

EMPREGANDO CONTORNO VIRTUAL EM ELEMENTOS DE CONTORNO

Carla T.M. Anflor, anflor@unb.br

Universidade de Brasília
Campus UnB Gama
Caixa Postal 8114
72405-610, Gama, DF

Abstract. *A principal característica do Método dos Elementos de Contorno (MEC) é a presença de malha apenas no contorno do domínio. Porém, quando o ponto fonte e o ponto campo são coincidentes, observa-se singularidade no método de integração. Dependendo da posição do ponto de colocação e o elemento sendo integrado, o integrando pode apresentar um comportamento regular, quase-singular, fracamente singular ou fortemente singular. Tais integrandos devem ser solucionados analiticamente. O objetivo deste trabalho é evitar o cálculo analítico de integrais empregando um contorno virtual para que as integrações sejam realizadas somente de maneira numérica. No estudo de caso foi usado o problema de Motz e sua respectiva solução analítica.*

Keywords: *singularidade; elementos de contorno; integração numérica, contorno virtual*

1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno (MEC) envolve somente a discretização do contorno da estrutura devido à equação diferencial ser satisfeita exatamente dentro do domínio. O resultado da discretização apenas no contorno resulta em um sistema relativamente pequeno com uma elevada precisão. Esta é uma importante vantagem sobre os métodos de domínio como o método dos elementos finitos (MEF) ou método das diferenças finitas (MDF). Obviamente estas vantagens existem somente para problemas sem forças de corpo e que tenham solução fundamental explícita. Outra vantagem do MEC é que por ser um método de contorno este apresenta um número de equações consideravelmente menores para serem solucionadas. Isto se deve ao fato deste método necessitar apenas da discretização do contorno, resultando em matrizes cheias e não simétricas, porém de pequeno tamanho. Para o MEF e MDF é necessário informações do domínio resultando em matrizes de maior ordem a serem manipuladas. Esta característica do MEC reduz o esforço e conseqüentemente o custo computacional, maiores detalhes sobre as vantagens do método podem ser adquiridas em Kane (1994).

Quando um problema envolve força de corpo faz-se necessário uma discretização do domínio o que pode causar algum inconveniente na implementação do MEC. Para evitar inconvenientes Nardini e Brebbia (1982) propuseram o método da reciprocidade dual (MRD) o qual consiste em transferir as integrais de domínio para o contorno. O MRD é um método muito divulgado (Brebbia e Domingues, 1984), pois permite trabalhar apenas com o contorno evitando problemas de dependência de malha tão comuns em processos de otimização.

Apesar do MRD apresentar muitas vantagens, ainda faz-se necessário dividir o contorno em elementos e resolver integrais singulares. Com o objetivo de solucionar esta desvantagem muitos métodos de colocação foram propostos durante as décadas passadas. Sun e Yao (1997) propuseram a colocação em um contorno virtual para evitar a singularidade das soluções fundamentais e posteriormente (Goldberg e Chen, 1998) aplicaram este método para resolver uma série de problemas de engenharia de maneira satisfatória. Os autores Li e Yao (2006) aplicaram o método da colocação em contorno virtual aplicado a problemas de sólidos bidimensionais magnetoelásticos, para evitar a manipulação de integrais singulares.

Este trabalho apresenta a combinação do tradicional método de colocação no contorno real com o método de colocação no contorno virtual. Este é um estudo preliminar onde se almeja implementar e posteriormente estender a técnica do contorno virtual à problemas de otimização aplicados à difusão de calor (Anflor e Marczak, 2009). O principal objetivo está em determinar a distância ótima (*offset*) entre contorno virtual e o contorno original evitando singularidades das integrais sem deixar de preservar as particularidades do MEC.

2. MÉTODO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Nesta seção será descrito brevemente o método da solução fundamental (MSF) para a solução das equações diferenciais parciais homogêneas.

$$Lu(P) = 0, \quad P \in \Omega \tag{1}$$

Sujeito as seguintes condições de contorno

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2$$

Sendo que L representa um operador diferencial, Ω o domínio em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , envolvido por Γ , sendo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. As variáveis \bar{u} e \bar{q} são funções conhecidas. A solução fundamental da equação (1) é a função $G(P,Q)$ a qual satisfaz,

$$LG(P,Q) = -\delta(P,Q) \quad P, Q \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2,3 \tag{3}$$

sendo $\delta(P,Q)$ a função delta de Dirac atuando no ponto Q.

