

APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE CONTROLE LPV NUM SISTEMA DE VIBRAÇÃO TORCIONAL ELETROMECAÂNICO

L. A. Rodrigues, larpig@gmail.com¹

J. F. Camino, camino@fem.unicamp.br¹

P. L. D. Peres, peres@dt.fee.unicamp.br²

¹Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica

²Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Resumo. *Este artigo propõe a aplicação de técnicas de controle robusto e por ganho escalonado para sistemas lineares discretos no tempo com parâmetros variantes (LPV) num sistema de vibração torcional eletromecânico. Os controladores por realimentação de estado são projetados de forma a minimizar um limitante superior do desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema LPV em malha fechada. O sistema de vibração torcional eletromecânico é composto por dois discos rotacionais ligados por uma mola torcional, em que um dos discos possui um freio eletromagnético com coeficiente de amortecimento variante no tempo. Simulações numéricas comprovam as vantagens dos controladores por ganho escalonado.*

Palavras-chave: *controle LPV, controle de vibração, desempenho \mathcal{H}_∞ , LMI, parâmetro escalonado.*

1 INTRODUÇÃO

As técnicas de análise e síntese de controladores baseadas na teoria de Lyapunov para sistemas lineares a parâmetros variantes (LPV) tem atraído, nos últimos anos, a atenção da comunidade acadêmica (Apkarian and Adams, 1998; Scherer, 2001). Isto decorre do fato de que os modelos LPV são úteis para descrever sistemas lineares cuja dinâmica muda em função de parâmetros variantes no tempo (De Caigny *et al.*, 2009), bem como para representar sistemas não-lineares em termos de uma família de modelos lineares (Rugh and Shamma, 2000).

Na teoria de controle LPV, a dinâmica do sistema é regida por parâmetros variantes no tempo, usualmente chamados de parâmetros escalonados. Estes parâmetros são geralmente desconhecidos, porém é comum considerar que possam ser medidos em tempo real (Shamma and Athans, 1991). Para este tipo de sistema, existem técnicas de projeto de controladores LPV por ganho escalonado que levam em consideração a taxa de variação dos parâmetros e são capazes de atingir um alto desempenho e garantir a estabilidade do sistema em malha fechada para todas as possíveis variações do parâmetro escalonado (Montagner *et al.*, 2005a; Amato *et al.*, 2005; Oliveira and Peres, 2009).

Em alguns casos, não é possível medir em tempo real o parâmetro escalonado, tornando-se impossível a implementação prática do controlador por ganho escalonado. Para essa classe de sistemas, é necessário projetar um controlador que não dependa explicitamente do parâmetro escalonado mas que seja robusto as suas possíveis variações. Esse tipo de controlador é denominado de controlador robusto (Leite and Peres, 2004; Oliveira and Peres, 2008).

Diversas técnicas de análise e síntese de controladores para sistemas LPV propostas na literatura são baseadas na existência de uma função de Lyapunov que seja capaz de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Uma grande parte desses problemas é formulada em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) (Boyd *et al.*, 1994). Para sistemas LPV, as LMIs são dependentes do parâmetro escalonado e devem ser satisfeitas para todo o espaço de valores que o parâmetro pode assumir, o que leva geralmente a um conjunto infinito de LMIs (problema de dimensão infinita) que não é tratável numericamente. Para contornar essa situação, a escolha da parametrização (ou estrutura) da matriz de Lyapunov é fundamental.

Vários são os trabalhos que assumem que a matriz de Lyapunov é constante e independente do parâmetro escalonado. Essa abordagem clássica, denominada de estabilidade quadrática (Kaminer *et al.*, 1993; Bernussou *et al.*, 1989; Montagner *et al.*, 2005b), produz um conjunto finito de LMIs que é geralmente conservador para aplicações práticas, pois não leva em consideração a taxa de variação do parâmetro escalonado, permitindo assim variações arbitrariamente rápidas. Para diminuir o conservadorismo associado à estabilidade quadrática, os seguintes trabalhos propuseram o uso de funções de Lyapunov dependentes do parâmetro escalonado: a dependência seccional foi tratada em (Leite and Peres, 2004; Amato *et al.*, 2005); a dependência afim em (Oliveira and Peres, 2008; De Caigny *et al.*, 2008; Rodrigues *et al.*, 2009); uma dependência polinomial foi apresentada em (Montagner *et al.*, 2009; De Caigny *et al.*, 2010) e a dependência de múltiplos instante de tempo (path dependent) foi investigada em (Lee, 2006; Lee and Dullerud, 2006; Oliveira and Peres, 2009; Rodrigues *et al.*, 2010).

O presente trabalho tem por objetivo comprovar as vantagens dos controladores que levam em consideração os parâmetros escalonados. Com esta finalidade, foram comparados os desempenhos \mathcal{H}_∞ de controladores de realimentação de estados robustos e por ganho escalonado em um modelo LPV de um sistema de vibração torcional eletromecânico composto por dois discos rotacionais ligados por uma mola torcional, em que um dos discos possui um freio eletromagnético com coeficiente de amortecimento variante no tempo. As técnicas de controle empregadas (Rodrigues *et al.*, 2009) fornecem condições em termos de LMIs para análise e síntese de controladores \mathcal{H}_∞ para sistemas LPV politópicos discretos no tempo com taxa de variação limitada. Simulações numéricas comprovam a eficácia dos controladores por ganho escalonado.

