

## **Modelamiento y simulación del enfriamiento de un alimento envasado en recipiente de vidrio de geometría cilíndrica**

**Jesús Barrera C., e-mail<sup>1</sup>**

**Hernán Estrada B., e-mail<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Escuela Colombiana de Ingeniería, [jesus.barrera@escuelaing.edu.co](mailto:jesus.barrera@escuelaing.edu.co),

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, [hestradab@unal.edu.co](mailto:hestradab@unal.edu.co),

**Resumen.** *El procesamiento de alimentos requiere, en ocasiones, que el envasado y sellado sea realizado a alta temperatura. El envase usado frecuentemente es de vidrio. Por razones de producción es necesario llevar el producto envasado hasta la temperatura ambiental lo más rápido posible para que se puedan realizar otras etapas del proceso. El envase de vidrio por enfriamiento abrupto puede sufrir fractura por choque térmico, lo que obliga a realizar el enfriado en varias etapas. Para las empresas con este tipo de procesos es importante disponer de modelos matemáticos que permitan realizar análisis con miras a la optimización del proceso. El modelo matemático del proceso de enfriamiento del alimento en recipientes de vidrio está dado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) acopladas en la interfase alimento-vidrio y vidrio-ambiente. La solución es obtenida por el método numérico de líneas (MELIN) el cual se ha demostrado que es eficiente para obtener la solución numérica para este tipo de sistemas de EDP.*

**Palabras-clave:** *Método de líneas, Estabilidad, densidad, conductividad térmica, calor específico, convección, solución desacoplada, sistemas de enfriamiento, choque térmico.*

### **1. INTRODUCCIÓN**

Aun cuando el envasado de alimentos en recipiente de vidrio a alta temperatura se ha hecho desde hace mucho tiempo en forma industrial, los modelos matemáticos que describen como ocurre el enfriamiento son realmente recientes. En 1996 la multinacional de alimentos Kraft plantea, durante la semana de modelamiento en Melbourne Australia, la necesidad de tener un modelo que permita describir el proceso de enfriamiento para el queso cheddar en envases de vidrio cilíndricos, en términos de variables como el diámetro del envase<sup>1</sup>; de tal manera que les permitiera ajustar el proceso al producto a enfriar. Según lo comentado en (5) el modelo planteado requería de ajustes los cuales fueron planteados en éste. En la semana de modelamiento de la universidad de Kaiserslautern en 2002 se trabajó de nuevo en el problema planteado por Kraft y se obtuvo un modelo lineal, bajo el supuesto de propiedades del alimento constantes tanto en el tiempo, como con la temperatura. En el presente trabajo se plantea un modelo de enfriamiento que tiene en cuenta las propiedades del alimento las cuales dependen de la temperatura, sección 2, con ello se logra obtener un modelo más completo. Por el tipo de modelo planteado es necesario hallar la solución en forma numérica, lo que se realiza mediante el método de líneas.

<sup>1</sup>Kraft envasa este tipo de queso en varias presentaciones y por ende en varios tamaños de envase, a saber .

## 2. ALIMENTO

Los alimentos que el hombre y los animales comen están constituidos por proteínas ( $p$ ), grasas ( $f$ ), carbohidratos ( $c$ ), fibra ( $fi$ ), harina ( $a$ ) y agua ( $waf$ ) (congelada o no) y en principio la diferencia entre los distintos alimentos se debe al contenido porcentual de estos constituyentes.

Las propiedades físicas de los alimentos tales como la densidad ( $\rho$ ), la conductividad térmica ( $k$ ) y el calor específico ( $c_p$ ) dependen del porcentaje de los constituyentes del alimento, así como de la temperatura, los cuales aparecen referenciados en (7) y en estudios específicos como en (4), (8), (1), (9) entre otros.

También es posible obtener expresiones para determinar el calor específico de los componentes del alimento en función de la temperatura (7).

El calor específico de la mezcla a temperaturas mayores a la de congelamiento está dado por (7):

$$C_{avg} = P * C_{pp} + F * C_{pf} + C * C_{pc} + Fi * C_{pfi} + A * C_{pa} + M * C_{pwaf} \quad (1)$$

donde  $P$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $Fi$ ,  $A$  y  $M$  representan la fracción de masa de la proteína, la grasa, los carbohidratos, la fibra, la harina y el agua respectivamente (7). Estas ecuaciones para el calor específico fueron obtenidas por Choi & Okos (1987) mediante procedimientos de correlación según lo indicado en (7).

La conductividad térmica varía con la composición de los alimentos. Choi et al (1987) reportaron que la variación de la conductividad térmica con la composición (7) es descrita por

$$k = \sum_i k_i X_{vi} \quad (2)$$

donde  $k_i$  es la conductividad del componente puro,  $X_{vi}$  es la fracción volumétrica del componente y  $k$  es la conductividad térmica del alimento. Las unidades de la conductividad son  $W/m * K$ .

Dada la dependencia de  $k_i$  con la temperatura, la conductividad térmica del alimento depende de la temperatura a la cual se encuentre el alimento (7).

