

## MODELO NUMÉRICO PARA ASAS PLANAS EM ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL NÃO-PERMANENTE

**Isaac Figueira Miranda**

Empresa Brasileira de Aeronáutica  
12227-901 São José dos Campos – SP  
[isaac.miranda@embraer.com.br](mailto:isaac.miranda@embraer.com.br)

**Paulo Afonso de Oliveira Soviero**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
12228-900 São José dos Campos - SP  
[soviero@ita.br](mailto:soviero@ita.br)

**Resumo.** A resposta a uma variação brusca de ângulo de ataque (resposta indicial) é calculada numericamente para asas planas em escoamento incompressível. O modelo numérico utilizado propõe uma extensão do método de Weissinger ao regime não-estacionário, com emissão de vórtices na esteira da asa, para modelar a não-estacionariedade do problema, e discretização unitária da corda. São apresentados resultados para a sustentação e arrasto induzido em função do tempo. Os princípios físicos e alguns resultados preliminares da extensão deste método ao regime subsônico compressível são também discutidos.

**Palavras chave:** vórtice, malha de vórtices, método dos painéis, método das singularidades, aerodinâmica não-estacionária.

### 1. Introdução

A previsão de cargas aerodinâmicas não-estacionárias é um dos itens que precisam ser analisados no projeto de superfícies sustentadoras de aeronaves. Este problema se torna mais crítico, na medida em que se busca maior desempenho das aeronaves: velocidades mais altas, maior desempenho em manobras, estruturas mais leves. Várias metodologias podem ser empregadas para esta previsão. A metodologia experimental possui o inconveniente de ser cara e demorada. Além disso, ensaios dinâmicos em túnel de vento não são fáceis de serem realizados.

Estudos teóricos para a previsão de cargas aerodinâmicas advindas de movimentos arbitrários da superfície sustentadora, podem ser feitos a partir do estudo de movimentos específicos, mais simples. Segundo Bisplinghoff et al. (1955), pode-se obter resultados para movimentos arbitrários através da superposição de integrais de Fourier dos resultados obtidos para movimentos harmônicos. Todavia, esta metodologia não é adequada para movimentos muito bruscos, tais como rajadas e deflexões rápidas de superfícies de controle, pois este método possui convergência lenta para movimentos deste tipo. Outra alternativa, que também utiliza o princípio de superposição, é utilizar a solução para uma alteração brusca de ângulo de ataque (resposta indicial), obtendo resultados para um movimento qualquer através da integral de Duhamel (Bisplinghoff et al., 1955). Este método é mais adequado para a modelagem de movimentos mais bruscos da superfície aerodinâmica.

Uma série de respostas analíticas, tanto para movimentos harmônicos quanto para respostas indiciais de perfis e asas finas é apresentada por Bisplinghoff et al. (1955). Para a resposta indicial existem os estudos clássicos de Wagner (1925) e Küssner (1936), para perfis finos em regime incompressível submetidos a alterações bruscas de ângulo de ataque e penetrações em rajadas de canto vivo, respectivamente. Todavia, estas metodologias analíticas são muitas vezes difíceis de serem utilizadas, além de possuir aplicação para apenas casos restritos. Desta forma, a busca por soluções numéricas, mais rápidas e gerais, se torna conveniente.

Trabalhos mais recentes apresentam resultados para a resposta indicial de perfis e asas utilizando CFD (computational fluid dynamics). Seguindo esta linha de pesquisa, Singh e Baeder (1997) comparam seu método com soluções analíticas bidimensionais e, em seguida, apresentam resultados para o caso tridimensional, para vários números de Mach. Sitaraman and Baeder (2004) comparam resultados obtidos por CFD para a resposta indicial de asas com resultados obtidos com modelos linearizados, mais simples. A conclusão apresentada é que os modelos linearizados são quase tão acurados quanto os de CFD e possuem a vantagem de necessitarem de muito menos esforço computacional, sendo bastante úteis em aplicações práticas.

No presente trabalho, é apresentado um método numérico linearizado para a resposta indicial de asas planas em regime incompressível. Os princípios básicos para a extensão deste método ao regime compressível também são apresentados. O estudo parte das equações clássicas da aerodinâmica para escoamento potencial e utiliza-se do conceito de pequenas perturbações, restringindo os resultados para asas com perfilagem de pequena espessura. O modelo numérico é baseado no método de malha de vórtices generalizado (*generalized vortex lattice method*).

O método de malha de vórtices generalizado foi desenvolvido para movimentos harmônicos no regime subsônico (Soviero, 1993), supersônico (Soviero e Ribeiro, 1995) e transônico (Soviero e Pinto, 2001). Ele também foi utilizado

para a obtenção de respostas indiciais em perfis finos nos regimes subsônico e supersônico (Hernandes e Soviero, 2003). O presente trabalho estende esta metodologia para a resposta indicial de asas finitas. Neste caso, o problema do alongamento e do enflechamento são abordados. O problema do afilamento (razão entre a corda na ponta e na raiz da asa) não será apresentado neste trabalho por adicionar algumas complicações teóricas ainda não contornadas.

## 2. Descrição do problema

O problema consiste em uma asa plana submetida a um escoamento de velocidade  $U$ . Inicialmente esta asa se encontra com ângulo de ataque nulo em relação ao escoamento. Num dado instante ela sofre uma alteração brusca em seu ângulo de ataque, que passa a ser finito, porém não-nulo (no presente trabalho é considerado que a variação no ângulo de ataque é pequena o bastante para que o  $C_L$  da asa se mantenha na região linear). Este problema, denominado resposta indicial, ou resposta à função degrau, consiste em determinar a evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos desta asa (no presente trabalho são calculados os coeficientes de sustentação e arrasto induzido), desde o instante da perturbação até o desenvolvimento do regime permanente. A figura abaixo ilustra o problema.

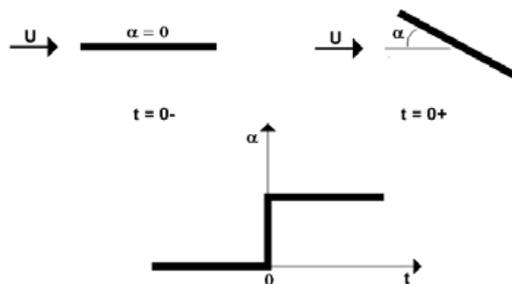


Figura 1. Representação do problema da variação brusca de ângulo de ataque numa asa plana.

