

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS DAS PENALIDADES E DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EMPREGADOS NO MÉTODO SEM MALHA DE GALERKIN

Lucas Silveira Campos, zaz1588@gmail.com
Dianne Magalhães Viana, diannemv@unb.br

¹Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Campus Darcy Ribeiro, Asa Norte, CEP 70910-900, Brasília DF

Resumo: *Os métodos sem malha têm sido propostos na literatura como uma alternativa ao método dos elementos finitos principalmente em problemas que apresentam grandes deformações, crescimento de trincas, mudança de fase, etc. O método sem malha de Galerkin (EFG) emprega o método dos mínimos quadrados móveis (MMQM) para aproximar a função que descreve uma determinada grandeza, por exemplo, o deslocamento, em um domínio discretizado por meio de um conjunto de pontos. As aproximações são construídas a partir de três componentes: função peso de suporte compacto, associada a cada ponto; uma base, geralmente polinomial; e um conjunto de coeficientes que dependem da posição. O critério do delta de Kronecker não é satisfeito pelas funções de forma do EFG; isto dificulta a imposição das condições de contorno essenciais. Várias técnicas foram desenvolvidas para a aplicação destas condições de contorno, incluindo os multiplicadores de Lagrange, métodos variacionais modificados, acoplamento com elementos finito e o método das penalidades. Neste trabalho é realizada uma análise comparativa entre métodos das penalidades e dos multiplicadores de Lagrange utilizados na aplicação das condições de contorno em problemas de elasticidade linear no que diz respeito à eficiência e à precisão do EFG. Estudos de casos 2D envolvendo uma viga de Timoshenko, uma aplicação de condições de contorno de Dirichlet e uma placa com furo são efetuados.*

Palavras-chave: *método sem malha de Galerkin; condições de contorno; método das penalidades.*

1. INTRODUÇÃO

Os métodos sem malha têm sido propostos na literatura como uma alternativa ao método dos elementos finitos principalmente em problemas que apresentam grandes deformações, crescimento de trincas, mudança de fase. Em particular, o método sem malha de Galerkin (EFG) emprega o método dos mínimos quadrados móveis (MMQM) para aproximar a função que descreve uma determinada grandeza, por exemplo, o deslocamento, em um domínio discretizado por meio de um conjunto de pontos. As aproximações são construídas a partir de três componentes: função peso de suporte compacto, associada a cada ponto; uma base, geralmente polinomial; e um conjunto de coeficientes que dependem da posição.

Mesmo com a extensiva pesquisa sobre os métodos sem malha alguns aspectos ainda não foram devidamente definidos e ainda necessitam de estudo. A imposição eficiente das condições de contorno no método sem malha de Galerkin (EFG) continua sendo motivo para discussão.

As funções de forma dos métodos sem malha não atendem às propriedades do delta de Kronecker, Ou seja, as funções de forma definem uma partição da unidade, no entanto, os valores da função de forma não são nulos em todas as outras partículas. Deste modo, para o EFG, as condições de contorno não podem ser aplicadas da mesma simples maneira como é realizada no método dos elementos finitos (MEF) (Liu, 2002).

Várias técnicas podem ser utilizadas para impor as condições de contorno nos métodos sem malha, como por exemplo, o método dos multiplicadores de Lagrange, o método das penalidades e, ainda, métodos que podem ser interpretados como uma modificação das funções de forma. Gosz e Liu (1996) introduzem um parâmetro de dilatação em cada nó que possibilita a imposição da propriedade do delta de Kroenecker na superfície restrita. Huerta e Fernández-Méndez (2000) apresentam um acoplamento do método sem malha com o MEF próximo da superfície restrita permitindo a imposição direta dos valores prescritos.

O método dos multiplicadores de Lagrange é o mais utilizado devido à facilidade de sua implementação em todos os tipos de problema. Este método adiciona novos graus de liberdade na solução do problema. A escolha do espaço de interpolação dos multiplicadores é de extrema importância no método, pois, para se obter uma boa solução deve-se

utilizar uma discretização rica. Porém, se a quantidade de novas variáveis se tornarem muito grande o sistema de equações se torna singular (Huerta e Fernández-Méndez 2004).

O método das penalidades depende somente da definição de um parâmetro. Para se conseguir uma boa precisão é necessário usar valores elevados deste parâmetro, o que também pode ocasionar mau condicionamento no sistema de equações.

Atualmente, os dois métodos mencionados são os mais utilizados e por isso serão estes os métodos analisados.

2. MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Para se solucionar problemas elásticos com o EFG, primeiro deve-se encontrar a forma fraca das equações de equilíbrio e das condições de contorno. A forma fraca da equação de equilíbrio elástico pode ser encontrada através do princípio dos trabalhos virtuais resultando em:

$$\int_V \bar{\epsilon}^t \tau dV = \int_V \bar{u}^t f_c dV + \int_S \bar{u}_s^t f_s dS \quad (1)$$

onde \bar{u} é o deslocamento virtual, $\bar{\epsilon}$ é deformação virtual correspondente, f_c são as forças de campo, f_s são as forças de superfície e V e S são o volume e a superfície do corpo em questão.