La fracción volumétrica,  $X_{vi}$  de cada componente indica qué parte del volumen total corresponde al componente, éste se determina a partir de la fracción de masa  $X_i$ , la densidad del componente  $\rho_i$  y la densidad compuesta  $\rho$  como(7):

$$X_{vi} = \frac{X_i}{\rho_i} \rho \quad \rho = \frac{1}{\sum_i (X_i / \rho_i)} \quad (3)$$

Las densidades de cada componente, en  $kg/m^3$ , dependen de la temperatura y son obtenidas a partir de las siguientes ecuaciones (7), para el agua ( $\rho_{waf}$ ), el hielo ( $\rho_{ic}$ ), las proteínas ( $\rho_p$ ), la grasa ( $\rho_f$ ), los carbohidratos ( $\rho_c$ ), la fibra ( $\rho_{fi}$ ) y las harinas ( $\rho_a$ ).

$$\begin{aligned} \rho_{waf} &= 997,18 + 0,0031439T - 0,0037574T^2 & \rho_{ic} &= 916,89 - 0,13071T & \rho_p &= 1329,9 - 0,51814T \\ \rho_f &= 925,59 - 0,41757T & \rho_c &= 1599,1 - 0,31046T & \rho_{fi} &= 1311,5 - 0,36589T \\ \rho_a &= 2423,8 - 0,28063T \end{aligned}$$

En el caso del queso fundido, con la siguiente composición: 70 % de agua, 4 % de proteína, 14 % de grasa, 10 % de carbohidratos y 2 % de fibra. Para nuestro propósito es de interés considerar como cambia el calor específico, la conductividad térmica y la densidad para el rango de temperaturas entre 10°C y 120°C. Como se observa en las figuras 1 y 2 se observa el comportamiento de estas propiedades en el rango de temperatura de interés. En simulaciones realizadas, el comportamiento de estas propiedades térmicas dependen del contenido de los componentes del alimento, grasa, proteína, etc. según lo mencionado en (6).

## 3. MODELO

Considérese un proceso de enfriamiento del alimento envasado el cual se mueve sobre una banda transportadora a una velocidad  $\nu$ , para realizarlo se somete al producto envasado a una temperatura  $T_0$  a una ducha con un fluido, usualmente agua, a temperatura  $T_{amb}$ , ( $T_0 \geq T_{amb}$ ). La figura 3 ilustra un envase durante el proceso de enfriado.

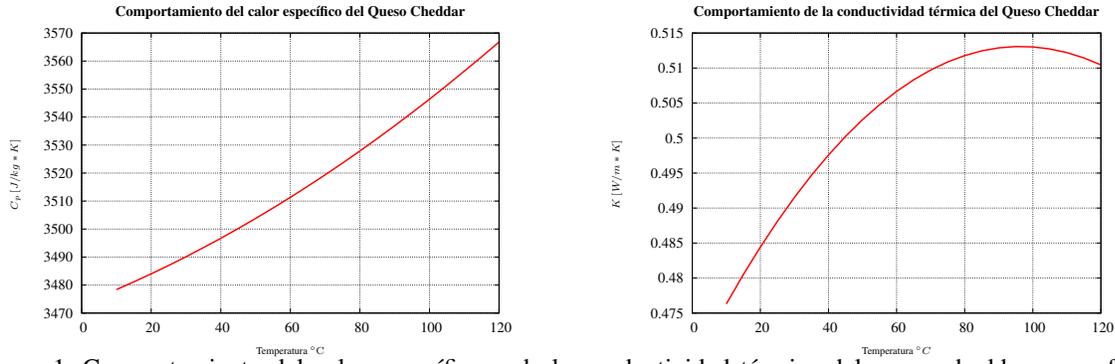


Figura 1. Comportamiento del calor específico y de la conductividad térmica del queso cheddar como función de la temperatura.

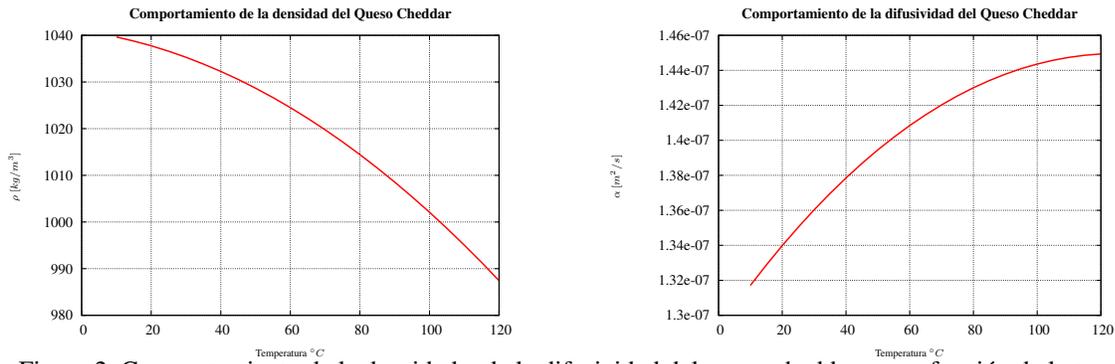


Figura 2. Comportamiento de la densidad y de la difusividad del queso cheddar como función de la temperatura.

