

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO USANDO O MÉTODO DE COLOCAÇÃO PROBABILÍSTICA EM MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

Júlio Hoffmann Mendes, julio_hoffmann@hotmail.com¹

Ramiro Brito Willmersdorf, ramiro@willmersdorf.net²

¹Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Rua Acadêmico Hélio Ramos S/Nº, 50740-530, Recife – PE – Brasil,

²Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Rua Acadêmico Hélio Ramos S/Nº, 50740-530, Recife – PE – Brasil

Resumo. *As atividades de desenvolvimento e gerenciamento de reservatórios de hidrocarbonetos são hoje fortemente baseadas em simulações computacionais intensivas de modelos de diversas físicas: modelos de fluxo em meio poroso do reservatório, modelo geomecânico do reservatório e modelos econômicos. Todos esses modelos são caracterizados por equações diferenciais parciais que tradicionalmente têm sido resolvidas com a hipótese de que seus coeficientes e variáveis primárias possuem caráter determinístico. Percebe-se que a análise determinística não é mais suficiente para fornecer todas as informações características destes problemas, e é necessário considerar que algumas das grandezas que descrevem o problema não são conhecidas precisamente. Uma das técnicas clássicas para este tratamento é o Método de Monte Carlo. Neste trabalho apresentamos uma implementação de uma alternativa a esse método, que é adequada a problemas onde o número de variáveis incertas não é muito grande, o Método de Colocação Probabilística (MCP). A ferramenta matemática por trás do método é a integração por quadratura gaussiana, que está fortemente ligada a polinômios ortogonais. Para distribuições usuais como: normal, exponencial, uniforme, etc. Os polinômios no qual o método recai são bem conhecidos: Legendre, Laguerre e Hermite. Serão apresentadas aplicações do MCP em simulação de reservatórios de petróleo em múltiplas variáveis.*

Palavras-chave: *Quadratura gaussiana, Polinômios ortogonais, Propagação de incertezas, Colocação probabilística*

1. INTRODUÇÃO

Considere o problema de estimar a resposta de um simulador cujas entradas são incertas. Neste texto o simulador será entendido como uma função não linear que associa uma resposta a um conjunto de variáveis de entrada, algumas daquelas incertas. No contexto de reservatórios de petróleo a porosidade e a permeabilidade do meio serão as entradas típicas, a produção acumulada de óleo e a produção acumulada de gás serão possíveis respostas. O método de colocação probabilística, assim como os demais métodos estocásticos, propõem não uma solução que desconsidere as incertezas do problema, pelo contrário, esses métodos propagam essas incertezas de maneira tal que permitem inferir médias e intervalos de confiança. Essas informações enriquecem os resultados da simulação.

Para a indústria do petróleo, a propagação de incertezas em reservatórios permite avaliar com mais confiança o risco de investimentos em atividades de exploração e produção. Valores vultosos de dinheiro podem ser perdidos por conta de uma previsão errônea.

A partir de agora *métodos* se referirá neste artigo apenas aos métodos computacionais estocásticos. Nesse universo, os métodos mais eficientes serão aqueles que necessitem de menos realizações para convergir. O elevado número de realizações é o grande problema do método de Monte Carlo, que apesar desse inconveniente, é um dos métodos mais utilizados na propagação de incertezas por sua fácil implementação. O MCP se mostra bastante eficiente para problemas com um número reduzido de variáveis aleatórias, se comparado ao método de Monte Carlo. Simuladores de reservatórios podem levar horas ou dias em uma única resolução, o que torna o método de Monte Carlo não aplicável para estas situações. O método de colocação probabilística por sua rápida convergência, pode ser aplicado nestes casos.

2. METODOLOGIA

O cerne do método está em avaliar numericamente integrais que representam esperanças e variâncias de variáveis aleatórias. Essas integrais envolvem uma função densidade de probabilidade que para o MCP têm a importante propriedade de serem positivas e contínuas no intervalo de integração de interesse. A avaliação é feita através de uma quadratura eficiente.

2.1 Quadratura gaussiana

Pretende-se calcular integrais da forma:

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx \quad \omega(x) \geq 0 \text{ e contínua em } [a, b] \quad (1)$$

como qualquer outra quadratura (Stoer and Bulirsch, 1992), a aproximação será feita como segue:

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx \approx \sum_k W_k f(x_k) \quad (2)$$

onde $W_k = \int_a^b \omega(x)\ell_k(x)dx$ e ℓ_k o polinômio de Lagrange no ponto x_k . Esses pontos de interpolação são obtidos, definindo no espaço dos polinômios de \mathbb{R} em \mathbb{R} , o produto interno $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_a^b \omega(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx$, com esse produto definido e a base canônica $\{1, x, x^2, \dots\}$, obtêm-se através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma família de polinômios ortogonais $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1 \\ \phi_1(x) &= x - Proj_{\phi_0}^x \\ \phi_2(x) &= x^2 - Proj_{\phi_1}^{x^2} - Proj_{\phi_0}^{x^2} \\ &\vdots \\ \phi_p(x) &= x^p - Proj_{\phi_{p-1}}^{x^p} - Proj_{\phi_{p-2}}^{x^p} - \dots - Proj_{\phi_0}^{x^p} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3)$$

$Proj_v^u$ denota a projeção $\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}v$. Cada polinômio ortogonal ϕ_n assim obtido possui n raízes distintas no intervalo aberto (a, b) , essas raízes são os pontos de interpolação procurados. Vale frisar que integrais sobre toda a reta $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ podem ser efetuadas.