2 MODELAGEM DO SISTEMA DE VIBRAÇÃO TORCIONAL ELETROMECHANICO

Esta seção apresenta um modelo LPV discreto no tempo, em função dos parâmetros escalonados, que representa a dinâmica do sistema de vibração torcional eletromecânico apresentado na Figura 1(a). Este sistema é formado por dois discos rotacionais ligados por uma mola torcional, em que um dos discos possui um freio eletromagnético.

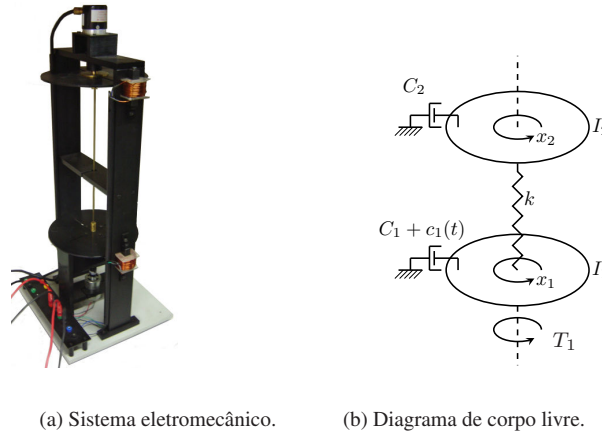


Figura 1. Sistema de vibração torcional eletromecânico.

No diagrama de corpo livre do sistema, descrito na figura 1(b), os discos são representados por seus momentos de inércia I_1 e I_2 , a mola torcional pela rigidez k , o amortecimento entre cada disco e o referencial fixo pelas constantes de amortecimento C_1 e C_2 , e o freio eletromagnético pelo coeficiente variante no tempo $c_1(t)$.

Representando o deslocamento angular do disco 1 por $\theta_1(t)$, do disco 2 por $\theta_2(t)$ e o torque de entrada aplicado no disco 1 por $T_1(t)$, as equações de movimento do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1(t) + (C_1 + c_1(t)) \dot{\theta}_1(t) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) &= T_1(t) + w(t), \\ I_2 \ddot{\theta}_2(t) + C_2 \dot{\theta}_2(t) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

com $w(t)$ uma entrada exógena de ruído.

Definindo o vetor $\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t)]'$, o sistema (1) pode ser escrito como uma equação diferencial ordinária com coeficientes variantes no tempo:

$$J \ddot{\theta}(t) + C(t) \dot{\theta}(t) + K \theta(t) = T(t) + W(t),$$

com

$$J = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} C_1 + c_1(t) & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, T(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } W(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde J é a matriz de inércia, $C(t)$ é a matriz de amortecimento e K é a matriz de rigidez.

Os valores numéricos, retirados de De Caigny *et al.* (2009), são: momentos de inércia $I_1 = 5.4625 \times 10^{-5}$ e $I_2 = 5.4088 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$; rigidez da mola torcional $K = 0.0256 \text{ Nm/rad}$; fricção viscosa entre cada disco e o referencial fixo $C_1 = 3.2223 \times 10^{-4}$ e $C_2 = 5.1921 \times 10^{-4} \text{ Nms/rad}$. Neste trabalho, assume-se que o freio eletromagnético atua no intervalo $0 \leq c_1(t) \leq 1$ com taxa máxima de variação dada por $\dot{c}_1(t) < 1$.

Escolhendo-se as variáveis de estado como $x_1(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}_1$ e $x_3(t) = \dot{\theta}_2$, o sistema (1) tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -468.6499 & \frac{-0.00032+c_1(t)}{0.000054} & 0 \\ 473.3028 & 0 & -9.5994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 18307 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 18307 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (2)$$

onde a entrada de controle $u(t)$ é definida como sendo o torque $T_1(t)$ aplicado no disco 1. Observe que este é um modelo contínuo afim no parâmetro variante $c_1(t)$. No entanto, como as técnicas de análise e síntese de controladores LPV apresentadas em Rodrigues *et al.* (2009) aplicam-se apenas para sistemas discretos, é necessário discretizar a equação (2).

2.1 Discretização do Modelo LPV

Utilizando o método da aproximação por diferenças finitas, obtém-se o seguinte modelo LPV discreto

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & -t_s \\ -468.6499t_s & 1 - \frac{t_s(0.00032+c_1[t_s k])}{0.000054} & 0 \\ 473.3028t_s & 0 & 1 - 9.5994t_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 18307t_s \\ 0 \end{bmatrix} w[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 18307t_s \\ 0 \end{bmatrix} u[k], \quad (3)$$

onde t_s é a taxa de amostragem em segundos. Escolhendo-se apropriadamente o valor dessa taxa de amostragem, o modelo LPV discreto (3) representará de forma satisfatória o sistema contínuo (2).

Neste trabalho, o valor adotado para t_s é obtido através de simulações numéricas, de modo que, para uma entrada em degrau unitário ($u(t) = 1$), o erro $e[k]$ definido por

$$e[k] = x(t) - x[k], \quad t = t_s k,$$

seja suficientemente pequeno. Estas simulações foram efetuadas assumindo-se: condição inicial nula, o ruído $w(t)$ é um sinal aleatório limitado por $|w(t)| \leq 10^{-3}$ e o coeficiente variante no tempo $c_1(t)$ é dado por

$$c_1(t) = \sin^2(t). \quad (4)$$

Note que é possível utilizar qualquer função $c_1(t)$ tal que $0 \leq c_1(t) \leq 1$ e $\dot{c}_1(t) < 1$.

