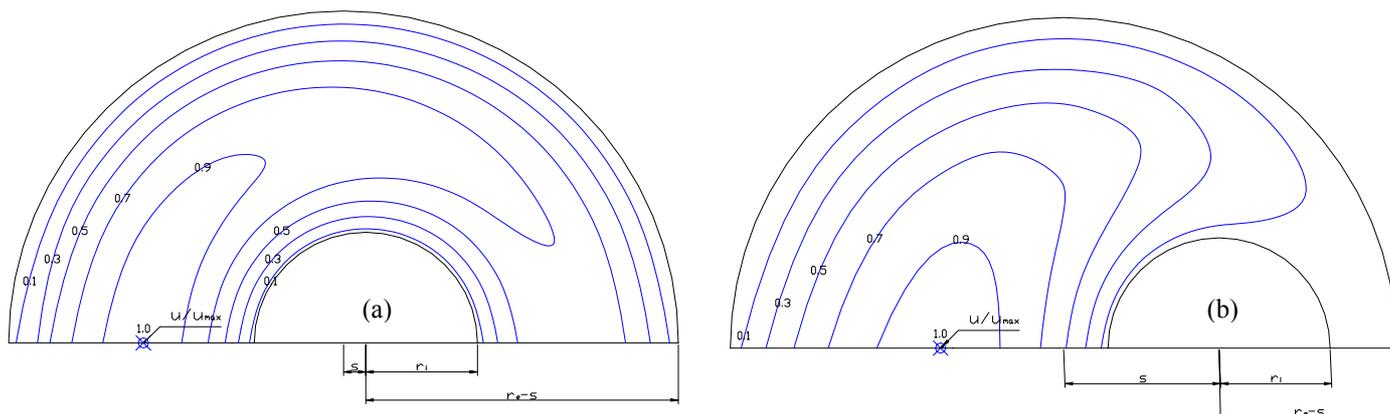


Figura 2 - Linhas de velocidade constante em condutos com razão de raios $\alpha=3$ e excentricidades (a) $\beta=0.2$ e (b) $\beta=1.4$.

A integral J definida pela Eq. (16) pode ser avaliada por meios analíticos. Substituindo $u(r, \theta)$ dado pela Eq. (7) e efetuando a integração em r , obtêm-se, após manipulação algébrica,

$$J = \frac{1}{2} \left[J_0 - \frac{1}{2} J_A - \frac{1}{2} + \frac{I_0}{2} (1 - J_0 + J_B) + 4 \sum_{n=1}^{N-1} I_n \left(\frac{J_n}{n+2} + \frac{J_{-n}}{n-2} \right) \right], \quad (17)$$

onde J_A , J_B , J_0 , J_n e J_{-n} são integrais definidas por

$$J_A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^4 d\theta; \quad J_B = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^2 \ln \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^2 d\theta; \quad J_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^2 d\theta; \quad J_{\pm n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{\pm n+2} \cos n\theta d\theta;$$

cujos valores são

$$J_A = \alpha^2 (\alpha^2 + 2\beta^2) \quad (18.a)$$

$$J_B = \beta^2 + \alpha^2 \ln \alpha^2 \quad (18.b)$$

$$J_0 = \alpha^2 \quad (18.c)$$

$$J_n = \frac{(-1)^n}{2} (n+2) \alpha^2 \beta^n \quad (18.d)$$

$$J_n = -\frac{\beta}{2} \quad (18.e)$$

$$J_{-n} = 0, \text{ para } n \geq 2. \quad (18.f)$$

Combinando-se as Eq. (15), (17) e (18) obtêm-se uma expressão para o coeficiente de atrito de Darcy:

$$(f Re)^{-1} = \frac{1}{64(\alpha - 1)^2 (\alpha^2 - 1)} [-(\alpha^2 - 1)^2 - 2\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^2 - 1 - \alpha^2 \ln \alpha^2 - \beta^2) I_0 - 4\beta(\alpha^2 - 1) I_1 + 4\alpha^2 \sum_{n=2}^{N-1} I_n (-\beta)^n] \quad (19)$$

Note-se que o produto $f Re$ só depende dos parâmetros geométricos α e β e dos coeficientes I_n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

A Fig. (3) mostra a variação do produto $f Re$ para amplas faixas de razões de raios e excentricidades. Na abscissa, a excentricidade foi redefinida como $\varepsilon = s/(r_e - r_i) = \beta/(\alpha - 1)$. Assim, ε é variável entre 0 e 1.