2.2 Colocação probabilística para uma única variável aleatória

O método será abordado nessa seção para uma única entrada incerta, por simplicidade. A passagem para múltiplas variáveis será feita na seção seguinte com o uso do teorema de Fubini.

Seja X a (única) entrada incerta do simulador, a relação entre a variável de interesse de saída do simulador, Y , e essa entrada será expressa por uma função não-linear desconhecida da forma $Y = S(X)$. Y é portanto uma função de uma variável aleatória. Se f é a função densidade de probabilidade de X definida em (a, b) , o valor esperado da resposta e a variância são dados respectivamente por:

$$E(Y) = \int_a^b S(x)f(x)dx \quad (4)$$

$$V(Y) = \int_a^b [S(x) - E(Y)]^2 f(x)dx \quad (5)$$

como a variância de Y depende diretamente de sua esperança, o estudo será construído respeitando essa ordem natural. A integral que aparece na Eq. (4) será avaliada numericamente através da quadratura gaussiana. Com efeito, f por ser uma função densidade de probabilidade, é positiva e contínua em (a, b) . Os pontos de quadratura ou pontos de colocação e os pesos são unívocamente determinados por f .

$$\int_a^b S(x)f(x)dx \approx \sum_k W_k S(x_k) \quad (6)$$

A ordem da quadratura é o grau do polinômio ortogonal escolhido à priori, esse polinômio surge do produto interno $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_a^b f(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx$. Na verdade, o que se faz não é utilizar diretamente f , algumas manipulações no

integrando possibilitam o uso de polinômios conhecidos e bem implementados, e poupam o trabalho árduo de implementar novos polinômios. O método será mostrado a seguir para algumas distribuições usuais, enfatizando as manipulações mencionadas e as respectivas famílias de polinômios ortogonais, segundo o esquema de Wiener-Askey (Eldred *et al.*, 2008).

Distribuição uniforme. Em reservatórios, a distribuição uniforme pode servir como primeira aproximação para avaliar qualitativamente o efeito das incertezas nas propriedades petrofísicas. O raciocínio que segue pode também ser aplicado a distribuição triangular, com a diferença prática de subdividir o domínio de integração de acordo com a função densidade de probabilidade. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $E(Y) = \int_a^b S(x) \frac{1}{b-a} dx$. A manipulação é feita com o intuito de normalizar o intervalo $[a, b] \mapsto [-1, 1]$. Basta fazer a mudança de variável $u = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$ e a esperança se transforma em:

$$E(Y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}\right) du \quad (7)$$

tomando como função de ponderação $\omega(x) = 1$ no intervalo $[-1, 1]$, a quadratura gaussiana recai nos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1 \\ \phi_1(x) &= x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} 1 = x \\ \phi_2(x) &= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} 1 = x^2 - \frac{1}{3} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

existe uma classe de polinômios, conhecidos por *polinômios de Legendre* ou *funções de Legendre* que satisfazem a equação diferencial de Legendre:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (9)$$

os polinômios acima obtidos fazem parte dessa classe e muitas implementações se encontram disponíveis em diversas linguagens de programação. A quadratura de Gauss-Legendre pode então ser efetuada:

$$E(Y) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W_k S\left(\frac{b-a}{2}x_k + \frac{b+a}{2}\right) \quad (10)$$

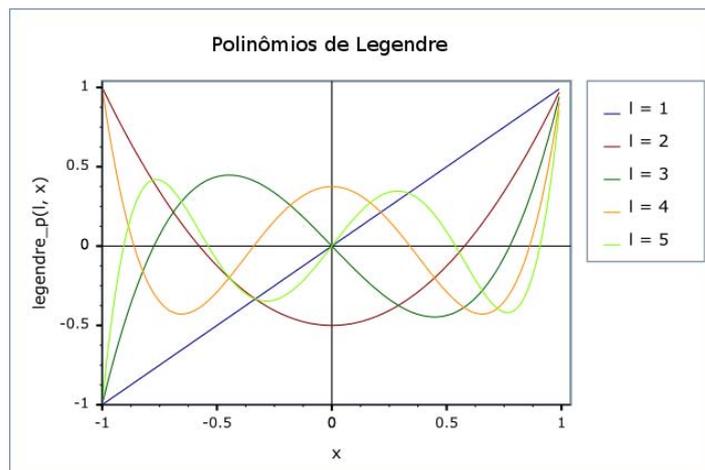


Figura 1. Alguns polinômios de Legendre

Distribuição normal. No caso da variável de entrada incerta possuir distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a integração é feita sobre toda a reta:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (11)$$

com o auxílio da substituição $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma}}$, a Eq. (11) pode ser reescrita como:

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} S(\sqrt{2\sigma}u + \mu) du \quad (12)$$

fica claro agora a escolha para a função de ponderação $\omega(x) = e^{-x^2}$ e para o domínio de integração \mathbb{R} . A ortogonalização de Gram-Schmidt leva aos *polinômios de Hermite*:

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \quad (13)$$

a quadratura de Gauss-Hermite fornece:

$$E(Y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n W_k S(\sqrt{2\sigma}x_k + \mu) \quad (14)$$

A distribuição normal é sem dúvida a mais utilizada em vários ramos da ciência, porém para alguns fenômenos físicos a variável aleatória não pode assumir valores negativos. A permeabilidade e a porosidade constituem exemplos claros de variáveis não negativas em problemas de fluxo em meios porosos e há a necessidade de uma distribuição que seja intuitiva como a distribuição normal, que leve em consideração a não negatividade e principalmente, que represente bem variáveis com extensa faixa de valores como é o caso da permeabilidade em problemas dessa natureza.

Distribuição log-normal. A função densidade de probabilidade $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$ é definida em $(0, \infty)$.

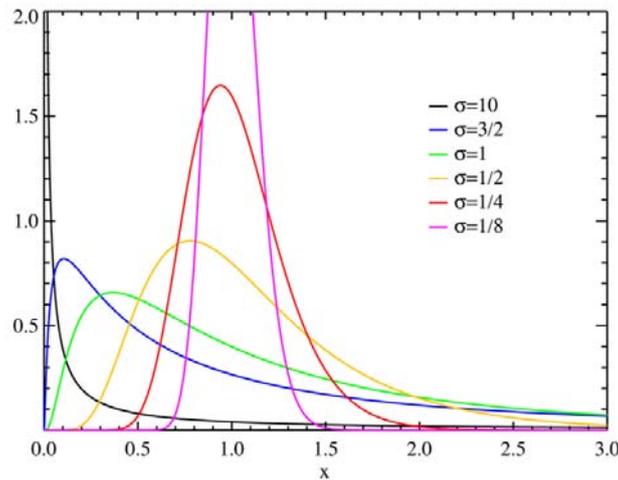


Figura 2. Distribuições log-normais

De maneira semelhante a distribuição normal, a substituição $u = \frac{\ln(x)-\mu}{\sqrt{2\sigma}}$ leva à integral:

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} S(e^{\sqrt{2\sigma}u+\mu}) du \quad (15)$$

novamente a quadratura de Gauss-Hermite é utilizada, a fórmula de quadratura é da forma:

$$E(Y) \approx \sum_{k=1}^n W_k S(e^{\sqrt{2\sigma}x_k+\mu}) \quad (16)$$

Distribuição exponencial. Outra distribuição útil para variáveis não negativas. Nesse caso $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Existem polinômios conhecidos por *polinômios de Laguerre* que são obtidos segundo o produto interno $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} \phi_1(x) \phi_2(x) dx$:

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n] \quad (17)$$

a função densidade de probabilidade f pode ser adaptada por meio da substituição $u = \alpha x$, a quadratura resultante é conhecida por quadratura de Gauss-Laguerre:

$$E(Y) \approx \sum_{k=1}^n W_k S\left(\frac{x_k}{\alpha}\right) \quad (18)$$

Para a obtenção de um intervalo de confiança, a variância é resolvida, em todos os casos acima, da mesma forma que foram resolvidas as esperanças, agora o valor $E(Y)$ é conhecido. As expressões não serão mostradas por motivo de espaço.

2.3 Múltiplas variáveis

Antes de obter uma maneira de generalizar os resultados da seção anterior para múltiplas variáveis, é necessário uma explanação do que se precisa na prática para propagação de incertezas em simuladores de reservatório de petróleo. Quando são consideradas apenas incertezas nas propriedades petrofísicas, é possível aplicar métodos de decomposição espectral, como a expansão de Karhunen-Loeve, que descrevem um campo estocástico em termos de variáveis aleatórias normais padrão independentes (Sarma *et al.*, 2007; Ghanem, 1997). Neste contexto, a integração em múltiplas variáveis pode ser feita com a consideração de que a função densidade de probabilidade conjunta é igual ao produto das funções densidade de probabilidade de cada variável. Com essa hipótese, pode se passar ao formalismo sem mais preocupações.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um vetor aleatório de variáveis independentes sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, com função densidade de probabilidade conjunta $f_X = \prod_{i=1}^n f_i$ o valor esperado da resposta de interesse do simulador e o segundo momento são dados respectivamente por:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1, x_2, \dots, x_n) f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (19)$$

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [S(x_1, x_2, \dots, x_n) - E(Y)]^2 f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (20)$$

o teorema de Fubini (Fell and Doran, 1988) diz que dados A e B espaços mensuráveis, se $\int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y) < \infty$ então:

$$\int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy \quad (21)$$

a Eq. (19), assim como a Eq. (20), podem ser reescritas:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1, x_2, \dots, x_n) f_n(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \quad (22)$$