Um valor satisfatório determinado através das simulações para a taxa de amostragem foi $t_s = 10^{-4}$. Os estados e o erro $e[k]$ para o sistema contínuo e o discreto, sujeitos à entrada em degrau, estão apresentados respectivamente na Figura 2 e na Figura 3.

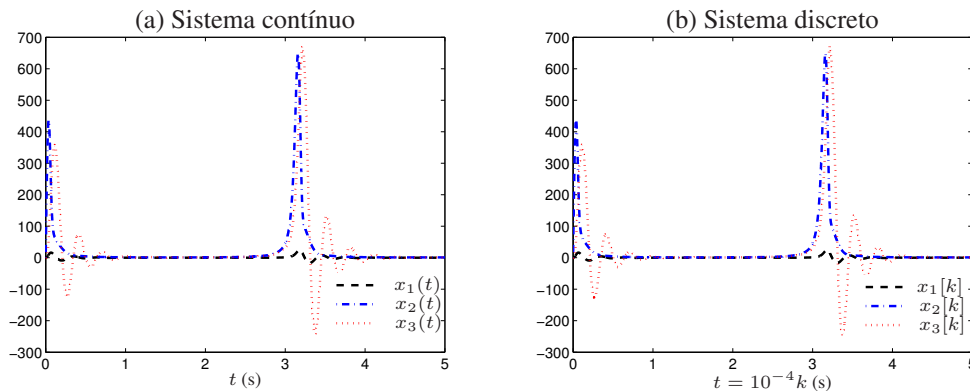


Figura 2. Resposta ao degrau unitário: (a) sistema contínuo; (b) sistema discreto com $t_s = 10^{-4}$.

Observe que para a taxa de amostragem $t_s = 10^{-4}$, o valor do erro $e[k]$ está abaixo de 1% do valor de $x(t)$. Assim, pode-se concluir que o modelo discreto (3), com $t_s \leq 10^{-4}$, representa de forma satisfatória o modelo contínuo (2).

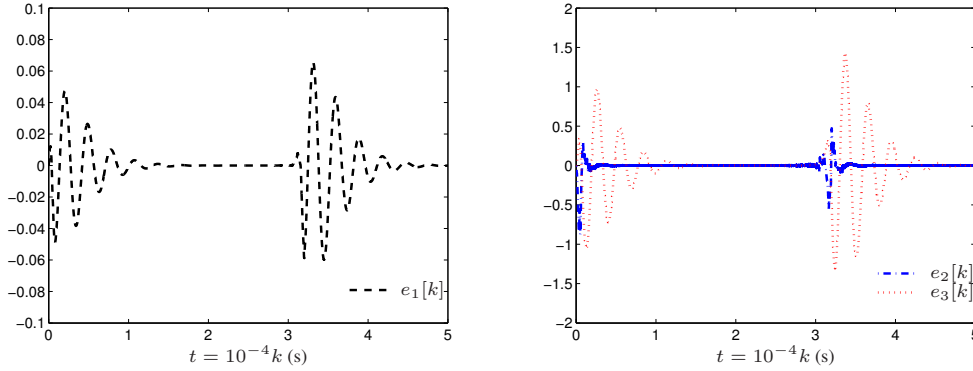
2.2 Modelo LPV Politópico

Para que se possa aplicar as técnicas propostas em Rodrigues *et al.* (2009), é necessário descrever o sistema LPV na forma politópica.

Definindo-se o vetor de saída do sistema $z[k]$ como a diferença entre as velocidades dos discos, ou seja $z[k] = x_2[k] - x_3[k]$, o sistema discreto (3) tem a seguinte representação¹ no espaço de estado:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A(c_1[k])x[k] + B_w(c_1[k])w[k] + B_u(c_1[k])u[k], \\ z[k] &= C_z(c_1[k])x[k], \end{aligned} \quad (5)$$

¹Para simplificar a notação, ao invés de se escrever $t_s k$ para indicar a amostragem, escreve-se apenas k .


 Figura 3. Resposta ao degrau unitário do Erro $e[k]$ com $t_s = 10^{-4}$.

com

$$A(c_1[k]) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0469 & 0.9994 - 1.8307c_1[k] & 0 \\ 0.0474 & 0 & 0.9990 \end{bmatrix}, \quad B_w(c_1[k]) = B_u(c_1[k]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8307 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z(c_1[k]) = [0 \quad 1 \quad -1].$$

Note que a matriz $A(c_1[k])$ pode ser reescrita na forma

$$A(c_1[k]) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 c_1[k],$$

com

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0469 & 0.9994 & 0 \\ 0.0473 & 0 & 0.9990 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.8307 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente como

$$A(c_1[k]) = \bar{A}_0(1 - c_1[k]) + (\bar{A}_0 + \bar{A}_1)c_1[k].$$

Definindo-se $A_1 = \bar{A}_0$, $A_2 = \bar{A}_0 + \bar{A}_1$, $\alpha_1[k] = 1 - c_1[k]$ e $\alpha_2[k] = c_1[k]$ obtém-se finalmente

$$A(c_1[k]) = A(\alpha[k]) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i[k] A_i, \quad \alpha[k] = (\alpha_1[k], \alpha_2[k]) \in \Lambda_2, \quad (6)$$

com o conjunto Λ_2 dado por

$$\Lambda_2 = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^2 \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, 2 \right\}.$$

