

## **TÉCNICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS ACOPLADAS PARA O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE FRICÇÃO EM ESCOAMENTOS LAMINARES EM DUTOS E EM CAMADA LIMITE**

**M. C. Reis, marcelloreis@vm.uff.br<sup>1</sup>**

**Maximo Santana Chaves, maximochaves@gmail.com<sup>1</sup>**

**L. A. Sphaier, lasphaier@mec.uff.br<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense, Rua Passo da Pátria 156, bloco E, sala 216, Niterói, RJ, 24210-240, Brasil

**Resumo:** *Este trabalho está concentrado na aplicação da chamada Técnica das Equações Integrais Acopladas para calcular o coeficiente de fricção em escoamento laminar (em diferentes seções) e o coeficiente de arrasto na camada limite sobre placa plana. Com o problema de escoamento em dutos, o fator de fricção é calculado resolvendo uma formulação por parâmetros concentrados melhorados obtida através da TEIA junto com uma média das equações de momentum. Por outro lado, para o escoamento laminar na camada limite, a solução integral clássica para placas planas é recalculada; no entanto, uma modificação é considerada: uma forma funcional não é escolhida para o perfil de velocidade. Reciprocamente, a TEIA é invocada para fornecer relações aproximadas entre os valores médios e os potenciais nas fronteiras. Valores numéricos para os coeficientes de fricção são calculados e os resultados são comparados com dados na literatura, mostrando que a metodologia da TEIA é eficaz para ambos os problemas considerados.*

**Keywords:** *Equações Integrais Acopladas; Parâmetros Concentrados Melhorados; Dutos de Geometria Irregular; Escoamento em Camada Limite*

### **1. INTRODUÇÃO**

Durante muito tempo, os métodos analíticos eram o único meio de se resolver problemas envolvendo escoamentos e transferência de calor. Após a introdução dos computadores, o uso de métodos numéricos se difundiu na prática da engenharia e, por sua vez, os métodos analíticos entraram um pouco em desuso. No entanto, soluções analíticas ainda desempenham um papel crucial no desenvolvimento da ciência e da engenharia, e sua relevância não deve ser desprezada.

A aproximação de Hermite consiste em aproximar uma integral através de uma combinação linear de valores do integrando e das derivadas do mesmo. Foi originalmente desenvolvida por Hermite (1878) e primeiramente apresentada por Menning *et al.* (1983). Estas aproximações permitem que um problema complexo seja simplificado, fazendo com que o mesmo possa ser resolvido com um esforço muito menor, e, em muitos casos utilizando métodos analíticos. No entanto, o erro cometido em tais aproximações deve ser controlado para manter requisitos mínimos de precisão. A Técnica das Equações Integrais Acopladas é baseada em utilizar as aproximações supracitadas para obter expressões para a variável dependente e suas derivadas. A vantagem de tal técnica, quando comparada ao método tradicional de aproximações (a aproximação clássica por parâmetros concentrados), é que um erro muito menor é obtido, tornando possível atingir uma precisão satisfatória nos resultados. Esta técnica foi aplicada na solução de diversos problemas, tais como secagem em meios porosos (Dantas *et al.*, 2007), análise de sistemas de proteção térmica (Ruperti *et al.*, 2004), trocadores de calor (Scofano Neto and Cotta, 1993), condução de calor (Corrêa and Cotta, 1998), problemas envolvendo mudança de fase (Menning and Özişik, 1985) e resfriamento radiativo (Su, 2004). Recentemente a TEIA foi utilizada para calcular o fator de atrito no escoamento laminar em dutos de geometrias irregulares (Reis *et al.*, 2009).

O presente trabalho apresenta uma metodologia analítica aproximada, baseada na Técnica das Equações Integrais Acopladas, para obter expressões para o fator de fricção em dutos de geometria irregular, bem como o coeficiente de fricção no escoamento externo sobre placa plana. Resultados para diferentes geometrias são comparados com dados previamente encontrados na literatura afim de certificar a eficácia do método.

