

## **MODELAGEM DE TENSÃO DE PONTE E AUMENTO DA TENACIDADE A FRATURA DE MATRIZ FRÁGIL POR FIBRAS**

Wang Chong, [wangchong@unipampa.edu.br](mailto:wangchong@unipampa.edu.br)<sup>1</sup>  
Alcione Rafael Pavan, [alcioneraphael@gmail.com](mailto:alcioneraphael@gmail.com)<sup>2</sup>  
Kellem de Melo Soares, [kellempv@hotmail.com](mailto:kellempv@hotmail.com)<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centro de Tecnologia de Alegrete, Universidade Federal do Pampa, Av. Tiarajú 810, Ipirabuitã, Alegrete, RS, Brasil, CEP 97546-550.

<sup>2</sup> Faculdade de Dom Alberto, Rua Ramiro Barcelos 892, Centro, Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, CEP 96810-050.

<sup>3</sup> Departamento de Física, Matemática e Estatística, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Rua do Comércio, 3000, Universitário, Ijuí, RS, Brasil, CEP 98700-000.

**Resumo.** Este trabalho aborda o aumento de tenacidade a fratura por fibras inclinadas aleatoriamente em uma matriz frágil. Modelos matemáticos para calcular a tensão de ponte e a contribuição gerada pelas fibras à energia de fratura são sugeridas. O efeito de atrito também está incluído. O processo da tenacificação pela fibra é dividida em pré-descolamento da interface fibra/matriz, descolamento e fibra sendo puxada para fora da matriz (*pull-out*). Na fase pré-descolamento, a competição entre a força de ligação química da interface e da resistência da fibra determina a tensão de ponte. Três modelos são apresentados para a correlação entre a força de tração axial e a aberta da trinca: (1) viga em balanço, (2) deformação de cisalhamento de fibra e (3) rigidez elástica local da matriz perto do ponto onde a fibra sai da matriz. A correlação entre a força de tração axial e comprimento descolado proposto na literatura é empregada na fase de descolagem. A posição final da extremidade móvel de uma fibra totalmente descolada no início de *pull-out* é obtida em termos da deformação da fibra e da aberta da trinca. No seguido processo de *pull-out*, atrito linear ou um relacionamento quadrático entre o atrito e o deslocamento é usado de acordo com os tipos de fibra. A influência das propriedades mecânicas da fibra e da matriz sobre a tenacificação é investigada. A comparação dos resultados obtidos com os modelos atuais e com os de experimentos e os de outros modelos na literatura, revelou a necessidade de acrescentar as considerações nos modelos presentes como o efeito de quebra da matriz (*spalling*), deformação localizada perto do ponto de saída da fibra na matriz, a possibilidade de ocorrência de plasticidade, bem como a correlação entre a força axial de fibra e o avanço da descolagem da interface.

**Palavras-chave:** *tenacificação, composto reforçado por fibra, tensão de ponte, interface fibra/matriz, processo de pull-out.*

### **1. INTRODUÇÃO**

A cerâmica avançada tem propriedades peculiares que a tornam ideais para as mais diversas aplicações de campos de alta tecnologia. No entanto, esses materiais são frágeis, e a facilidade de se trincar é seu principal problema, sendo motivo de avançados estudos/pesquisas para aumentar a capacidade da cerâmica de resistir à fratura e ampliar suas aplicações. O aprimoramento da fragilidade ou a tenacificação (*toughening*) da cerâmica é alvo de muitas pesquisas ao redor do mundo. Vários mecanismos têm sido desenvolvidos, por exemplo, tenacificação por microtrincas, tenacificação por transformação de fases, tenacificação por partículas e tenacificação por micro fibras ou bigodes (*whisker*) (Evans, 1984; Victor, 1992; Stam, 1994 e Shah, 1996). Entre os mecanismos usados para aumentar a tenacidade a fratura, o que tem mostrado melhor resultado é a tenacificação por fibras.

Objetiva-se nesta pesquisa, aplicando as teorias da mecânica da elasticidade e da mecânica da fratura, propor modelos matemáticos que possam calcular as forças e tensões às quais as fibras estão sujeitas quando uma trinca principal aparece na matriz frágil, assim como a tenacidade que essas fibras irão contribuir para o composto cerâmico.

### **2. MODELOS PARA CALCULAR A TENACIFICAÇÃO POR MICRO FIBRAS**

Existem muitos pesquisadores dedicados ao estudo dos efeitos da adição de fibras em materiais compostos quando uma trinca principal se propaga. Há vários modelos na literatura para prever o comportamento desses materiais (Wang, 1988; Li, 1991; Lin, 1999 e Fantilli, 2008).

Os modelos para prever o aumento de tenacidade estão envolvidos diretamente com a relação de tensão proveniente por fibras: tensão de ponte (*bridging stress*) com a abertura da trinca, baseando-se em vários processos e efeitos como descolagem da interface fibra/matriz (*debonding*), fibra sendo puxada para fora da matriz (*pull-out*) ou escorregamento (*slip*). O tipo de fibra considerada, dúctil ou frágil, é de extrema importância para avaliar a tensão de ponte que as mesmas agregam ao composto.