## 3. Escoamento incompressível

Neste tópico, o cálculo é desenvolvido considerando-se a hipótese de escoamento incompressível. Esta hipótese é razoável, no caso do ar, para escoamentos com número de Mach até 0.3.

### 3.1. Modelo matemático

Como especificado na introdução, o presente trabalho considera um escoamento potencial. Além disso, considera-se uma asa sem espessura e ângulos de ataque pequenos, de modo que o conceito de pequenas perturbações e a teoria linear podem ser utilizados. O princípio de superposição também é válido nestas condições. Desta forma, assumindo estas hipóteses, pode-se utilizar a equação do potencial compressível linearizado para o cálculo do campo de velocidades sobre a asa.

$$(1 - M^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - \frac{2M}{a}\phi_{xt} - \frac{1}{a^2}\phi_{tt} = 0 \quad (1)$$

No caso especial de escoamento incompressível, o número de Mach,  $M$ , tende a zero e a velocidade do som,  $a$ , tende a infinito, de forma que a Eq. 1 se reduz à equação de Laplace.

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (2)$$

Desta forma, o problema pode ser modelado utilizando-se as soluções conhecidas da equação de Laplace (soluções fonte, dipolo ou vórtice). A condição de contorno do problema é decorrente do fato que o escoamento é tangente à asa. Ou seja, a composição do escoamento não-perturbado com o escoamento induzido pelo salto de potencial gerado na asa após a alteração de ângulo de ataque deve produzir um campo de velocidades tal que a componente de velocidade normal à asa em qualquer ponto da mesma seja nulo. Sendo assim, chamando de  $W_p$  a componente normal à asa da velocidade induzida num ponto  $P$  da mesma pelo salto de potencial gerado e considerando seno  $\alpha \cong \alpha$  (ângulo de ataque pequeno), tem-se que:

$$U\alpha + W_p = 0 \quad (3)$$

A Equação 3 é válida em qualquer instante de tempo e em qualquer ponto P da superfície da asa. Outro conceito que é um dos pilares do modelo numérico utilizado no presente trabalho é o Teorema de Kelvin, que garante que qualquer salto de potencial  $\delta\phi$  gerado sobre a asa permanece constante ao ser arrastado para a esteira da asa, com a velocidade do escoamento não-perturbado.

### 3.2. Modelo numérico

O modelo numérico utilizado no presente trabalho é uma generalização do método dos painéis clássico e utiliza o conceito de “marching vortex” (emissão de vórtices livres na esteira da asa). No instante inicial, quando há a alteração brusca de ângulo de ataque, ocorre a geração impulsiva de um salto de potencial entre o intradorso e o extradorso da asa. Este salto de potencial pode ser modelado como uma distribuição de dipolos normais à mesma. Deste modo, no instante inicial ( $t=0$ ) a asa pode ser discretizada em n painéis retangulares, cada um com uma distribuição constante de dipolos normais de intensidade  $\delta\phi_n^0$  (o sobrescrito 0 indica que o dipolo foi criado no instante  $t=0$  e o subscrito n indica que se trata no painel n), de acordo com a Fig. 2.

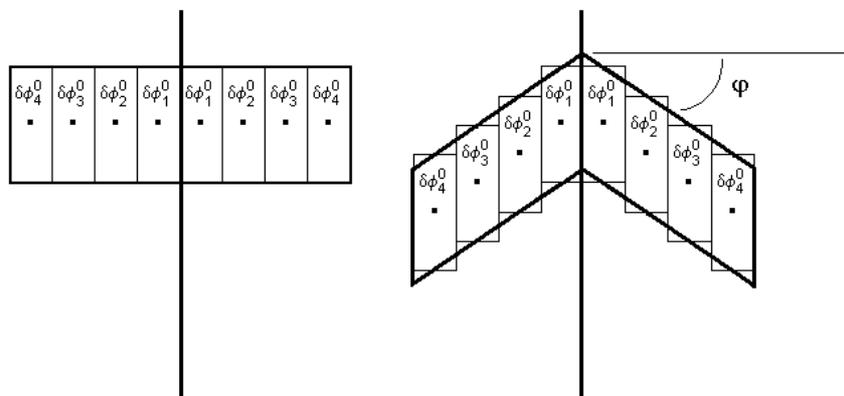


Figura 2. Discretização em 4 painéis de semi-envergadura de uma asa retangular e uma asa de enflechamento  $\phi$ .

Um conceito bem conhecido na aerodinâmica é que o escoamento induzido por uma distribuição superficial uniforme de dipolos normais a uma dada superfície é idêntico a uma distribuição linear uniforme de vórtices na fronteira desta superfície. Matematicamente, é mais fácil lidar com uma distribuição linear e, desta forma, no presente trabalho, o salto de potencial em cada painel é representado por uma distribuição uniforme de vórtices em sua fronteira. O conceito enunciado está ilustrado abaixo, na Fig. 3.

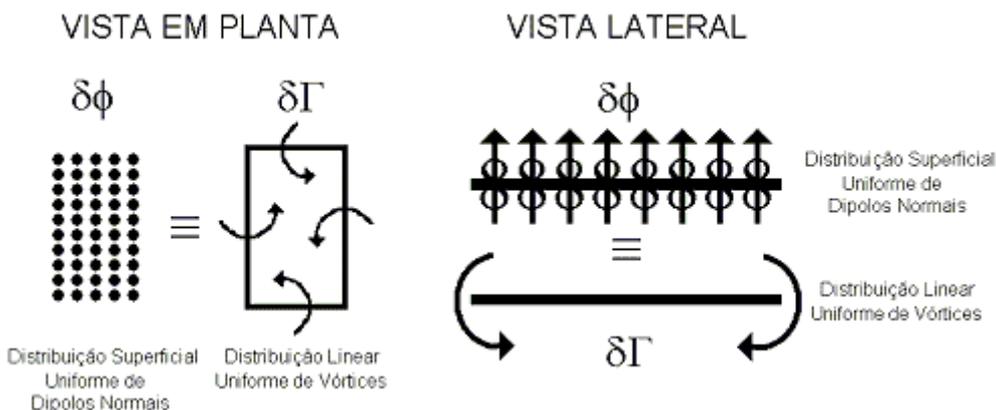


Figura 3. Representação da equivalência entre distribuições de dipolos normais à asa e vórtices contra-rotativos.

