



VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

OTIMIZAÇÃO DE FORMA UTILIZANDO B-SPLINES E CRITÉRIO DE TENSÃO GLOBAL

Sidney de Oliveira Lins, sidneylins@hotmail.com¹
João Carlos Arantes Costa Júnior, arantes@ufrnet.br²
Marcelo Krajnc Alves, krajnc@emc.ufsc.br³

^{1,2} UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Campus Universitário, Lagoa Nova, Centro Tecnológico, Depto. de Eng. Mecânica, CEP 59072-790, Natal – RN, Brasil.

³ UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Universitário – Trindade, Centro Tecnológico, Caixa Postal 476 -, CEP 88040-900, Florianópolis – SC, Brasil.

Resumo: Este trabalho apresenta um procedimento numérico integrado aplicado a problemas de Otimização de Forma para Minimização da Massa sob restrição de tensão. A solução ótima desta classe de problemas, depende fortemente da estratégia utilizada para o cálculo da análise de sensibilidade da resposta do contorno e da determinação efetiva do gradiente da função objetivo e suas restrições, com relação às variáveis de projeto. Por este motivo, com intuito de obter precisão nas análises de sensibilidades, estas são obtidas analiticamente e o procedimento implementado para o gradiente da função objetivo, propõe uma alternativa chamada de método adjunto, que consiste na adição de um termo à função objetivo, o que reduz consideravelmente o custo computacional. O problema de otimização é definido com base no modelo geométrico, sendo a função objetivo de minimizar a massa sob um critério de tensão e as variáveis de projeto são as coordenadas dos pontos chave, os quais descrevem o contorno do domínio, que é representado por segmentos de curvas cúbicas paramétricas B-splines. A definição paramétrica de curvas em função de um conjunto de pontos-chave e condições de contorno em seus vértices extremos é discutida. É dada ênfase à interpolação através de segmentos da B-spline, devido à sua simplicidade, eficácia e flexibilidade. A correta definição da geometria do domínio é responsável pelo sucesso do processo de otimização. O problema de otimização é formulado através do Método de Lagrangiano Aumentado. O procedimento numérico será particularizado a problemas bidimensionais e os funcionais são aproximados pelo Método dos Elementos Finitos de Galerkin, via elementos triangulares Tri6.

Palavras-chave: Otimização de forma; Elementos Finitos; Curvas B-splines; Modelagem Geométrica; Lagrangeano Aumentado.

1. INTRODUÇÃO

As aplicações de otimização de forma em projetos mecânicos se destacam em inúmeros problemas onde se deseja conseguir melhorar a forma e suavidade do componente mecânico em seu contorno, esta técnica se destaca nas áreas da engenharia aeroespacial, automobilística, e em projeto de mecanismos mecânicos. Na prática, a engenharia esta interessada em reduzir o peso estrutural dos componentes, de maneira que atendam as solicitações de carregamento e máxima tensão von Mises.

O trabalho apresenta um método numérico integrado para problemas que envolvem a otimização de forma aplicada a problema bidimensional para minimizar a massa estrutural submetido à restrição do estado plano de tensão, atendendo o critério de tensão von Mises. O método é denominado integrado porque reúne diversas técnicas distintas para o tratamento do problema, tais como: modelagem geométrica, geração de malhas por elementos finitos por Galerkin usando o elemento triangulares Tri6, análise de sensibilidade, programação matemática e otimização de forma formulada através do Método de Lagrangiano Aumentado.

2. MODELAGEM GEOMÉTRICA

Existe diversas técnicas para a representação do contorno do modelo de otimização, como o uso de polinômios ou macro-elementos, porém estas técnicas apresentam problemas de instabilidade numérica e distorções quando trabalhadas com geometrias complexas. Para contorna esse problema optou-se em utilizar neste trabalho as curvas cúbicas paramétricas *B-splines* por ter uma instabilidade, flexibilidade e a facilidade de implementação computacional como obtidos de forma satisfatória nos trabalhos proposto por Sienz, 1994; Pourazady e Fu 1996; Steffens 2005.

A característica importante em utilizar a curva cúbica paramétrica *B-spline* é a facilidade da manipulação dos pontos de controle que permite mudanças localmente de forma iterativa independente do grau da função base de interpolação na curva, e requer poucos dados de entrada. Além disso, possui uma continuidade C^2 , isto é, uma continuidade suave permanente ao longo do domínio do contorno possibilitando satisfazer as condições de Karush-Kuhn-Tucker.

Há várias formas de representa as curvas, definida pela matemática tais com as curvas de Hermite, Ferguson, Bezier, *B-spline* entre outras, para mais detalhe sobre pode ser visto nas literaturas de Foley 1996; Mortenson 1997 que definem as curvas *B-splines* como

$$\mathbf{p}(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)] = [\mathbf{t}][\mathbf{M}_{BS}][\mathbf{b}_{BS}] \quad (1)$$

Onde $[\mathbf{t}]$ é o vetor da variável independente paramétrica da função polinomial, $[\mathbf{M}_{BS}]$ é a matriz dos coeficientes da função base polinomial e $[\mathbf{b}_{BS}]$ é o vetor da posição da coordenada geometria.

Então, pode rescrever a equação (1) na forma matricial expandida para curva *B-spline*

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \\ \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_{i+1} \\ \mathbf{b}_{i+2} \end{bmatrix} \quad \text{para curva aberta } 0 \leq t \leq 1 \text{ e } i \in [1:k-2] \quad (2)$$

Sendo \mathbf{b}_{i-1} , \mathbf{b}_i , \mathbf{b}_{i+1} e \mathbf{b}_{i+2} os vetores posição dos pontos de controle \mathbf{B}_{i-1} , \mathbf{B}_i , \mathbf{B}_{i+1} e \mathbf{B}_{i+2} , que são os vértices do polígono representativo da curva na figura 1. O artigo de Boor, 1972 apresenta a implementação numérica desse procedimento de forma recursiva, definida pelas equações:

$$\mathbf{N}_i^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

para $n > 1$ tem-se

$$\mathbf{N}_i^n(t) = \left[\frac{t-t_i}{t_{i+n-1}-t_i} \right] \mathbf{N}_i^{n-1}(t) + \left[\frac{t_{i+n}-t}{t_{i+n}-t_{i+1}} \right] \mathbf{N}_{i+1}^{n-1}(t) \quad (4)$$

onde $\mathbf{N}_i^n(t)$ são as funções-base de interpolação polinomial de ordem n com o grau $n-1$ e continuidade de curva C^{n-2} , $i=0, \dots, k$ representando o índice da quantidade de pontos de controle \mathbf{B}_i definido por $k+1$ pontos, t_i é denominado de valor de nós que pertencem ao vetor de nós $\mathbf{t} = [t_0, t_1, \dots, t_{k+n}]$ dado por $n+k+1$ elementos numa sequência de números crescente e eles relacionam com a variável paramétrica t para os vetores posição \mathbf{b}_i .