El proceso de enfriamiento es descrito mediante la transferencia de energía térmica entre el alimento envasado y el fluido, y no se considera transferencia de masa ni de cantidad de movimiento pues el envase está completamente cerrado y tampoco hay movimiento del alimento dentro del envase. Las ecuaciones que describen el proceso para el alimento (subíndice a) y el envase (subíndice e) son:

$$\frac{\partial(\rho_a c_a T_a)}{\partial t} = \nabla \cdot (k_a \nabla T_a) \quad \frac{\partial(\rho_e c_e T_e)}{\partial t} = \nabla \cdot (k_e \nabla T_e) \quad \rho = \rho(\vec{r}, t, T) \quad c = c(\vec{r}, t, T) \quad k = k(\vec{r}, t, T) \quad (4)$$

Las propiedades, en general, pueden depender de la posición, del tiempo y de la temperatura.

El enfriamiento ocurre por conducción y por convección térmica: por conducción entre el alimento y el envase en la dirección radial y por convección entre el alimento y la tapa del envase así como entre el envase y el medio. En la Figura 4 se aprecia las diferentes formas de transferencia de calor para el proceso de enfriado.

Las empresas deben garantizar, por control de calidad, que una vez fabricado un producto alimenticio, sus propiedades se deben mantener durante un periodo de tiempo el cual se especifica como fecha de vencimiento. Lo anterior permite considerar en nuestros modelos que las características térmicas del alimento no dependen del tiempo. Si además se considera que el alimento es isotrópico entonces el proceso de enfriamiento se puede describir por las ecuaciones

$$\rho_a c_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = \nabla \cdot (k_a \nabla T_a) \quad \rho_e c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla \cdot (k_e \nabla T_e) \quad (5)$$

Al considerar la geometría del recipiente y que el intervalo de temperatura no genera un cambio significativo en las propiedades del alimento, al tener en cuenta lo mencionado con anterioridad las ecuaciones toman la forma

$$\rho_a c_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = k_a \left( \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_a}{\partial r} \right) \quad \rho_e c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = k_e \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \quad (6)$$

Para caracterizar adecuadamente el proceso debemos añadir las condiciones de frontera y la condición inicial:

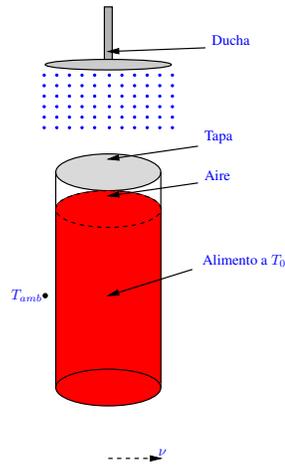


Figura 3. Esquema de enfriamiento de un alimento vertido en un envase de vidrio.

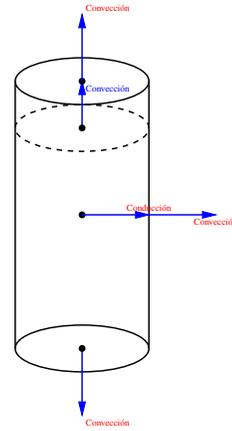


Figura 4. Formas de transferencia de calor presentes en el alimento envasado durante el enfriamiento.

1. Debemos tener finitud de la temperatura en el origen ( $r = 0$ ), esto significa que:

$$\left. \frac{\partial T_a}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (7)$$

lo cual nos garantiza que no se presentará singularidades en el término  $\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$ .

2. En la frontera entre el envase y el alimento ( $r = R_1$ ) según la termodinámica hay continuidad de la temperatura y el flujo de calor en la interfase.

$$T_a|_{r=R_1} = T_e|_{r=R_1} \quad \left. \frac{\partial T_a}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{\partial T_e}{\partial r} \right|_{r=R_1} \quad (8)$$

3. En la frontera entre el envase y el medio ( $r = R_2$ ), para tener en cuenta el enfriamiento, se tiene un intercambio térmico con el medio exterior según la ley de Newton

$$-k_e \left. \frac{\partial T_e}{\partial r} \right|_{r=R_2} = h(T_{fluido} - T_e)|_{r=R_2} \quad (9)$$

4. Además el sistema en el momento de iniciar el proceso ( $t = 0$ ) tiene los siguientes valores de temperatura:

$$T_a(r, 0) = T_0 \quad T_e(r, 0) = T_0 \quad (10)$$

Se observa que la descripción matemática del enfriamiento de un alimento vertido en un envase de vidrio y una ducha se modela por dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas por la frontera, con la condición inicial y de frontera mencionadas.

Al cociente entre la conductividad térmica y el producto de la densidad con el calor específico se conoce como difusividad del material  $\alpha$  ( $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ ). Para el alimento mencionado se tiene:  $k_a = 0,48 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $\rho_a = 1037 \text{ kg/m}^3$  y  $c_a = 3485 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$ ; en el caso de un envase de vidrio usado para este propósito  $k_e = 0,78 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $\rho_a = 2700 \text{ kg/m}^3$  y  $c_a = 0,84 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$ . Con lo anteriores valores se tiene  $\alpha_a = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\alpha_e = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , respectivamente.