No instante de tempo posterior ao instante inicial ( $t=1$ ), os vórtices livres no extradorso da asa são arrastados pelo escoamento, de velocidade U, e há a formação de um novo conjunto de vórtices  $\delta\Gamma_1^1, \delta\Gamma_2^1, \dots, \delta\Gamma_n^1$ , sobre a asa. Nos instantes de tempo posteriores este processo se repete, até que a asa atinja o valor de sustentação do regime permanente. No presente trabalho, o tempo é discretizado de forma que em uma unidade de tempo, os vórtices livres percorram uma unidade de corda (c) da asa. Ou seja,  $\Delta t = c / U$ . Esta discretização do tempo se mostrou suficiente para reproduzir bem a evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos na asa. A Figura 4, abaixo, representa este processo de geração de vórtices e emissão de vórtices livres ao longo do tempo para uma asa enflechada de um ângulo  $\phi$ .

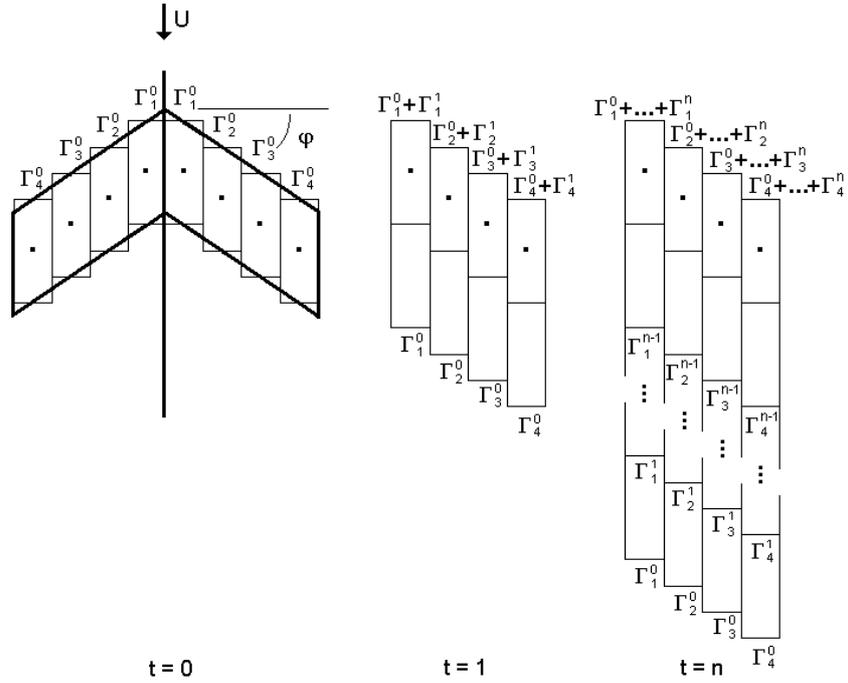


Figura 4. Representação da malha de vórtices em 3 instantes diferentes para uma asa de enflechamento  $\varphi$ .

O valor das intensidades de vórtices em cada painel, em cada instante de tempo, é determinado através da aplicação da condição de contorno no ponto de controle de cada painel, em cada instante de tempo. Os pontos de controle estão localizados no centro de cada painel sobre a asa, como mostrado na Fig. 2 e na Fig. 4. A velocidade induzida por um filamento de vórtice de intensidade  $\Gamma$  e comprimento  $dl$  num ponto distante de  $r$  do mesmo pode ser calculada pela lei de Biot-Savart (ver Fig. 5):

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma(d\vec{l} \times \vec{r})}{4r^3} \quad (4)$$

Como já mostrado, o método numérico aqui desenvolvido se utiliza de circuitos fechados de vórtices (4 filamentos, formando um retângulo). Integrando a Eq. 4 entre os limites de um retângulo cujos vórtices são os pontos  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_A, y_B)$ ,  $(x_B, y_B)$ ,  $(x_B, y_A)$  e considerando um ponto P qualquer de coordenadas  $(x_p, y_p)$ , de acordo com a Fig. 5, tem-se que a velocidade induzida  $W_p$  pelo retângulo em P é dada por (Katz and Plotkin, 1991):

$$W_{p1} = -\frac{\Gamma}{4\pi(x_p - x_A)} \left[ \frac{(y_B - y_p)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_B)^2}} + \frac{(y_p - y_A)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2}} \right] \quad (5)$$

$$W_{p2} = -\frac{\Gamma}{4\pi(y_B - y_p)} \left[ \frac{(x_B - x_p)}{\sqrt{(x_p - x_B)^2 + (y_p - y_B)^2}} + \frac{(x_p - x_A)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_B)^2}} \right] \quad (6)$$

$$W_{p3} = \frac{\Gamma}{4\pi(x_p - x_B)} \left[ \frac{(y_B - y_p)}{\sqrt{(x_p - x_B)^2 + (y_p - y_B)^2}} + \frac{(y_p - y_A)}{\sqrt{(x_p - x_B)^2 + (y_p - y_A)^2}} \right] \quad (7)$$

$$W_{p4} = -\frac{\Gamma}{4\pi(y_p - y_A)} \left[ \frac{(x_B - x_p)}{\sqrt{(x_p - x_B)^2 + (y_p - y_A)^2}} + \frac{(x_p - x_A)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2}} \right] \quad (8)$$

$$W_p = W_{p1} + W_{p2} + W_{p3} + W_{p4} \quad (9)$$

A direção de WP é normal ao plano do retângulo, sendo que o sentido positivo é o que aponta para cima.

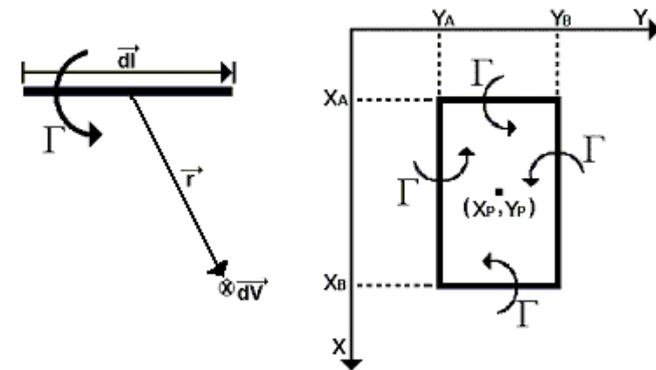


Figura 5. Representação esquemática da Lei de Biot-Savart para um filamento de vórtice (lado esquerdo) e circuito fechado de vórtices induzindo velocidade no ponto P (lado direito).