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} [S(x_1, x_2, \dots, x_n) - E(Y)]^2 f_n(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \quad (23)$$

a quadratura pode então ser efetuada (Kuonen, 2001):

$$E(Y) \approx \sum_i \sum_j \dots \sum_k W_i^1 W_j^2 \dots W_k^n S(x_i^1, x_j^2, \dots, x_k^n) \quad (24)$$

$$V(Y) \approx \sum_i \sum_j \dots \sum_k W_i^1 W_j^2 \dots W_k^n [S(x_i^1, x_j^2, \dots, x_k^n) - E(Y)]^2 \quad (25)$$

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O método foi implementado segundo a filosofia de orientação a objeto, o que torna o programa mais legível e facilita futuras alterações. A linguagem escolhida para tanto foi a linguagem C++. As classes são abaixo apresentadas em um diagrama UML. A classe *RandomVariable* carrega consigo o nome da distribuição e parâmetros a ela associados, esses dados são lidos de um arquivo auxiliar lido pelo programa. O simulador ao qual se deseja acoplar o método de colocação probabilística deve ser uma classe derivada de *Simulator*, como é o caso de *BoastII*. A única implementação a ser feita é a do operador $()$ que relaciona as entradas incertas com as respostas de interesse do simulador, um sistema “black box” (Ramamurthy, 2005). O problema envolve um vetor aleatório de entrada e um simulador, abstraídos na classe *Problem*.

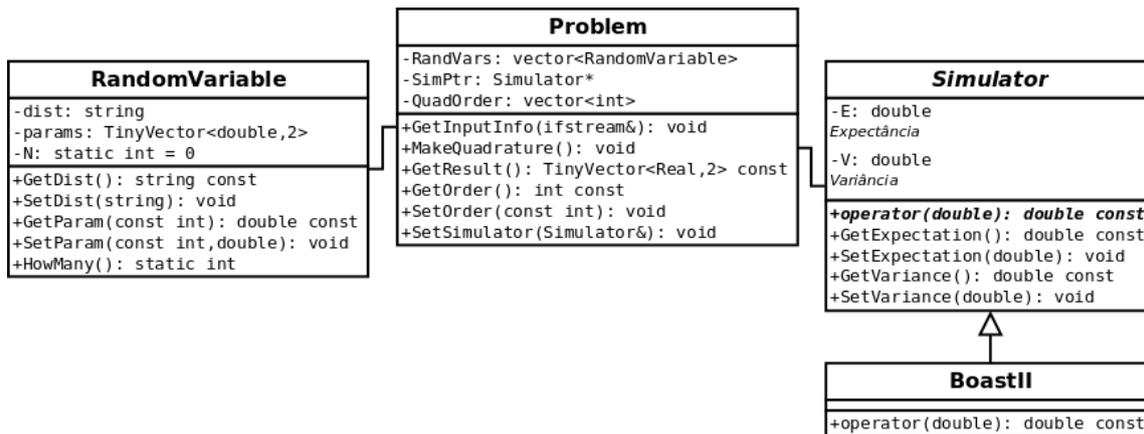


Figura 3. Diagrama de classes

4. SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIO

É apresentado nesta seção o problema de reservatório estudado. Um modelo de Five-Spot em areia de filão, exemplo 4 que consta no manual do BoastII (Stapp and Allison, 1989). As diversas variáveis incertas englobam a porosidade do meio poroso, o tensor permeabilidade, etc. Foi justificada por meio de gráficos, a necessidade de se propagar as incertezas nesses tipos de problema. O método de colocação probabilística será comparado com o método de Monte Carlo (Ehlers, 2004). A diferença na “convergência” dos dois métodos se mostrará considerável.

4.1 Simulador

O Boast II foi o simulador de reservatório utilizado. É um simulador numérico baseado em diferenças finitas, com formulação IMPES (implicit pressure/explicit saturation). Simula o escoamento trifásico (gás, óleo e água) em meios porosos regido pela lei de Darcy, isotérmico e em três dimensões (Fanchi *et al.*, 1982). Foi empregado neste trabalho por ter distribuição livre e poder ser executado em qualquer computador sem restrições de licença.

4.2 Modelagem do problema

O reservatório foi modelado com duas camadas, cada camada é constituída de 19x19 blocos, totalizando 722 blocos. Cada bloco tem 76x76x20 pés cúbicos. A porosidade foi definida por camadas, sendo 0.12 na camada superior (camada 1) e 0.28 na inferior (camada 2). A permeabilidade na direção X é 20.0mD para a camada 1 e 100.0mD para a camada 2, esses valores também valem para a direção Y. A permeabilidade vertical é 5.0mD para todos os blocos do reservatório. A simulação é realizada em 1460 dias virtuais. A Tab. (1) resume todas as propriedades mencionadas.