É interessante observar que para excentricidades ε em torno de 0.36, o coeficiente de atrito torna-se praticamente independente da razão entre os raios. Também é útil verificar que, para razões de raios menores que 1.5, o coeficiente de atrito é praticamente função somente da excentricidade. É ainda digno de nota o fato do coeficiente de atrito diminuir com a excentricidade para uma dada razão de raios. Do ponto de vista termodinâmico, a irreversibilidade do processo de escoamento e a conseqüente geração de entropia ficam reduzidos com a adoção de condutos anulares excêntricos.

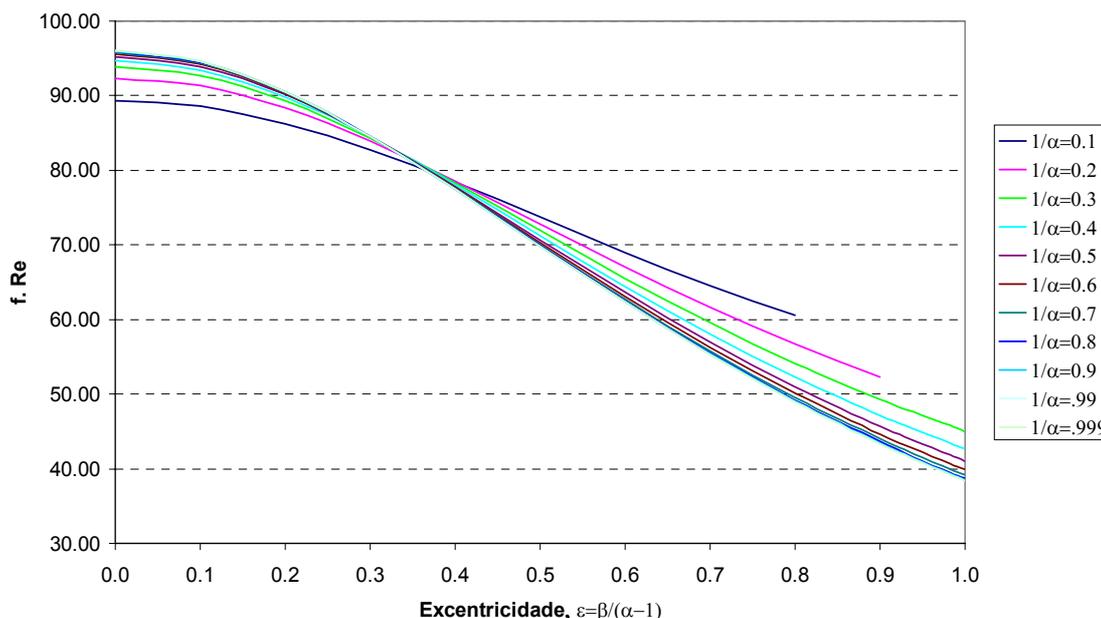


Figura 3 - Coeficiente de atrito de Darcy em função da razão entre os raios e da excentricidade.

Para validação dos resultados, estes foram comparados com os de Piercy et al.(1933). As Tab. (2) e (3) mostram, respectivamente, os valores de $f Re$ achados no presente trabalho e os calculados pelas expressões daqueles autores (citadas por White (1991)).

Tabela 2 - Valores do produto $f.Re$ em função da excentricidade ε e da razão de raios α (presente trabalho).

$\varepsilon \backslash 1/\alpha$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	0.999
0	80.1130	92.3524	94.7133	95.5881	95.9205	96.0000
0.1	79.7284	91.3181	93.4477	94.2208	94.5119	94.5813
0.2	78.6145	88.3739	89.8603	90.3498	90.5251	90.5660
0.3	76.8827	83.9401	84.4988	84.5767	84.5824	84.5815
0.4	74.6964	78.5654	78.0600	77.6620	77.4694	77.4194
0.5	72.2463	72.7870	71.2015	70.3168	69.9193	69.8182
0.6	69.7214	67.0403	64.4291	63.0817	62.4881	62.3377
0.7	67.2193	61.6277	58.0691	56.2999	55.5270	55.3314
0.8	-	56.7795	52.2936	50.1472	49.2154	48.9796
0.9	-	52.3182	47.1640	44.6822	43.6118	43.3409
0.999	-	-	42.7095	39.9364	38.7470	38.4461

Tabela 3 - Valores do produto $f.Re$ para várias excentricidades ε e razões de raios α , segundo Piercy et al. (1933).