Para a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange utiliza-se a equação na forma fraca restringida, que pode ser escrita adicionando-se dois termos na equação na forma fraca por meio dos multiplicadores de Lagrange, o que resulta, segundo Liu (2002), em:

$$\int_V \delta \epsilon \cdot \sigma dV - \int_V f_c \cdot \delta u dV - \int_S f_s \cdot \delta u dS - \int_{S_r} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) dS - \int_{S_r} \lambda \cdot \delta u dS = 0 \quad (2)$$

onde S_r é a superfície restrita. Os dois últimos termos dessa equação são justamente as condições de contorno, inseridas pelos multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores de Lagrange, λ , podem ser expressos por:

$$\lambda(x) = N(s)\lambda, \quad (3)$$

$$\delta \lambda(x) = N(s)\delta \lambda, \quad (4)$$

onde N é um interpolador de Lagrange e s é um arco de comprimento ao longo do contorno. Substituindo as Eqs. 2, 3, 4 e as equações da função aproximação do método de Galerkin, recai-se no sistema:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ q \end{bmatrix}, \quad (5)$$

sendo K a matriz de rigidez, G a matriz de condição de contorno, u o vetor deslocamento nodal, λ os multiplicadores de Lagrange, f o vetor força e q o vetor que armazena as condições de contorno. Cada um desses termos pode ser escrito da forma:

$$K_{ij} = \int_V B_i^T C B_j dV, \quad (6)$$

$$G_{ik} = - \begin{bmatrix} -\phi_k & 0 \\ 0 & -\phi_k \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$f_i = \int_S \phi_i^t f_c dx + \phi_i^t f_s |S_{ri}, \quad (8)$$

$$q_i = -u_r. \quad (9)$$

sendo ϕ a função de forma utilizada pelo EFG e B a matriz das derivadas da função de forma.

Existem diversas possibilidades para a escolha do espaço de interpolação dos multiplicadores de Lagrange. Os principais são: interpolação com elementos finitos na camada restringida, restrição das funções usadas na interpolação ao longo da superfície restrita e o mais utilizado, o método da colocação. O método da colocação usa um conjunto de pontos que estão na superfície restrita e usa o delta de Dirac como função de forma (Huerta e Fernández-Méndez, 2004).

Este método em geral é facilmente aplicado aos mais diversos tipos de problemas. No entanto existem algumas desvantagens na sua utilização:

- A dimensão no sistema de equações sofre um aumento;

- Mesmo sendo a matriz gerada pelo EFG simétrica e positiva-definida, a matriz global, definida na Eq. 5, é simétrica, mas não é mais positiva definida;
 - Possibilidade de problemas de acurácia ou de um sistema singular.
- A escolha apropriada de um espaço de interpolação não é trivial para os métodos sem malha e pode ser um problema sério em casos particulares (Huerta e Fernández-Méndez 2004).

3. MÉTODO DAS PENALIDADES

A equação restringida na forma fraca para o método das penalidades é dada, segundo Liu (2002), por:

$$\int_V \delta \varepsilon \cdot \sigma dV - \int_V f_c \cdot \delta u dV - \int_S f_s \cdot \delta u dS - \int_{S_r} \delta u^t \cdot \alpha \cdot (u - \bar{u}) dS = 0, \quad (10)$$

onde α é o fator de penalidade. Este fator tem que ser grande o suficiente para se impor as condições de contorno com a acurácia desejada. A principal diferença entre os fatores de penalidade e os multiplicadores de Lagrange consiste no fator de penalidade ser uma constante, enquanto os multiplicadores são variáveis. Portanto, o sistema de equações proveniente do método das penalidades é mais simples,

$$[K] \cdot [u] = [f], \quad (11)$$

onde,

$$K_{IJ} = \int_V B_I^T C B_J dV - \alpha \int_{S_r} \phi_I \phi_J dS, \quad (12)$$

$$f_i = \int_V \phi_i f_c dV - \int_S \phi_i f_s dS - \alpha \int_{S_r} \phi_i \bar{u} dS \quad (13)$$

e não sofre um aumento no seu tamanho. Outra característica do método das penalidades é que a matriz do sistema é simétrica e positiva definida, o que não ocorre com os multiplicadores de Lagrange.

Uma possível dificuldade no uso do método das penalidades consiste na definição dos valores de α . Apesar de quanto maior este valor, o esperado seria que a solução se aproximasse da resposta exata, para valores muito elevados podem ocorrer problemas numéricos na solução do problema. Alguns valores são sugeridos na literatura (Liu, 2002), mas a faixa de valores para a qual o método funciona é muito ampla e a definição do fator em geral leva à solução do problema.