Tabela 1. Porosidades/Permeabilidades

Propriedades	Notação	Valor
Porosidade na camada superior	ϕ_1	0.12
Porosidade na camada inferior	ϕ_2	0.28
Perm. na direção X (1)	K_{x1}	20.0mD
Perm. na direção Y (1)	K_{y1}	20.0mD
Perm. na direção Z (1)	K_{z1}	5.0mD
Perm. na direção X (2)	K_{x2}	100.0mD
Perm. na direção Y (2)	K_{y2}	100.0mD
Perm. na direção Z (2)	K_{z2}	5.0mD

A saturação de água conata é 0.12 e a pressão no contato óleo/água a 8425 pés é 4400 psia. No início da exploração, o gradiente de pressão se encarrega de expulsar o óleo pelo único poço produtor que está no centro do reservatório e cuja completação abrange as duas camadas, a vazão de óleo é inicialmente 850 STB/D e sofre diminuição controlada a medida que a reserva é produzida. Após um ano de operação o reservatório está parcialmente depletado, o produtor passa a condição de controle de pressão mínima de fundo, 500 psia, e se inicia o processo de recuperação secundária por injeção de água através de quatro poços injetores completados nos cantos da camada inferior, cada poço injetor apresenta uma vazão de 500 STB/D a uma pressão máxima de 5000 psia.

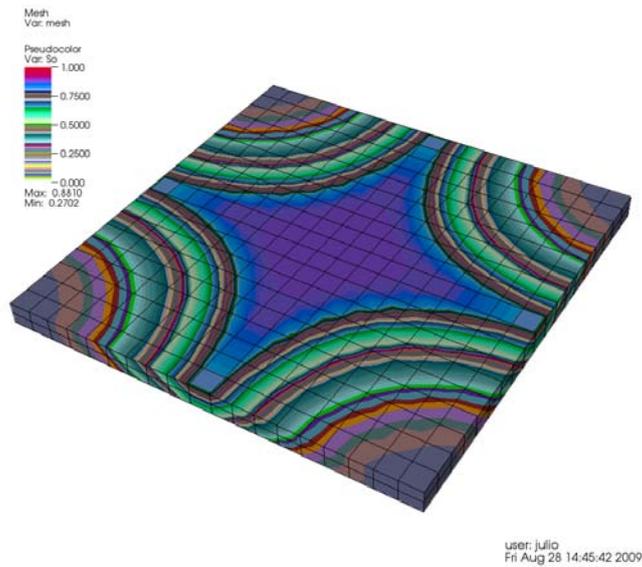


Figura 4. Saturação de óleo durante a injeção de água.

Foi feita apenas uma breve exposição do modelo determinístico do reservatório. Para um melhor entendimento ou tentativa de reprodução vide (Stapp and Allison, 1989).

4.3 Propagação de incertezas

O primeiro passo é admitir que algumas das propriedades citadas na Tab. (1) são incertas, o que por si só não é uma informação relevante. Algumas respostas podem não ser afetadas por essas incertezas, e não haveria razão alguma em tentar propagá-las. Os gráficos a seguir ilustram a influência das porosidades de cada camada e das permeabilidades horizontais na produção acumulada de óleo e provam que a propagação será útil para essa resposta do simulador.

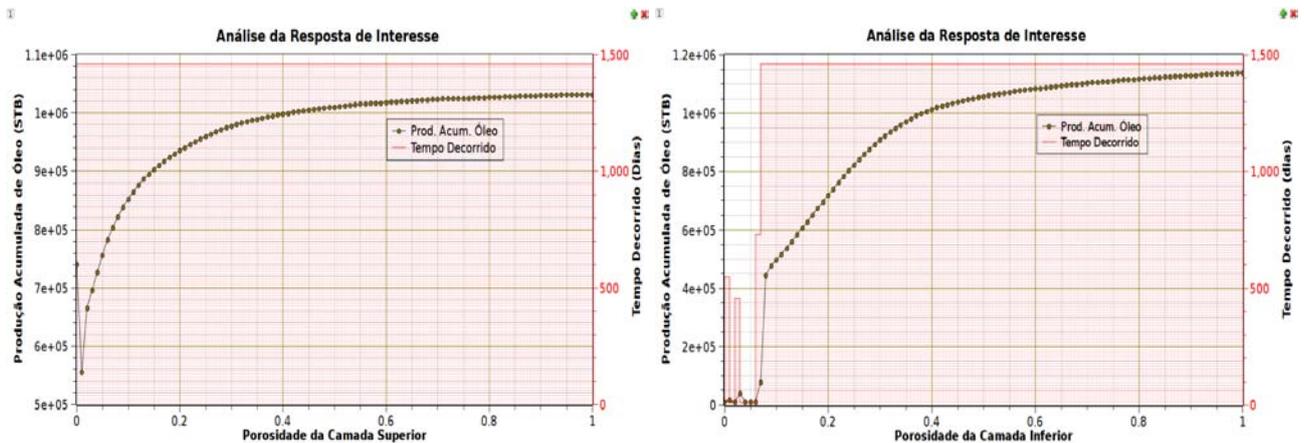


Figura 5. Produção acumulada de óleo em função das porosidades de cada camada

A produção acumulada de óleo varia de acordo com a escala do lado esquerdo de cada gráfico da Fig. (5), as escalas do lado direito, de cor vermelha, se referem ao número de dias para o término de cada simulação. Essa análise se mostra necessária, já que para alguns valores de porosidade os limites de pressão no reservatório são ultrapassados, o que provoca uma finalização precoce da simulação. Sendo assim, se optou por intervalos nos quais a simulação termina com 1460 dias, como previamente estipulado.