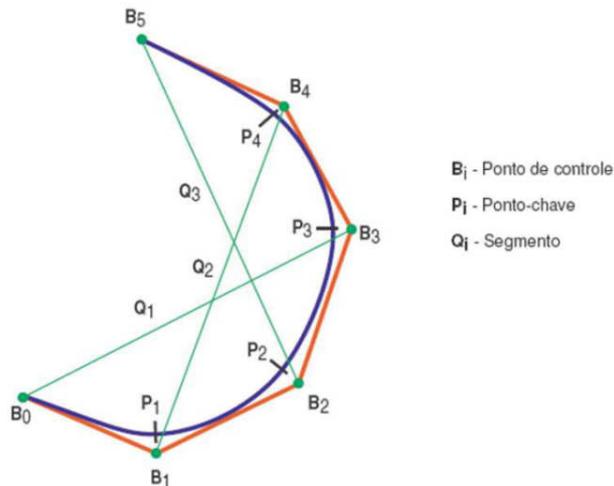


Figura 1. Esquema da curva *B-spline* cúbica passando por um conjunto de pontos-chave.

Nesta seção define-se como variáveis de projeto, para o problema de otimização, o vetor dos pontos de controle, denotado por \mathbf{s} , o qual descreve o contorno do domínio, que é representado pelos segmentos das *B-splines*.

3. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

De uma forma geral pode-se definir um problema de estruturas sob carregamentos mecânicos submetido a restrição de tensão, conforme representação na fig. (2)

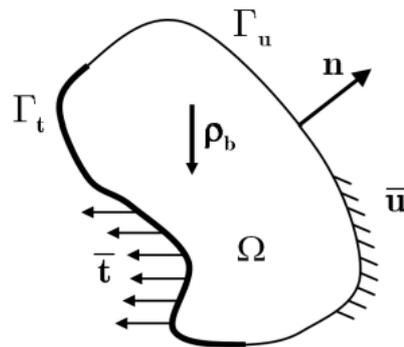


Figura 1. Descrição do problema.

Sendo:

Ω o domínio genérico do projeto;

$\partial\Omega$ o contorno do domínio, tal que, $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$;

Γ_u a parte do contorno sujeita a deslocamento prescrito, também denominada condição de contorno de Dirichlet, isto é, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$;

Γ_t a parte do contorno com tração prescrita, denominada de condição de contorno de Neumann, isto é, $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$;

ρ_b representa a força de corpo por unidade de volume.

Defini-se o espaço solução do seguinte modo:

i. Conjunto dos deslocamentos admissíveis (H):

$$H = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}_{,suf.reg}, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \right\} \quad (5)$$

$$H = \left\{ \mathbf{u}_p + H_0 \right\} \quad (6)$$

ii. Conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis (H_o):

$$H_o = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_{,suf.reg}, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u \right\} \quad (7)$$

Como resultado, podemos decompor o campo de deslocamentos como:

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u}_p + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in H_o \right\} \quad (8)$$

3.1. Formulação Forte do Problema

Determinar \mathbf{u} tal que:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Carregamento Mecânico

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t} \text{ em } \Gamma_t \quad (10)$$

3.2. Formulação Fraca do Problema

Para o problema mecânico, temos:

$$\int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_b \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (11)$$

De acordo com a regra do produto, tal que $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}$, sabendo que $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, da Lei de Hooke e substituindo a eq. (6) na eq. (11). O problema agora é determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, tal que $\mathbf{v} \in H$, seja a solução de

$$\int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_b \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (12)$$

4. FORMULAÇÃO DISCRETA - MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A preocupação principal desta classe de problema de otimização de forma é o comportamento da forma para cada iteração durante o processo de otimização. Obviamente, no modelo discreto para o problema de otimização e no método de elemento finito é considerado as restrições das condições de contorno e de carga distribuída, a geometria, e as variáveis de projeto

que são pontos chaves da curvas *B-splines* no modelo a ser otimizado na qual controla a malha de elemento finito em seu contorno. Adotou-se a concepção do Método de Elemento Finito - MEF de Galerkin para determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u}(x)$ via elemento Tri6 para aproximação do problema de Estado Plano de Tensão - EPT.

A geometria da estrutura é dividida primeiramente em vários pontos que define os segmentos da curvas *B-splines* em seu contorno, denominados de pontos de controle. Os pontos de controle por sua vez definem um conjunto de pontos chaves que são as variáveis de projeto que se relaciona com os nós do contorno da malha do elemento finito. Então, a malha do elemento finito do domínio são geradas, as coordenadas dos pontos x e y sendo definidas por:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{N}_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{N}_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (13)$$

onde n_e é o número de nós da MEF, \mathbf{N} é a função de interpolação Lagrangiana em relação ξ e η que são as coordenadas naturais correspondente aos pontos cartesianos (x, y) , e x_i e y_i são as coordenadas dos i -ésimo nós da malha.

Na figura 3(a) visualiza os pontos de chaves no contorno do modelo definido pelos pontos 1 – 13, são considerados pelo programa de otimização de forma com variável de projeto. No entanto, pode-se escolher o segmento a ser otimizado, isto reduzir o número de variável de projeto, na qual é considerado somente os pontos de chaves dos segmentos das curvas *B-spline* que possui pelo menos um grau de liberdade. Como exemplo, a figura 3(a) pode-se considera com as variáveis de projeto os pontos de controle 2 – 11.