Huerta e Fernández-Méndez (2004) sugerem o método de Nitsche como possível substituto do método das penalidades. No método são adicionados alguns termos à equação restringida na forma fraca para o método das penalidades. Obtêm-se com isso uma forma fraca consistente na qual valores menores podem ser usados para se impor as condições de contorno, evitando-se a possibilidade de mau condicionamento da matriz. Uma dificuldade deste método consiste justamente na dedução da forma fraca para problemas específicos e na sua discretização.

Todas as equações apresentadas até este momento ainda se encontram na forma analítica, para se implementar estas equações deve-se usar técnicas de integração numérica. A quadratura de Gauss é o método mais utilizado na integração da forma fraca no EFG. E esta foi a técnica utilizada neste trabalho.

Para utilizar a quadratura de Gauss em domínios bidimensionais se torna necessário a partição do domínio em células de integração, o que gera obrigatoriamente uma malha de fundo. Existem outras técnicas de integração que não necessitam dessa malha de fundo, porém não serão tratadas neste trabalho.

4. ESTUDO DE CASO 1D

Para validação do código unidimensional foi utilizada uma barra engastada na extremidade esquerda com uma força distribuída trativa e não uniforme da forma $f(x) = x$. A barra possui comprimento, área e módulo de elasticidade unitários. A solução exata desse problema é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} \right). \quad (13)$$

Na Figura (1), verifica-se a compatibilidade da resposta com a solução analítica e pode-se observar a representação do problema em questão.

Mantendo-se uma distribuição nodal uniforme e um fator de escala igual a 2, o número de nós foi aumentado de 10 a 100 em intervalos de 10 unidades. Para cada quantidade de nós, encontrou-se o resultado do problema e mediu-se o tempo gasto na solução dos dois sistemas: um usando o método das penalidades e o outro, os multiplicadores de Lagrange.

Na Tabela (1) são apresentadas as medições de tempo para os dois métodos e a razão entre o tempo decorrido usando o método das penalidades e o tempo decorrido usando os multiplicadores de Lagrange.

Ainda na Tabela (1), observa-se que o método das penalidades é mais rápido que o método dos multiplicadores de Lagrange. Este fato já era esperado, já que o método das penalidades recai em uma equação com menos graus de liberdade e em uma matriz positiva e definida, o que possibilita a utilização de métodos de resolução mais simples e rápidos como o método dos gradientes conjugados ou a decomposição de Cholesky.

Na Tabela 2 é apresentado o erro da solução numérica. A medida de erro é feita utilizando-se a norma dada por:

$$\text{norma} = \sqrt{\sum_i (a_{\text{exato}} - a_{\text{numérico}})^2} \quad (14)$$

Para o cálculo do erro foi utilizado um fator de penalidade igual a 10^8 .

Na Tabela (2) observa-se que os erros provenientes dos dois métodos são muito parecidos. Destaca-se aqui que isto ocorre devido a escolha de um fator de penalidade adequado.

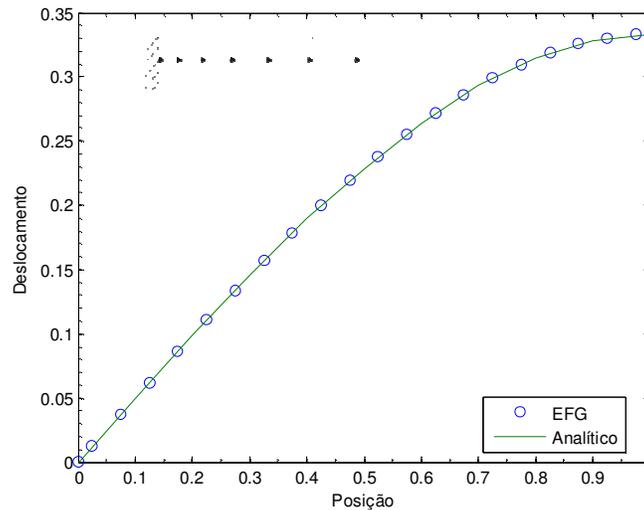


Figura 1. Comparação dos resultados analíticos e do EFG para o deslocamento.

Tabela 1. Tempo gasto na solução do sistema linear usando diferentes métodos de aplicação das condições de contorno.