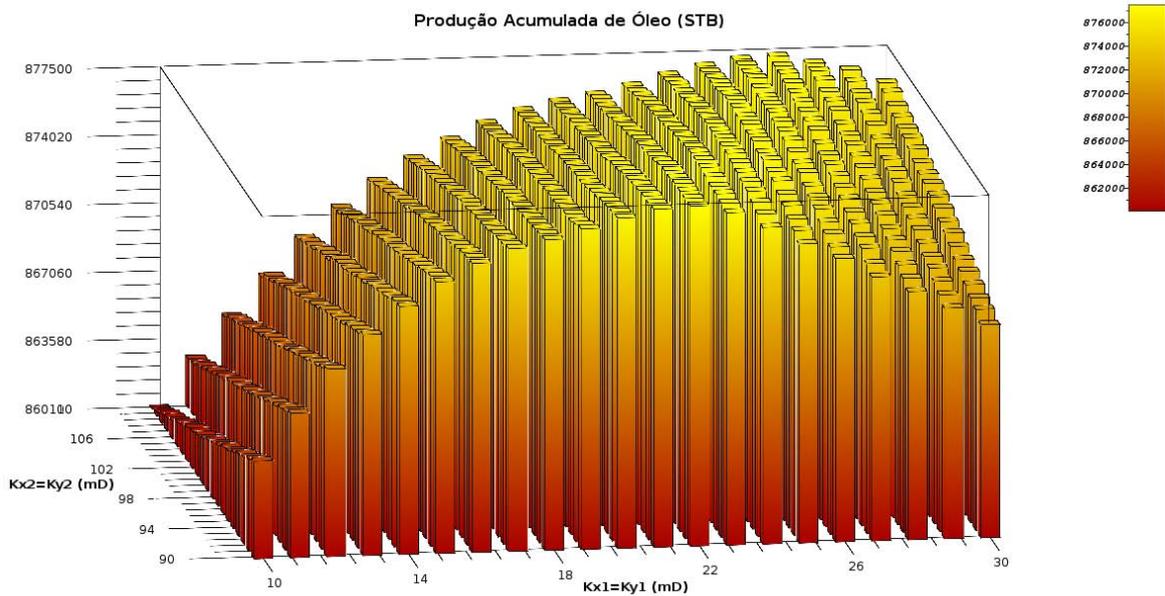


Figura 6. Produção acumulada de óleo em função das permeabilidades horizontais

Já a Fig. (6) diz respeito ao modelo 2D adotado para as permeabilidades. Cada camada do reservatório possui uma única permeabilidade horizontal, de forma que os eixos X e Y representam as permeabilidades de cada camada. O eixo Z, a produção acumulada de óleo em STB.

Vale notar que a saída escolhida apresenta um comportamento suave, isso é de extrema valia para o MCP, a não-suavidade prejudica o método que aproxima indiretamente a resposta do simulador por polinômios. Nesses casos, a solução é dividir o domínio em subdomínios nos quais a resposta de interesse é suave, o famoso paradigma “Dividir e Conquistar”. O método de colocação probabilística multi-elemento (MCP-ME) se firma nesse paradigma (Foo *et al.*, 2008) e será apresentado em trabalhos futuros.

CASO 1 - Porosidades Incertas. No primeiro caso se admitiu que as porosidades eram uniformemente distribuídas, $\phi_1 \sim U(0.1, 0.4)$ e $\phi_2 \sim U(0.15, 0.6)$. A escolha dos intervalos teve em vista a Fig. (5). Todos os casos utilizaram como critério de parada, $\max \left\{ \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right|, \left| \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|, \dots, \left| \frac{x_{i+5} - x_{i+4}}{x_{i+4}} \right| \right\} \leq 10^{-4}$. Em palavras: a simulação será finalizada quando o máximo dentre os últimos 5 erros relativos for menor ou igual a tolerância 10^{-4} . Esse critério diminui as chances do método de Monte Carlo cessar sem ter “convergido”.