## 2. APROXIMAÇÃO DE HERMITE

A base da aproximação por integrais acopladas é a aproximação de Hermite para integrais, originalmente desenvolvida por Hermite (1878) e primeiramente apresentada por Menning *et al.* (1983), denotada por  $H_{\alpha,\beta}$ , a qual é dada pela expressão geral:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} c_{\nu}(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} f^{(\nu)}(x_{i-1}) + \sum_{\nu=0}^{\beta} c_{\nu}(\beta, \alpha) (-1)^{\nu} h_i^{\nu+1} f^{(\nu)}(x_i) + Erro_{\alpha,\beta} \quad (1)$$

onde,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad (2)$$

$$c_{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + 1)!(\alpha + \beta - \nu + 1)!}{(\nu + 1)!(\alpha - \nu)!(\alpha + \beta + 2)!} \quad (3)$$

e  $f(x)$  e suas derivadas  $f^{(\nu)}(x)$  são definidas para todo  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . É assumido que  $f^{(\nu)}(x_{i-1}) = f_{i-1}^{(\nu)}$  para  $\nu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$  e  $f^{(\nu)}(x_i) = f_i^{(\nu)}$  para  $\nu = 0, 1, 2, \dots, \beta$ . Esta fórmula de integração pode fornecer diferentes níveis de aproximação, partindo da formulação clássica e nos conduzindo a formulações melhoradas. Uma análise de erro detalhada de aplicação da TEIA em problemas de difusão usando aproximações de Hermite  $H_{0,0}$ ,  $H_{0,1}$ ,  $H_{1,0}$ , e  $H_{1,1}$  foi abordada em (Alves *et al.*, 2000).

## 3. ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS IRREGULARES

O problema considerado é de escoamento laminar desenvolvido em dutos irregulares com a seção transversal descrita pelo domínio mostrado na Fig. (1). A função  $z_1(y)$  descreve a forma do contorno do lado direito entre  $z = a$  e  $z = c$ .

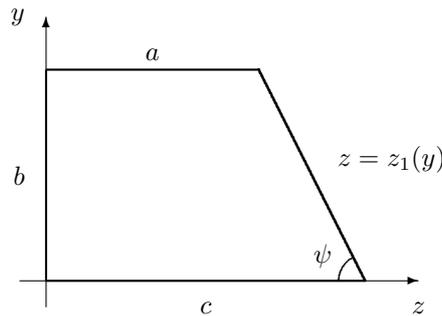


Figura 1. Domínio do problema

Para escoamento laminar cineticamente desenvolvido e propriedades termofísicas constantes, as equações de Navier-Stokes são reduzidas à seguinte forma, juntamente com as respectivas condições de contorno:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = G_P, \quad \text{para } 0 \leq Y \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq Z \leq 1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \text{para } Y = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq Z \leq 1, \quad (5)$$

$$U = 0, \quad \text{para } Y = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq Z \leq 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \quad \text{para } Z = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad (7)$$

$$U = 0, \quad \text{para } Z = Z_1(Y) \quad \text{e} \quad 0 \leq Y \leq 1. \quad (8)$$

Onde as variáveis adimensionais envolvidas são dadas por:

$$Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{a}, \quad U = \frac{u}{\bar{u}}, \quad K = \frac{b}{a}, \quad G_P = \frac{b^2}{\mu \bar{u}} \frac{dP}{dx} \quad (9)$$

A forma adimensional de  $z_1(y)$  é dada por  $\Gamma(Y) = \xi Y + \eta$ . Expressões para  $\xi$  e  $\eta$  são facilmente obtidas, fornecendo:

$$\xi = -K \cot(\psi) \quad \text{e} \quad \eta = 1 + K \cot(\psi). \quad (10)$$

A expressão para o fator de fricção de Fanning pode ser rapidamente obtida em termos do gradiente de pressão adimensional como:

$$f \text{ Re} = -\frac{G_P D_H^2}{2 b^2}, \quad (11)$$

onde o número de Reynolds é baseado no diâmetro hidráulico.

### 3.1 Aproximação pela Técnica das Integrais Acopladas

A velocidade média na direção horizontal é definida como:

$$U_{av}(Y) = \frac{\int_0^{\Gamma(Y)} U(Y, Z) dZ}{\xi Y + \eta}. \quad (12)$$

Tomando uma média da Eq. (4) é fácil mostrar (Reis *et al.*, 2009) que o sistema resultante é dado por:

$$\frac{d^2 U_{av}}{dY^2} + \frac{2\xi}{\xi Y + \eta} \frac{dU_{av}}{dY} + \frac{(K^2 + \xi^2)}{\xi Y + \eta} \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=\Gamma} = G_P, \quad \text{para } 0 \leq Y \leq 1, \quad (13)$$

$$\eta h_j^* \frac{dU_{av}}{dY} + (\xi h_j^* + \eta k_j^*) U_{av} = 0, \quad \text{em } Y = 0, \quad (14)$$

$$U_{av} = 0, \quad \text{em } Y = 1, \quad (15)$$

e que a condição de contorno (8) permite que a seguinte relação seja escrita:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Z=\Gamma} = -\xi \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=\Gamma}. \quad (16)$$