Nº de nós	Método das Penalidades	Multiplicadores de Lagrange	Razão
11	3,7905e-005	6,487e-005	0,58433
21	6,2912e-005	9,9649e-005	0,63133
31	9,4979e-005	0,00014222	0,66782
41	0,00016063	0,00018731	0,85758
51	0,00021744	0,0002275	0,95579
61	0,00027132	0,00028543	0,95055
71	0,00034359	0,0004617	0,74417
81	0,00042826	0,00057298	0,74743
91	0,00052412	0,00069345	0,75581
101	0,00060524	0,00081997	0,73813

De modo a definir um valor adequado para o fator de penalidade, dois gráficos foram levantados usando-se 101 nós e variando-se o fator de penalidade. Na Figura (2a) é mostrada a norma do erro associada a diferentes valores fatores de penalidade. Nela, observa-se que para valores maiores de 10^6 , a norma do erro se mantém constante.

Tabela 2. Norma no erro do deslocamento encontrado usando diferentes métodos de aplicação das condições de contorno.

Nº de nós	Método das Penalidades	Multiplicadores de Lagrange	Razão
11	0,0011424	0,0011424	1
21	0,00034787	0,00034787	1
31	0,0001791	0,0001791	1
41	0,00011342	0,00011342	0,99999
51	8,0219e-005	8,022e-005	0,99999
61	6,076e-005	6,0761e-005	0,99999
71	4,8215e-005	4,8215e-005	0,99999
81	3,9568e-005	3,9568e-005	0,99999
91	3,3307e-005	3,3308e-005	0,99999
101	2,86e-005	2,86e-005	0,99999

Na Figura (2b) é mostrado o tempo gasto na solução do sistema para diferentes fatores de penalidade. Pode-se verificar que a diferença entre os tempos gastos não é grande, sendo que a diferença encontrada pode ser atribuída a erros de medição do próprio computador.

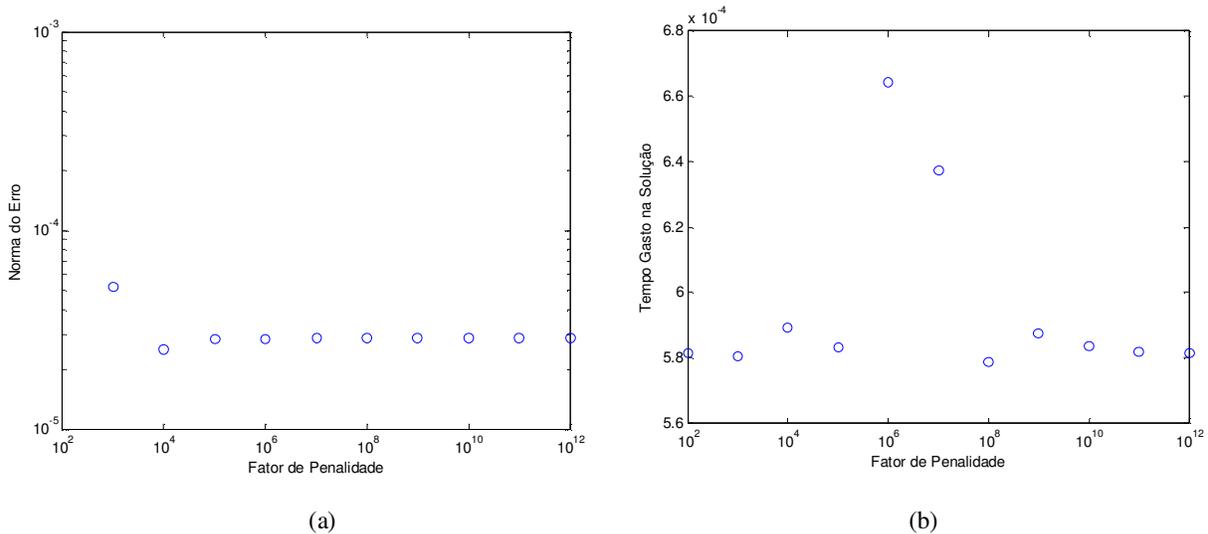


Figura 2. (a) Norma do erro da solução para valores do fator de penalidade; (b) Tempo gasto na solução para valores do fator de penalidades.

5. ESTUDO DE CASO 2D

No primeiro estudo é simulada uma viga de Timoshenko, como mostrado na Fig. (3).

Os dados da simulação são: $L = 48$ e $D = 12$. A carga P na extremidade tem magnitude de 1.000. O momento de inércia é dado por:

$$I = \frac{D^3}{12}. \tag{15}$$

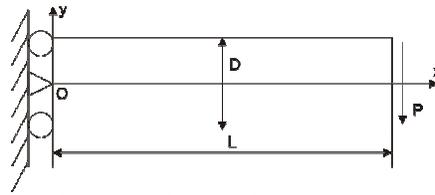


Figura 3. Viga de Timoshenko.