Considerando, inicialmente, no instante \$t=0\$, que todos os vórtices são unitários, pode-se calcular a matriz dos coeficientes de influência (matriz \$A\$), que especifica qual a velocidade induzida por cada painel (considerando intensidade de vórtice unitária) em cada ponto de controle. No caso de uma discretização em \$n\$ painéis de semi-envergadura, obtém-se uma matriz \$A\$ quadrada de ordem \$n\$, de acordo com a Eq. 10.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Na matriz acima, os termos são do tipo \$a\_{jk}\$, correspondendo à velocidade induzida pelo painel de vórtices \$k\$ no ponto de controle \$j\$. Devido à simetria do problema em relação à linha imaginária que separa as duas semi-asas (esta simetria pode ser visualizada nas Figs. 2 e 4), o cálculo pode ser feito considerando os pontos de controle de apenas uma das semi-asas, diminuindo assim o tempo de computação. Para isto, basta que no cálculo de cada termo da matriz \$A\$ se considere a influência do painel simétrico no ponto de controle em questão. Por exemplo, considerando uma discretização da semi-asa direita, o termo \$a\_{11}\$ seria a influência do painel 1 da semi-asa direita no ponto de controle 1, que está no seu centro, somada à influência do painel simétrico ao painel 1, que está na semi-asa esquerda, no mesmo ponto 1. Após o cálculo da matriz \$A\$, basta aplicar a Eq. 3 em todos os pontos de controle e resolver o sistema de equações para achar o valor das intensidades de vórtice em cada painel (matriz \$[\Gamma^0]\$ – o sobrescrito 0 indica que se trata do instante de tempo 0)..

$$U \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \Gamma_1^0 \\ \Gamma_2^0 \\ \vdots \\ \Gamma_n^0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow [\Gamma^0] = -[A]^{-1}U[\alpha] \Rightarrow [\Gamma^0]^* = -[A]^{-1}[1] \quad (11)$$

Devido à linearidade do problema, é mais conveniente lidar com a matriz \$[\Gamma^0]^\*\$, considerando a velocidade \$U\$ e o ângulo de ataque \$\alpha\$ unitários (embora o coeficiente de arrasto induzido varie com o quadrado do ângulo de ataque). Generalizando a Eq. 11 para os instantes subsequentes:

$$[\Gamma^t]^* = -[A]^{-1} \left( 1 + \sum_{k=0}^{t-1} [W^k] \right) \quad (12)$$

A matriz \$[W^k]\$ é uma matriz coluna, contendo a resultante da velocidade induzida (soma da contribuição individual de cada painel) em cada ponto de controle pelos circuitos de vórtice gerados no instante \$k\$. Tendo as matrizes \$[\Gamma^k]^\*\$ geradas em cada instante de tempo, é possível calcular a evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos. Do teorema de Kutta-Joukowski:

$$L' = \rho U \Gamma \Rightarrow \left( 2 \sum_{j=1}^n L'_j \Delta y_j \right)^k = \frac{1}{2} \rho U^2 S \alpha \left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)^k = \rho U (2U\alpha \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (\Gamma_j^t)^* \Delta y_j)) \tag{13}$$

Simplificando a Eq. 13:

$$\left( \frac{dC_L}{d\alpha} \right)^k = \frac{4}{S} \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (\Gamma_j^t)^* \Delta y_j \tag{14}$$

Nas Equações 13 e 14, acima,  $L'$  é a força de sustentação por unidade de envergadura,  $S$  é a área da asa,  $j$  se refere a  $j$ -ésimo painel,  $k$  se refere ao  $k$ -ésimo instante de tempo,  $\rho$  é a densidade do ar e  $n$  é o número de painéis em que a semi-asa foi discretizada. Similarmente, o arrasto induzido é calculado da seguinte forma:

$$D' = \rho (\bar{W}x\bar{\Gamma}) \Rightarrow \left( 2 \sum_{j=1}^n D'_j \Delta y_j \right)^k = \rho (2U^2 \alpha^2 \left( \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (W_j^t)^* \right) \left( \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (\Gamma_j^t)^* \Delta y_j \right)) \tag{15}$$

Simplificando a Eq. 15:

$$\left( \frac{dC_{Di}}{d\alpha^2} \right)^k = \frac{4}{S} \left( \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (W_j^t)^* \right) \left( \sum_{j=1;t=0}^{j=n;t=k} (\Gamma_j^t)^* \Delta y_j \right) \tag{16}$$

Nas Equações 15 e 16, as velocidades induzidas são calculadas no centro do filamento de vórtice fixo e transversal ao escoamento de cada painel, de acordo com Schlichting et. al. (1979).

### 3.3. Resultados

Inicialmente, foram analisados os resultados do método para o regime incompressível permanente. No método em questão, quando o tempo  $t$  tende a infinito, os coeficientes aerodinâmicos ficam idênticos aos calculados pelo método de Weissinger (Schlichting et. al., 1979). As Figuras 6 e 7 abaixo mostram os coeficientes de sustentação e de arrasto induzido para asas retangulares de diferentes alongamentos em regime incompressível permanente. O cálculo foi realizado utilizando-se uma discretização de 500 painéis na semi-asa. Todos os resultados apresentados para o regime permanente concordam com os valores mostrados em Schlichting et. al. (1979).

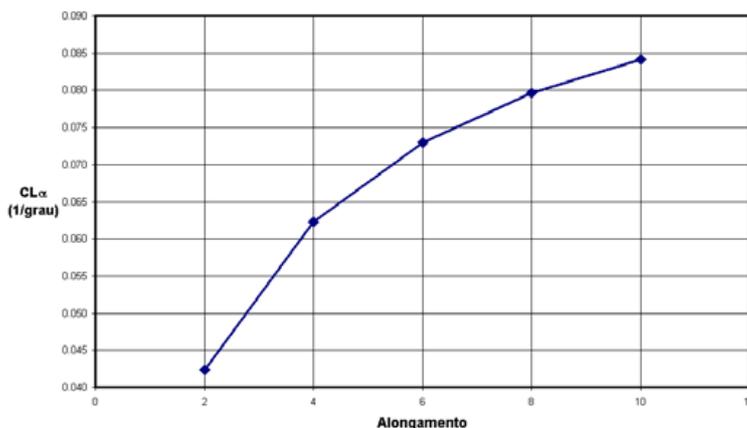


Figura 6. Efeito do alongamento no coeficiente de sustentação para alfa unitário de uma asa retangular no regime incompressível permanente.