No intuito de resolver as Eqs. (13-15), as derivadas do perfil de velocidade  $U(Y, Z)$  devem ser expressas em termos da velocidade média em  $Z$ ,  $U_{av}(Y)$ . Neste ponto não há mais transformações para nos auxiliar, e desse modo, necessita-se de regras de aproximação. Observando as Eqs. (13 e 16), a metodologia da TEIA (Técnica das Equações Integrais Acopladas) deve ser aplicada para obter relações entre as derivadas desconhecidas ( $\partial U/\partial Z|_{Z=\Gamma(Y)}$  e  $\partial U/\partial Y|_{Z=\Gamma(Y)}$ ) e a velocidade média  $U_{av}(Y)$ . No entanto, duas diferentes alternativas de aproximação surgem:

1. Aplicar a TEIA usando fórmulas de Hermite para as integrais de  $U(Y, Z)$  e  $\partial U/\partial Z$ .
2. Aplicar a TEIA usando fórmulas de Hermite para as integrais de  $U(Y, Z)$  e  $\partial U/\partial Y$ .

Embora não existam diferenças entre as alternativas acima com relação ao número de aproximações feitas, diferentes resultados podem ser obtidos para cada caso. Como mostrado em (Reis *et al.*, 2009), usando fórmulas  $H_{0,0}$  ou  $H_{1,1}$  para  $U(Y, Z)$ , combinadas com fórmulas  $H_{0,0}$  para derivadas de  $U$ , conduz-nos a regras de aproximação da seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=\Gamma(Y)} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Z=\Gamma(Y)} \approx -\gamma_1 \frac{U_{av}}{\xi Y + \eta} + \frac{\gamma_2}{\xi} \frac{dU_{av}}{dY} \quad (17)$$

onde  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são parâmetros cujos valores dependem do tipo de aproximação usada, como descrito pelos quatro casos abaixo:

- Caso 1 –  $H_{0,0}/H_{0,0}$ , alternativa 1:  $\gamma_1 = 4$ ,  $\gamma_2 = 0$ .
- Caso 2 –  $H_{0,0}/H_{0,0}$ , alternativa 2:  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 0$ .
- Caso 3 –  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , alternativa 1:  $\gamma_1 = 3$ ,  $\gamma_2 = 0$ .
- Caso 4 –  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , alternativa 2:  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = -1/2$ .

Resolvendo a Eq. (13) e utilizando a Eq. (17), obtém-se a seguinte expressão para o perfil de velocidade média:

$$\frac{U_{av}(Y)}{G_P} = \zeta_1 (\xi Y + \eta)^{\gamma_3 + \chi} + \zeta_2 (\xi Y + \eta)^{\gamma_3 - \chi} + \zeta_3 (\xi Y + \eta)^2 \quad (18)$$

onde  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são constantes de integração obtidas com as condições de contorno dadas por (14 e 15). As constantes  $\gamma_3$  e  $\chi$  são usadas para simplificar a expressão, e são dadas por:

$$\gamma_3 = -\frac{1}{4} (1 + 2\gamma_2 + \cos(2\psi)) \sec^2(\psi), \quad \chi = \sqrt{\gamma_1 \sec(\psi) + \gamma_3^2}. \quad (19)$$

Utilizando o perfil de velocidade média  $U_{av}$ , uma expressão para  $G_P$  pode ser escrita:

$$G_P = \left( \frac{1}{A^*} \int_0^1 \frac{U_{av}(Y)}{G_P} (\xi Y + \eta) dY \right)^{-1} \quad (20)$$

onde  $A^*$  é a área adimensional, sendo dada por:

$$A^* = \frac{A_x}{ab} = \frac{1 + \eta}{2} \quad (21)$$

Com o  $G_P$  calculado, o fator de fricção é rapidamente obtido da Eq. (11). Assim, encontra-se uma expressão dependente das relações geométricas ( $K$  e  $\psi$ ) e dos parâmetros que dependem do tipo de aproximação ( $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ).