A solução exata desse problema é encontrada da seguinte maneira:

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (16)$$

$$u_y = \frac{Py}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + \frac{(4 + 5\nu)D^2x}{4} + (3L - x)x^2 \right]. \quad (17)$$

A tensão analítica por sua vez pode ser obtida de:

$$\sigma_x = -\frac{P(L - x)y}{I}. \quad (18)$$

As propriedades do material são definidas como sendo $E = 3,0 \times 10^7$ e $\nu = 0,3$. Uma distribuição regular dos nós é utilizada juntamente com uma malha de fundo usada na integração numérica. Em cada célula de integração 16 pontos de Gauss são criados para se realizar a quadratura de quarta ordem. Em todos os casos tratados a distribuição de nós é uniforme, porém o método independe dessa e, como mostra Villa Verde et al. (2008), pode resolver problemas com distribuições completamente irregulares.

A função peso utilizada é a spline cúbica e na aproximação dos mínimos quadrados móveis se utiliza uma base linear, Villa Verde et al. (2008), analisa justamente a função de forma e a sua derivada no método e mostra a função cúbica como uma boa candidata. O parâmetro de escala d_{max} é definido como 1,5, seguindo recomendação de Villa-Verde (2007). Um suporte circular é usado em cada um dos nós.

Na solução deste problema foram utilizados duas diferentes malhas de fundo, uma com 4 x 6 divisões e a outra com 8 x 14 divisões conforme Fig. (4).

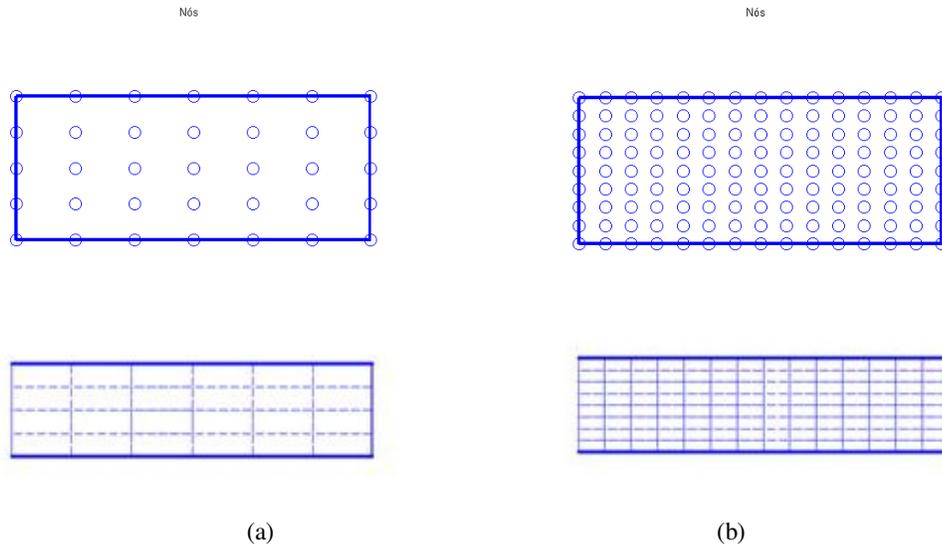


Figura 4. (a) Distribuição regular de nós (5x7) e respectiva malha de fundo; (b) Distribuição regular de nós (9x15) e respectiva malha de fundo.

Para os campos de tensões normais encontrados, comparando-os com o resultado exato, verificou-se que mesmo para um número pequeno de nós a distribuição da tensão normal da viga é bastante suave mesmo sem ter sofrido qualquer tipo de tratamento adicional, como ocorre também no MEF.

Para cada malha, as condições de contorno foram aplicadas usando os multiplicadores de Lagrange e o método das penalidades. Na Tabela (3) é apresentado o tempo gasto na solução do sistema de equações, enquanto na Tab. (4) é mostrada a norma do erro ponderado para cada solução.

A medição dos erros mostra que mesmo para uma discretização pouco refinada os resultados encontrados já são satisfatórios. Nesse caso não se pôde observar uma mudança relevante nem no tempo de solução, quando comparado ao tempo gasto pelo programa como um todo, nem tampouco na precisão dos métodos.

Tabela 3. Tempo gasto na solução da viga de Timoshenko.

Divisão	Método das Penalidades	Multiplicadores de Lagrange
7 x 5	0,0078	0,0092
15 x 9	0,0164	0,0187

Tabela 4. Norma do erro ponderado na solução da viga de Timoshenko.

Divisão	Método das Penalidades	Multiplicadores de Lagrange
7 x 5	1,013	1,0131
15 x 9	1,0133	1,0134

O próximo caso estudado foi o de uma placa com furo. Devido à simetria desse problema, apenas um quarto da placa é simulado, como mostrado na Fig. (5). O lado da placa tem comprimento de 10 e o raio do círculo é igual a 1. Pela simetria do problema pode-se dizer que na face esquerda não haverá deslocamento em x e na parte inferior não haverá deslocamento em y. A tração aplicada é um carregamento unitário distribuído ao longo da placa.