De forma análoga, todas as matrizes do sistema (5) podem ser escritas em função do parâmetro escalonado $\alpha[k]$:

$$(A, B_u, B_w, C_z, D_u, D_w)(\alpha[k]) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i[k] (A, B_u, B_w, C_z, D_u, D_w)_i, \quad (7)$$

com os vértices dados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0469 & 0.9994 & 0 \\ 0.0473 & 0 & 0.9990 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0469 & -0.8313 & 0 \\ 0.0473 & 0 & 0.9990 \end{bmatrix}, \quad B_{w,1} = B_{w,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8307 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$B_{u,1} = B_{u,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8307 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{z,1} = C_{z,2} = [0 \quad 1 \quad -1].$$

2.2.1 Taxa de Variação do Parâmetro Escalonado

A taxa de variação do parâmetro $\alpha[k]$ é definida por

$$\Delta\alpha_i[k] \triangleq \alpha_i[k+1] - \alpha_i[k], \quad i = 1, 2,$$

substituindo a valor de $\alpha[k]$ definido na seção 2.2, tem-se que a taxa de variação $\Delta\alpha_i[k]$ satisfaz

$$|\Delta\alpha_i[k]| = |c_1[ts(k+1)] - c_1[tsk]| \leq b, \quad b = ts,$$

uma vez que se $\dot{c}(t) < 1$, pelo método das diferenças finitas, tem-se

$$\frac{|c_1[ts(k+1)] - c_1[tsk]|}{t_s} = \dot{c}(t) < 1.$$

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Esta seção apresenta o desempenho dos controladores \mathcal{H}_∞ robustos e por ganho escalonado projetados para o sistema de vibração torcional eletromecânico.

Como a dinâmica do sistema politópico varia em função do parâmetro escalonado $\alpha[k]$, entre $[0, 1]$, as matrizes do sistema variam entre os vértices $(A, B_u, B_w, C_z)_1$ para $\alpha_1[k] = 0$ e $(A, B_u, B_w, C_z)_2$ para $\alpha_1[k] = 1$. O efeito desta variação pode ser visto na Figura 4, que apresenta o diagrama de bode de 20 sistemas LTI locais, obtidos fixando-se 20 valores do parâmetro escalonado $\alpha[k]$.

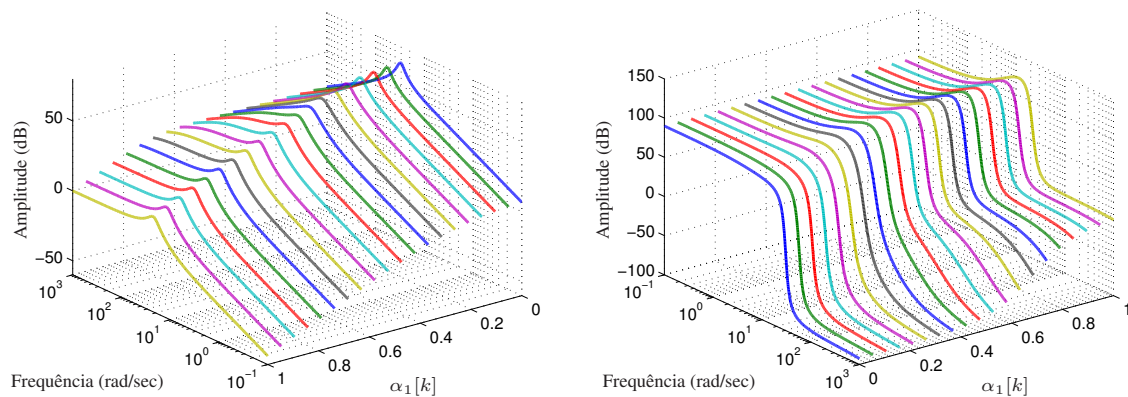


Figura 4. Diagrama de Bode de 20 sistemas LTI locais como função de $\alpha[k]$.

A Tabela 1 apresenta a norma \mathcal{H}_∞ e o máximo valor absoluto dos autovalores da matriz A_i para os sistemas LTI locais calculados nos vértices do politopo, ou seja, para $(A, B_u, B_w, C_z)_1$ e $(A, B_u, B_w, C_z)_2$. Observe que existe uma diferença significativa entre a norma \mathcal{H}_∞ desses dois sistemas.

Tabela 1. Análise de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI locais.

Vértice	$\max \lambda(A_i) $	\mathcal{H}_∞
$(A, B_u, B_w, C_z)_1$	0.9995	10.848
$(A, B_u, B_w, C_z)_2$	0.9996	2416.9

É importante salientar que o valor máximo da norma \mathcal{H}_∞ obtido a partir dos sistemas LTI locais não é um limitante superior para o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema LPV. Um limitante para esse desempenho pode ser determinado aplicando-se a técnica de análise (Teorema 4) apresentada em Rodrigues *et al.* (2009). A Figura 5 apresenta o valor obtido para este limitante, dado por $\gamma = 3338$, e a magnitude da resposta em frequência dos 20 sistemas LTI locais.

3.1 Controle por Ganho Escalonado

Nesta seção, é determinada uma lei de controle $u[k] = K_{gs}(\alpha[k])x[k]$ de realimentação de estado dependente do parâmetro escalonado que estabiliza o sistema LPV (5) e minimiza um limitante superior do desempenho \mathcal{H}_∞ .

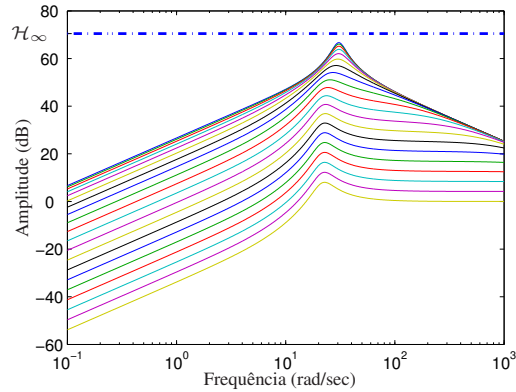


Figura 5. Diagrama de Bode de 20 sistemas LTI locais como função de $\alpha[k]$ e o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema LPV (5).