#### 4. ESCOAMENTO EM CAMADA LIMITE SOBRE PLACA PLANA

Agora, considera-se o problema de escoamento laminar sobre uma placa plana. O escoamento é descrito pelas tradicionais equações de camada limite. Para utilizar a Técnica das Equações Integrais Acopladas, a solução integral para camada limite é utilizada (Bejan, 1995; Kays *et al.*, 2004). Esta solução fornece a seguinte expressão para o cálculo do fator de atrito:

$$C_f = c_f \text{Re}_x^{1/2} \quad (22)$$

onde  $c_f$  é um coeficiente numérico calculado a partir da equação:

$$c_f = \sqrt{2 \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \int_0^1 (U(\xi) - U^2(\xi)) d\xi} \quad (23)$$

onde a velocidade adimensional e a coordenada vertical adimensional são definidas por:

$$\xi = \frac{y}{\delta}, \quad U = \frac{u}{U_\infty}, \quad (24)$$

onde  $\delta$  é a espessura de camada limite.

A metodologia tradicional para a solução integral consiste em escolher uma forma funcional para o perfil de velocidade e calcular  $c_f$  da Eq. (22). Formas polinomiais e senoidais são utilizadas, e escolhe-se uma forma para  $U$  que satisfaça as condições:

$$U(\xi = 0) = 0, \quad U(\xi = 1) = 1, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = 0 \quad (25)$$

Todavia, condições de contorno adicionais podem ser obtidas a partir das equações de camada limite, avaliada em  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$ . Por exemplo, é fácil mostrar que a segunda derivada em relação à coordenada vertical é dada por:

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=1} = 0 \quad (26)$$

Estas condições são utilizadas para escolher a forma funcional de  $U$ .

##### 4.1 Aproximação pela Técnica das Equações Integrais Acopladas

De maneira diferente da tradicionalmente utilizada em soluções integrais, a Técnica das Equações Integrais Acopladas permite que a derivada e integrais abaixo sejam calculadas através de aproximações de Hermite:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}, \quad \int_0^1 U(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad \int_0^1 U^2(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Uma vez que estas integrais são calculadas, o coeficiente  $c_f$  é calculado diretamente da Eq. (22).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 Escoamento em dutos de geometria irregular

Os resultados para dutos de seção transversal trapezoidal são apresentados na Tab. (1), para vários ângulos e razões de aspecto, usando todas as quatro alternativas de aproximação. Com o objetivo de analisar o duto de perfil trapezoidal,

soluções exatas usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (Aparecido, 1988) foram usadas para comparações. É observado que para a primeira alternativa de aproximação (casos 1 e 3), a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$  conduz a melhores resultados que  $H_{0,0}/H_{0,0}$ . No entanto, um efeito oposto é observado para a segunda alternativa de aproximação (casos 2 e 4), com  $H_{0,0}/H_{0,0}$  superando  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . Uma outra observação deve ser feita com relação à alternativa de aproximação. Pode ser observado que o caso 1 apresenta melhores resultados para ângulos menores do que o caso 2, e este comportamento se inverte para ângulos maiores. O mesmo pode ser observado quando comparamos os casos 3 e 4.

Tabela 1. Fator de fricção em dutos trapezoidais.