O material considerado possui módulo de Young igual a 1.000 e módulo de Poisson igual a 0,3. O problema foi tratado usando suporte nodal circular e função peso spline cúbica. A malha de fundo foi gerada usando o programa GID e elementos quadrilaterais. Em cada célula de integração 16 pontos de Gauss são criados, possibilitando a utilização da quadratura de quarta ordem.

Na Figura (5b), pode-se observar a posição dos nós utilizados. Percebe-se que a concentração de nós não é constante ao longo da placa acarretando numa dificuldade de definição dos suportes nodais. Estes suportes se reduzem à medida que se aproximam do furo. Onde existe um número grande de nós e longe do furo, os suportes devem crescer para garantir a boa discretização do domínio.

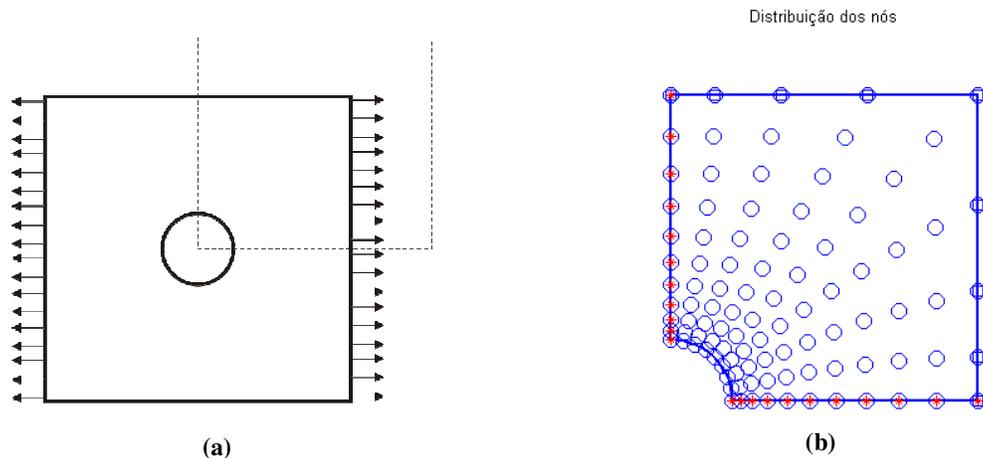


Figura 5. (a) Esquema da placa com furo; (b) Distribuição dos pontos nodais em um quarto da placa.

Na Figura (6a) são mostrados os pontos de Gauss criados na solução deste problema e na Fig. (6b) são apresentadas as deformações obtidas.

A tensão analítica é conhecida e em coordenadas polares é dada por:

$$\sigma_x = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \quad (19)$$

Nas Figuras (7a) e (7b) podem ser observados os resultados numéricos e analíticos obtidos para a tensão na direção x. Na Figura (7b) utilizou-se o método das penalidades. O método dos multiplicadores de Lagrange não apresentou dificuldades na solução desse problema devido à simplicidade das condições de contorno. Ao se comparar as tensões

encontradas com os valores analíticos verifica-se que uma boa aproximação foi conseguida mesmo com uma discretização esparsa (99 nós).

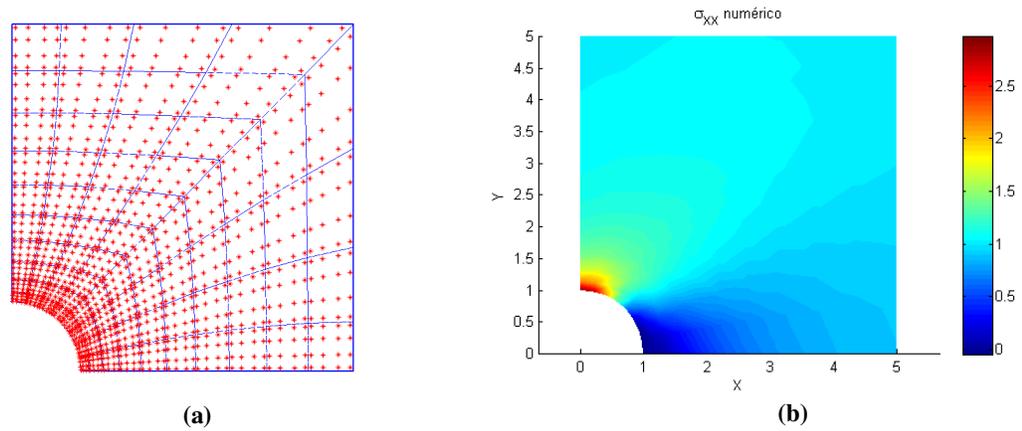


Figura 6. Placa com furo: (a) Distribuição dos pontos de Gauss; (b) Resultados de deformação (EFG)