A metade de cada microfibras, que está cruzando com o plano da trinca, foi tratada como uma viga em balanço, sujeita a uma força axial e uma força cortante na extremidade livre. Através das fórmulas de deslocamentos da viga elástica, realizou-se a análise da forma geométrica de uma fibra deformada. Ainda com a base da teoria de elasticidade, foram propostos modelos matemáticos para análise dos processos de descolagem (*debonding*) entre uma fibra com a matriz e para quando a fibra é puxada para fora da matriz (*pull-out*). Pelos modelos, calculou-se a resistência aparente de uma única fibra inclinada, sendo está à tensão máxima antes da fibra se romper (*apparent strength*). Ainda, desenvolveram-se os modelos para calcular a tensão gerada por fibras distribuídas aleatoriamente na matriz com dada fração volumétrica (*bridging stress*) e o aumento da tenacidade que as mesmas atribuem ao composto. Para este último, métodos numéricos para o cálculo de integrais triplas e equações de terceira ordem foram utilizados. Nos modelos, quase todas as propriedades mecânicas foram envolvidas. Os resultados foram obtidos através de implementação em MATLAB.

De maneira geral, a fibra está enterrada na matriz sob um ângulo com o plano da trinca, e uma combinação de efeitos ocorre (Fig. (1)).

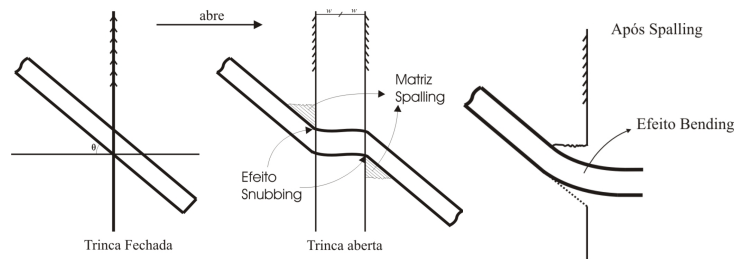


Figura 1. Ilustração dos efeitos *snubbing*, *spalling* e *bending*.

Durante o processo de descolagem, altas tensões são aplicadas na fibra, com isso, a força concentrada no local de saída da fibra da matriz faz com que a matriz quebre (*spalling*). Após descolagem completa, entra no processo *pull-out* (Fig. (2)), onde o atrito entre a superfície da fibra e a matriz ( $\tau_0$ ) assume total controle do processo. Também durante o processo de arrancamento, a fibra é puxada para fora da matriz do mesmo modo que uma corda passa por um polia, o que aumenta o atrito  $f$  (efeito de *snubbing*), faz a fibra mudar à direção (efeito *bending*) além de possibilitar a incidência de deformação plástica na fibra no ponto da saída da matriz. O efeito *spalling*, assim como a deformação plástica, não são considerados neste trabalho.

## 2.1. Tensão Proveniente das Fibras no Plano Trincado (*Bridging Stress*)

A tensão no composto é obtida pela soma das contribuições individuais que cada fibra atribui ao composto, então, um material reforçado com uma fração volumétrica  $V_f$  de fibras distribuídas aleatoriamente na matriz com um ângulo  $\theta$  à normal ao plano da trinca, a tensão proveniente das fibras no plano trincado (*bridging stress*), em relação à meia abertura  $w$ , é dada por Li et al (1991):

$$\sigma_c(w) = \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/2d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta \quad (1)$$

onde  $N(w, \theta, z)$  é a força axial na fibra em seu respectivo processo e  $P(\theta)$  e  $p(z)$  são as probabilidades de ocorrer a distância  $z$  do centro da fibra até o plano da trinca e a orientação do ângulo  $\theta$  entre a fibra e o plano perpendicular ao plano da trinca (Fig. (3)), definidos por  $p(z) = 2/L_f$  para  $0 \leq z \leq [L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta)]/2$  e  $P(\theta) = \sin(\theta)$  para  $0 \leq \theta \leq \arctan(L_f/2d_f)$ .

## 2.2. Relação entre a Força Axial $N$ e a Meia Abertura $w$ da Trinca, antes da Ocorrência de Descolagem na Interface Fibra/matriz

Pela Eq. (1) sabe-se que a determinar da força axial  $N$  em relação a  $w$ ,  $\theta$  e  $z$  é fundamental na obtenção da tensão de ponte. Propõe-se três modelos para essa relação.

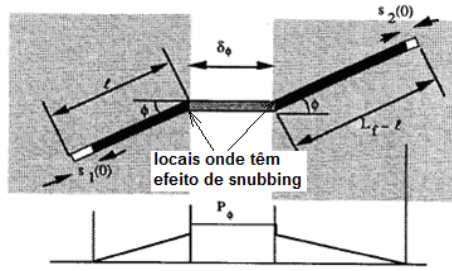


Figura 2. Pull-out para comprimento enterrado  $l$  (Li, 1991).

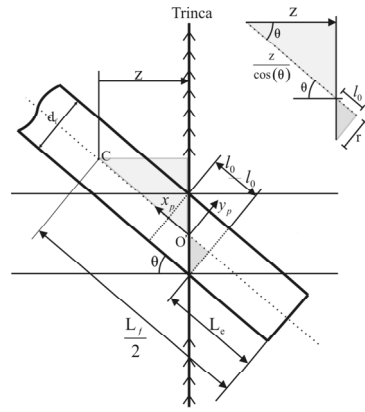


Figura 3. Fibra antes da trinca abrir.