Utilizando o Teorema 7, apresentado em Rodrigues *et al.* (2009), encontra-se o seguinte ganho de realimentação de estados escalonado

$$K_{gs}(\alpha[k]) = \alpha_1[k] [0.0442 \quad 0.4541 \quad 0.5458] + \alpha_2[k] [0.0442 \quad -0.5459 \quad 0.5458],$$

que garante que o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_{mf}(\alpha[k])x[k] + B_w(\alpha[k])w[k], \\ z[k] &= C_{mf}(\alpha[k])x[k] + D_w(\alpha[k])w[k], \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A_{mf}(\alpha[k]) &= A(\alpha[k]) + B_u(\alpha[k])K_{gs}(\alpha[k]), \\ C_{mf}(\alpha[k]) &= C_z(\alpha[k]) + D_u(\alpha[k])K_{gs}(\alpha[k]), \end{aligned}$$

seja exponencialmente estável com um limitante superior do desempenho \mathcal{H}_∞ dado por

$$\gamma = 1.8307.$$

A Figura 6(a) e a Figura 6(b) apresentam respectivamente a magnitude das Funções de Resposta em Frequência para os 20 sistemas LTI locais em malha fechada, usando o ganho escalonado, e em malha aberta. Os 20 sistemas em malha fechada foram praticamente idênticos.

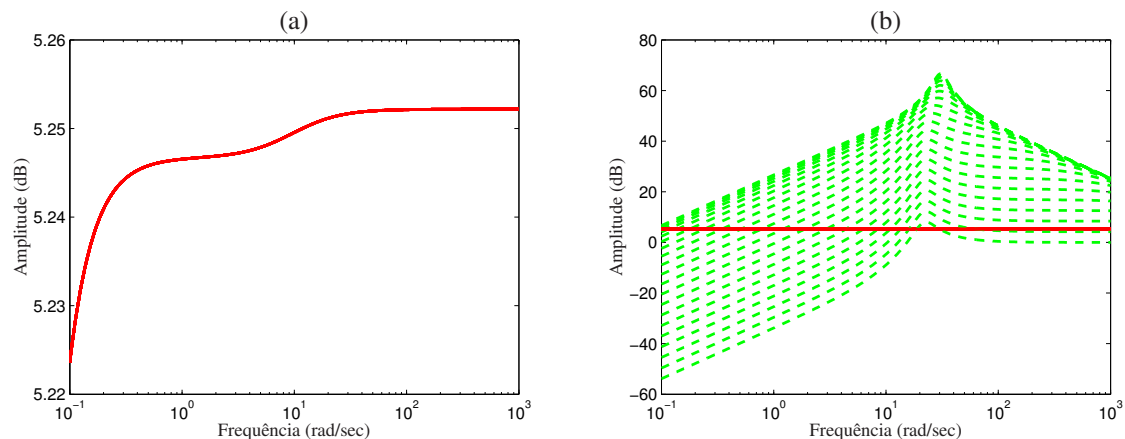


Figura 6. Diagrama de Bode de 20 sistemas LTI locais obtidos como função de $\alpha[k]$ obtidos a partir do sistema: (a) em malha fechada; (b) em malha aberta (tracejado) e em malha fechada (contínuo).

A análise de estabilidade e o desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI locais $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ obtidos a partir de cada vértice do politopo do sistema LPV usando o ganho escalonado $K_{gs}(\alpha[k])$ estão apresentados na Tabela 2. Perceber-se que o ganho escalonado $K_{gs}(\alpha[k])$ garante a estabilidade dos sistemas LTI locais $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ em malha fechada e significativamente melhora o desempenho \mathcal{H}_∞ , fornecendo uma redução de 10.848 para 1.8307 no vértice 1, e de 2416.9 para também 1.8307 no vértice 2.

Tabela 2. Análise de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI obtidos a partir de cada vértice $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ do sistema LPV usando o ganho escalonado $K_{gs}(\alpha[k])$.

Vértice	$\max \lambda(A_{m,f}) $	\mathcal{H}_∞
$(A, B_u, B_w, C_z)_1$	0.9999	1.8307
$(A, B_u, B_w, C_z)_2$	0.9999	1.8307

3.2 Controle Robusto

Nesta seção, é determinado para o sistema LPV (5) uma lei de controle robusta $u[k] = K_r x[k]$ de realimentação de estado que estabiliza o sistema em malha fechada e minimiza um limitante superior para o desempenho \mathcal{H}_∞ .

Utilizando o Teorema 7 apresentado em Rodrigues *et al.* (2009) o ganho de realimentação de estados robusto é dado por

$$K_r = [-1.9780 \quad -0.0460 \quad 0.0643],$$

Este ganho garante que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável e possui desempenho \mathcal{H}_∞ limitado por

$$\gamma = 21.6243$$

A Figura 7(a) e a Figura 7(b) apresentam respectivamente a magnitude das Funções de Resposta em Frequência para os 20 sistemas LTI locais em malha fechada, usando o ganho robusto, e em malha aberta. Percebe-se uma redução significativa na magnitude dos diagramas de Bode para os sistemas em malha fechada quando comparados aos dos sistemas em malha aberta.