$\varepsilon \backslash 1/\alpha$	0.01	0.2	0.4	0.6	0.8	0.999
0	-	-	-	-	-	-
0.1	79.7284	91.3181	93.4477	94.2208	94.5119	94.5813
0.2	78.6145	88.3739	89.8603	90.3498	90.5251	90.5660
0.3	76.8827	83.9401	84.4988	84.5767	84.5824	84.5815
0.4	74.6964	78.5654	78.0600	77.6620	77.4694	77.4194
0.5	72.2464	72.7870	71.2015	70.3168	69.9193	69.8182
0.6	69.7289	67.0403	64.4291	63.0817	62.4881	62.3377
0.7	67.3322	61.6265	58.0691	56.2999	55.5270	55.3314
0.8	65.2358	56.7243	52.2935	50.1472	49.2154	48.9796
0.9	63.6267	52.4192	47.1641	44.6822	43.6118	43.0886
0.999	62.7644	48.2415	-	-	-	-

Vê-se que em grandes faixas de ε e α há boa concordância entre as Tab. (2) e (3). Os espaços em branco na Tab. (2), referentes a excentricidades próximas de 1 e a altos valores de α , correspondem a casos onde não houve convergência do método numérico. Nestes casos, felizmente bastante restritos, houve dificuldade na inversão da matriz dos coeficientes do sistema algébrico de equações do tipo da Eq. (10).

Também na Tab. (3) há espaços em branco. A equação fornecida por White (1991) para a vazão volumétrica no duto fica indeterminada quando a excentricidade tende a zero e não converge para altas excentricidades e baixos valores de α .

Conclui-se que os presentes resultados estão validados e que complementam os de Piercy et al. (1933).

As tensões cisalhantes nas paredes interna (índice inferior i) e externa (índice inferior p) foram calculadas através das Eq. (2), (3) e (7). Foram obtidas as seguintes distribuições de tensões:

$$\tau_{rx_i} = \tau_{rx} (r_i, \theta) = \frac{r_i}{4} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \left(I_0 - 2 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} n I_n \cos n\theta \right) \tag{20}$$

$$\tau_{rx_p} = \tau_{rx} (r_p, \theta) = \frac{r_i}{2} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \left\{ \frac{r_p}{r_i} - \frac{r_i}{2r_p} I_0 - \sum_{n=1}^{N-1} n I_n \left[\left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{n-1} + \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{-n-1} \right] \cos n\theta \right\} \tag{21}$$

$$\tau_{\theta x_i} = \tau_{\theta x} (r_i, \theta) = 0 \tag{22}$$

$$\tau_{\theta x_p} = \tau_{\theta x} (r_p, \theta) = -\frac{r_i}{2} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \sum_{n=1}^{N-1} n I_n \left[\left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{n-1} - \left(\frac{r_p}{r_i} \right)^{-n-1} \right] \text{sen} n\theta, \tag{23}$$

onde r_p é uma função de θ , dada pela Eq. (11).

Também foi calculada a tensão cisalhante média em todo o perímetro do conduto, $\overline{\tau_0}$, através da integração da Eq. (1), obtendo-se

$$\overline{\tau_0} = \frac{1}{2\pi(\alpha+1)} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{r_p}{r_i} \tau_{rx_p} + \tau_{rx_i} \right) d\theta - \frac{1}{r_i} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_p} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} dr d\theta \right] = \frac{r_i}{2} (\alpha-1) \left(-\frac{dP}{dx} \right). \tag{24}$$

As Fig. (4), (5) e (6) mostram as distribuições das tensões cisalhantes τ_{rx_i} , τ_{rx_p} e $\tau_{\theta x_p}$ para condutos com razão de raios $\alpha = 3$ e várias excentricidades. Nota-se que as tensões são fortemente influenciadas pela excentricidade. As Fig. (4) e (5) mostram que com o aumento da excentricidade menos homogênea é a distribuição das tensões.

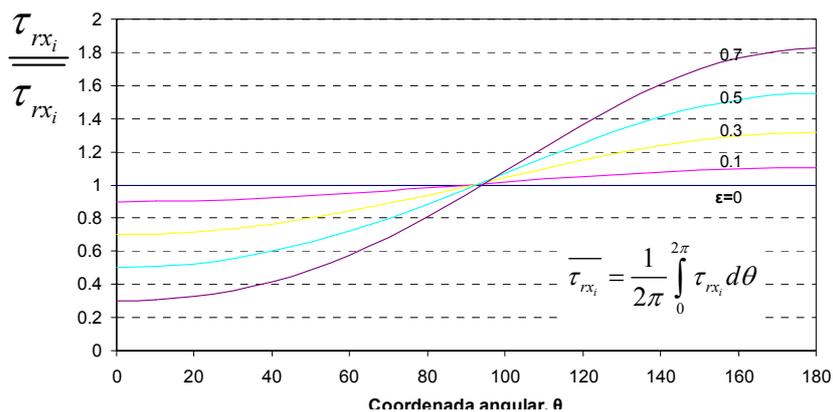


Figura 4 - Distribuição da tensão cisalhante τ_{rx_i} na parede interna de condutos com $\alpha=3$ e várias excentricidades.