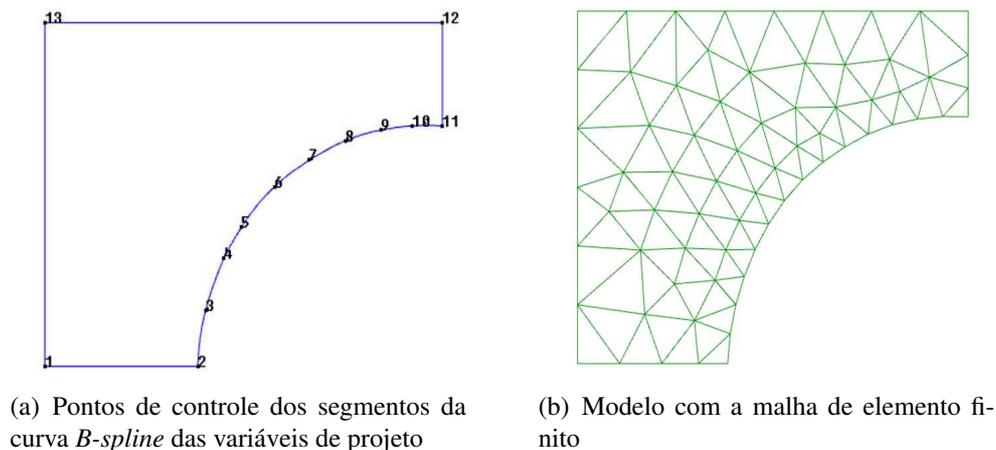


Figura 3: Exemplo de um modelo para ser otimizado com MEF Tri3

Na figura 3(b), tem-se a malha de elemento finito e é facilmente dedutivo que durante o processo de otimização a malha do segmento a ser otimizado ocorre uma perturbação no campo de deslocamento devido a busca do melhor leiaute, isto pode apresenta problema indesejável com a violação na sensibilidade na função objetivo e uma dependência na distorção da malha de elementos finitos agindo em cada nó devido a perturbação da variável de projeto. Isto requer uma atualização da malha de elemento finito para mais detalhe pode ser visto Sienz [1994], Pourazady and Fu [1996] e Silva [2003].

Para determinar o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(x)$ que interpolar as variáveis do campo de

deslocamentos (u_x, u_y) sendo \mathbf{q}_u^e o vetor de deslocamentos nodais do elemento Tri6

$$\mathbf{u}(x) = \partial[\mathbf{N}_u]\mathbf{q}_u^e = \mathbf{B}\mathbf{q}_u^e \quad (14)$$

onde $[\mathbf{N}_i]_u$ é a matriz de funções de interpolação elementar que representa o deslocamento nodal, ∂ um operador derivada e \mathbf{B} conhecida por matriz deformação-deslocamento. Substituindo na equação (12).

$$\left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right\} \mathbf{q}_u^e \cdot \hat{\mathbf{q}}_u^e = \left\{ \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_u]^T \rho \mathbf{b} d\Omega \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}_u^e + \left\{ \int_{\Gamma_t \cap \partial\Omega_e} [\mathbf{N}_u]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}_u^e, \forall \hat{\mathbf{q}}_u^e \in H_o \quad (15)$$

sendo

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega} [\mathbf{N}_u]^T \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [\mathbf{N}_u]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (17)$$

Onde $\rho(x) = cte, \forall x \in \Omega$. Adimensionalizando e adequando para bidimensional a função objetivo obtém-se:

$$\min \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \implies \min \frac{1}{A} \int_A (x) dA \implies \frac{1}{A} \sum_{e=1}^{n_e} A_e \quad (18)$$

sendo n_e o número total de elementos da malha de elementos finitos.

Um método efetivo para contornar o problema de restrições paramétricas, consiste na relaxação pontual (critério local) através da consideração de uma restrição integrada, isto é, da utilização de um critério global.

Daí a condição pontual

$$g_e(x) = \left[\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_y} - 1 \right] \leq 0 \quad (19)$$

será substituída pelo seguinte critério global

$$\bar{g}(\mathbf{u}(x)) = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \langle g_e(x) \rangle^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 0 \quad (20)$$

sendo definido que $\langle f(x) \rangle = \max(0, f(x))$, representando a parte positiva de $f(x)$.

Agora, como resultado das considerações anteriores e sabendo que $A_e = A_e(\mathbf{s})$, o problema pode ser aproximado como:

i. Função objetivo parametrizada

$$f(\mathbf{s}) = \min_s \frac{1}{A} \sum_{e=1}^{n_e} A_e(\mathbf{s}) \quad (21)$$

ii. sujeita a

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mathbf{s}) = \bar{g}(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s}))) &= \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \langle g_e(x(s)) \rangle^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ & \left\{ \frac{1}{\Omega} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} \langle g_e(x(s)) \rangle^p |\mathbf{J}| d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} = G^{\frac{1}{p}} \leq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

iii. Restrições laterais

$$s_{inf} \leq s_j \leq s_{sup}; \quad j = 1, \dots, n_s \quad (23)$$

sendo n_s o número total de pontos de controle de todos os segmentos de curvas *B-splines*. O cálculo de $\mathbf{u}(\mathbf{x}(s))$ advém da solução de

$$a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_u(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_o \quad (24)$$

Daí denota-se por $\mathbf{S} = \{s \in \mathbb{R}^{n_e} | s_{inf} \leq s_j \leq s_{sup}\}$ o conjunto solução.

5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA

A função objetivo é minimizar a massa de estruturas 2D atendendo a um critério de tensão. De forma utiliza as curvas *B-splines* para descrever o contorno da estrutura a ser otimizada. Estas curvas possuem como característica pontos de controle que controlam o comportamento da curva. De outra forma, ao alterarmos o valor destes pontos de controle os pontos chaves da curva será modificada localmente, daí escolha dos pontos de controle como variáveis de projeto do nosso problema de otimização. Portanto, o vetor \mathbf{s} é o contém as variáveis de projeto.

O problema pode ser formulado como determinar \mathbf{s} , o vetor de pontos de chaves do contorno do material, tal que soluciona a formulação com restrição é

$$\min : \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (25)$$

$$t.q. : \frac{\sigma_{ef}}{\sigma_y} - 1 \leq 0 \quad (26)$$

Sendo:

$\rho \rightarrow$ Densidade do material;

$\sigma_{ef} \rightarrow$ Tensão efetiva de von Mises;

$\sigma_y \rightarrow$ Tensão limite do escoamento elástico do material.