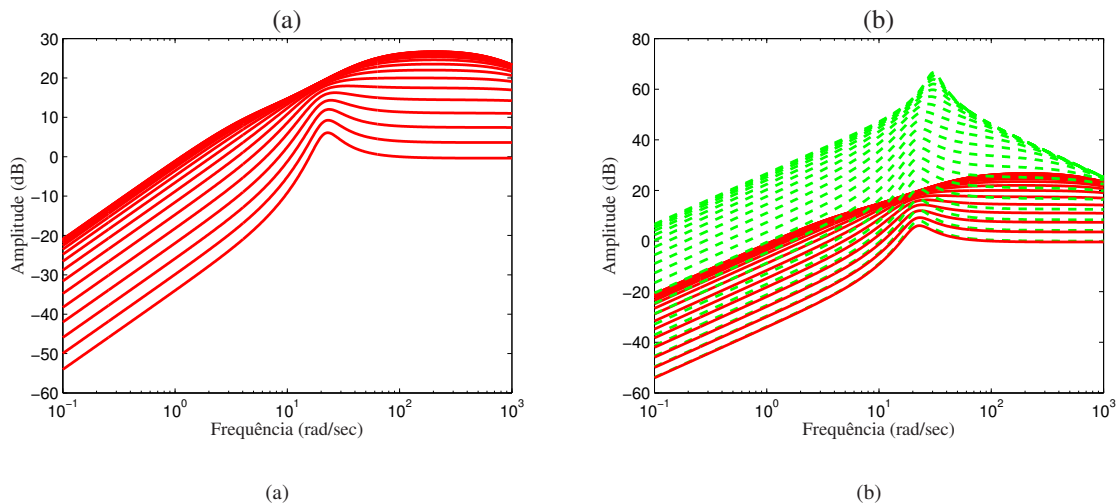


Figura 7. Diagrama de Bode de 20 sistemas LTI locais obtidos como função de $\alpha[k]$ obtidos a partir do sistema: (a) em malha fechada; (b) em malha aberta (tracejado) e em malha fechada (contínuo).

A análise de estabilidade e o desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI locais $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ obtidos a partir de cada vértice do polítopo do sistema LPV usando o ganho robusto K_r estão apresentados na Tabela 3. Com relação ao sistema em malha fechada, percebe-se que houve uma redução significativa nos valores dos limitantes superiores do desempenho \mathcal{H}_∞ usando o controlador robusto, entretanto, comparando com o controlador escalonado $K_{gs}(\alpha[k])$ o desempenho foi inferior, pois forneceu um limitante quase 11 vezes maior que o obtido pelo controlador escalonado.

Tabela 3. Análise de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI obtidos a partir de cada vértice $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ do sistema LPV usando o ganho robusto K_r .

Vértice	$\max \lambda(A_{m,f}) $	\mathcal{H}_∞
$(A, B_u, B_w, C_z)_1$	0.9994	21.5963
$(A, B_u, B_w, C_z)_2$	0.9995	21.5039

3.3 Controle LTI

Agora será determinado uma lei de controle $u[k] = K_n x[k]$ de realimentação de estados que estabiliza e minimiza o desempenho \mathcal{H}_∞ de um sistema LTI local, que está centrado entre os dois vértices do sistema LPV (5), chamado de sistema nominal.

Este sistema nominal é obtido fixando-se o valor do parâmetro escalonado $\alpha[k]$ para $c_1[k] = 0.5$. O sistema é dado por

$$\begin{aligned} x[k+1] &= (0.5A_1 + 0.5A_2)x[k] + B_{w,1}w[k] + B_{u,1}u[k], \\ z[k] &= C_{z,1}x[k]. \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizando-se técnicas clássicas de projeto de controladores LTI (Zhou *et al.*, 1996), o seguinte ganho de realimentação de estado foi determinado:

$$K_n = [0.0504 \quad -0.0459 \quad 0.5457],$$

Este ganho garante que o sistema nominal em malha fechada é estável com uma norma \mathcal{H}_∞ dada por

$$\mathcal{H}_\infty = 1.8307.$$

O ganho K_n projetado para sistema nominal (9) apresentou o mesmo desempenho \mathcal{H}_∞ obtido pelo controlador escalonado, no entanto este controlador não garante a estabilidade e desempenho do sistema LPV (5).

A Figura 8(a) e a Figura 8(b) apresentam respectivamente a magnitude das Funções de Resposta em Frequência para os 20 sistemas LTI locais em malha fechada, usando o ganho K_n , e em malha aberta.

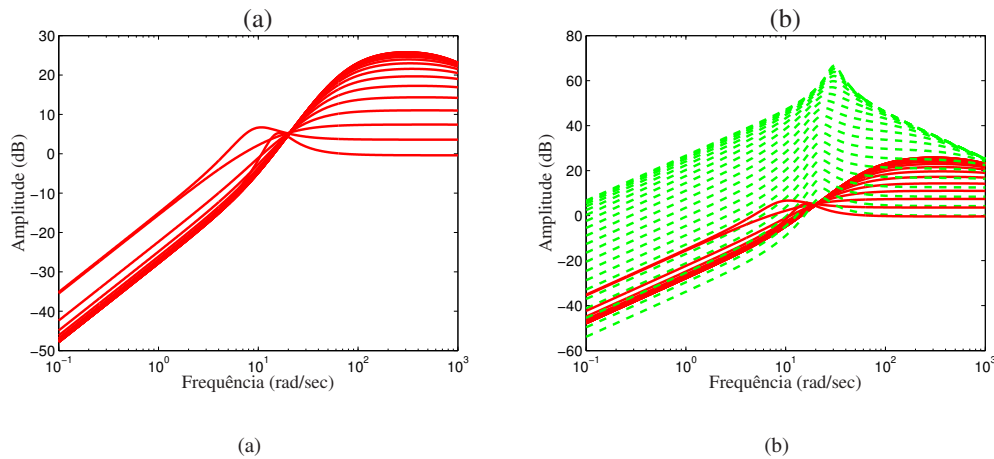


Figura 8. Diagrama de Bode de 20 sistemas LTI locais obtidos como função de $\alpha[k]$ obtidos a partir do sistema: (a) em malha fechada; (b) em malha aberta (tracejado) e em malha fechada (contínuo).