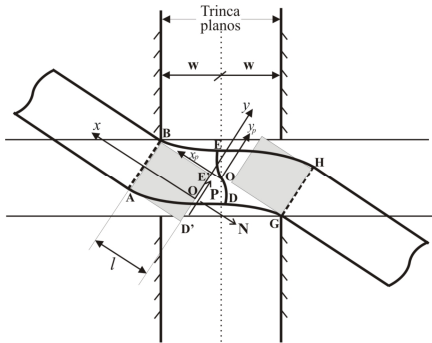


Figura 4. Deformação da fibra após abertura da trinca.

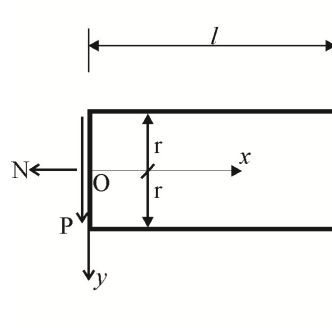


Figura 5. Fibra tratada como uma viga em balanço.

### 2.2.1. Modelo 0: Viga em balanço

Quando os planos da trinca abrem para  $2w$ , uma parte da fibra se deformará (ABGH) como mostra a Fig. (4). Imagina-se que ao cortar a fibra por uma trajetória DOE, que passa pelo centro O, a parte ABDE irá voltar como um bloco retangular ABD'E' com comprimento  $l$ . Podemos considerar que se aplicarmos uma força cisalhante  $P$  e uma força normal  $N$  ao lado D'E', o bloco irá deformar para ABDE. Então podemos utilizar a solução elástica de um bloco em balanço com comprimento  $l$  submetido a uma força transversal  $P$  e uma força axial  $N$  (Fig. (5)). Observando a Fig. (6) com a abertura da trinca para  $2w$ , temos  $|u_0| + l = r \tan(\theta) + w \cos(\theta)$ . Como  $u_0$  desloca no eixo  $x$  no sentido negativo, temos

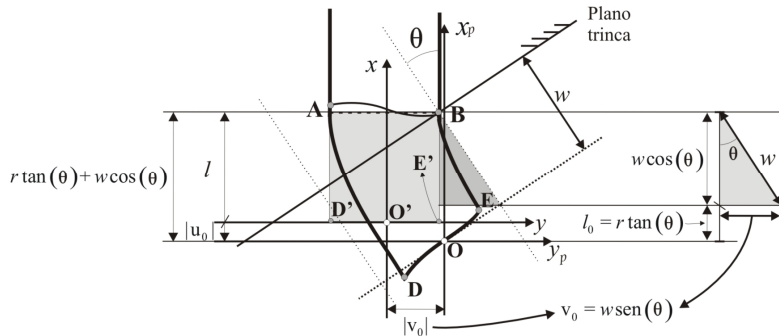


Figura 6. Análise geométrica do deslocamento do centro O.

$$u_0 = l - r \tan(\theta) - w \cos(\theta) \quad (2)$$

$$v_0 = w \sin(\theta) \quad (3)$$

Antes da descolagem, o alongamento da fibra só ocorre na parte do comprimento livre da fibra,  $l_0 = r \tan(\theta)$  e não há o efeito de atrito (snubbing). O alongamento é dado por

$$\Delta l_0 = \frac{N}{E_f A_f} l_0 = \frac{N}{E_f A_f} r \operatorname{tg}(\theta) \quad (4)$$

Pela relação geométrica (Fig. (6)), temos

$$w \cos(\theta) = \Delta l_0 = l_0 \sigma / E_f \quad (5)$$

Então a tensão axial

$$\sigma = E_f w \cos(\theta) / l_0 \quad (6)$$

A tensão máxima ocorre no ponto imediatamente depois da saída da fibra na matriz, cujo valor é

$$\sigma_f = \sigma + |M| r / I \quad (7)$$

onde M é o momento fletor na seção da saída da fibra, expresso por

$$M = Pl - Nv_0 \quad (8)$$

Para o caso de flexão de uma viga em balanço, temos

$$P = 3v_0 E_f I / l^3 \quad (9)$$

### 2.2.2. Modelo I: Deformação de cisalhamento

Para o caso quando  $l$  muito pequeno, pela relação entre tensão de cisalhamento e a deformação angular, temos

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (10)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e a deformação dada por

$$w \cos(\theta) = l \gamma_{xy} = l \tau_{xy} / G \quad (11)$$

como a tensão de cisalhamento é a força dividida pela área da seção de fibra, temos

$$w \cos(\theta) = Pl / A_f G \quad (12)$$

e implica em

$$P = v_0 A_f G / l \quad (13)$$

Neste modelo, terá dois tratamentos para tamanhos diferentes de  $l$ : para  $l \leq 2d_f$ , tratamento por cisalhamento, usando a Eq.(12) e a Eq. (13); para  $l \geq 2d_f$ , tratamento por viga em balanço, usando a Eq.(5) e a Eq. (9).

A razão de escolher  $l \leq 2d_f$  como a faixa de divisão do comprimento longo ou curto para  $l$  é porque consideramos o efeito causado pela força cortante P na distribuição da tensão na saída da matriz. Na verdade a força P é o resultante dos esforços internos na seção transversal na direção da P. A distribuição de tensões e deslocamentos na saída da matriz determinada pela equação da viga em balanço é válida somente quando P não está perto da saída, ou seja, a fibra é comprida, segundo o princípio de Saint-Venant.