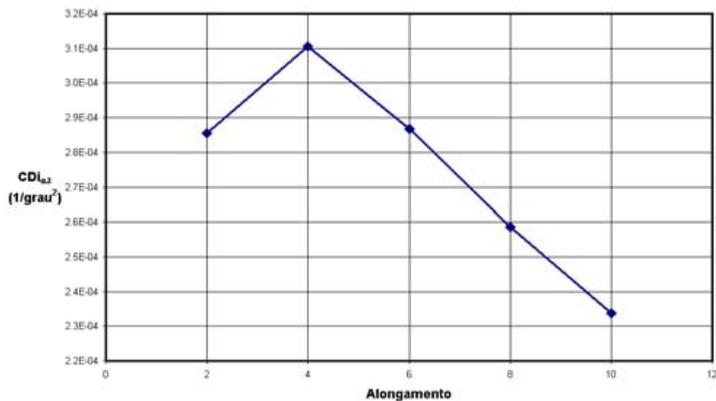


Figura 7. Efeito do alongamento no coeficiente de arrasto induzido para alfa unitário de uma asa retangular no regime incompressível permanente.

Conforme esperado, à medida que o alongamento cresce o valor da  $CL_\alpha$  da asa tende ao valor do perfil bidimensional que é 0.1096 por grau (ou  $2\pi$  por radiano). Semelhantemente o valor do arrasto induzido tende a zero. Para análise da convergência do método, este mesmo cálculo foi realizado para diferentes discretizações de semi-asa. Os resultados estão apresentados abaixo, nas Figs. 8 e 9. Esta análise demonstra que com uma discretização de 50 painéis na semi-asa, os valores obtidos para os coeficientes de sustentação e arrasto induzido são mais que 99% do valores exatos (discretização infinita). Desta forma, esta discretização foi utilizada para obtenção dos resultados no regime não-permanente. Nas legendas das Figs. 8 a 17, o termo “AR” é a abreviatura de “aspect ratio”, que é o termo em inglês para alongamento.

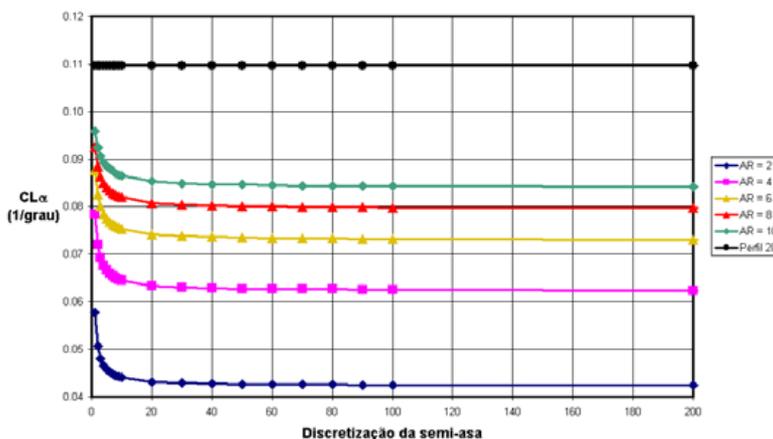


Figura 8. Efeito da discretização da asa no coeficiente de sustentação para alfa unitário.

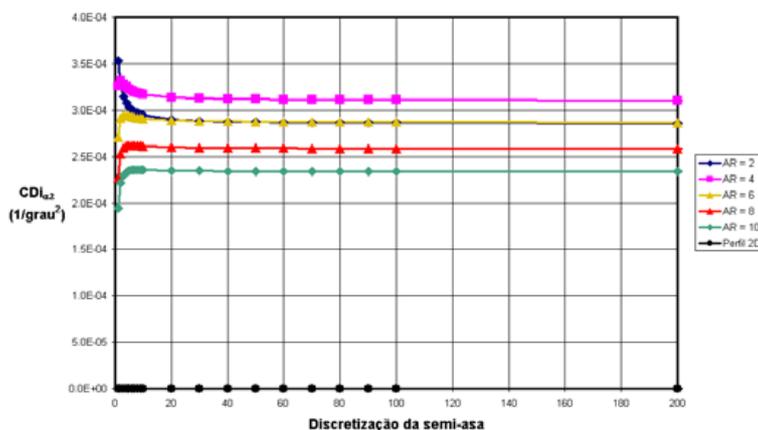


Figura 9. Efeito da discretização da asa no coeficiente de arrasto induzido para alfa unitário.

Ainda no regime incompressível permanente foram obtidos os coeficientes de sustentação e arrasto induzido para uma asa de alongamento 6 (não-afilada) em diferentes enflechamentos (cálculo feito com 500 painéis na semi-asa). À medida que o enflechamento aumenta, os coeficientes de sustentação e arrasto induzido ficam menores, conforme pode ser observado nas Figs. 10 e 11, abaixo.

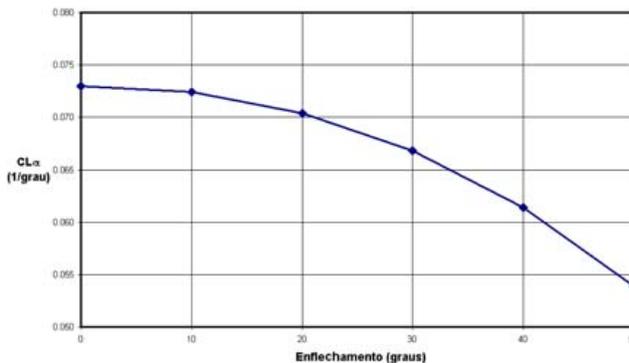


Figura 10. Efeito do enflechamento no coeficiente de sustentação para alfa unitário de uma asa no regime incompressível permanente.

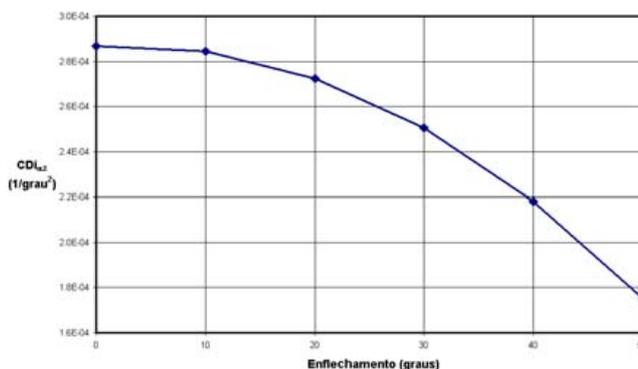


Figura 11. Efeito do enflechamento no coeficiente de arrasto induzido para alfa unitário de uma asa no regime incompressível permanente.