Con el propósito de observar el enfriamiento en el envase y en el alimento en una misma escala de tiempo, como las constantes de tiempo son muy disímiles, es necesario realizar una adimensionalización de las ecuaciones, para ello se definen las variables

$$\rho = \frac{r}{R_1} \quad 0 \leq \rho \leq 1; \quad T' = \frac{T - T_{fluido}}{T_0 - T_{fluido}} \quad 1 \geq T' \geq 0; \quad t_1 = \frac{t}{\tau} \quad \tau := (\text{tiempo característico del material})$$

Al reemplazar estas variables en las ecuaciones originales se llega a

$$\frac{1}{\tau} \rho_i c_i \frac{\partial T'_i}{\partial t_1} = k_i \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{\partial^2 T'_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T'_i}{\partial \rho} \right) \quad \dots \quad \frac{\partial T'_i}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 T'_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T'_i}{\partial \rho}$$

en donde se obtiene que el tiempo característico del material está dado por  $\tau = \frac{R_1^2}{\alpha}$  siendo  $\alpha$  la difusividad del material.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_a}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_a}{\partial r} & 0 \leq r \leq 1; & \quad 0 \leq T_a \leq 1; \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial T_e}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} & 1 \leq r \leq \frac{R_2}{R_1}; & \quad 0 \leq T_e \leq 1; \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

en donde  $R_2$  es el radio externo del envase y  $R_1$  el radio interno, ( $R_2 > R_1$ ).

Con las nuevas variables, las condiciones de frontera e inicial toman la forma

$$\begin{aligned} T_a(r, t)|_{r=1} &= T_e(r, t)|_{r=1} & -k_a \frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=1} &= -k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \Big|_{r=1} & -k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \Big|_{r=\frac{R_2}{R_1}} &= h T_e(r, t)|_{r=\frac{R_2}{R_1}} \\ \frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 & T_a(r, t)|_{t=0} &= T_e(r, t)|_{t=0} = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

A partir de datos para el vidrio empleado en la mayoría de envases y si se considera con un radio exterior 28 mm y un espesor de 1 mm (un envase con estas dimensiones es usado frecuentemente por los productores de alimentos), se tiene que el tiempo característico del envase es de  $\tau_e = \frac{R^2}{\alpha_e} = 1,39$  s mientras que para el alimento es  $\tau_a = \frac{R_1^2}{\alpha_a} = 5488,68$  s = 1,52 h

La razón de tiempos característicos es  $\tau_a/\tau_e = 3938$ , lo que indica que el alimento tarda mucho mas tiempo para llegar a la temperatura deseada que lo que se tarda el envase, lo que significa que la velocidad con la cual se enfría el envase es mucho mayor que la correspondiente para el alimento. Al tener en cuenta esta situación el proceso de enfriamiento del alimento vertido puede ser modelado como

$$\rho_a c_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = \nabla(k_a \nabla T_a) \quad 0 = k_e \nabla^2 T_e \quad (13)$$

Las condiciones de frontera e inicial son las indicadas por la ecuación 12.

#### 4. SOLUCIÓN DESACOPLADA

Como la ecuación que describe el enfriamiento en el envase no depende del tiempo y es lineal,  $\nabla^2 T = 0$  su solución analítica explícita:

$$T_e(r) = E \ln(r) + F \quad E, F \in \Re; \quad 1 \leq r \leq \frac{R_2}{R_1}; \quad E = \frac{k_a}{k_e} \frac{\partial T_a(1, t)}{\partial r} \quad F = T_a(1, t) \quad (14)$$

Al aplicar las condiciones de frontera entre el envase y el alimento y luego de algunos pasos se tiene la frontera

$$\frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\beta T_a(1, t) \quad \beta = \frac{k_e}{k_a} \frac{h}{\frac{k_e}{(R_2/R_1)} + h \ln(\frac{R_2}{R_1})} \quad (15)$$

solo depende de  $T_a$  y el acople con el envase queda descrito por  $\beta$  el cual es una constante que depende de las propiedades térmicas de los materiales involucrados en el proceso de enfriamiento: envase, alimento y fluido; así como de las dimensiones geométricas del envase.

Se ha simplificado en forma radical ya que para determinar  $T_a$  basta con solucionar el problema desacoplado

$$\frac{\partial T_a(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_a(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_a(r, t)}{\partial r} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (16)$$

con las condiciones de frontera e inicial

$$\frac{\partial T_a}{\partial r} = -\beta T_a(r, t) \quad r = 1 \quad \frac{\partial T_a}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad T_a(r, 0) = 1 \quad (17)$$

Esta es una gran simplificación del problema, pues no hay solamente reducción de la cantidad de ecuaciones.

## 5. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para determinar la solución se utiliza el método de líneas, el cual se ha demostrado que es adecuado para solucionar este tipo de ecuaciones (2).