	$K$	caso 1		caso 2		caso 3		caso 4		GITT
		$f$ Re	$\varepsilon(\%)$							
$\psi = 85^\circ$	0.01	23.7619	0.2	23.7615	0.2	23.7617	0.2	23.7627	0.2	23.8023
	0.10	21.8568	3	21.8133	3	21.8351	3	21.9287	4	21.1842
	0.25	19.4607	6	19.2267	5	19.3437	6	19.8378	8	18.2987
	0.50	16.9604	8	16.2152	3	16.5879	6	18.0678	15	15.6759
	0.75	15.6248	7	14.2595	2	14.9425	3	17.4199	20	14.5763
	1.00	14.9778	5	12.9652	9	13.9726	2	17.2490	21	14.2351
$\psi = 75^\circ$	0.01	23.7548	0.2	23.7543	0.2	23.7545	0.2	23.7544	0.2	23.7908
	0.10	21.8147	3	21.7694	3	21.7920	3	21.7797	3	21.1389
	0.25	19.4312	6	19.1935	5	19.3124	5	19.2473	5	18.3152
	0.50	17.0078	8	16.2765	3	16.6423	5	16.4396	4	15.8047
	0.75	15.7265	7	14.4223	2	15.0748	3	14.7069	0.1	14.6971
	1.00	15.0856	6	13.2039	7	14.1458	1	13.8887	3	14.2519
$\psi = 60^\circ$	0.01	23.7273	0.1	23.7267	0.1	23.7270	0.1	23.7267	0.1	23.7428
	0.10	21.6258	4	21.5716	3	21.5987	3	21.5716	3	20.8917
	0.25	19.1839	6	18.9133	5	19.0486	5	18.9133	5	18.0585
	0.50	16.8688	7	16.0872	3	16.4782	5	16.0872	3	15.6922
	0.75	15.7185	7	14.3883	2	15.0540	3	14.3883	2	14.6376
	1.00	15.1606	7	13.3094	6	14.2365	1	13.3094	6	14.1516
$\psi = 45^\circ$	0.01	23.6677	0.1	23.6667	0.1	23.6672	0.1	23.6667	0.1	23.6405
	0.10	21.2200	4	21.1435	4	21.1817	4	21.1403	4	20.3550
	0.25	18.6350	7	18.2798	5	18.4574	6	18.2650	5	17.4212
	0.50	16.4710	8	15.5285	2	16.0000	5	15.4898	2	15.2127
	0.75	15.5321	9	14.0201	2	14.7772	4	13.9590	2	14.2711
	1.00	15.1344	9	13.1213	5	14.1305	2	13.0410	6	13.8223
$\psi = 30^\circ$	0.01	23.5348	0.5	23.5330	0.5	23.5339	0.5	23.5329	0.5	23.4211
	0.10	20.3985	6	20.2619	5	20.3302	5	20.2543	5	19.3092
	0.25	17.6413	8	17.0784	5	17.3599	7	17.0473	5	16.2724
	0.50	15.8261	10	14.5117	1	15.1698	6	14.4402	1	14.3466
	0.75	15.2491	12	13.3087	2	14.2821	5	13.2045	3	13.6029
	1.00	15.1011	14	12.6674	4	13.8911	5	12.5381	5	13.2552
$\psi = 15^\circ$	0.01	23.1283	1	23.1216	1	23.1249	1	23.1212	1	22.7967
	0.10	18.5085	9	18.1293	6	18.3189	7	18.1063	6	17.0889
	0.25	16.0089	12	14.7984	3	15.4045	7	14.7258	3	14.3548
	0.50	15.2016	16	12.9625	1	14.0881	8	12.8304	2	13.0962
	0.75	15.2249	20	12.3470	3	13.8010	9	12.1788	4	12.6943
	1.00	15.3754	23	12.0920	3	13.7589	10	11.9011	5	12.5201
$\psi = 1^\circ$	0.01	17.3469	10	16.7007	6	17.0239	8	16.6607	6	15.7693
	0.10	15.6402	28	11.9973	2	13.8601	14	11.7794	3	12.1891
	0.25	16.0752	34	11.9489	1	14.0864	17	11.7014	3	12.0326
	0.50	16.1949	35	11.9768	0.2	14.1702	18	11.7233	2	12.0051
	0.75	16.2221	35	11.9873	0.1	14.1912	18	11.7327	2	12.0026
	1.00	16.2323	35	11.9919	0.1	14.1993	18	11.7370	2	12.0120

Para dutos triangulares, uma expressão para o fator de fricção, em função dos parâmetros que dependem do tipo de

aproximação ( $\gamma$ ) e do ângulo  $\psi$ , é obtida:

$$f Re = -\frac{4(3 - \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3 \cos(2\psi))(2 + \gamma_3 + \chi)}{(-2 + \gamma_3 + \chi)(1 + \cos^2(\psi))} \quad (28)$$

Com esta expressão, resultados são calculados para diferentes ângulos e são apresentados na Tab. (2), na qual estão incluídos os resultados apresentados por Shah and London (1978). Como pode ser visto, o caso 1 ( $H_{0,0}/H_{0,0}$ ), por se tratar de uma aproximação mais simples, não representa uma boa aproximação para perfis triangulares. Enquanto isso, o caso 3 ( $H_{1,1}/H_{0,0}$ ) apresenta uma boa precisão para uma faixa de ângulos entre 55° e 90°, perdendo precisão para ângulos menores. Para perfis triangulares que apresentem ângulos menores ( $\psi \leq 30^\circ$ ) uma boa alternativa é aproximar utilizando os casos 2 ( $H_{0,0}/H_{0,0}$ ) e 4 ( $H_{1,1}/H_{0,0}$ ) de aproximação.

Tabela 2. Fator de fricção em dutos triangulares.