No caso de problemas de transferência de calor L é o operador Laplaciano (∇^2) e a função $G(P,Q)$ é igual a zero para qualquer ponto exceto quando $P = Q$, onde a função é singular em termos de soluções fundamentais como:

$$u(P) = \sum_{i=1}^n a_i G(P, Q_i) \tag{4}$$

Ou simplesmente,

$$u(P) = \sum_{i=1}^n a_i G(r_i) \tag{5}$$

onde $r_i = \|P - Q_i\|$, os Q_i representam o ponto fonte e P é qualquer ponto sobre consideração. Uma vez que $G(r_i)$ satisfaz a equação (3) para qualquer ponto fonte Q_i no qual $r_i \neq 0$, $LG(r_i) = 0$ é satisfeita. Conseqüentemente a função $u(P)$ na equação 5 satisfaz a equação diferencial parcial em (1) para qualquer a_i ai em que os pontos fontes são selecionados de maneira que $r_i \neq 0$. Maiores detalhes podem ser verificados em Katsikadelis (2002).

2.1. Integrando com contorno virtual

No método de colocação empregado no MEC, ao se integrar o contorno realiza-se dois tipos de integração, um analítico e outro numérico. Utiliza-se integração numérica quando o integrando não for singular, ou seja, quando o ponto fonte (Q) e ponto campo (P) não forem coincidentes. Quando o ponto fonte for coincidente com o ponto campo, o raio tenderá a zero e a integral então singular deverá ser solucionada analiticamente (figura 2(a)). A utilização do contorno virtual tem por objetivo utilizar somente a integração numérica do integrando uma vez que com este método o raio nunca terá valor nulo. A idéia do contorno virtual consiste em dar um *offset* (β) no contorno original e a partir deste momento o ponto fonte será sempre posicionado sobre este novo contorno, conforme figura 2(b).

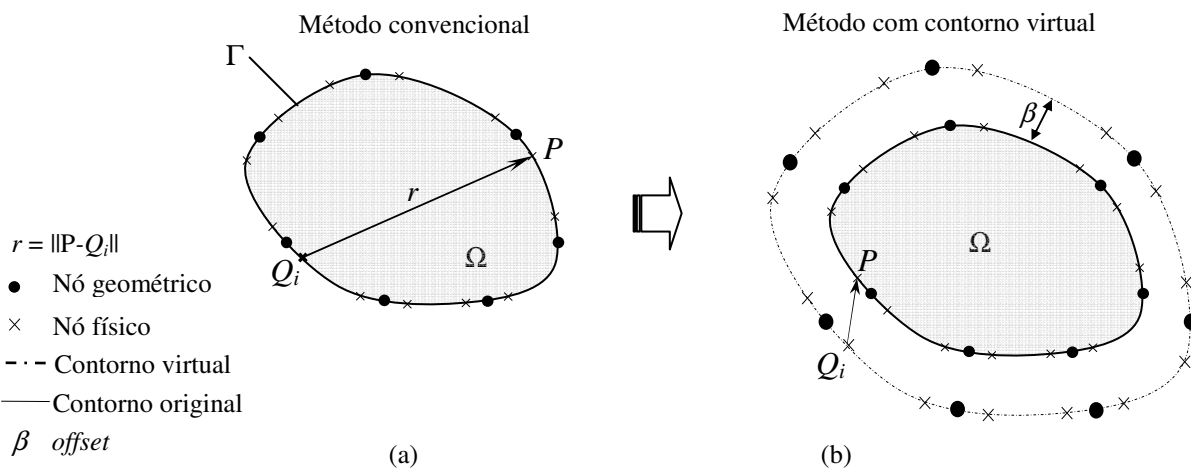


Figure 2. (a) Método convencional x (b) Método do contorno virtual.

Neste trabalho será determinada qual a distância ótima de (β) em relação ao contorno original. No item seguinte será apresentado o comportamento da solução numérica à medida que se incrementa o valor de (β) para o problema Motz.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

O caso a ser estudado é conhecido por problema de Motz, onde sua principal característica está em apresentar condições de contorno variando conforme o ângulo theta (θ). O objetivo consiste em resolver $\nabla^2 u = 0$ para o domínio discretizado com 42 elementos lineares descontínuos e integrado com 6 pontos de Gauss. As condições de contorno estão ilustradas na figura 3.