Antes de realizar el proceso de discretización es necesario considerar la indeterminación que se presenta en la ecuación para el alimento cuando  $r = 0$ , y considerar L'hôpital para el término

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_a}{\partial r} = \frac{\frac{\partial T_a}{\partial r}}{r} \quad (18)$$

Al aplicar la regla mencionada se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial T_a}{\partial r}}{r} = \frac{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2}}{\lim_{r \rightarrow 0} 1} = \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} \quad (19)$$

Con lo anterior, la ecuación para el alimento queda

$$\frac{dT_a}{dt} = \begin{cases} 2 \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} & r = 0 \quad 0 \leq T_a \leq 1 \\ \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_a}{\partial r} & 0 < r \leq 1 \quad 0 \leq T_a \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

Si se discretiza la variable espacial  $r$  en unidades de  $\Delta r$ , la temperatura en el punto  $i$ , estará dada por

$$T_i(t) = T(i\Delta r, t) \quad i = 1(1)N; \quad \Delta r = \frac{1}{N+1} \quad (21)$$

con lo que se obtiene la forma discretizada de la ecuación para la primera derivada

y para la segunda derivada

$$\frac{\partial T_a}{\partial r} = \begin{cases} \frac{-3T(1)+4T(2)-T(3)}{2\Delta r} & i = 1 \\ \frac{-T(i-1)+T(i+1)}{2\Delta r} & i = 2(1)N - 1 \\ \frac{T(N-2)-4T(N-1)+3T(N)}{2\Delta r} & i = N \end{cases} \quad \frac{\partial^2 T_a}{\partial r^2} = \begin{cases} \frac{-T(3)+4T(2)-5T(1)+2T(1)}{(\Delta r)^2} & i = 1 \\ \frac{T(i-1)-2T(i)+T(i+1)}{(\Delta r)^2} & i = 2(1)N - 1 \\ \frac{-T(N-3)+4T(N-2)-5T(N-1)+2T(N)}{(\Delta r)^2} & i = N \end{cases}$$

A continuación se muestran los resultados de la simulación obtenidos a partir de la solución numérica para el sistema de ecuaciones de primer orden resultante con la ayuda del método de Runge-Kutta-4. La cantidad de puntos usados en la discretización permiten garantizar la estabilidad del método, según lo indicado por (3). La Figura 5 muestra el comportamiento de la temperatura al variar  $r$  y  $t$ , considerando una única zona de enfriamiento.

En la figura 5 se aprecia que en  $r = 1$  la temperatura cambia bastante rápido, en cambio la variación en  $r = 0$  es más baja. Lo anterior se explica porque la velocidad con la cual se enfría el envase es mucho mayor que la velocidad de enfriamiento del alimento, debemos recordar la diferencia de los tiempos característicos para el envase y para el alimento. Sin embargo, después de aproximadamente 0,6 constantes de tiempo (0,912 h), el alimento ya está a la temperatura del fluido.

## 6. FRACTURA EN EL ENVASE

Debido a la imposibilidad de tener una sola zona de enfriamiento por la ruptura del envase por el esfuerzo térmico, es necesario disponer de varias etapas para realizar el proceso.

Las ecuaciones que describen el cambio térmico para las diferentes zonas constan de las mismas expresiones, vistas con anterioridad, lo diferente son la temperatura del fluido y la temperatura inicial del alimento y del envase para la correspondiente zona.

Varios esquemas de enfriamiento se pueden plantear, a saber:

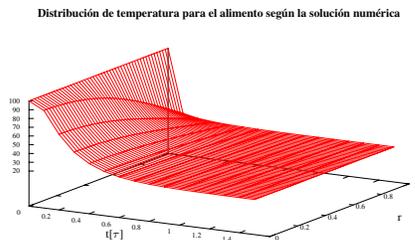


Figura 5. Comportamiento de la temperatura en el alimento como función del tiempo característico y de la posición.

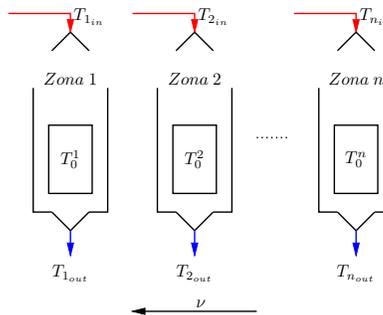


Figura 6. Diagrama para sistemas de enfriamiento independientes.

### 6.1 Independencia de los sistemas de enfriamiento

En esta manera de enfriamiento el fluido entra a cada una de las zonas a la temperatura  $T_{in fluido_i}$ , la cual es la adecuada para la zona. La energía retirada del alimento se elimina al someterse el fluido de salida a un proceso de enfriamiento, con miras a que se pueda volver a utilizar en la misma zona. En la figura 6 se muestra un esquema del funcionamiento de esta forma de enfriar.

Esta manera de realizar el enfriamiento presenta como ventaja que las ecuaciones que describen todo el proceso de enfriamiento son independientes entre zonas, lo que facilita su solución. Sin embargo, el problema que se tiene es que la energía extraída y eliminada por el enfriamiento puede ser costosa.