A tensão de von Mises efetiva é definida 2D conforme descrito por Chung [1998] e Mottram and Shaw [1996].

$$\sigma_{ef}^{2D} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (27)$$

De acordo com a Lei de Hooke a equação que relaciona tensão com a deformação, a qual é válida na região elástica linear, é dada por

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (28)$$

Utilizou-se a técnica de transforma um problema com restrição para um problema Irrestrito usando o Método de Lagrangiana Aumentado, pode ser visto com mais detalhado nas literaturas de Arora [1989] e Bazaraa et al. [1993], desta forma pode rescrever o problema como:

$$\min \mathcal{L}_a(s, \lambda, r), \quad \forall s \in \mathbf{S}, \lambda \text{ e } r \in \mathbb{R} \quad (29)$$

sendo

$$\mathcal{L}_a(s, \lambda, r) = f(s) + \frac{1}{r} \Psi(\bar{g}, r\lambda) \quad (30)$$

e ainda

$$\Psi(\bar{g}, r\lambda) = \begin{cases} \bar{g}(\bar{g} + r\lambda), & \text{se } \bar{g} \geq -\frac{r\lambda}{2} \\ -\left(\frac{r\lambda}{2}\right)^2, & \text{se } \bar{g} < -\frac{r\lambda}{2} \end{cases} \quad (31)$$

onde \mathcal{L}_a é a função Lagrangiana, λ e μ são coeficientes Lagrangiana das restrições de desigualdade e igualdade respectivamente, \mathbf{s} é variável de projeto e $\Psi(\bar{g}, r\lambda)$ é a função a restrição de tensão com relaxação integrada estudados por [Costa 2003, Coutinho 2006]. Para determinar o ponto mínimo da função Lagrangiana é necessário impor as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker, isto é obtido pela análise da sensibilidade da função objetivo.

5.1 Análise da Sensibilidade

Análise da sensibilidade o consome a maior parte do esforço computacional requerido para determinação da solução do problema, com isso, se torna um gargalo para o processo. Outros pontos a serem considerados são a precisão obtida dos resultados e avaliação dos erros da sensibilidade que levam a direções de busca incorretas, gerando problema de convergência do algoritmo de otimização. Por isso, a importância de ter um algoritmo robusto com finalidade de reduzir o erro e diminuir o tempo de processamento do algoritmo. Conseqüentemente, a importância no enfoque das técnicas utilizadas neste trabalho de forma sistemática para obter análise de sensibilidade baseado nos conceitos clássicos do cálculo variacional e da mecânica do contínuo. Para resolver a formulação geral, a solução foi feita por parte, então temos:

Sensibilidade de \mathcal{L}_a

Cálculo da sensibilidade de \mathcal{L}_a em relação a variável de projeto s_j

$$\frac{d\mathcal{L}_a}{ds_j} = \frac{\partial f}{\partial s_j} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{ds_j} \quad (32)$$

sendo

$$\frac{d\Psi}{ds_j} = \begin{cases} [2\bar{g}(s, \mathbf{u}(s)) + r\lambda] \frac{d\bar{g}(s, \mathbf{u}(s))}{ds_j}, & \text{se } \bar{g} \geq -\frac{r\lambda}{2} \\ 0, & \text{se } \bar{g} < -\frac{r\lambda}{2} \end{cases} \quad (33)$$

Para a sensibilidade do critério de tensão global em relação a variável de projeto s_j

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s_j} + \sum_{k=1}^{2n_e} \frac{\partial \bar{g}}{\partial u_k} \frac{du_k}{ds_j} \quad (34)$$

A sensibilidade do primeiro termo da equação (34) é facilmente obtido, porém segundo termo é complicado determinar $\frac{du_k}{ds_j}$. Para isso, uso a técnica do Método Adjunto que consiste introduzir um vetor adjunto λ na função f de forma modificar, sendo produto interno de λ com um vetor \mathbf{R} residual definido na solução, seja zero, isto é, $\langle \lambda, \mathbf{R} \rangle = 0$. Então, a equação (34) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s_j} + \left\langle \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_j} \right\rangle \quad (35)$$

mas da condição de equilíbrio para o segundo termo

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext} \quad (36)$$

Daí

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_j} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_j} = \frac{\partial \mathbf{F}^{ext}}{\partial s_j} \quad (37)$$

denotando

$$R^j = \frac{\partial \mathbf{F}^{ext}}{\partial s_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_j} \mathbf{u} \quad (38)$$

$$R^j = \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_j} \quad (39)$$

como $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-T}$, podemos escrever

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s_j} + \langle \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g}, \mathbf{K}^{-1} \{R^j\} \rangle = \frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s_j} + \langle \mathbf{K}^{-1} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g}, R^j \rangle \quad (40)$$

denominando

$$Z^j = \mathbf{K}^{-1} \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g} \implies \mathbf{K} Z^j = \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g} \quad (41)$$

então

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s_j} + \langle Z^j, R^j \rangle \quad (42)$$

sendo Z^j é o vetor solução do sistema da equação (41).

Sensibilidade da função restrição global em relação a variável de projeto

A equação (22) é definida \bar{g} , sendo que $\Omega = \Omega(x(s))$, então derivando em relação s_j tem-se

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{1}{p} (G)^{\frac{1}{p}-1} \left[-\Omega^{-2} \frac{\partial \Omega}{\partial s_j} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} \langle g_e \rangle^p |\mathbf{J}| d\Omega + \Omega^{-1} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} p \langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial s_j} |\mathbf{J}| + \langle g_e \rangle^p \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial s_j} d\Omega \right] \quad (43)$$

manipulando a parcela da expressão $(G)^{\frac{1}{p}-1} = (G)^{\frac{1}{p}} \cdot (G)^{-1} = (G)^{\frac{1}{p}} \cdot (G)^{-\frac{p}{p}} = \bar{g} \cdot \bar{g}^{-p} = \bar{g}^{1-p}$, temos:

$$\frac{d\bar{g}}{ds_j} = \frac{\bar{g}^{1-p}}{p\Omega} \left[-\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial s_j} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} \langle g_e \rangle^p |\mathbf{J}| d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} p \langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial s_j} |\mathbf{J}| + \langle g_e \rangle^p \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial s_j} d\Omega \right] \quad (44)$$

Sensibilidade da função restrição local em relação a variável de projeto

Sendo g_e definida como na equação(19), então derivando em relação a s_j , tem-se

$$\frac{\partial g_e}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_y} - 1 \right] = \frac{1}{\sigma_y} \frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial s_j} \quad (45)$$

então, a sensibilidade é dada

$$\frac{\partial \sigma_{ef}}{\partial s_j} = \frac{1}{\sigma_{ef}} \left[\mathbf{H}\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial s_j} \right] \quad (46)$$

Sensibilidade do vetor tensão em relação a variável de projeto

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} [\mathbf{D}\varepsilon(\mathbf{u})] = \mathbf{D} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{u})}{\partial s_j} = \mathbf{D} \frac{\partial (\mathbf{B}\mathbf{q}_u^e)}{\partial s_j} = \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s_j} \mathbf{q}_u^e \quad (47)$$

É importante observar que para o cálculo da sensibilidade (derivada parcial) explicitamente em relação à variável de projeto s_j , os deslocamentos deverão ser mantidos constantes.