A análise de estabilidade e a norma \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI locais $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ em malha fechada usando o ganho robusto K_r , estão apresentados na Tabela 4. Percebe-se que o sistema LTI local $(A, B_u, B_w, C_z)_2$ em malha fechada é instável.

Tabela 4. Análise de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_∞ dos sistemas LTI obtidos a partir de cada vértice $(A, B_u, B_w, C_z)_i$ do sistema LPV usando o ganho LTI K_n .

Vértice	$\max \lambda(A_{mf}) $	\mathcal{H}_∞
$(A, B_u, B_w, C_z)_1$	0.9995	21.6219
$(A, B_u, B_w, C_z)_2$	1.0064	19.4790

4 CONCLUSÕES

As vantagens da técnica de controle \mathcal{H}_∞ de realimentação completa de estados por ganho escalonado para sistemas LPV discretos no tempo foram investigadas neste trabalho. Foram comparados os desempenhos \mathcal{H}_∞ de controladores por ganho escalonado e robusto em um sistema LPV que representa a dinâmica de um sistema de vibração torcional eletromecânico. Também foram analisados os desempenhos \mathcal{H}_∞ e a garantia de estabilidade desses controladores aplicados em

sistemas LTI obtidos a partir dos vértices do sistema LPV, para este caso foi projetado um terceiro controlador para um sistema LTI nominal entre os vértices do sistema LPV. Em todos os casos, o controlador escalonado $K_{gs}(\alpha[k])$ apresentou melhores resultados para o sistema LPV, porém para que este controlador seja implementado, é necessário que o parâmetro escalonado $\alpha[k]$ seja medido em tempo real. Quando isso não foi possível, um controlador robusto pode ser usado para garantir a estabilidade e o desempenho do sistema em manha fechada, porém a custa de um menor desempenho. Esta investigação pode ser estendida para análise de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_2 de sistemas LPV.

5 AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES Proc. 1755/2008 e pela FAPESP Proc. 09/03304-5.

6 REFERÊNCIAS

- Amato, F., Mattei, M. and Pironti, A., 2005. “Gain scheduled control for discrete-time systems depending on bounded rate parameters”. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 15, pp. 473–494.
- Apkarian, P. and Adams, R.J., 1998. “Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems”. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, Vol. 6, No. 1, pp. 21–32.
- Bernussou, J., Peres, P.L.D. and Geromel, J.C., 1989. “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”. *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 13, No. 1, pp. 65–72.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Vol. 15 of *Stud. Appl. Math.* SIAM, pub-SIAM:adr.
- De Caigny, J., Camino, J.F., Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D. and Swevers, J., 2008. “Gain-scheduled \mathcal{H}_∞ -control of discrete-time polytopic time-varying systems”. In *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*. Cancun, Mexico, pp. 3872–3877.
- De Caigny, J., Camino, J.F., Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D. and Swevers, J., 2010. “Multiobjective gain-scheduled dynamic output feedback for discrete-time LPV systems”. *Int. J. Robust Nonlinear Control*. Submitted.
- De Caigny, J., Camino, J.F. and Swevers, J., 2009. “Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems”. *Mech. Syst. Signal Pr.*, Vol. 23, No. 8, pp. 2395–2417.
- Kaminer, I., Khargonekar, P.P. and Rotea, M.A., 1993. “Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization”. *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp. 57–70.
- Lee, J.W., 2006. “Uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems”. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 51, No. 10, pp. 1714–1721.
- Lee, J.W. and Dullerud, G.E., 2006. “On uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems”. *Automatica*, Vol. 42, No. 2, pp. 205–218.
- Leite, V.J.S. and Peres, P.L.D., 2004. “Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems”. *Int. J. Control*, Vol. 77, No. 3, pp. 230–238.
- Montagner, V.F., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S. and Peres, P.L.D., 2005a. “Gain scheduled state feedback control of discrete-time systems with time-varying uncertainties: an LMI approach”. In *Proc. 44th IEEE Conf. Decision Control — Eur. Control Conf. 2005*. Seville, Spain, pp. 4305–4310.
- Montagner, V.F., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S. and Peres, P.L.D., 2005b. “LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control”. *IEE Proc. — Control Theory Appl.*, Vol. 152, No. 2, pp. 195–201.
- Montagner, V.F., Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D. and Bliman, P.A., 2009. “Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations”. *Int. J. Control*, Vol. 82, No. 6, pp. 1045–1059.
- Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D., 2008. “Robust stability analysis and control design for time-varying discrete-time polytopic systems with bounded parameter variation”. In *Amer. Control Conf.* Seattle, WA, USA, pp. 3094–3099.
- Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D., 2009. “Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design”. *Automatica*, Vol. 45, pp. 2620–2626.
- Rodrigues, L.A., Camino, J.F. and Peres, P.L.D., 2010. “Control designs for LPV systems using multi homogeneous polynomially parameter-dependent lyapunov functions”. In *Cong. Bras. de Automática*. Bonito, MS, Brazil. Submitted.
- Rodrigues, L.A., De Caigny, J., Camino, J.F. and Peres, P.L.D., 2009. “Gain-scheduled \mathcal{L}_2 -control of discrete-time polytopic time-varying systems”. In *Proc. Cong. Bras. Eng. Mec.* Gramado, Brazil, pp. 1–10.
- Rugh, W.J. and Shamma, J.S., 2000. “Research on gain scheduling”. *Automatica*, Vol. 36, No. 10, pp. 1401–1425.
- Scherer, C.W., 2001. “LPV control and full block multipliers”. *Automatica*, Vol. 37, No. 3, pp. 361–375.
- Shamma, J.S. and Athans, M., 1991. “Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants”. *Automatica*, Vol. 27, No. 3, pp. 559–564.
- Zhou, K., Doyle, J.C. and Glover, K., 1996. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