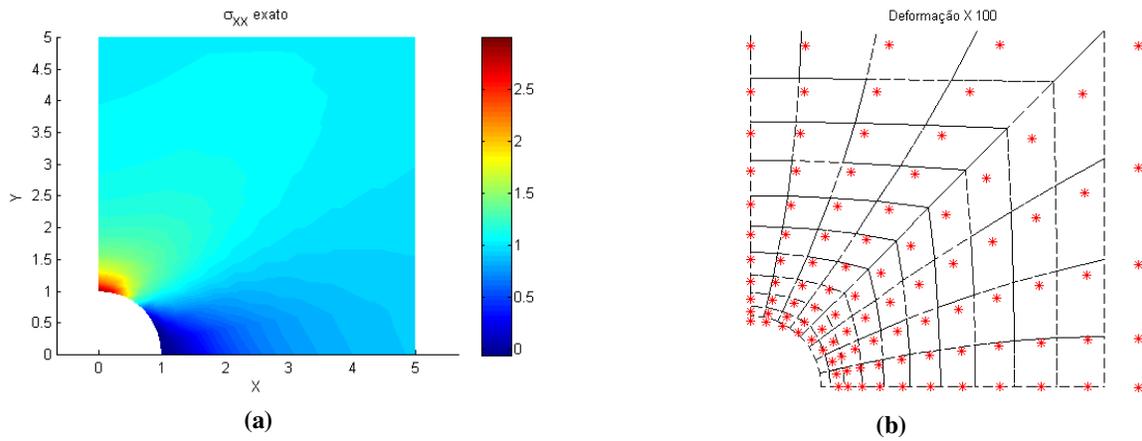


Figura 7. Placa com furo: (a) Resultados analíticos para as tensões na direção x; (b) Resultados numéricos obtidos com o método das penalidades.

O próximo caso a ser analisado é o de uma placa com condição de contorno de Dirichlet, como mostrado na Fig. (8) e relatado por Huerta e Fernández-Méndez (2004).

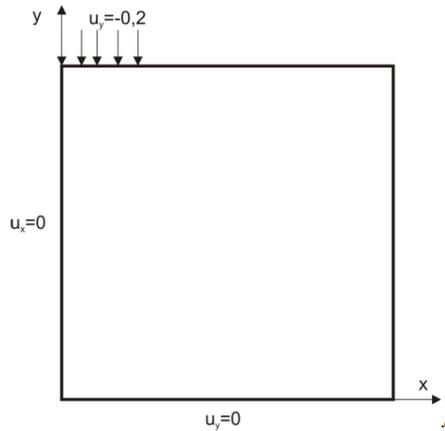


Figura 8. Esquema da placa com condição de contorno de Dirichlet.

Este caso foi estudado devido à dificuldade que ele ocasiona na aplicação das condições de contorno. Ao tentar resolver esse problema utilizando o método da colocação nos multiplicadores de Lagrange um problema se apresenta: como são muitos os pontos utilizados na restrição, a matriz resultante do sistema se torna singular ou praticamente singular fazendo com que os resultados fossem ruins ou que o sistema não pudesse ser resolvido.

Na Figura (9) é mostrada a configuração deformada da placa obtida usando-se os dois diferentes métodos de imposição das condições de contorno.

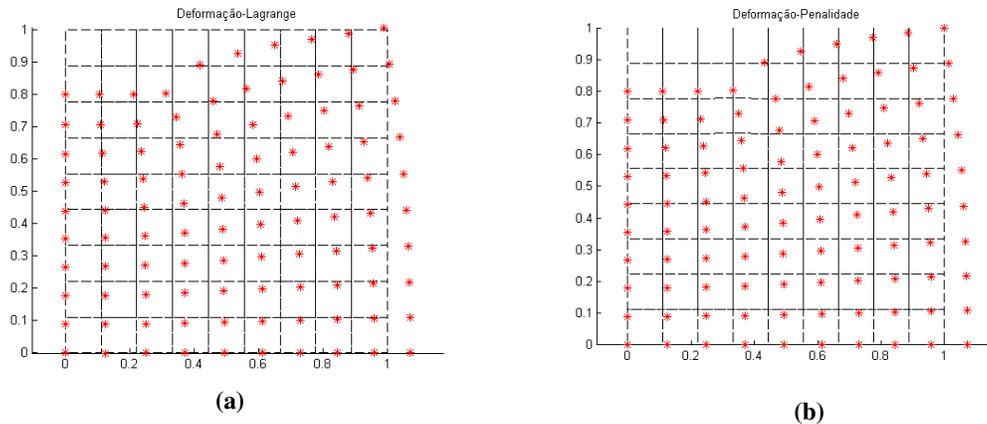


Figura 9. Deformação da placa com condição de contorno de Dirichlet (a) Lagrange (b) Penalidades.

Quando se utiliza interpolação com elementos finitos como o espaço de interpolação dos multiplicadores de Lagrange obtêm-se resultados aceitáveis porém, a matriz continua sendo quase singular.