A seguir, são mostrados os resultados para a resposta indicial. Inicialmente foi analisada a evolução da distribuição de sustentação na asa após o aumento brusco de ângulo de ataque. Como mostrado anteriormente, na descrição do método, no instante  $t=0$ , surge uma distribuição de vórtices em ferradura sobre a asa. À medida que o tempo passa, ocorre gradativamente a superposição de novos vórtices sobre a asa, de forma que a distribuição de sustentação vai evoluindo até atingir o valor permanente. Este processo está ilustrado nas Figs. 12 e 13, abaixo, que mostram a evolução da distribuição de sustentação na resposta indicial de uma asa retangular e uma asa enflechada.

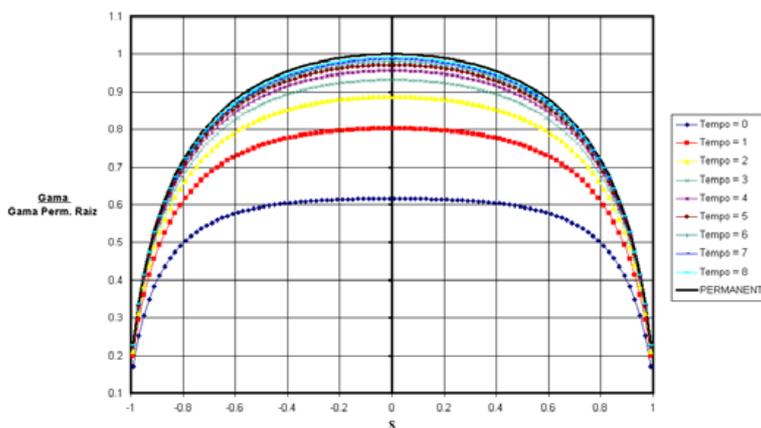


Figura 12. Evolução da distribuição de circulação ao longo da envergadura na resposta indicial (alfa unitário) de uma asa retangular (AR=6) no regime incompressível.

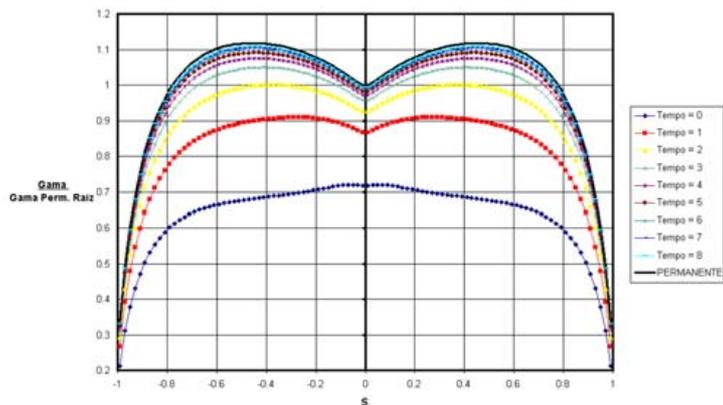


Figura 13. Evolução da distribuição de circulação ao longo da envergadura na resposta indicial (alfa unitário) de uma asa retangular enflechada (AR=6; enflechamento=40°) no regime incompressível.

A Figura 14 mostra o efeito do alongamento na resposta indicial do coeficiente de sustentação. Quanto menor o alongamento, mais rápida é a convergência para o valor permanente de sustentação. A resposta numérica do perfil bidimensional foi comparada com a solução analítica de Wagner (Bisplinghoff et al., 1955), comprovando a eficácia do método. A Figura 15 mostra o efeito do alongamento na resposta indicial do coeficiente de arrasto induzido. Semelhantemente ao coeficiente de sustentação, quanto menor o alongamento, mais rápida é a convergência. Nas Figs. 14 a 17, o tempo é adimensionalizado por  $c / U$  (corda da asa / velocidade do escoamento). Desta forma, cada unidade adimensionalizada de tempo corresponde ao tempo necessário para um vórtice da esteira turbilhonar da asa percorrer a distância correspondente a uma corda.

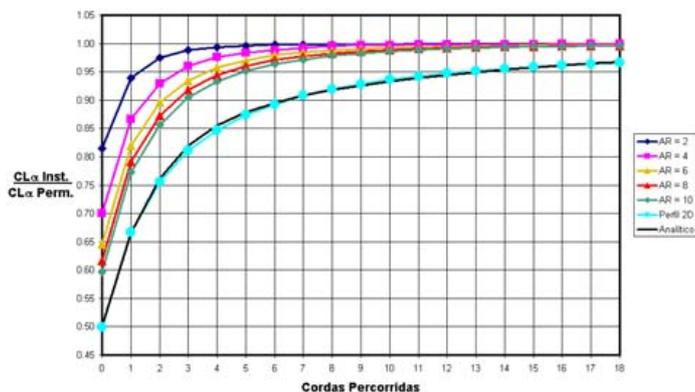


Figura 14. Efeito do alongamento na resposta indicial (alfa unitário) do coeficiente de sustentação de uma asa retangular no regime incompressível.

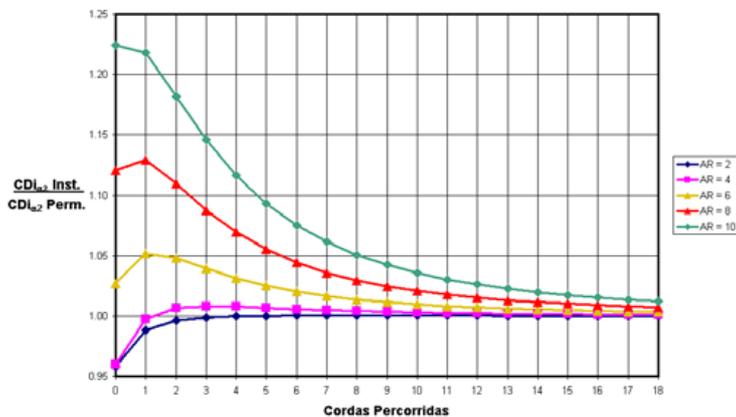


Figura 15. Efeito do alongamento na resposta indicial (alfa unitário) do coeficiente de arrasto induzido de uma asa retangular no regime incompressível.