$\psi$	caso 1		caso 2		caso 3		caso 4		(Shah and London, 1978)
	$f Re$	$\varepsilon(\%)$							
90°	16.000	33	8.000	33	12.000	0	12.000	0	12.000
85°	16.001	28	8.541	32	12.300	1	10.599	15	12.474
80°	16.004	25	9.016	30	12.560	2	10.106	21	12.822
75°	16.011	22	9.436	28	12.788	2	10.019	23	13.065
70°	16.022	21	9.809	26	12.990	2	10.103	24	13.222
65°	16.037	21	10.142	24	13.171	1	10.258	23	13.307
60°	16.055	20	10.440	21	13.333	1	10.440	22	13.333
55°	16.076	21	10.705	20	13.479	1	10.627	20	13.311
50°	16.098	22	10.941	17	13.609	3	10.809	18	13.248
45°	16.120	23	11.150	15	13.726	4	10.981	17	13.153
30°	16.184	27	11.629	9	13.997	10	11.401	11	12.744
15°	16.230	33	11.908	3	14.158	16	11.658	5	12.226
0°	16.246	35	12.000	0	14.211	18	11.745	2	12.000

Tanto para dutos triangulares quanto para dutos trapezoidais, observou-se um comportamento em que os casos pares (2 e 4) produzem melhores resultados que os casos ímpares (1 e 3) para ângulos pequenos, e o oposto foi observado para ângulos grandes. Em virtude deste comportamento, um fator de fricção combinando as duas aproximações de Hermite para cada caso pode ser obtido da seguinte maneira:

$$f Re^* = f_1 \left( \frac{\psi}{\pi} \right) + f_2 \left( 1 - \frac{\psi}{\pi} \right) \quad (29)$$

onde  $f_1$  representa as aproximações que utilizam a alternativa 1 de aproximação (casos 1 e 3) e  $f_2$  representa as aproximações que utilizam a alternativa 2 aproximação (casos 2 e 4). Os resultados anteriores são então recalculados e apresentados nas tabelas 3 e 4. Como pode-se observar, um comportamento mais homogêneo para o erro é obtido, praticamente eliminando-se as regiões com erros maiores que 8%. A única exceção, apresentado um erro máximo de 33% para um ângulo reto, foi a aproximação  $H_{0,0}$ . No entanto, ao comparar os valores calculados separadamente para os casos 1 e 2, pode-se observar que utilização da Eq. (29) reduz significativamente o erro.

## 5.2 Escoamento em camada limite sobre placa plana

Para analisar o desempenho da Técnica das Equações Integrais Acopladas para o cálculo do coeficiente de fricção no problema de camada limite, combinações com diferentes níveis de aproximação foram feitas. A Tabela (5) apresenta os valores calculados para  $c_f$  para diferentes aproximações. As linhas correspondem à aproximação utilizada para as integrais enquanto as colunas representam as aproximações utilizadas para a derivada  $\partial U/\partial \xi$ . Como pode-se observar, as combinações  $H_{4,4}/H_{4,4}$  e  $H_{5,5}/H_{6,6}$  são as que melhor se aproximam do resultado exato ( $c_f=0.664$ ).

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma metodologia aproximada, baseada na Técnica das Equações Integrais Acopladas, para o cálculo do coeficiente de fricção no escoamento em dutos irregulares e escoamento externo sobre placa plana, foi apresentada. Combinando os dois níveis de aproximação de Hermite ( $H_{0,0}$  e  $H_{1,1}$ ), obteve-se expressões analíticas para o fator de fricção para diferentes combinações de ângulos e raios de aspecto. Resultados para os quatro diferentes casos de aproximação são mostrados. Uma comparação com dados previamente encontrados na literatura é feita afim de certificar a

Tabela 3. Fator de fricção em dutos trapezoidais calculados com a Eq. (29).