### 2.2.3. Modelo II: Rigidez elástica local

Podemos ainda considerar que a força P que comprime a matriz é distribuída na largura do diâmetro da fibra, provocando uma deflexão  $y_B$  na matriz no local comprimido (Fig. (7)), ou seja, deformação localizada.

A força por unidade de comprimento que produz uma deflexão unitária, definida como rigidez da matriz, e com a mesma unidade de tensão é dada por

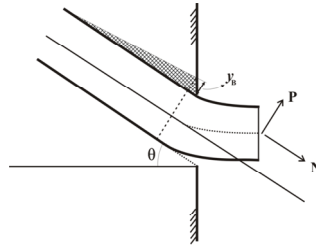


Figura 7. Deflexão  $y_B$  provocada na matriz.

$$K_m = q / y \quad (14)$$

Assim

$$y_B = q / K_m = P / d_f K_m \quad (15)$$

Se a fibra está sobre a superfície da matriz infinita, podemos considerar que a rigidez da matriz é aproximada ao módulo de elasticidade da matriz  $E_m$ .

Como a fibra é inclinada ( $<90^\circ$ ), então a rigidez na direção de P deve ser reduzida, uma vez que a base fosse cortada, portanto podemos considerar essa rigidez como

$$K_m = E_m \cos(\theta) \quad (16)$$

Apesar de a expressão ser apenas uma aproximação ao caso real (que pode ser bem mais complicada que imaginada), a Eq. (16) vale racionalmente, uma vez que  $\theta = 0^\circ$ , a fibra tem suporte totalmente,  $K_m = E_m$ , enquanto que para  $\theta = 90^\circ$ , a fibra não tem nenhum suporte fisicamente.

A deflexão  $y_B$  alivia o deslocamento  $v_0$  do centro O onde P está atuando e, conseqüentemente, relaxa a tensão de flexão provocada por P. Podemos reformular  $v_0$  por

$$v_0 = w \text{sen}(\theta) - y_B = w \text{sen}(\theta) - P / d_f E_m \cos(\theta) \quad (17)$$

Pela Eq. (9) obtemos

$$\frac{P}{E_f I} = \frac{3v_0}{l^3} = \left[ w \text{sen}(\theta) - \frac{3P}{d_f E_m \cos(\theta)} \right] \frac{1}{l^3} \quad (18)$$

pela qual temos

$$P = \frac{3w E_f E_m I d_f \text{sen}(\theta) \cos(\theta)}{d_f E_m l^3 \cos(\theta) + 3E_f I} \quad (19)$$

### 2.3. Relação N-w no Processo de Descolagem

Para o caso em que uma parte da fibra tenha descolado L ( $L < L_e$ ,  $L_e$  é o comprimento inicial enterrado), a tensão média da seção transversal imediatamente antes da saída da matriz é dada por Lin et al (1999)

$$\sigma = \frac{4\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} + \sqrt{\frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f}} = \frac{4\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \quad (20)$$

onde  $\eta = \frac{E_f V_f}{E_n V_m}$ ,  $\sigma_d$  pode ser considerada como sendo a tensão produzida pela descolagem, denotamos por

$$\sigma_d = 8G_d E_f (1+\eta) / d_f \quad (21)$$

$G_d$  é a tenacidade da interface fibra/matriz por unidade de área ( $J/m^2$ ).

Considerando o efeito *snubbing*, a força axial depois da saída imediatamente da matriz é

$$N = \alpha A_f e^{f\theta} = \left[ \pi d_f \tau_0 (1 + \eta) L + \pi d_f \sqrt{G_d d_f E_f (1 + \eta) / 2} \right] e^{f\theta} \quad (22)$$

onde podemos provar que o comprimento descolado possui a forma seguinte:

$$L = L(w) = A.L^3 + B.L^2 + C.L + D \quad (23)$$

sendo  $A = 8\tau_0^2(1 + \eta)^2(e^{f\theta} - 1) / E_f^2 d_f^2$ ,  $B = 2\tau_0(1 + \eta)[E_f + 3\sigma_d(e^{f\theta} - 1)] / E_f^2 d_f$ ,  $D = \sigma_d \pi l_0 d_f e^{f\theta} / 4E_f - w \cos(\theta)$ ,

$$C = 4l_0 \tau_0 (1 + \eta) e^{f\theta} / E_f^2 d_f + \sigma_d \left[ 1 + \sigma_d (e^{f\theta} - 1) / E_f \right] / E_f.$$

#### 2.4. Relação N-w no Processo de *Pull-out*

No processo *pull-out* não existe mais  $\sigma_d$  e o terminal da fibra com maior comprimento enterrado não move mais. A força de atrito assume controle totalmente.

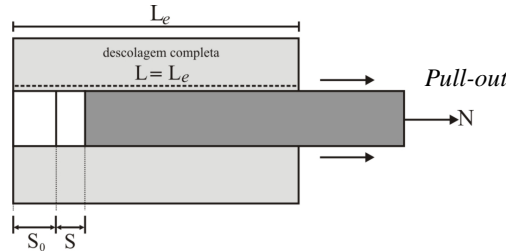


Figura 8. Processo *pull-out*: fibra sendo puxada para fora da matriz.