### 6.2 Independencia de los sistemas de enfriamiento con calentamiento

En esta situación, el fluido que sale de una zona  $i$  a una temperatura  $T_{out fluido_i}$  se calienta a la temperatura  $T_{in fluido_{i+1}}$  antes de que se utilice para el enfriamiento en la zona  $i + 1$  la cual requiere de una temperatura superior para realizar el proceso de enfriado. En la figura 7 se muestra un esquema del funcionamiento de esta forma de enfriado. Esta manera de realizar el enfriamiento presenta la ventaja que las ecuaciones que describen a todas las zonas son independientes, como en el caso anterior lo que facilita su solución, sin embargo el problema que tiene, si es que se trata de un problema, es que se requiere adicionarle energía para que pueda ser reutilizado lo cual podría ser costoso.

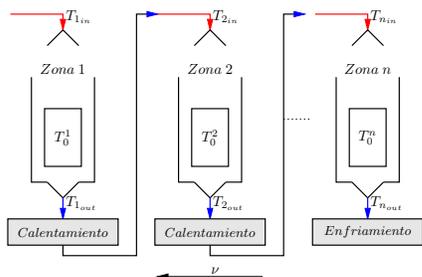


Figura 7. Diagrama para sistemas de enfriamiento independientes con calentamiento.

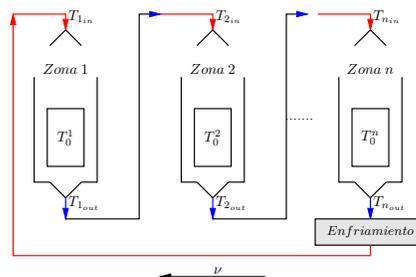


Figura 8. Diagrama para sistemas de enfriamiento interdependientes sin calentamiento.

### 6.3 Interdependencia de los sistemas de enfriamiento

En este caso el fluido que sale de cada una de las zonas,  $T_{out fluido_i}$ , se hace circular hacia la siguiente zona de temperatura superior sin calentamiento, como en el caso anterior. En la figura 8 se muestra un esquema del funcionamiento. Esta manera de realizar el enfriamiento presenta como desventaja que las ecuaciones que describen el proceso de enfriamiento en todas las zonas no son independientes, como en los casos anteriores, lo que dificulta su solución. Sin embargo,

la ventaja es que no se requiere adicionar energía ni para calentar ni para enfriar el fluido de salida de las diferentes zonas, con excepción del fluido que sale de la zona  $n$  el cual es enfriado a la temperatura que requiere la primera zona, de tal forma que todo el proceso se realice por recirculación del fluido de enfriamiento, lo cual permite diseñar el sistema como una unidad.

Para cada etapa, si se deja de lado la transferencia de calor en el envase, la transferencia entre el alimento y el fluido puede ser expresada por:

$$c_a V_a \Delta T_a = c_f V_f \Delta T_f \quad (22)$$

siendo  $c_a$  y  $c_f$  los calores específicos por unidad de volumen para el alimento y para el fluido respectivamente,  $V_a$  y  $V_f$  son los volúmenes y los  $\Delta T$  son la variación de temperatura en el alimento y en el fluido. La ecuación expresa la igualdad que debe existir para que la transferencia de calor se efectivamente entre el alimento y el fluido e incorpora el calor específico de los dos elementos así como el volumen de estos.

La variación de temperatura para los dos materiales en la  $i$  –ésima zona, son:

$$\Delta T_a = T_{a_b}^i - T_{a_e}^i \quad \Delta T_f = T_{f_e}^i - T_{f_b}^i \quad (23)$$

donde los índices  $b$  y  $e$  indican inicio y final respectivamente. Si se combinan las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$T_{a_b}^i - T_{a_e}^i = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^i - T_{f_b}^i) \quad (24)$$

Al tener en cuenta todas las zonas se tiene el sistema de ecuaciones

$$T_{a_b}^1 - T_{a_e}^1 = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^1 - T_{f_b}^1) \quad T_{a_b}^2 - T_{a_e}^2 = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^2 - T_{f_b}^2) \quad \dots \quad T_{a_b}^n - T_{a_e}^n = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^n - T_{f_b}^n) \quad (25)$$

Este es un sistema de  $n$  ecuaciones con  $2n$  incógnitas, las temperaturas de entrada y de salida del fluido para las  $n$  zonas.

Si se tiene en cuenta la recirculación del fluido,  $T_{f_e}^i = T_{f_b}^{i+1}$  el sistema anterior se reduce a un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas. Las incógnitas son las temperaturas de salida del fluido de cada zona más la temperatura del fluido de entrada a todo el sistema, la cual se llamará  $T_{f_b}^0$ , con lo cual

$$T_{a_b}^1 - T_{a_e}^1 = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^1 - T_{f_b}^0) \quad T_{a_b}^2 - T_{a_e}^2 = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^2 - T_{f_b}^1) \quad \dots \quad T_{a_b}^n - T_{a_e}^n = \frac{c_f V_f}{c_a V_a} (T_{f_e}^n - T_{f_b}^{n-1}) \quad (26)$$

con base en lo anterior, en esta forma de realizar el enfriamiento la solución del problema requiere, además de la solución de la temperatura para el alimento y el envase, la solución del anterior sistema de ecuaciones en forma simultánea lo cual complica enormemente el problema.