Sensibilidade da matriz de rigidez \mathbf{K}

A matriz de rigidez global \mathbf{K} é decomposta na matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_e , na qual é definida pela equação (48)

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\Omega \quad (48)$$

Calculando a derivada da matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_e em relação à variável de projeto s_j , será necessário para o cálculo do vetor R^j definido na equação (39)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial s_j} = \int_{\hat{\Omega}_e} \left[\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial s_j} \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s_j} \right] |\mathbf{J}| d\Omega + \int_{\hat{\Omega}_e} [\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}] \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial s_j} d\Omega \quad (49)$$

Sensibilidade da função restrição global em relação ao vetor de deslocamentos

Analisando a equação (22) é fácil deduzir que

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\bar{g}^{(1-p)}}{\Omega} \int_{\Omega} \langle g_e \rangle^{(p-1)} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}} d\Omega \quad (50)$$

lembrando que pela configuração Lagrangiana, não há atualização da geometria, portanto $\Omega = \Omega(x(s))$ e não depende do deslocamento. Agora, a expressão acima pode ser escrita como.

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\bar{g}^{(1-p)}}{\Omega} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \langle g_e \rangle^{(p-1)} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}_e} d\Omega = \frac{\bar{g}^{(1-p)}}{\Omega} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}_e} \langle g_e \rangle^{(p-1)} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}_e} |\mathbf{J}| d\Omega \quad (51)$$

6. APLICAÇÃO

Neste trabalho apresenta três exemplos com objetivo de otimizar a massa com critério de restrição de tensão von Mises, para problema bidimensional, isto é, reduzir a área do domínio inicial de tal forma que encontre o melhor leiaute da distribuição da massa para suportar o carregamento, e foi utilizado o critério de parada uma precisão de convergência de 10^{-4} .

Exemplo 01

Considere o problema ilustrado na figura 4, observa que na figura 4(a) tem a concepção do domínio do projeto físico e na figura 4(b) tem o modelo do domínio do problema de otimização com as condições de contorno imposta ao problema. Na qual consiste em um bloco com os apoios fixos na face esquerda nos segmentos a e b , com uma carga distribuída no segmento c prescrita na face do lado direito de intensidade $P=250 \times 10^6$ N, isto é, uma força máxima que o material suporta e com uma área inicial de 24 m^2 . As propriedades mecânicas consideradas do material é dada pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.29$ e Módulo de Young $E = 250$ MPa.

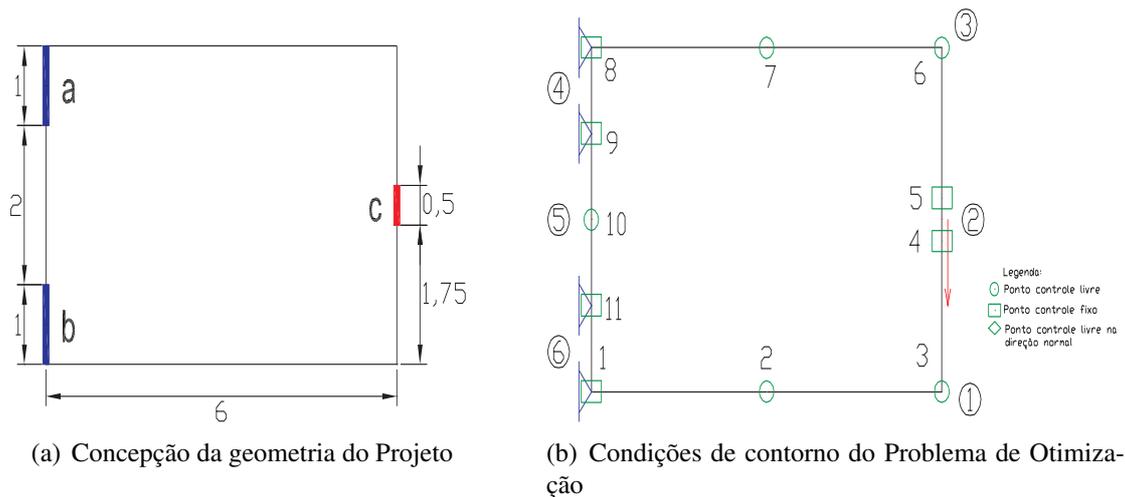


Figura 4: O modelo do exemplo 01 para ser otimizado com MEF Tri6

O problema de otimização da figura 4(b) é descrito por 11 pontos de controle, formado por 6 segmentos de *B-spline*, tendo 10 variáveis de projeto para o problema de otimização (os pontos 2 – 3 – 6 – 7 – 10), que correspondem aos graus de liberdade que podem variar em determinada direção, são elas:

Tabela 1: Restrições laterais do Exemplo 01

Segmento	Pontos livres	Restrição lateral em x	Restrição lateral em y
1	2	$-1.00 \leq x_1 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_1 \leq 0.80$
	3	$-1.50 \leq x_2 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_2 \leq 1.35$
3	6	$-1.50 \leq x_3 \leq 0.00$	$-1.35 \leq y_3 \leq 0.00$
	7	$-1.00 \leq x_4 \leq 0.00$	$-0.80 \leq y_4 \leq 0.00$
5	10	$0.00 \leq x_5 \leq 4.30$	$0.00 \leq y_5 \leq 0.00$

O modelo discreto, utilizou uma malha inicial de 6421 elementos com 13210 nós e uma área inicial de 25.3262 m^2 e o seu resultado final obteve uma malha de 2645 elementos com 5750 nós e uma área final de 8.37 m^2 .