Podemos supor que o terminal móvel teve deslocamento  $S_0$  (Fig. (8)) no início do processo de *pull-out*, então a força axial depois da saída imediatamente da matriz é

$$N = \pi d_f (L_e - S_0) \tau_0 e^{f\theta} \quad (24)$$

A relação geométrica exige que

$$w_0 \cos(\theta) = \frac{S_0}{2} + \Delta \frac{S_0}{2} + \Delta l_0 = \frac{S_0}{2} + \left( \frac{S_0}{2} + l_0 \right) \frac{N}{E_f d_f} \quad (25)$$

onde  $w_0$  a abertura da trinca para quando  $L = L_e$ , ou seja

$$w_0 \cos(\theta) = \frac{S_0}{2} + \left( \frac{S_0}{2} + l_0 \right) \frac{4\tau_0 (L_e - S_0) e^{f\theta}}{E_f d_f} \quad (26)$$

Pela Eq. (26), podemos obter

$$S_0 = S_0(w_0) = A.S_0^2 + B.S_0 + C \quad (27)$$

com  $A = \frac{-2\tau_0 e^{f\theta}}{E_f d_f}$ ,  $B = \frac{1}{2} + \frac{4\tau_0 e^{f\theta}}{E_f d_f} \left( \frac{L_e}{2} - l_0 \right)$ ,  $C = \frac{4\tau_0 e^{f\theta} L_e l_0}{E_f d_f}$ .

Se  $S_0 \geq L_e$ , a fibra está totalmente fora da matriz e se  $S_0 \leq L_e$ , então podemos ainda supor que o terminal tem mais um deslocamento S e a força inicial é dado por

$$N = \pi d_f [L_e - (S_0 + S)] \tau_0 e^{f\theta} \quad (28)$$

### 3. RESULTADOS E ANÁLISE

#### 3.1. Tensão de Ponte (*Bridging Stress*)

Para cada abertura da trinca ( $w$ ), a tensão de ponte no composto é dada pela Eq. (1). Abaixo, são comparados resultados com dados experimentais para um material de cimento composto por 2% de fibras sintéticas de Kevlar (Maalej, 1995). As propriedades mecânicas do material estão na tabela seguinte.

Tabela 2. Dimensões e propriedades mecânicas do composto de Kevlar/Cimento.

Item	$d_f$ (mm)	$L_f$ (mm)	$E_f$ (GPa)	$E_m$ (GPa)	$\sigma_{fu}$ (MPa)	$\tau_0$ (MPa)	$f$	$V_f$ (%)
Valor	0,012	12,7	69,8	13	3310	4,5	0,6	2

Figura (9) mostra a comparação entre os modelos desenvolvidos neste trabalho com os dados experimentais (Wang 1990).

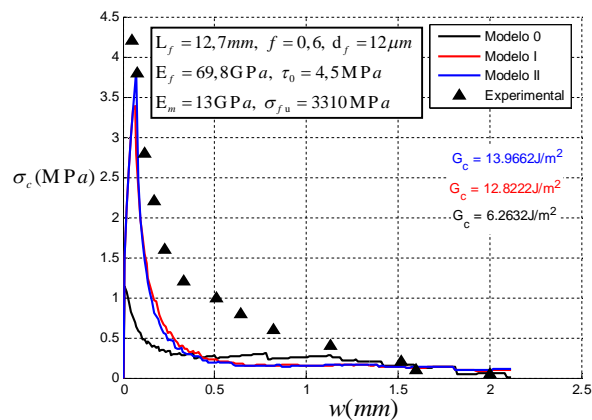


Figura 9. Comparação da tensão dos Modelos 0-II propostos com dados experimentais. Matriz composta com 2% de fibras.

Podemos observar uma boa aproximação no pico da tensão (3,83MPa) do modelo II com o pico de tensão dos dados experimentais (4,2MPa). Ao atingir o pico de tensão, o processo de descolagem das fibras está completo, e as fibras que sobraram, ou seja, não quebraram, são puxadas para fora da matriz (*pull-out*).

Os modelos aqui desenvolvidos mostraram graficamente bastante diferença com dados experimentais, apesar de que tanto Modelo I como o II tiveram o pico de tensão muito próxima a dos dados experimentais. Após o pico de tensão, os Modelos 0-II mostram uma queda muito rápida da tensão, o que significa que há muito pouco *pull-out* das fibras (menos de 1%), estando grande maioria quebrada.

Há algumas possibilidades que justificam tal discrepância com os dados experimentais:

- O fato de não consideramos a plasticidade do material, que certamente contribuirá muito para o aumento da tenacidade, pois após a tensão de escoamento ser atingida, a tensão não irá aumentar muito, mas a deformação pode crescer. Sem plasticidade, a tensão na fibra continua subindo até a fibra quebrar. Fibras sintéticas têm mais possibilidade na ocorrência de plasticidade.

- Uma possível quebra da matriz (efeito *spalling*) poderá causar um relaxamento da tensão na fibra imediatamente depois da saída da fibra na matriz, podendo a fibra não quebrar, e então ser puxada para fora da matriz. Nesse processo a força de atrito age contra a força axial, causando aumento na energia consumida pela fibra, e consequentemente aumento da tenacidade.