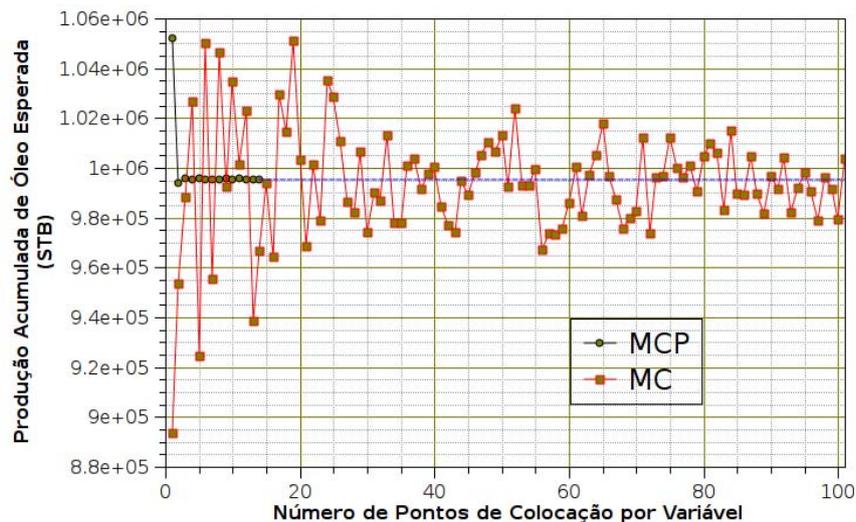


Figura 7. Análise de Convergência - Esperança

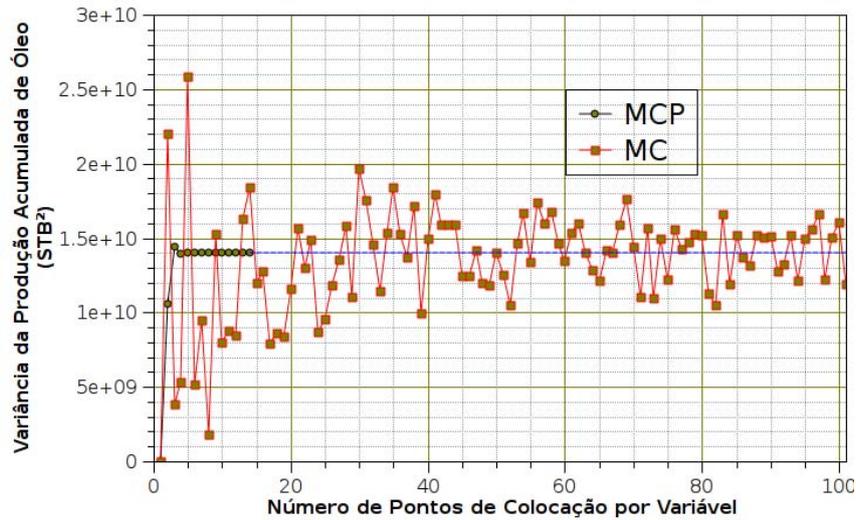


Figura 8. Análise de Convergência - Variância

Nestas condições, 14 pontos de colocação para cada porosidade são necessários para que o MCP convirja, o método de Monte Carlo ainda apresenta grandes oscilações até a submissão deste trabalho. As linhas tracejadas em azul servem de referência (os últimos valores computados pelo MCP). O critério de parada não foi o melhor possível já que foi imposto sobre a esperança. Deve-se ter em mente que a variância, por possuir um integrando que depende do quadrado do simulador, exigirá mais pontos para convergir do que a esperança.

CASO 2 - Permeabilidades Incertas. A Tab. (2) esclarece as V.A.'s do problema. K_1 tem distribuição log-normal com parâmetros μ e σ^2 que lhe confirmam um valor esperado de 20mD e variância de 4mD², da mesma forma, K_2 tem distribuição log-normal com valor esperado 100mD e variância 100mD².

Tabela 2. CASO 2

Camada	K_x	K_y
1	K_1	K_1
2	K_2	K_2

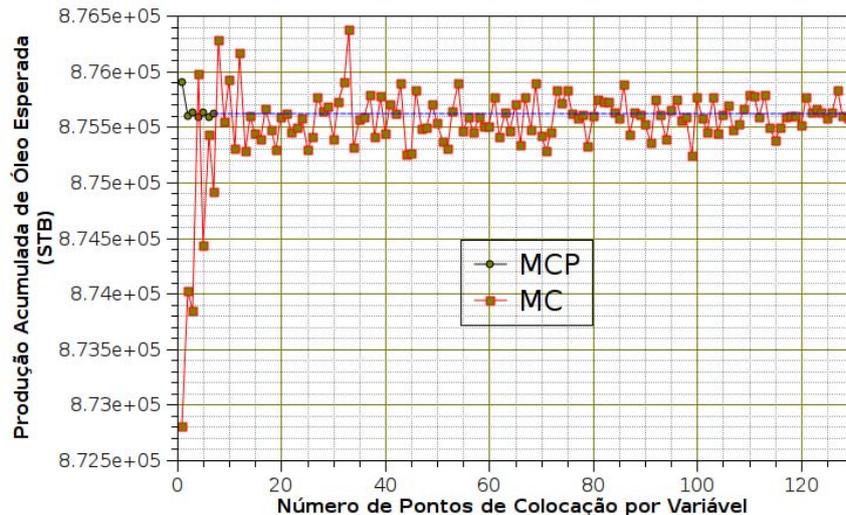


Figura 9. Análise de Convergência - Esperança

O MCP atendeu ao critério de parada com 7 pontos para cada V.A, o método de Monte Carlo por sua vez não conseguiu satisfazer a tolerância até a submissão do trabalho. A convergência quase certa é bastante lenta, mas a diminuição do erro é garantida pela lei forte dos grandes números.