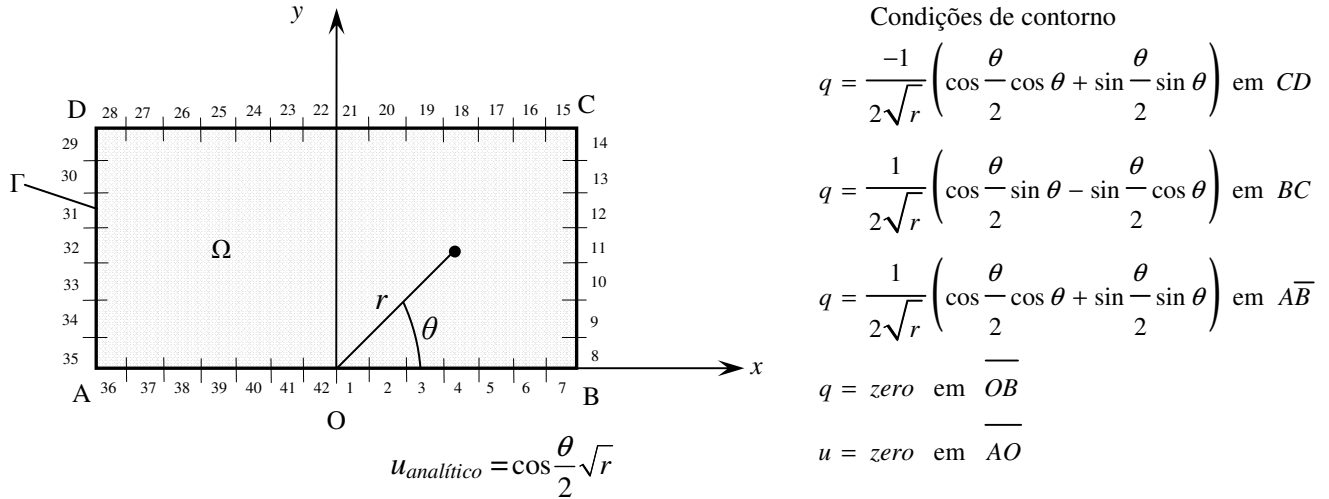


Figura 3. Problema de Motz e suas condições de contorno.

A figura 4 apresenta a distribuição de temperatura ao longo de todo o contorno do problema de Motz. A linha sólida representa a solução analítica do problema enquanto que as demais representam os resultados obtidos numericamente para cada incremento de (β). Aparentemente as soluções numéricas provenientes do método do contorno virtual são convergentes à solução analítica e a partir da fig.4 é possível verificar que as soluções nos nós físicos são praticamente sobrepostas. Para realizar-se uma análise mais detalhada da distribuição de temperatura e poder visualizar com maiores detalhes toma-se como ponto de controle o nó físico de número 35 pertencente ao elemento 18 conforme indicado nas figuras 3 e 4.