- Para fins de comparação com os resultados do modelo de Maalej et al (1995), consideramos a tenacidade à fratura da interface  $G_d=0$ , pois MAALEJ et al não cita tal propriedade. Isto é, sem o processo que precede a descolagem, as fibras não quebram. Por isso a tensão no pico do modelo de MAALEJ et al é muito alta (21 MPa), bem mais que o valor do experimento (4,2 MPa). Sendo que como vistos nos modelos de *debonding/pull-out* e resistência aparente,  $G_d$  tem influência diretamente no processo antes da descolagem e durante a descolagem e certamente deverá contribuir para o aumento da tenacidade.

### 3.2. Influência dos Parâmetros na Tenacificação em Matriz Cerâmica

Considerando um composto cerâmico com fibras de silício (SiC/Glass), os parâmetros são listados na tabela abaixo (Kerans, 1991).

Tabela 3 Dimensões e propriedades mecânicas do composto SiC/Glass usados para testar os modelos.

Item	$d_f$ (mm)	$L_f$ (mm)	$E_f$ (GPa)	$E_m$ (GPa)	$\sigma_{fu}$ (MPa)	$\tau_0$ (MPa)	$f$	$V_f$ %	$G_d$ (MPa.mm)
Valor	0,142	6	415	60	3150	2	0,1	1	0

Figura (10) mostra o efeito do comprimento da fibra na tenacidade do composto calculado pelo Modelo II. Inicialmente a tenacidade aumentou com o comprimento da fibra, até que a fibra alcance certo comprimento, e então, a tenacidade começa a cair.

Considerando um comprimento crítico  $L_c = d_f \sigma_{fu} / 4\tau_0$  para a fibra, em que quando comprimento da fibra é maior que  $2L_c$ , a energia de fratura começa a cair significativamente. O comprimento ótimo para a fibra em um determinado composto pode ser menor que  $2L_c$ , também concluído por Li et al (1991).

Podemos observar pela Fig.(10) que o tamanho ótimo da fibra para o composto atinge cerca de 30% de  $L_c$ , para coeficiente de atrito  $f = 0,1$ . Com o comprimento ótimo  $L_f = 33\text{mm}$  obtido pela figura acima, o aumento na tenacidade pode atingir 600%.

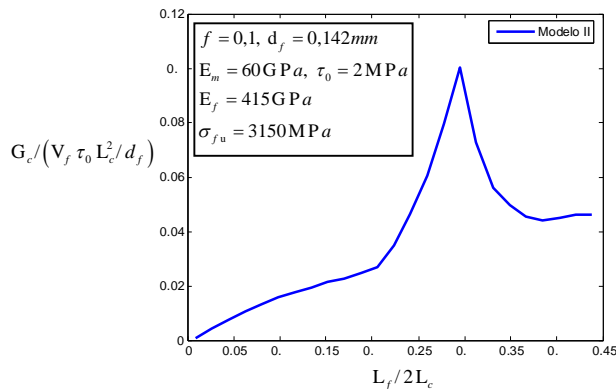


Figura 10. Influência na tenacidade pelo comprimento da fibra (Modelo II).

As figuras seguintes mostram a influência de alguns parâmetros na energia da fratura do composto, com o comprimento ótimo  $L_f = 33\text{mm}$  para o Modelo II. Figura (11(a)) mostra a influência de  $d_f$  na tenacidade do composto. A tenacidade aumenta até certo diâmetro da fibra, depois não tendo significativas mudanças para  $G_c$ .

A tenacidade da interface fibra/matriz  $G_d$  é outro parâmetro importante para tenacificação por fibras. Para uma interface forte ( $G_d$  alta), a porcentagem de quebra das fibras no processo de descolagem é alta, consequentemente a tenacificação é baixa. Observando a Fig. (11(b)), existe um valor que irá dar máxima contribuição à tenacidade. Relativo ao cimento, o valor de  $G_d$  da cerâmica composta é pequeno, pois na prática há muita ocorrência de tensão residual. Por isso, para cerâmica, alto valor de  $G_d$  é desejável.

Pela Fig. (11(c)), verificamos que a tenacidade aumenta consideravelmente à medida que  $\tau_0$  aumenta, mas pela tendência da curva na Figura, esse aumento será limitado.

Claramente, a Fig. (11(d)) mostra que a razão do módulo de elasticidade da fibra pela elasticidade da matriz ( $E_f / E_m$ ), aumenta a tenacidade proporcionalmente. Acredita-se que essa razão dará grande influência na deformação localizada na saída da fibra na matriz.

Aumentando a fração volumétrica de fibras no composto ou a resistência da fibra, obviamente a tenacidade aumenta. No entanto, quanto maior a fração volumétrica, maior serão as mudanças das propriedades da cerâmica. Portanto essa fração deve ser ponderada.