	$K$	$H_{0,0}/H_{0,0}$		$H_{1,1}/H_{0,0}$		GITT
		$f Re^*$	$\varepsilon(\%)$	$f Re^*$	$\varepsilon(\%)$	
$\psi = 85^\circ$	0.01	23.7619	0.2	23.7618	0.2	23.8023
	0.10	21.8544	3	21.8403	3	21.1842
	0.25	19.4477	6	19.3712	6	18.2987
	0.50	16.9190	8	16.6701	6	15.6759
	0.75	15.5490	7	15.0801	4	14.5763
	1.00	14.8660	4	14.1546	0.6	14.2351
$\psi = 75^\circ$	0.01	23.7547	0.2	23.7545	0.2	23.7908
	0.10	21.8072	3	21.7900	3	21.1389
	0.25	19.3916	6	19.3016	5	18.3152
	0.50	16.8859	7	16.6085	5	15.8047
	0.75	15.5091	5	15.0135	2	14.6971
	1.00	14.7720	4	14.1030	1	14.2519
$\psi = 60^\circ$	0.01	23.7271	0.1	23.7269	0.1	23.7428
	0.10	21.6077	3	21.5897	3	20.8917
	0.25	19.0937	6	19.0035	5	18.0585
	0.50	16.6083	6	16.3479	4	15.6922
	0.75	15.2751	4	14.8321	1	14.6376
	1.00	14.5435	3	13.9275	2	14.1516
$\psi = 45^\circ$	0.01	23.6672	0.1	23.6670	0.1	23.6405
	0.10	21.1818	4	21.1610	4	20.3550
	0.25	18.4574	6	18.3612	5	17.4212
	0.50	15.9998	5	15.7449	4	15.2127
	0.75	14.7761	4	14.3681	0.7	14.2711
	1.00	14.1279	2	13.5858	2	13.8223
$\psi = 30^\circ$	0.01	23.5336	0.5	23.5332	0.5	23.4211
	0.10	20.3074	5	20.2796	5	19.3092
	0.25	17.2660	6	17.1515	5	16.2724
	0.50	14.9498	4	14.6834	2	14.3466
	0.75	13.9555	3	13.5637	0.3	13.6029
	1.00	13.4786	2	12.9891	2	13.2552
$\psi = 15^\circ$	0.01	23.1227	1	23.1218	1	22.7967
	0.10	18.1925	6	18.1417	6	17.0889
	0.25	15.0002	4	14.8389	3	14.3548
	0.50	13.3357	2	13.0400	0.4	13.0962
	0.75	12.8267	1	12.4492	2	12.6943
	1.00	12.6392	1	12.2107	2	12.5201
$\psi = 1^\circ$	0.01	16.7079	6	16.6647	6	15.7693
	0.10	12.0378	1	11.8025	3	12.1891
	0.25	11.9947	0.3	11.7279	2	12.0326
	0.50	12.0237	0.2	11.7505	2	12.0051
	0.75	12.0344	0.3	11.7600	2	12.0026
	1.00	12.0390	0.2	11.7644	2	12.0120

eficácia do método. Percebe-se que o erro não apresenta um comportamento homogêneo, e uma combinação entre as diferentes alternativas de aproximação para o mesmo nível de aproximação produz resultados muito satisfatórios numa ampla faixa de valores de razões de aspecto e ângulos.

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro fornecido pelo CNPq, FAPERJ e Universidade Federal Fluminense.

Tabela 4. Fator de fricção em dutos triangulares calculados com a Eq. (29).

$\psi$	$H_{0,0}/H_{0,0}$		$H_{1,1}/H_{0,0}$		Ref. Shah and London (1978)
	$f Re^*$	$\varepsilon(\%)$	$f Re^*$	$\varepsilon(\%)$	
90°	16.0000	33	12.0000	0	12.0000
85°	15.5866	25	12.2055	2	12.4740
80°	15.2276	19	12.2873	4	12.8220
75°	14.9152	14	12.3265	6	13.0650
70°	14.6413	11	12.3484	7	13.2220
65°	14.3995	8	12.3618	7	13.3070
60°	14.1833	6	12.3687	7	13.3330
55°	13.9873	5	12.3699	7	13.3110
50°	13.8060	4	12.3646	7	13.2480
45°	13.6350	4	12.3535	6	13.1530
30°	13.1473	3	12.2663	4	12.7440
15°	12.6283	3	12.0747	1	12.2260
0°	12.0000	0	11.7450	2	12.0000

Tabela 5. Fator de fricção em placas planas.

derivada	integrais								
	$H_{1,1}$	$H_{2,2}$	$H_{3,3}$	$H_{4,4}$	$H_{5,5}$	$H_{6,6}$	$H_{7,7}$	$H_{8,8}$	$H_{9,9}$
$H_{1,1}$	0.8165	0.6325	0.5345	0.4714	0.4264	0.3922	0.3651	0.3430	0.3244
$H_{2,2}$	0.8944	0.7303	0.6473	0.5963	0.5614	0.5359	0.5164	0.5010	0.3244
$H_{3,3}$	0.9258	0.7684	0.6901	0.6424	0.6102	0.5868	0.5690	0.5551	0.5438
$H_{4,4}$	0.9428	0.7888	0.7127	0.6667	0.6356	0.6132	0.5963	0.5830	0.5723
$H_{5,5}$	0.9535	0.8015	0.7267	0.6817	0.6513	0.6295	0.6130	0.6001	0.5896
$H_{6,6}$	0.9608	0.8102	0.7363	0.6918	0.6620	0.6405	0.6243	0.6116	0.6014
$H_{7,7}$	0.9661	0.8165	0.7432	0.6992	0.6697	0.6484	0.6325	0.6199	0.6099
$H_{8,8}$	0.9701	0.8213	0.7485	0.7048	0.6755	0.6545	0.6386	0.6262	0.6163
$H_{9,9}$	0.9733	0.8250	0.7526	0.7092	0.6801	0.6592	0.6435	0.6311	0.6212