O efeito do enflechamento na resposta indicial também foi estudado. Conforme pode ser observado nas Figs. 16 e 17, o enflechamento não tem grande influência na convergência para os valores permanentes.

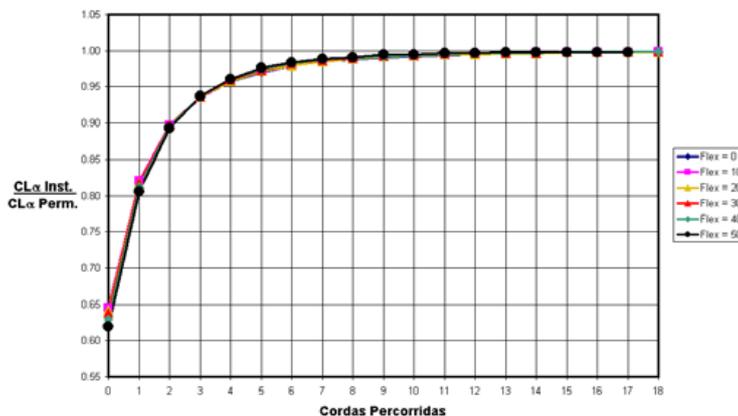


Figura 16. Efeito do enflechamento na resposta indicial (alfa unitário) do coeficiente de sustentação de uma asa retangular enflechada (AR=6) no regime incompressível.

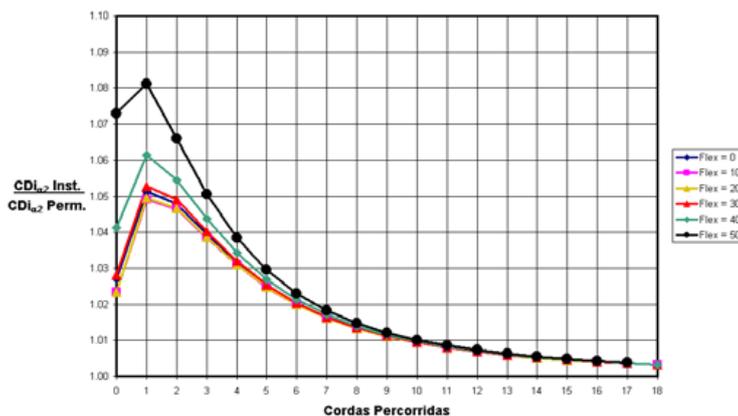


Figura 17. Efeito do enflechamento na resposta indicial (alfa unitário) do coeficiente de arrasto induzido de uma asa retangular enflechada (AR=6) no regime incompressível.

#### 4. Escoamento Compressível Subsônico

O regime incompressível é uma idealização do escoamento que considera número de Mach nulo, ou seja, velocidade do som infinitamente superior à velocidade do escoamento. Esta idealização apresenta bons resultados para escoamentos com número de Mach até 0.3, como regra de bolso. O método apresentado no presente trabalho pode ser estendido para o regime compressível. Para isto basta considerar a velocidade do som finita.

No modelo numérico apresentado para o regime incompressível, os vórtices criados a cada instante de tempo influenciam instantaneamente todo o campo assim que são criados. Isto decorre da idealização de velocidade do som infinita. Desta forma, o princípio básico da extensão do método proposto para o regime compressível é a consideração de uma velocidade do som finita, de acordo com o número de Mach em questão. Neste caso, quando o vórtice é criado, surge uma “onda de perturbação” em cada ponto de seus filamentos. Esta perturbação se propaga em todas as direções com a velocidade do som e é convectada com a velocidade do escoamento. No plano, a “onda de perturbação” forma um círculo. Pontos que estão fora deste círculo não sentem a perturbação. Pontos dentro do círculo são perturbados e a velocidade induzida neles é calculada da mesma forma que no regime permanente, apenas com o acréscimo da consideração da compressibilidade (transformação de Prandtl-Glauert). Considerando os efeitos de compressibilidade, as Eqs. 5 e 6 (nas Eqs. 7 e 8, esta consideração é análoga) ficariam da seguinte forma:

$$W_{p1} = -\frac{\Gamma}{4\pi(x_p - x_A)} \left[ \frac{\beta^2(y_B - y_P)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + \beta^2(y_P - y_B)^2}} + \frac{\beta^2(y_P - y_A)}{\sqrt{(x_p - x_A)^2 + \beta^2(y_P - y_A)^2}} \right] \quad (17)$$

$$W_{P2} = -\frac{\Gamma}{4\pi(y_B - y_P)} \left[ \frac{(x_B - x_P)}{\sqrt{(x_P - x_B)^2 + \beta^2(y_P - y_B)^2}} + \frac{(x_P - x_A)}{\sqrt{(x_P - x_A)^2 + \beta^2(y_P - y_B)^2}} \right] \quad (18)$$

Na equação acima,  $\beta^2 = 1 - M^2$ , onde  $M$  é o número de Mach. O princípio pelo qual as regiões que influenciam cada ponto de controle são determinadas está esboçado na Fig. 18. Na figura, uma fonte pontual surge no escoamento no instante  $t_0$  na posição  $(x, y)$  do campo. No mesmo campo há um ponto de controle na posição  $(x_c, y_c)$ . No instante  $t$ , a perturbação alcança o ponto de controle, de acordo com a Fig. 18.

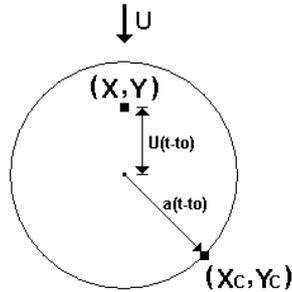


Figura 18. Região de influência de uma fonte pontual.

De acordo com a figura acima tem-se que:

$$[x_c - x - U(t - t_0)]^2 + [y_c - y]^2 = a^2(t - t_0)^2 \quad (19)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar quais as partes de um circuito de vórtice como o da Fig. 5 influenciam um ponto de controle qualquer. Neste caso,  $t$ ,  $t_0$ ,  $U$ ,  $a$ ,  $x_c$  e  $y_c$  são sempre dados. Adicionalmente, para cada filamento de vórtice sempre  $x$  ou  $y$  é constante e conhecido (ver Fig. 5). Com isso, resolvendo-se a Eq. 19 para a variável faltante, são encontradas as extremidades do filamento que realmente influencia o ponto de controle. Raízes não-reais significam que nenhuma parte do filamento em questão está influenciando o ponto de controle e, desta forma, a velocidade induzida por este filamento no ponto de controle é nula.