## 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram propostos modelos matemáticos para calcular a tenacidade de materiais compostos e prever o comportamento mecânico do mesmo. Através da implementação da programação numérica baseado nos três modelos, investigou-se a influência de alguns parâmetros na tenacidade do composto. Pelos resultados obtidos, podemos concluir



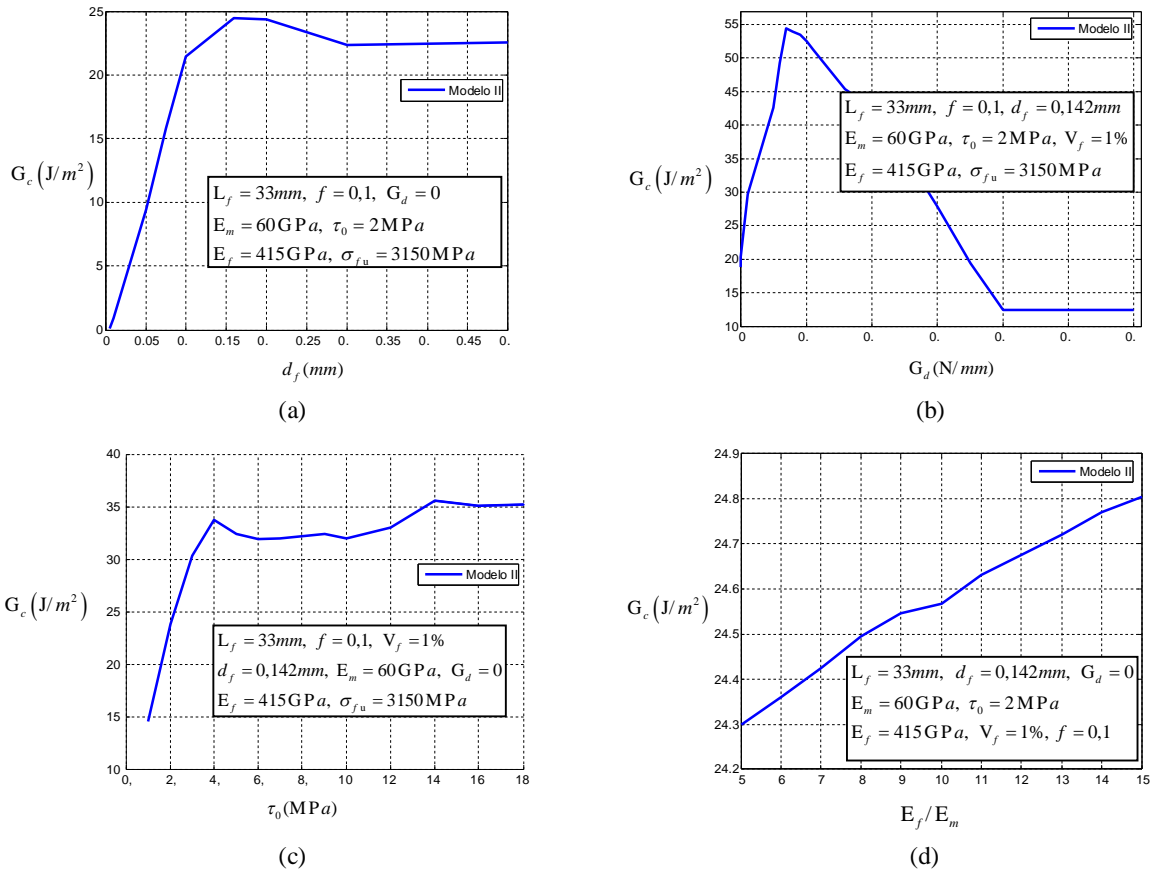


Figura 11. Influência na tenacidade por (a) o diâmetro da fibra; (b) a tenacidade a fratura da interface; (c) a resistência da interface; (d) a razão entre os módulos de elasticidade.

pontos importantes: (a) Dentre os três modelos propostos, o modelo II foi o que apresentou melhor resultado; (b) A resistência do atrito entre a superfície descolada da fibra e a matriz ( $\tau_0$ ) é um parâmetro bastante sensível e tem grande influência ao processo de *pull-out*. A tenacidade aumenta para até certo  $\tau_0$ , e depois o aumento é insignificante; (c) A tenacidade da interface fibra/matriz  $G_d$  é outro parâmetro importante para tenacificação por fibras. Para uma interface forte ( $G_d$  alto), a porcentagem de quebra de fibras no processo de descolagem é alta, consequentemente a tenacificação é baixa. Existe certo valor de  $G_d$  que dará máxima contribuição à tenacidade; (d) Existe também um valor ótimo de comprimento da fibra por qual a tenacificação atinge o valor máximo. Antes deste valor, a tenacificação é crescente monotonicamente com o comprimento da fibra e depois deste ponto ótimo, a tenacificação cai monotonicamente com o comprimento; (e) A razão entre os módulos de elasticidade da fibra e da matriz ( $E_f/E_m$ ) aumenta a tenacificação proporcionalmente; (f) Já o diâmetro da fibra, a partir de certo tamanho, tem pouca influência na tenacidade à fratura no material composto; (g) Como era esperado, quanto maior resistência da fibra ou a fração volumétrica de fibras no composto, maior é a tenacidade; (h) Comparando com experimentos, os resultados numéricos tanto dos modelos propostos, como apresentado na literatura, ainda têm notável diferença. A razão disso, é que nos modelos numéricos não foi incorporado efeito de *spalling* na matriz nem plasticidade ocorrendo nas fibras além de não tratar bem a questão da deformação localizada no ponto da saída da fibra na matriz.