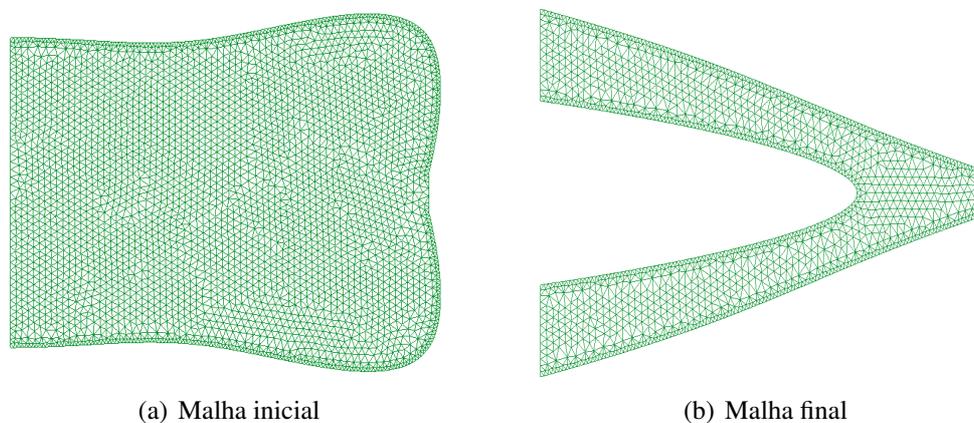


Figura 5: Modelo discreto pelo MEF

Como ilustra as figuras 5(a) e 5(b), a mudança da forma do modelo físico inicial para o modelo discreto para ser otimizado é devido a representatividade da curva *B-spline* inicialmente nos pontos de controle.

O resultado da simulação numérica são mostrados nas figuras 6(a) e 6(b), com pode ser observado, teve uma redução da massa de aproximadamente de 66.9331% e a uma boa distribuição das linhas de isotensão em toda a superfície do modelo. No entanto no ponto onde é aplicado o carregamento tem uma violação da tensão, isto se deve ao método de penalidade exterior usado no método de otimização.

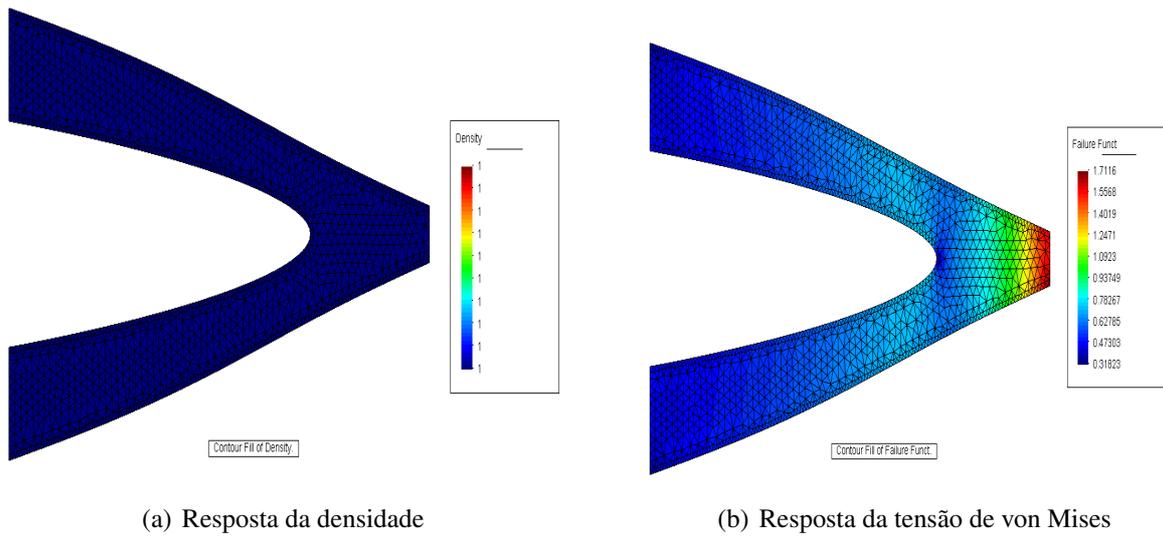


Figura 6: Resultado da análise

Exemplo 02

No segundo problema ilustrado na figura 7, onde na figura 7(a) tem a concepção do domínio do projeto físico e na figura 7(b) o modelo do domínio do problema de otimização que consiste em um bloco com os apoios fixos na face inferior nos segmentos *a* e *b*, com uma carga distribuída no segmento *c* prescrita na face superior de intensidade $P=250 \times 10^6$ N, com uma área inicial de 24 m^2 . As propriedades mecânica considerada do material é dada pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.29$ e Módulo de Young $E = 250$ MPa.

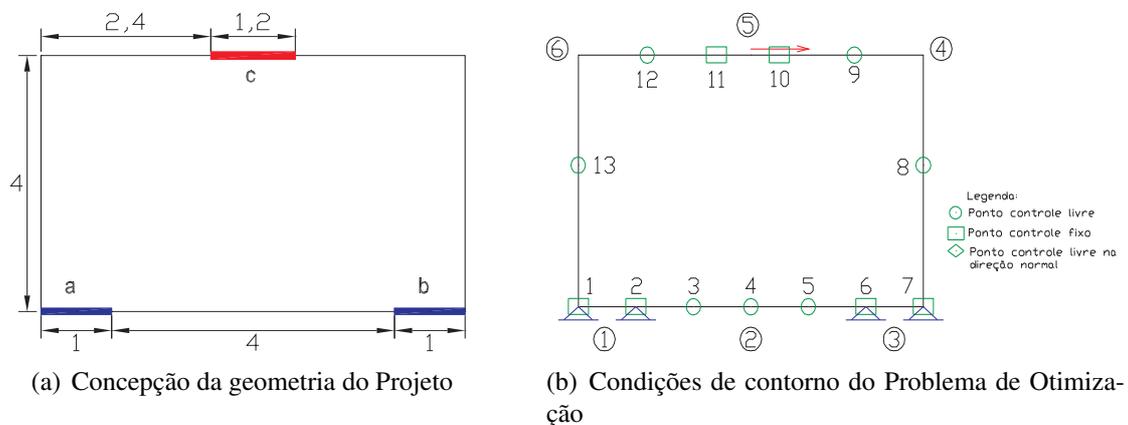


Figura 7: O modelo do exemplo 02 para ser otimizado com MEF Tri6

O problema de otimização da figura 7(b) é descrito por 13 pontos de controle, formado

por 6 segmentos de *B-spline*, tendo 14 variáveis de projeto para o problema de otimização (os pontos 3 – 4 – 5 – 8 – 9 – 12 – 13) correspondente aos graus de liberdade que podem variar nas direções x e y com os respectivos valores, são eles:

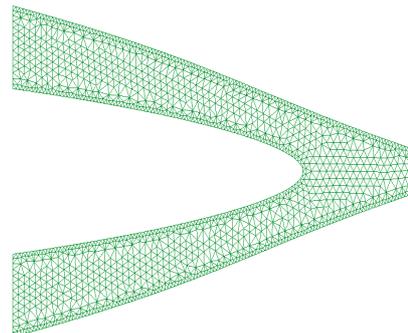
Tabela 2: Restrições laterais do Exemplo 02