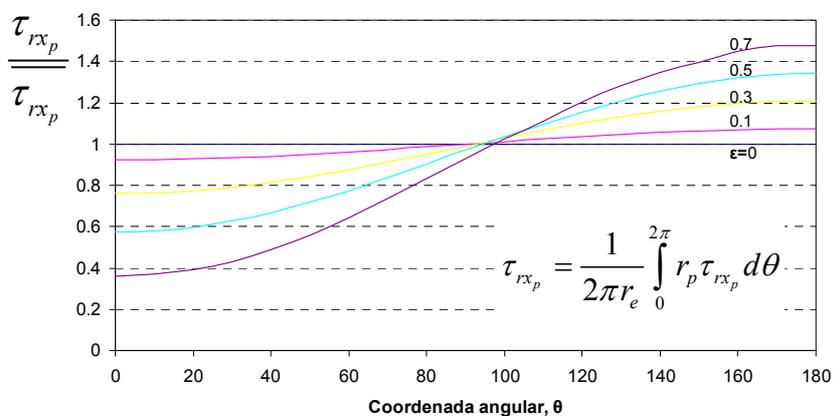


Figura 5 - Distribuição da tensão cisalhante τ_{rx_p} na parede externa de condutos com $\alpha=3$ e várias excentricidades.

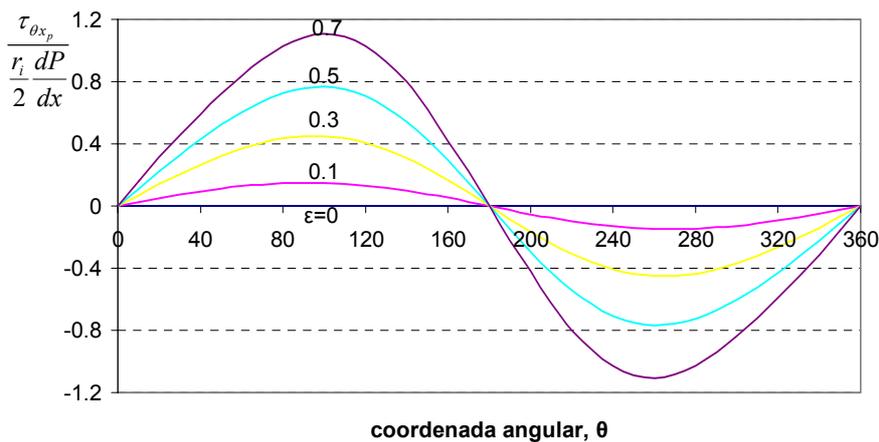


Figura 6 - Distribuição da tensão cisalhante $\tau_{\theta x_p}$ na parede externa de condutos com $\alpha=3$ e várias excentricidades.

5. Conclusões

1. Foi apresentado um método parte analítico e parte numérico para solução da equação de Poisson, que pode ser estendido a outros condutos de geometria irregular.
2. Foi constatado que o aumento da excentricidade acarreta bloqueio do escoamento na região mais estreita do conduto, redução da perda de carga por atrito e maior não-homogeneidade das tensões cisalhantes nas paredes.

6. Referências

- Kreyszig, E., 1999, "Advanced engineering mathematics", 8ª edição, J. Wiley.
- Piercy, N.A.V., Hooper, M. S. and Winny, H. F., 1933, "Viscous flow through pipes with cores", Phil. Mag., Vol. 15, N° 7, 1933, pp. 647-676.
- Sparrow, E. M. and Loeffler, A. L., 1959, "Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array", A. I. Ch. E. Journal, Vol. 5, N° 3, pp. 325-330.
- White, F. M., 1991, "Viscous fluid flow", Mc Graw-Hill Education, 2ª edição, Europe.

FULLY DEVELOPED LAMINAR FLOW IN ANULLAR ECCENTRIC DUCTS

Luiz Henrique Gomes Pereira

Department of Mechanical Engineering, Fluminense Federal University.
Adress: Rua Caçu 150 Casa: 376 – Taquara.
22710-074 Rio de Janeiro, RJ – Brasil.
e-mail: luizuff@ig.com.br

Paulo Murillo de Souza Araújo

Department of Mechanical Engineering, Fluminense Federal University.
Adress: Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, São Domingos.
24210-240 Niterói, RJ – Brasil.
e-mail: pmurillo@bol.com.br

Abstract

It is presently analysed the steady incompressible laminar fully developed flow of a constant-property Newtonian fluid through an eccentric annular duct. The solution of the Poisson equation is carried out by analytic means, but its completion is only possible by the discretization of the eccentric boundary. The velocity and shearing stress fields are shown, as well as the friction factor. These results show good accordance with those supplied by the literature.

Keywords: eccentric annular flow, semi-analytical methods, Poisson equation.