A Figura 19, abaixo, mostra o tempo que cada ponto do campo de um escoamento leva para atingir 99% da velocidade induzida no regime permanente por um vórtice em ferradura criado repentinamente. Esta análise é feita para os números de Mach 0.3, 0.5, 0.7 e 0.9. Pode-se observar claramente que, como a perturbação é convectada pelo escoamento, ela atinge os pontos a jusante do escoamento mais rápido que os pontos a montante. Além disso, quanto maior o número de Mach, maior o tempo que os pontos a montante levam para serem atingidos pela perturbação. Em Machs altos, os pontos no interior da ferradura também levam bastante tempo para atingir o valor permanente. Isto ocorre porque o valor da velocidade induzida neles depende bastante da influência de partes do vórtice a jusante do escoamento.

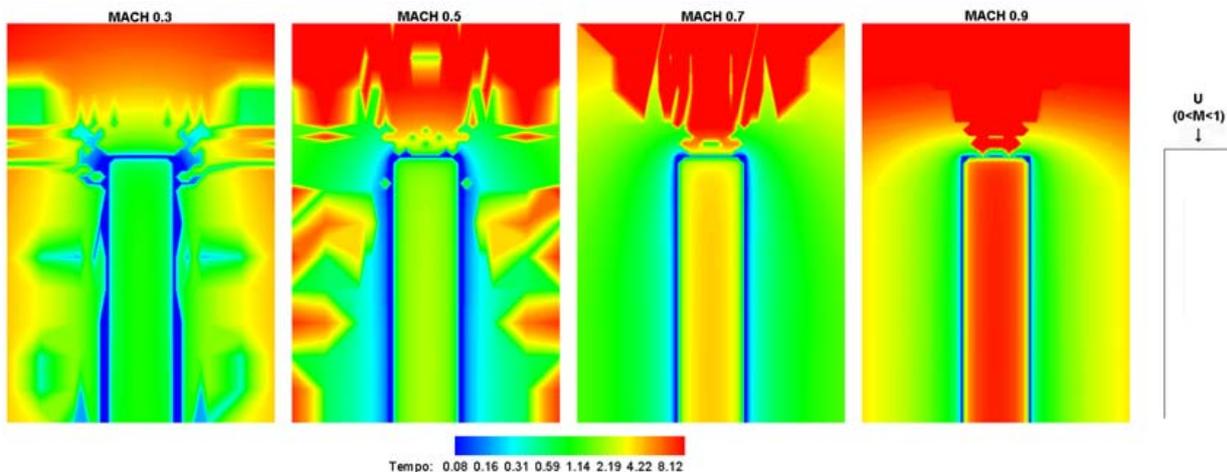


Figura 19. Tempo para obtenção do regime permanente em um campo perturbado por um vórtice em ferradura gerado em um escoamento uniforme subsônico compressível.

## 5. Conclusões

O método numérico apresentado é uma ferramenta bastante útil para projetos preliminares de aeronaves, por apresentar bons resultados de maneira rápida. Isto pode ser comprovado pela grande proximidade com o resultado analítico (ver Figura 14).

A extensão para o regime compressível ainda está em desenvolvimento, mas sua base teórica já está bem delineada, conforme descrito no item 4.

## 6. Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio parcial do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasília, DF, através de Bolsa de Produtividade em Pesquisa (Processo No. 302352/2002-3).

## 7. Referências

- Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., and Halfman, R. L., 1955, Aeroelasticity, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Soviero, P. A. O., 1993, "Generalized Vortex Lattice Method for Oscillating Thin Airfoil in Subsonic Flow", AIAA Journal, Vol.31, No. 12, pp. 2380-2382.
- Soviero, P. A. O. and Ribeiro, M.V., 1995, "Panel Method Formulation for Oscillating Airfoils in Supersonic Flow", AIAA Journal, Vol.33, No. 9, pp. 1659-1666.
- Soviero, P. A. O. and Pinto, F.H.L., 2001, "Panel Method Formulation for Oscillating Airfoils in Sonic Flow", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol.23, No. 4, pp. 401-409.
- Hernandes, F., and Soviero, P. A. O., 2003, Modelo Numérico para Perfis Finos em escoamento Compressível Não Permanente, tese de mestrado em Aerodinâmica, Propulsão e Energia, ITA, São José dos Campos-SP
- Schlichting, H., and Truckenbrodt, E., 1979, Aerodynamics of the Airplane, McGraw-Hill International Book Company, pp. 130, 173-178.
- Katz J, and Plotkin J, 1991, Low Speed Aerodynamics, McGraw-Hill, Inc.
- Küssner, H. G., 1936, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln, Luftfahrtforsch., Bd.13, Nr. 12.
- Wagner, H., 1925, Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln, Z. angew. Math. Mech., Bd. 5, Heft 1.
- Singh, R., and Baeder, J. D., 1997, Direct Calculation of Three-Dimensional Indicial Lift Response Using Computational Fluid Dynamics, Journal of Aircraft, Vol. 34, No. 4.
- Sitaraman, J., and Baeder, J. D., 2004, Computational-Fluid-Dynamics-Based Enhanced Indicial Aerodynamic Models, Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 4.

## A NUMERICAL MODEL FOR PLANAR WINGS IN UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLOW

### Isaac Figueira Miranda

Empresa Brasileira de Aeronáutica  
12227-901 São José dos Campos – SP  
[isaac.miranda@embraer.com.br](mailto:isaac.miranda@embraer.com.br)

### Paulo Afonso de Oliveira Soviero

Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
12228-900 São José dos Campos - SP  
[soviero@ita.br](mailto:soviero@ita.br)

### Abstract

*The response to a abrupt variation of angle of attack (indicial response) is computed numerically for planar wings in incompressible flow. The numerical model here proposed is a Generalized Vortex Lattice Method, which is a kind of panel method with vortex shedding in the wing wake, for modelling the unsteady features of the problem. Results for lift and induced drag as function of time are presented. The physical principles and some preliminary results of the extension of this method to the compressible subsonic flow are also discussed.*

*Keywords: generalized vortex lattice method, panel methods, singularities method, unsteady aerodynamics, indicial response.*