Segmento	Pontos livres	Restrição lateral em x	Restrição lateral em y
2	3	$0.00 \leq x_1 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_1 \leq 1.70$
	4	$0.00 \leq x_2 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_2 \leq 2.30$
	5	$0.00 \leq x_3 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_3 \leq 1.70$
4	8	$-1.20 \leq x_4 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_4 \leq 0.00$
	9	$-0.80 \leq x_5 \leq 0.00$	$-0.60 \leq y_5 \leq 0.00$
6	12	$0.00 \leq x_6 \leq 0.80$	$-0.60 \leq y_6 \leq 0.00$
	13	$0.00 \leq x_7 \leq 1.20$	$0.00 \leq y_7 \leq 0.00$

O modelo discreto, utilizou uma malha inicial de 5720 elementos com 11745 nós e uma área inicial de 23.1753 m^2 e o seu resultado final obteve uma malha de 2578 elementos com 5509 nós e uma área final de 8.94 m^2 . Como ilustra as figuras 8(a) e 8(b).

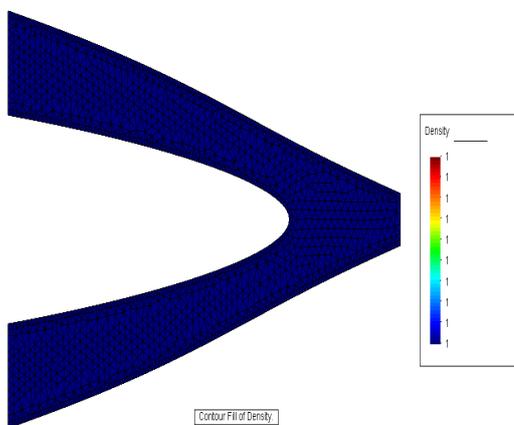


(a) Malha inicial

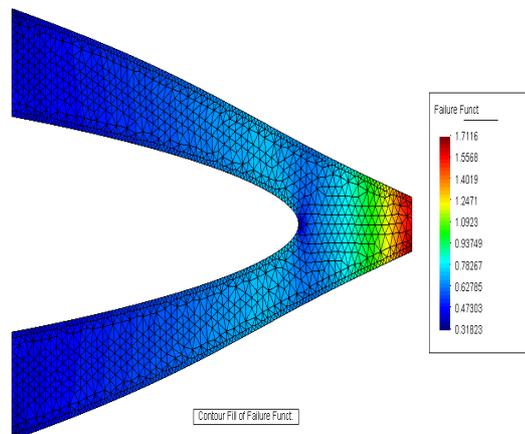


(b) Malha final

Figura 8: Modelo discreto pelo MEF



(a) Resposta da densidade



(b) Resposta da tensão de von Mises

Figura 9: Resultado da análise

O resultado da simulação numérica são mostrados nas figuras 9(a) e 9(b), com pode ser observado, teve uma redução da massa de aproximadamente de 61,5% e a uma boa distribuição das linhas de isotensão em toda a superfície do modelo. No entanto no ponto onde é aplicado o carregamento tem uma violação da tensão, isto se deve ao método de penalidade exterior usado no método de otimização.

Exemplo 03

O último problema é ilustrado na figura 10, onde a concepção do domínio do projeto físico é mostrado na figura 10(a) e o modelo do domínio do problema de otimização é mostrado na figura 10(b) com as condições de contorno do problema. Na qual consiste em um bloco onde nas extremidades inferior a , b e c pontos de apoios e uma cargas distribuídas em d de intensidade $P= 250 \times 10^6$ N, sendo a área inicial de 200 m^2 . As propriedades mecânica considerada do material é dada pelo coeficiente de Poisson $\nu = 0.29$ e Módulo de Young $E = 250$ MPa.

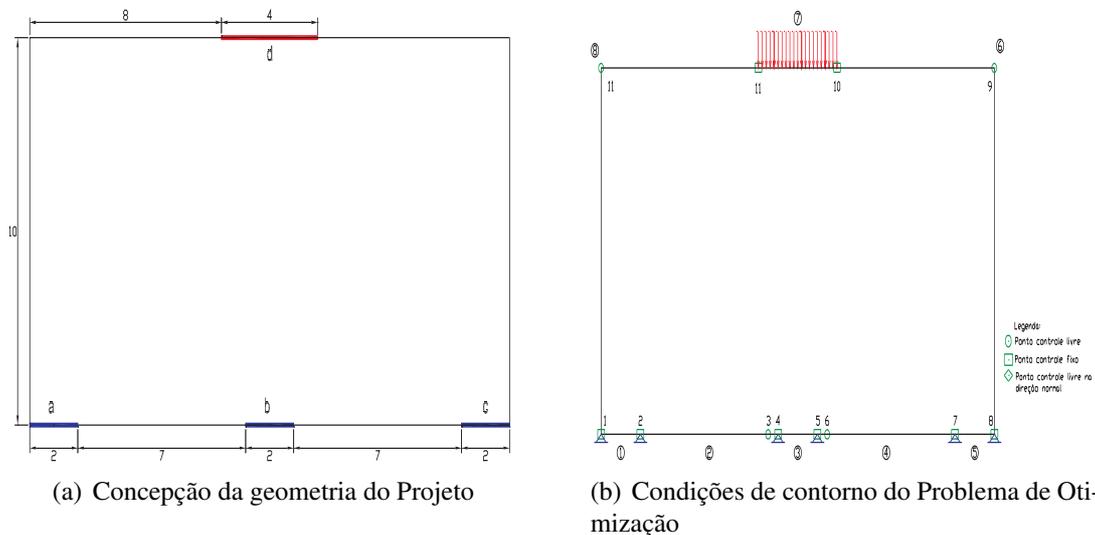


Figura 10: O modelo do exemplo 03 para ser otimizado com MEF Tri6

O problema de otimização da figura 10(b) é descrito por 12 pontos de controle, formado por 8 segmentos de *B-spline*, tendo 8 variáveis de projeto para o problema de otimização (os pontos 3 – 6 – 9 – 12) correspondente aos graus de liberdade que podem variar nas direções x e y com os respectivos valores, são eles:

Tabela 3: Restrições laterais do Exemplo 03

Segmento	Pontos livres	Restrição lateral em x	Restrição lateral em y
2	3	$0.00 \leq x_1 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_1 \leq 6.30$
4	6	$-4.70 \leq x_2 \leq 0.00$	$0.00 \leq y_2 \leq 6.30$
6	9	$-5.00 \leq x_3 \leq 0.00$	$-3.50 \leq y_2 \leq 0.00$
8	12	$0.00 \leq x_3 \leq 5.00$	$-3.50 \leq y_2 \leq 0.00$

Para o modelo discreto, utilizou uma malha inicial de 6215 elementos com 12766 nós e uma área inicial de 226.5636 m^2 , como pode observa que é maior do que a área do domínio físico, isto ocorre em função abstração para a representação das curvas *B-splines* e o seu resultado final obteve uma malha de 5056 elementos com 2321 nós e uma área final de 64.5461 m^2 . Como ilustra as figuras 11(a) e 11(b).