En el esquema de enfriamiento uno y dos, las soluciones para las diferentes zonas se obtienen de igual forma, lo único diferente para hallar la solución de cada zona es la temperatura inicial del alimento y del fluido. Este esquema de enfriamiento es el que se utiliza para obtener los resultados que se muestran a continuación.

La figura 9 presenta el comportamiento de la temperatura en el alimento cuando se tienen dos zonas de enfriado. Para ello se modificó el programa para que admitiera el cambio de temperatura del fluido en ( $t = 0,8\tau$ ). En la primera zona se busca que el alimento se enfríe hasta una temperatura que está  $40^\circ C$  menor a la temperatura inicial, manteniéndose durante un tiempo de  $0,8\tau$  sometido a esta temperatura de fluido; luego se cambia a un fluido con una temperatura menor de  $40^\circ C$  cercana a la temperatura ambiente y se deja que el alimento se enfríe durante un tiempo de  $0,7\tau$ . Se aprecia como el comportamiento con dos zonas de enfriado exhibe las mismas características observadas en el caso de una zona de enfriamiento, Figura 9, esto es, que la frontera entre el alimento y el envase se enfría más rápidamente que el centro del alimento.

Como es necesario observar el comportamiento del gradiente térmico en el envase, la figura 10, lo muestra para diferentes zonas de enfriamiento.

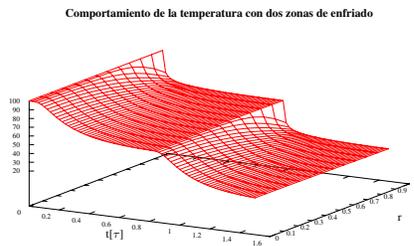


Figura 9. Comportamiento de la temperatura al realizar el enfriamiento con dos zonas.

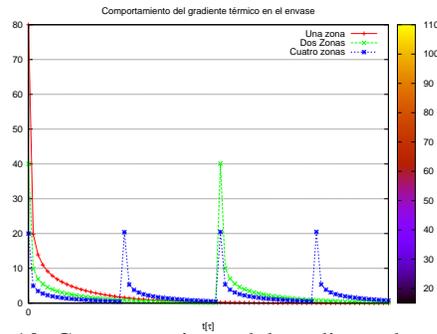


Figura 10. Comportamiento del gradiente de temperatura en el envase como función de la cantidad de zonas.

Del gráfico 10 se observa que si se establece solamente una zona de enfriamiento se presenta la rotura del envase por esfuerzo térmico, sin embargo, al tener dos zonas el gradiente térmico que se presenta es de  $40^{\circ}C$  el cual está muy cerca al valor máximo según los fabricantes del envase. Cuando se establecen cuatro zonas de enfriamiento, el gradiente térmico en el envase no supera el gradiente crítico. Se han colocado las zonas equidistantes en tiempo, sin embargo, pueden colocarse a diferentes distancias y los resultados del gradiente son similares.

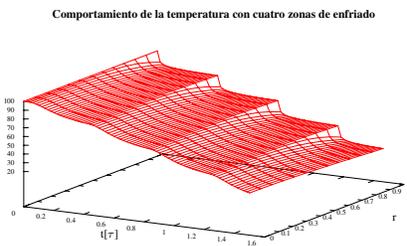


Figura 11. Comportamiento de la temperatura del alimento al ser enfriado con cuatro zonas de enfriamiento.

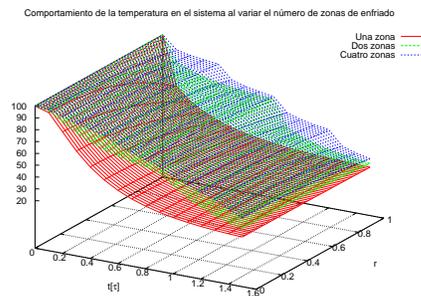


Figura 12. Comportamiento de la temperatura del alimento al ser enfriado con una, dos o cuatro zonas de enfriamiento.

La gráfica 11 permite observar el comportamiento de la temperatura para el alimento cuando se tienen cuatro zonas de enfriamiento. Se puede ver allí que con estas cuatro zonas de enfriamiento el alimento tarda más tiempo en llegar a temperatura ambiente, lo que se aprecia claramente en el diagrama 10, esto se debe principalmente al hecho de haber aumentado la cantidad de zonas y a la distancia a la cual se ha colocado las diferentes zonas. Para disminuir este efecto conviene determinar la distancia adecuada para colocar las zonas de enfriamiento. Lo anterior está basado, según se observa en la Figura 10, en que se puede llevar el alimento a la segunda zona de enfriamiento en un tiempo menor a  $0,4\tau$  sin que se presente la fractura del envase.