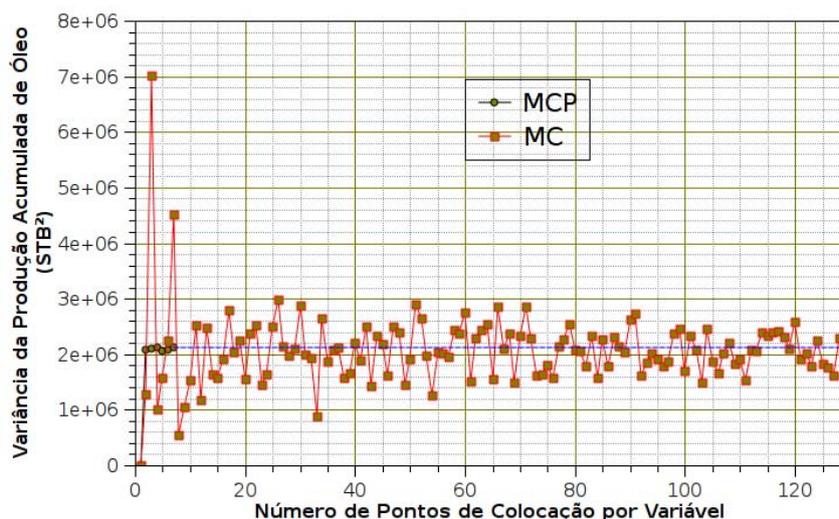


Figura 10. Análise de Convergência - Variância

5. CONCLUSÃO

Propagar incertezas em reservatórios de petróleo é crucial para avaliações de valor econômico mais realistas. Se essas avaliações puderem ser feitas com mais rapidez, a tomada de decisões também o será. O método de colocação probabilística é um forte candidato dentre os métodos estocásticos para uma boa previsão a partir de poucas realizações, essas demandam muito tempo de simulação e métodos como os de Monte Carlo se tornam inviáveis.

Agradecimentos

À ANP pela bolsa concedida através do projeto de recursos humanos PRH-26.

6. REFERÊNCIAS

- Ehlers, R.S., 2004. *Métodos Computacionalmente Intensivos em Estatística*. Universidade Federal do Paraná.
- Eldred, M.S., Webster, C.G. and Constantine, P.G., 2008. "Evaluation of non-intrusive approaches for wiener-asky generalized polynomial chaos".
- Fanchi, J.R., Harpole, K.J. and Bujnowski, S.W., 1982. *Boast: A three-dimensional, three-phase black oil applied simulation tool. Technical Description and FORTRAN Code*, Vol. 1. Keplinger and Associates, INC.
- Fell, J.M.G. and Doran, R.S., 1988. *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles*, Vol. 1. Academic Press, INC.
- Foo, J., Wan, X. and Karniadakis, G.E., 2008. "The multi-element probabilistic collocation method: Error analysis and applications". *Journal of Computational Physics*.
- Ghanem, R., 1997. "Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Kuonen, D., 2001. "Numerical integration in s-plus or r: A survey".
- Ramamurthy, D., 2005. "Smart simulation techniques for the evaluation of parametric uncertainties in black box systems".
- Sarma, P., Durlafsky, L.J. and Aziz, K., 2007. "Kernel principal component analysis for efficient, differentiable parametrization of multipoint geostatistics".
- Stapp, L.G. and Allison, E.C., 1989. *Handbook for Personal Computer Version of BoastII: A Three-Dimensional, Three-Phase Black Oil Applied Simulation Tool*. Bartlesville, Oklahoma.
- Stoer, J. and Bulirsch, R., 1992. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag New York, INC, 2nd edition.

7. DIREITOS AUTORIAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

UNCERTAINTY PROPAGATION FOR OIL RESERVOIR USING PROBABILISTIC COLLOCATION METHOD WITH MULTIPLE VARIABLES.

Júlio Hoffmann Mendes, julio_hoffiman@hotmail.com¹
Ramiro Brito Willmersdorf, ramiro@willmersdorf.net²

¹Center for Technology and Earth Sciences, Pernambuco Federal University, Acadêmico Hélio Ramos Street, 50740-530, Recife - PE - Brazil,

²Center for Technology and Earth Sciences, Pernambuco Federal University, Acadêmico Hélio Ramos Street, 50740-530, Recife - PE - Brazil

Development activities and management of hydrocarbon reservoirs are now heavily based on intensive computer simulations of various physical models: models of flow in porous reservoir, geomechanical model of the reservoir and economic models. All these models are characterized by partial differential equations that have traditionally been solved with the hypothesis that their coefficients and primary variables have a deterministic character. We can see that the deterministic analysis is no longer enough to provide all the information characteristics of these problems, and it is considered that some of the quantities that describe the problem are not known precisely. One of the classic techniques for this treatment is the method of Monte Carlo. This paper presents an implementation of an alternative to this method, which is suitable for problems where the number of uncertain variables is not very large, the Probabilistic Collocation Method (PCM). The mathematical tool behind the method is integration by Gaussian quadrature, which is strongly linked to orthogonal polynomials. For normal distributions as normal, exponential, uniform, etc.. Polynomials in which the method rests are well known: Legendre, Laguerre and Hermite. Applications will be presented in the PCM simulation of oil reservoirs in multiple variables.

Keywords: Gaussian quadrature, Orthogonal polynomials, Uncertainty propagation, Probabilistic collocation