APÊNDICE

Esta seção apresenta de forma resumida os principais resultados (teoremas) apresentados em Rodrigues *et al.* (2009). Estes teoremas são expressos em termos de condições LMIs calculadas nos vértices do sistema LPV baseadas na existência de uma função de Lyapunov com dependência linear dos parâmetros escalonados, e podem ser usados para determinar um limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ de sistema LPV discretos e para síntese de controladores robusto e por ganho escalonado que minimizam o desempenho \mathcal{H}_∞ .

Análise de desempenho \mathcal{H}_∞ de sistemas LPV discretos

Teorema 1 (Teorema 4 em Rodrigues *et al.* (2009)) *Se existir matrizes positivas definidas P_i , para $i = 1, \dots, N$, tal que as seguintes LMIs² são satisfeitas*

$$\Phi_{il} = \begin{bmatrix} P_i + b\bar{P}_l & * & * & * \\ A'_i(P_i + b\bar{P}_l) & P_i & * & * \\ B'_{wi}(P_i + b\bar{P}_l) & \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} & * \\ \mathbf{0} & C_{zi} & D_{wi} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

com $\bar{P}_l = \sum_{m=1}^N \Gamma_l^{(m)} P_m$ for $l = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N$, e

$$\Phi_{ijl} = \begin{bmatrix} P_i + P_j + 2b\bar{P}_l & * & * & * \\ A'_i(P_j + b\bar{P}_l) + A'_j(P_i + b\bar{P}_l) & P_i + P_j & * & * \\ B'_{wi}(P_j + b\bar{P}_l) + B'_{wj}(P_i + b\bar{P}_l) & \mathbf{0} & 2\gamma^2\mathbf{I} & * \\ \mathbf{0} & C_{zi} + C_{zj} & D_{wi} + D_{wj} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

com $\bar{P}_l = \sum_{m=1}^N \Gamma_l^{(m)} P_m$ for $l = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = i+1, \dots, N$, então o sistema é exponencialmente estável, e tem desempenho \mathcal{H}_∞ limitado por γ .

Projeto de controladores de realimentação de estados \mathcal{H}_∞ por ganho escalonado

Teorema 2 (Teorema 7 em Rodrigues *et al.* (2009)) *Se existir matrizes positivas definidas P_i , matrizes G_i e Z_i para $i = 1, \dots, N$, tal que as seguintes LMIs são satisfeitas*

$$\Omega_{il} = \begin{bmatrix} P_i + b\bar{P}_l & * & * & * \\ G'_i A'_i + Z'_i B'_{ui} & G_i + G'_i - P_i & * & * \\ B'_{wi} & \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} & * \\ \mathbf{0} & C_{zi} G_i + D_{ui} Z_i & D_{wi} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0,$$

com $\bar{P}_l = \sum_{m=1}^N \Gamma_l^{(m)} P_m$ para $l = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N$, e

$$\Omega_{ijl} = \begin{bmatrix} P_i + P_j + 2b\bar{P}_l & * & * & * \\ G'_i A'_j + G'_j A'_i + Z'_i B'_{uj} + Z'_j B'_{ui} & G_i + G_j + G'_i + G'_j - P_i - P_j & * & * \\ B'_{wi} + B'_{wj} & \mathbf{0} & 2\gamma^2\mathbf{I} & * \\ \mathbf{0} & C_{zi} G_j + C_{zj} G_i + D_{ui} Z_j + D_{uj} Z_i & D_{wi} + D_{wj} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0,$$

com $\bar{P}_l = \sum_{m=1}^N \Gamma_l^{(m)} P_m$ para $l = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N-1$, $j = i+1, \dots, N$, então o ganho de realimentação de estados dependente de parâmetro $K(\alpha[k]) = Z(\alpha[k])G(\alpha[k])^{-1}$, com $Z(\alpha[k]) = \sum_{i=1}^N \alpha_i[k] Z_i$ e $G(\alpha[k]) = \sum_{i=1}^N \alpha_i[k] G_i$, garante que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável com desempenho \mathcal{H}_∞ limitado por γ .

6.1 Projeto de controladores de realimentação de estados \mathcal{H}_∞ robusto

Uma lei de controle de realimentação de estados robusta $u[k] = Kx[k]$ que minimiza o desempenho \mathcal{H}_∞ pode ser obtida usando-se o teorema 2 com $G_i = G$ e $Z_i = Z$ para todo $i = 1, \dots, N$.

²O símbolo * representa o bloco simétrico da matriz.