A tenacificação da cerâmica por micro fibras é um problema muito complicado, envolvendo todas as propriedades mecânicas das fibras e matriz. Mas existe uma combinação otimizada entre tais parâmetros mecânicos e a modelagem matemática incluindo a consideração do efeito de *spalling* é imprescindível para encontrar essa combinação ótima.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores Wang Chong e Kellem de Melo Soares agradecem a CNPq por fomentar bolsas de produtivo de pesquisa (Processo 501660/2009-7) e de mestrado (Processo 562244/2008-5). E o autor Alcione Rafael Pavan agradece a CAPES por fomentar uma bolsa de mestrado.

## 6. REFERÊNCIAS

- Evans, A. G., 1984, "Fracture in Ceramic Materials Toughening Mechanisms, Machining Damage, Shock", Noyes Publications, New Jersey.
- Fantilli, A. P. and Vallini, P., 2007, "A Cohesive Interface Model for the Pullout of Inclined Steel Fibers in Cementitious Matrixes", Journal of Advanced Concrete Technology, Vol. 5, No. 2, pp. 247-258.
- Kerans, R. J. and Parthasarathy, T. A., 1991, "Theoretical Analysis of the Fiber Pullout and Pushout Tests", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 74, No. 7, pp. 1585-1596.
- Li, V. C., Wang, Y. and Backer, S., 1991, "A micromechanical Model of Tension Softening and Bridging Toughening of Short Random Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 5, pp. 607-625.
- Li V. C., 1992, "A Simplified Micromechanical Model of Compressive Strength of Fiber-Reinforced Cementitious Composites", Cement & Concrete Composites, Vol. 14, No. 5, pp. 131-141.
- Lin, Z., Kanda, T. and Li, V. C., 1999, "On Interface Property Characterization and Performance of Fiber-Reinforced Cementitious Composites", Concrete Science and Engineering, Vol. 1, September, pp. 173-174.
- Maalej, M., Li V. C. and Sashida, T., 1995, "Effect of Fiber Rupture on Tensile Properties of Short Fiber Composites", J. of Eng. Mech, Vol. 121, No. 8, pp. 903-913.
- Shah, S.P., Brandt, A. M., Ouyang, C., Baggott, R., Eibel, J., Krenchel, H., Lambrechts, A., Monasher, B. and Taerwe, L., 1996, "Toughness Characterization and Toughening Mechanisms", High Performance Fiber Reinforced Cement Composites 2, Edited by A. E. Naaman and H.W. Reinhardt, E & FN Spon, London, UK.
- Stam, G.T.M., 1994, "A Micromechanical Approach to Transformation Toughening in Ceramics", Doctoral thesis, 1994, ISBN: 90-370-0106-8.
- Wang, Y., Li, V. C. and Backer, S., 1988, "Modelling of Fiber Pull-out from a Cement Matrix", Int. J. Cement Compos. Lightweight Concrete, Vol. 10, No. 3, pp. 143-149.
- Wang, Y.; Li, V. C. and Backer, S., 1990, "Tensile Properties of Synthetic Fiber Reinforced Mortar", Cement & Concrete Composites, Vol.12, No. 1, pp. 29-40.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

## Modelling of Fiber Bridging Stress and Toughening Effect on Brittle Matrix

Wang Chong, [wangchong@unipampa.edu.br](mailto:wangchong@unipampa.edu.br)<sup>1</sup>  
Alcione Rafael Pavan, [alcionerafael@gmail.com](mailto:alcionerafael@gmail.com)<sup>2</sup>  
Kellem de Melo Soares, [cameracolor@yahoo.com.br](mailto:cameracolor@yahoo.com.br)<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Alegrete Technology Center, Federal University of Pampa, Av. Tiarajú 810, Ipirabuitã, Alegrete, RS, Brazil, CEP 97546-550.

<sup>2</sup> Dom Alberto Faculty, Rua Ramiro Barcelos 892, Centro, Santa Cruz do Sul, RS, Brazil, CEP 96810-050.

<sup>3</sup> Department of Physics, Statistics and Mathematics, Northwest Regional University of South Rio Grande State, Rua do Comércio, 3000, Universitário, Ijuí, RS - Brazil, CEP 98700-000.

**Abstract.** *This work addresses toughening of fibers randomly inclined in a brittle matrix. Mathematical models for the bridging stress and the contribution of the fibers to the fracture energy are suggested on the base of elasticity mechanics. The snubbing friction effect also is included. Fiber toughening process is divided into pre-debonding of interface fiber/matrix, debonding and fiber pull-out stages. At pre-debonding stage, the competition between the chemical bond strength of interface and the fiber strength determines the bridging stress. Three models are presented for the correlation between axial tensile force and crack open: (1) cantilever beam, (2) fiber shear deformation and (3) local elastic stiffness of the matrix near the point where a fiber exits the matrix. The correlation between axial tensile force and debonded length proposed in literature is employed in the debonding stage. The position of the moving end of a completed debonded fiber at the beginning of pull-out stage is derived in terms of the fiber deformation  $e$  the crack open. In sequent pull-out process, linear friction or quadratic resistance-displacement relationship is used according to fiber types. The influence of mechanical properties of fiber and matrix on the toughening is investigated. The comparison of the results obtained from present models with the ones from experiments and models otherwise revealed the necessity of adding the considerations into the models such as spalling effect, localized deformation near the fiber exit point from the matrix, possibility of plasticity occurrence as well as the correlation between the fiber axial force and the interface debonding progress.*

**Keywords:** *toughening, fiber reinforced composite, fiber bridging stress, interface fiber/matrix, pull-out process.*