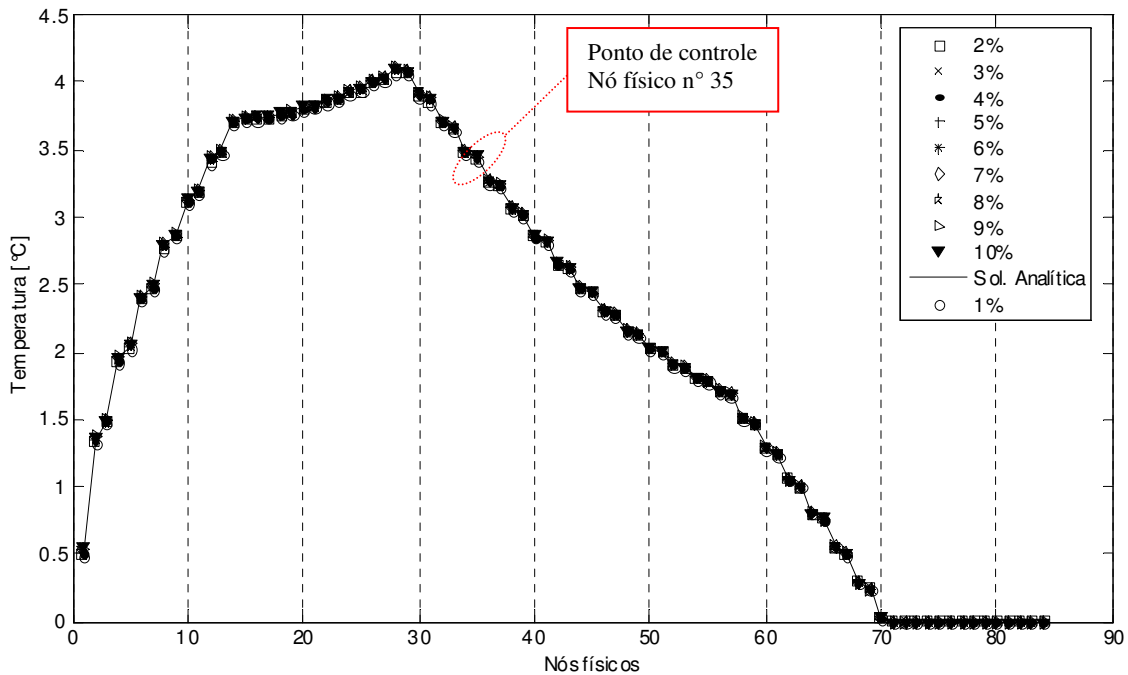


Figura 4. Distribuição de temperatura no contorno: Solução analítica e numérica.

A figura 5 apresenta o comportamento das temperaturas numéricas em torno da solução analítica para o nó físico número trinta e cinco. A medida de β é calculada como o percentual do comprimento do elemento do contorno original. Foram analisados valores de β variando de 1 à 10% com passo de 0.5%. Os resultados demonstram que à medida que há um incremento em β há uma tendência do valor numérico se aproximar ao valor analítico de temperatura. Nota-se que com β de 1% até 6.5% as curvas numéricas se aproximam por baixo da curva analítica, este é um indicativo da influência da singularidade do integrando.

No entanto, acima de 7,5% as curvas tendem a se distanciar da curva analítica. Assim, como há uma distância mínima para evitar a singularidade, também há uma distância máxima de afastamento para que não haja perda na precisão do método. Ainda na figura 5 é possível constatar que a curva numérica com valor de 7% recai sobre a curva analítica. Entende-se que distância ótima para o *offset* é de 7% do valor do elemento do contorno original.