O método das penalidades se mostrou o mais confiável na solução deste problema. A solução do sistema de equações não apresentou dificuldades e as condições de contorno puderam ser facilmente aplicadas.

6. CONCLUSÕES

Ao se comparar os dois métodos torna-se evidente que o método das penalidades é uma alternativa viável ao método dos multiplicadores de Lagrange, apesar deste último ser mais amplamente adotado. Quando o valor do fator de penalidade é adequado, para os casos analisados, verificou-se que a resposta é obtida mais rapidamente e não ocorre prejuízo de precisão. A única dificuldade se encontra em justamente definir o valor a ser utilizado.

Ao se analisar os resultados do método das penalidades pôde-se perceber que para valores maiores que 10^6 ocorre uma variação desprezível na norma do erro. O valor máximo dos elementos diagonais da matriz de rigidez foi da ordem de 100, portanto o valor encontrado está de acordo com a sugestão apresentada por Liu (2002) para a faixa de valores de $\alpha = 10^{4-13} * \text{Max}$ (elemento diagonal da matriz rigidez). O valor máximo sugerido é baseado no fato de que ao aumentar-se o fator de penalidade, o condicionamento da matriz torna-se cada vez pior, dificultando, assim, a solução numérica do sistema.

Nos casos bidimensionais verificou-se a maior confiabilidade proporcionada pela utilização do método das penalidades. Nos casos unidimensionais, os graus de liberdade adicionados pelo método dos multiplicadores de Lagrange foram poucos, não acarretando problemas na solução do sistema de equações. Na análise 2D, ao aumentar-se a quantidade de graus de liberdade que estavam restritos, o método dos multiplicadores de Lagrange apresentou problemas de singularidade chegando até a impedir a solução do sistema em alguns casos.

Para problemas em duas dimensões pode ser percebido que a maior demanda computacional no EFG está na montagem da matriz de rigidez e que o tempo gasto na solução do problema é muito pequeno se comparado ao tempo gasto na integração em todo o domínio, representando, em alguns casos, menos de 1% do tempo gasto em todo o programa. A solução usando o método das penalidades foi sempre menor que o a do método dos multiplicadores de Lagrange, mas esse ganho, de até 50% não apresenta grande impacto no tempo gasto pelo programa.

O método das penalidades apresentou bom funcionamento, garantindo a aplicação das condições de contorno muito antes do seu fator de penalidade acarretar em problemas na solução.

7. REFERÊNCIAS

- Fernández-Méndez, S. and Huerta, A., 2004, "Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods", Computational Methods Applied to Mechanical Engineering. 193 1257–1275.
- Gosz, J. Liu, W.K., 1996, "Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method", Computational Mechanics 19 (2) 120–135.
- Huerta, A. Fernández-Méndez, S., 2000, "Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods", International Journal of Numerical Methods in Engineering. 48 (11) 1615–1636.

- Liu, G. R., 2002, "Mesh Free Methods: moving beyond the finite element method", CRC Press, USA,
- Villa Verde, F.R., 2007, "Análise De Parâmetros Que Caracterizam O Método Sem Malha De Galerkin", Exame de qualificação do Doutorado, Universidade de Brasília.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M., Almeida, J. L. F., 2008, "Estudo da Resposta do Método de Galerkin Sem Malha pela Análise da Função De Forma e Sua Derivada", V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM, Salvador, Brasil.
- Villa Verde, F. R., Pfitscher, G. H., Viana, D. M., Almeida, J. L. F., 2008, "Influence of EFG Method Variables in Stress Analysis Response with Uniform and Non-Uniform Nodal Distribution", in CSME/SCGM Forum, Ottawa.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE PENALTY METHOD AND THE LAGRANGE MULTIPLIER METHOD APPLIED TO THE GALERKIN MESHLESS METHOD

Lucas Silveira Campos, zaz1588@gmail.com
Dianne Magalhães Viana, diannemv@unb.br

¹Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Campus Darcy Ribeiro, Asa Norte, CEP 70910-900, Brasília DF

Abstract: *The Meshless methods have been proposed as an alternative for the finite element method mainly in problems that present big deformations, crack growth, state change, etc. The Galerkin Meshless method uses the moving least squares method to approximate a function in a discretized domain. The approximations are built using: a weight function, a polynomial basis and position dependent coefficient. Applying the boundary conditions is harder because the Kronecker delta condition is not satisfied. A number of techniques were developed to apply the boundary conditions, including modified variation methods, Lagrange multipliers, coupling with finite elements and the penalty method. The penalty and the Lagrange multiplier methods are both analyzed and compared in linear elasticity problems. 2d examples are used, such as Timoschenko beam, a Dirichlet boundary condition problem and a plate with hole.*

Keywords: *Galerkin meshless method; boundary conditions; penalty method.*