El decidir a que distancia en tiempo y a qué temperatura se deben colocar las diferentes zonas de enfriamiento, así como la cantidad de zonas, es algo que depende del alimento con el cual se esté trabajando pues otros factores entran juego, como es la velocidad a la cual se deba realizar el proceso sin que haya pérdida de propiedades sensoriales en el alimento. Desde luego lo anterior es un tema que puede ser abordado como parte de un proyecto a nivel de maestría o mas arriba aún.

La figura 11 permite observar también que el centro del alimento se enfría a una rata constante. Este hecho puede o no tener consecuencias en las propiedades del alimento así como en el posible crecimiento bacteriano, pero como se mencionó con anterioridad, esto depende del alimento con el cual se esté trabajando.

Para observar el efecto que tiene la cantidad de zonas en el enfriamiento hasta temperatura ambiente se ha realizado la

Figura 12 en donde está representado el comportamiento de la temperatura para una, dos y cuatro zonas de enfriamiento. Se aprecia en la figura que al aumentar el número de zonas el tiempo para llegar a temperatura ambiente se aumenta, para el caso mostrado.

Desde luego, sería interesante poder realizar un enfriamiento con varias zonas, para evitar la rotura del envase, pero que la temperatura tenga un comportamiento como el debido a una única zona.

## 7. CONCLUSIONES

Con base en lo expuesto con anterioridad se puede concluir:

1. El proceso de enfriamiento de un alimento vertido en este tipo de envase depende de las características del alimento y del envase. Lo que se ha presentado aquí es válido solo para el alimento considerado, para otro tipo de alimento es necesario verificar los supuestos, en particular la escala de tiempos de las ecuaciones.
2. El modelo de enfriamiento es más completo respecto al planteado por (5), en cuanto se considera la variación de las propiedades térmicas del alimento con la temperatura.
3. Las EDP que describen el enfriamiento son de tipo Laplace para el envase y cuasilineal para el alimento, acopladas por la frontera. En esta situación no hay solución analítica por lo que el uso de los métodos numéricos, y en particular el método de líneas, es fundamental.
4. La posibilidad de desacoplar el problema de dos EDP, acopladas por la frontera, a una EDP para el alimento simplifican en forma apreciable el problema, desde el punto de vista de potencia de cálculo numérico y de equipo de cómputo necesario.
5. Como el problema simplificado contiene toda la información del problema completo, a través de la condición de frontera para el alimento, es posible analizar el efecto del cambio en las propiedades y características del alimento, del envase y del fluido usado para el enfriamiento.
6. También se puede estudiar la cantidad de zonas de enfriamiento necesarias y sus temperaturas que hacen que el proceso sea óptimo en tiempo.

## Referencias

- Fontana A. et al. Simultaneous thermal conductivity, thermal resistivity, and thermal diffusivity measurements of selected foods and soils. *The Society for Engineering in Agricultural, Food, and Biological Systems*, 2001.
- Schiesser W. E. *The Numerical Method of Lines*. Academic Press, 1991.
- Ames W. F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, 3 edition, 1992.
- Dincer I. Transient heat transfer analysis in air cooling of individual spherical products. *Journal of Food Engineering*, 26:453–467, 1995.
- Jenkins D. R. Heat transfer in spray cooling of jarred foodstuff. *Computational Techniques and Applications*, 1998.
- Marschoun L. T., Muthukumarappan K., and Gunasekaran S. Thermal properties of cheddar cheese: Experimental and modeling. *International Journal of Food Properties*, 2001.
- Romeo T. Toledo. *Fundamentals of food Process Engineering*. Chapman Hall, 1991.
- Yang W., Sokhansanj S., Tang J., and Winter P. Determination of thermal conductivity, specific heat and thermal diffusivity of borage seeds. *Biosystems Engineering*, 82(2):169–176, 2002.
- Q. Zhong et al. Cooling effects on processed cheese functionality. *Journal of Food Process Engineering*, 27:392–412, 2004.

Modeling and simulation of cooling of a food packaged in glass cylindrical geometry.

**Jesús Barrera C. Profesor de la facultad de ingeniería electrónica de la Escuela Colombiana de Ingeniería.**

**Hernán Estrada B. Profesor Titular del departamento de matemáticas de la facultad de Ciencias UN, sede Bogotá.**

**Abstract.** *Food processing sometimes requires that the packaging and sealing is performed at high temperature. The commonly used container is glass. For production reasons it is necessary to bring the product packaging to the environmental temperature as quickly as possible so they can perform other processing steps. The glass container can suffer abrupt cooling thermal shock fracture, which requires to perform the cooling in stages. For companies with this type of process is important to have mathematical models that allow for analysis with a view to optimizing the process. The mathematical model of the cooling process of the food in glass is given by a system of partial differential equations (PDE) coupled at the interface food-glass and glass-environment. The solution is obtained by the numerical method of lines (MELIN) which has proven to be efficient for the numerical solution for these systems*

**Key words:** Method of lines, stability, density, thermal conductivity, specific heat, convection, decoupled solution, cooling systems, thermal shock.