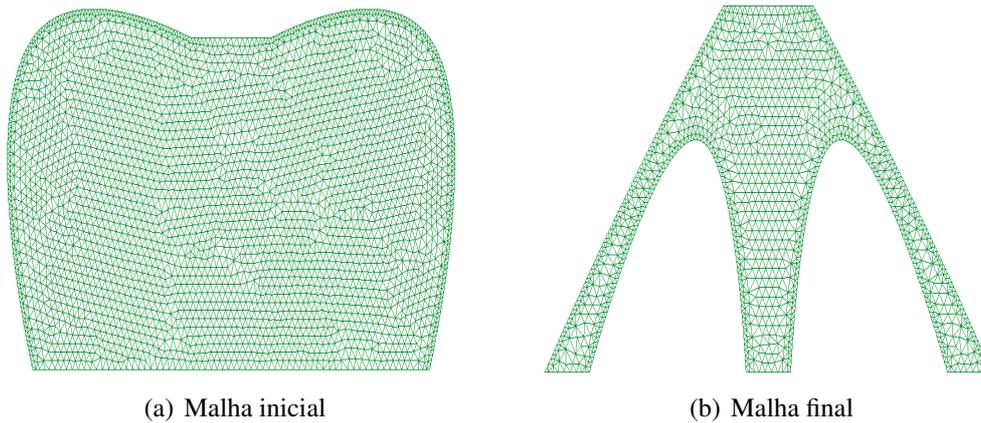


Figura 11: Modelo discreto pelo MEF

O resultado da simulação numérica são mostrados nas figuras 12(a) e 12(b), com pode ser observado, teve uma redução da massa de aproximadamente de 71.5108% e a uma boa distribuição das linhas de isotensão em toda a superfície do modelo.

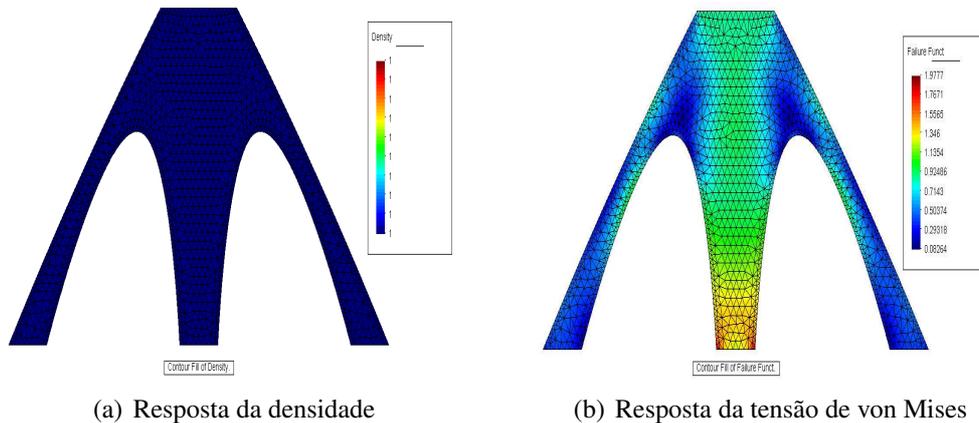


Figura 12: Resultado da análise

7. CONCLUSÃO

A determinação da sensibilidade analítica pelo método adjunto para os termos da função objetivo agregou uma eficiência no custo computacional e uma interface para integra as curvas paramétrica cúbica *B-splines* que representa os diversos contornos com fronteira irregulares de forma natural e suave, requisitando poucos dados de entrada, o que possibilitou o controle dos pontos chaves que descrevem o contorno sem perde as propriedades matemáticas de representação e da continuidade geométrica entre os segmentos.

Este objetivo foi alcançado devido a natureza iterativa do processo de otimização e atualização da informação de sensibilidade da malha de elemento finito. A geração de malha finita automática reduz a quantia de dados de contribuição, mas também automatiza o processo de otimização.

O método mostrou eficiente para os problemas proposto para ser utilizado com o método de otimização de forma em sólidos, os resultados finais tiveram redução da massa, com um contorno suave e contínuo em todo o domínio atendendo os critério de tensão von Mises.

Referências

- Arora, J. S., 1989. *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill Book Company, 1^a edition.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M., 1993. *Nonlinear Programming - Theory and Applications*. John Wiley and Sons, 2^a edition.
- Chung, T. J., 1998. *Continuum Mechanics*. Prentice-Hall International Editions, 2^a edition.
- Costa, J. C. A. J., 2003. *Otimização topológica com Refinos H-adaptativos*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.
- Coutinho, K. D., 2006. Método de otimização topológica em estrutura tridimensionais. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN.
- de Boor, C., 1972. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, vol. 6, n. 1, pp. 50–62.
- Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., Feiner, S. K., & Hughes, J. F., 1996. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison Wesley Professional, 2^a edition.
- Mortenson, M. E., 1997. *Geometric Modeling*. Wiley Computer Publishing, 1^a edition.
- Mottram, J. T. & Shaw, C. T., 1996. *Using Finite Elements in Mechanical Design*. McGraw-Hill Book Company, 1^a edition.
- Pourazady, M. & Fu, Z., 1996. An integrated approach to structural shape optimization. *Computers and Structures*, vol. 60, n. 2, pp. 279–289.
- Siens, J., 1994. *Integrated structural modelling, adaptivity analysis and shape optimization*. PhD thesis, University of Wales.
- Silva, C. A. C., 2003. *Análise de Sensibilidade, Algoritmos de Otimização e Orientação por Objetos em Hiperelasticidade Não-Linear*. Doutorado, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- Steffens, L. M., 2005. Desenvolvimento de uma metodologia integrada para otimização de forma de mecânica de fluidos. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.