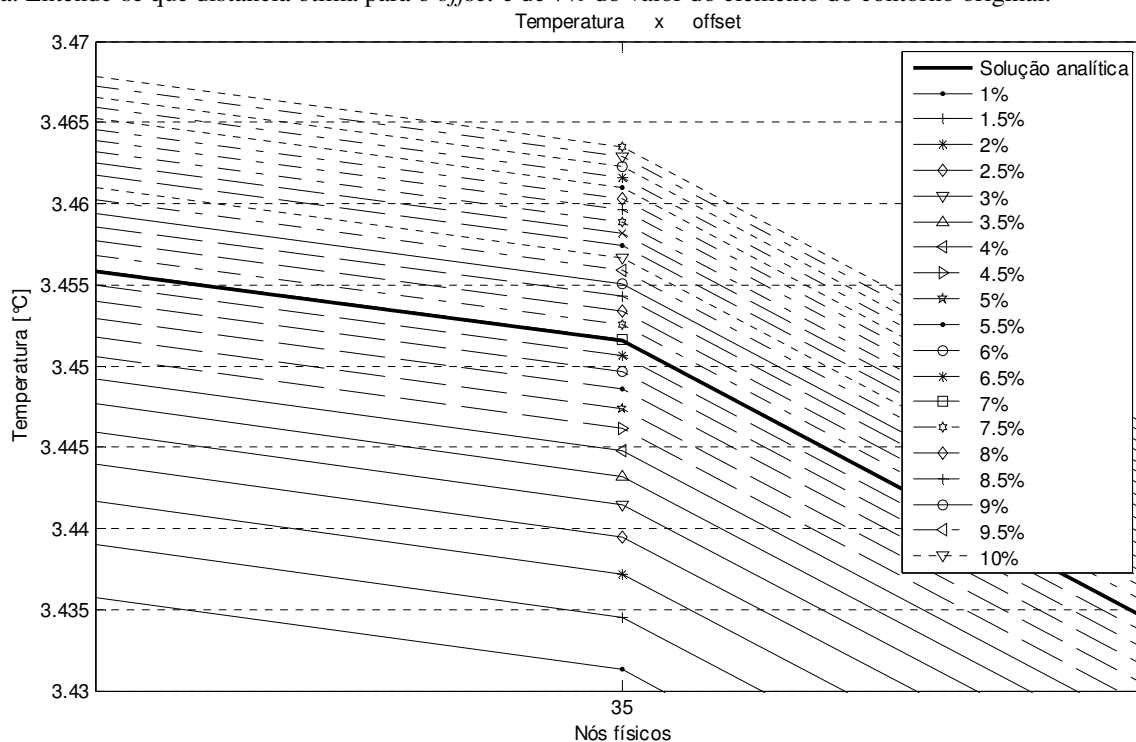


Figura 5. Detalhe do β para o nó 35.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o método de colocação em um contorno virtual para um problema de transferência de calor. Ao empregar-se o contorno virtual foi demonstrada a possibilidade em se trabalhar com MEC utilizando apenas integração numérica evitando a solução de integrais analíticas devido à coincidência entre ponto fonte (Q) e ponto campo (P). Os resultados apresentaram uma boa concordância com a solução analítica. Através dos resultados obtidos foi possível verificar que um β de 7% apresentou resultados muito próximos ao da solução analítica do problema estudado. Acredita-se que tal procedimento possa ser expandido para outros tipos de problemas uma vez que este método apenas propõe o posicionamento do ponto fonte ao lado externo do domínio, mantendo toda a característica de integração do MEC. O que não podemos afirmar neste artigo é se o valor de β será de 7% para os demais problemas. Para aqueles problemas em que a equação diferencial governante for a de Laplace/Poisson, pode-se afirmar que um β de 7% é indicado. Um problema de grande interesse em elasticidade está no estudo do comportamento da propagação de trincas. Neste tipo de caso resolve-se geralmente através da implementação híbrida (MEF/BEM) empregando MEF na região próxima a trinca ou empregando o método da equação integral singular/hipersingular e neste caso trabalha-se apenas com MEC. A utilização da técnica do contorno virtual poderá ser mais uma alternativa para auxiliar na solução deste tipo de problema e neste caso deve-se determinar o melhor valor de β para estes casos. Este artigo teve por objetivo determinar em um primeiro momento a distância ótima de *offset* em termos percentuais para problemas governados pela equação de Laplace, o que não é apresentado nos poucos artigos sobre este assunto. Para finalizar todas as particularidades do MEC foram preservadas, como por exemplo, baixo custo computacional, elevada precisão e ausência de malha no domínio.

5. AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Rogério J. Marczak pela orientação e formação recebida durante sua tese de doutorado.

6. REFERÊNCIAS

- Anflor, C.T.M e Marczak, R.J., 2009, "A boundary element approach for topology design in diffusive problems containing heat sources", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 4604-4611.
- Brebbia, C.A., Telles J.C.F., Wrobel, L.C., 1984. "Boundary elements techniques: theory and applications in engineering". Berlin : Springer – Verlag, 1984.
- Goldberg M.A. e Chen C.S., "The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems", In: Goldberg M.A., editor, *Boundary Integral Methods – numerical and mathematical aspects*. Computational Mechanics Publications, Vol. 43, pp. 103-176
- Kane J. H., 1994, "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics", Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Coimbra, A.L., 1978, "Lessons of Continuum Mechanics", Ed. Edgard Blücher, S.Paulo, Brazil, 428 p.
- Katsikadelis, J.T., 2002, "Boundary Elements: Theory and Applications", Ed. Elsevier, USA, 336 p.
- Li X. e Yao W., 2006, "Virtual Boundary element-integral collocation method for the plane magnetoelectroelastic solids", *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, pp. 709-717.
- Nardini D. e Brebbia C.A., 1982, "A new approach to free vibration analysis using boundary elements", In: Brebbia C.A., editor. *Boundary element methods in engineering proceedings*. Fourth international seminar, Southampton. Berlin, pp. 312-26.
- Sun H.C. e Yao W.A., "Virtual boundary element-linear complementary equations for solving the elastic obstacle problems of thin plate", *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol. 27, pp. 153-61.

7. NOTA DE RESPONSABILIDADE

O autor é o único responsável pelo material impresso neste artigo.

EMPLOYING VIRTUAL BOUNDARY IN BOUNDARY ELEMENTS PROBLEMS

Carla T.M. Anflor, anflor@unb.br

Universidade de Brasília
Campus UnB Gama
PO Box 8114
Zip Code 72405-610, Gama, DF, Brazil

Abstract. *The main feature of the boundary element method (BEM) is the presence of mesh only in the contour of the domain. Therefore, when the source and field points are coincident singularity problems give rise, being necessary analytical integration. Depending on the collocation position and the element being integrated, the integrand may have a regular behavior, near-singular, weakly singular and strongly singular. The objective of this work is to avoid analytical integrals calculation by using a virtual boundary. In order to evaluate the purposed methodology Motz Problem was solved. Numerical results were compared with its analytical solution. An optimal distance from real boundary was determined showing good agreement with analytical solution.*

Keywords: *singularity; boundary elements; numerical integration, virtual boundary*