## 8. REFERÊNCIAS

- Alves, L.S.B., Sphaier, L.A. and Cotta, R.M., 2000. "Error analysis of mixed lumped-differential formulations in diffusion problems". *Hybrid Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 409–435.
- Aparecido, J.B., 1988. *Transformada Integral Generalizada no escoamento Laminar e Transferência de Calor em Dutos Retilíneos de Geometria Arbitrária*. Ph.D. thesis, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brazil.
- Bejan, A., 1995. *Convection Heat Transfer*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2nd edition.
- Corrêa, E.J. and Cotta, R.M., 1998. "Enhanced lumped-differential formulations of diffusion problems". *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 22, No. 3, pp. 137–152.
- Dantas, L.B., Orlande, H.R.B. and Cotta, R.M., 2007. "Improved lumped-differential formulations and hybrid solution methods for drying in porous media". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 46, No. 9, pp. 878–889.
- Hermite, M.C., 1878. "Sur la formule d'interpolation de Lagrange". *J. Crelle*, Vol. 84.
- Kays, W.M., Crawford, M.E. and Weigand, B., 2004. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York, NY, 4th edition.
- Menning, J., Auerbach, T. and Hälg, W., 1983. "Two point Hermite approximation for the solution of linear initial value and boundary value problems". *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 39, pp. 199–224.
- Menning, J. and Özişik, M.N., 1985. "Coupled integral equation approach for solving melting or solidification". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, No. 8, pp. 1481–1485.
- Reis, M.C., Sphaier, L.A., Alves, L.S.B. and Cotta, R.M., 2009. "Improved lumped-differential formulations for laminar flow in polygonal cross-section ducts". In *Proc. of the 20th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*. Gramado, RS, Brazil.
- Ruperti, N.J., Cotta, R.M., Falkenberg, C.V. and Su, J., 2004. "Engineering analysis of ablative thermal protection for atmospheric reentry: Improved lumped formulations and symbolic-numerical computation". *Heat Transfer in Engineering*, Vol. 25, No. 6, pp. 101–111.

- Scofano Neto, F. and Cotta, R.M., 1993. "Improved hybrid lumped-differential formulation for double- pipe heat-exchanger analysis". *Journal of Heat Transfer (ASME)*, Vol. 115, No. 4, pp. 921–927.
- Shah, R.K. and London, A.L., 1978. "Laminar flow forced convection in ducts: A source book for compact heat exchanger analytical data". In T.F.I. Jr. and J.P. Hartnet, eds., *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York.
- Su, J., 2004. "Improved lumped models for transient radiative cooling of a spherical body". *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, No. 1, pp. 85–94.

## 9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# COUPLED INTEGRAL EQUATIONS APPROACH FOR OBTAINING FRICTION COEFFICIENTS IN LAMINAR DUCT AND BOUNDARY LAYER FLOWS

### **Abstract:**

*This paper is focused on the application of the so-called Coupled Integral Equations Approach (CIEA) for calculating the friction factor in laminar duct flow (with different cross-sections) and the drag coefficient in laminar boundary layer flow over a flat plate. With the duct flow problem the friction factor is calculated by solving an improved lumped-differential formulation obtained by applying the CIEA together with an averaging process of the momentum equations. On the other hand, for the laminar boundary layer flow, the classical integral solution for a flat plate is recalled; however a modification is considered: a functional form is not chosen for the velocity profile. Conversely, the CIEA is invoked to yield approximate relations between the average values and quantities at the boundaries. Numerical values for the friction coefficients are calculated and the results are compared with data in the literature, showing that the CIEA methodology is effective for both considered problems.*

**Keywords:** *Coupled Integral Equations Approach; Improved Lumped Formulations; Irregular Geometry Ducts; Boundary Layer Flow*