

AMORTECIMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO DE ESTRUTURAS SANDUÍCHES DOTADAS DE CAMADA VISCOELÁSTICA IMPLEMENTADAS EM EF: USO DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS E ESTUDO DAS TEORIAS FSDT E LAYERWISE-FSDT

Albert Willian Faria, awfaria@yahoo.com.br¹
Thiago de Paula Sales, thiago.mecanica@gmail.com²
Adailton Silva Borges, adailton_sborges@hotmail.com³
Edson Borges de Ávila, edsonborgesmec@yahoo.com.br⁴
Domingos Alves Rade, domingos@ufu.br⁵

^{1,2,3,4,5} Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila, 2160 , Bloco 10, Laboratório de Mecânica de Estruturas, Prof. José Eduardo Tannús Reis (Lmest), Sta. Mônica, Uberlândia, MG

Resumo: Este artigo refere-se à caracterização, por meio de modelos de elementos finitos, dos efeitos dissipativos em estruturas sanduíches, no contexto do controle passivo de vibrações. O amortecimento é acrescido por meio da aplicação de tratamentos viscoelásticos internos a estrutura, originando uma estrutura do tipo sanduíche. Para tanto, é empregada uma técnica de modelagem em elementos finitos da estrutura sanduíche formada, utilizando duas teorias: a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) e de Layerwise-FSDT. Já o amortecimento no domínio do tempo, do material dissipativo, é formulado pelo uso do método das Derivadas Fracionárias. A modelagem em elementos finitos das estruturas analisadas inclui o uso de um elemento Serendipity retangular contendo oito nós. Cinco ou nove graus de liberdade por nó estão nele presentes quando formulado, respectivamente, pelas teorias FSDT e Layerwise-FSDT. As respostas dinâmicas são apresentadas por funções de resposta no domínio do tempo, obtidas utilizando o integrador numérico de Newmark. Simulações numéricas são realizadas visando, à validação da modelagem de estruturas em material viscoelástico utilizando o método matemático das Derivadas Fracionárias, e visando a confrontação numérica, no tocante às vibrações transversais no domínio do tempo, das duas teorias implementadas no estudo de uma estrutura sanduíche de viga dotada de um núcleo viscoelástico.

Palavras-chave: Materiais sanduíches e viscoelásticos, elementos finitos, Derivadas Fracionárias, formulações FSDT e Layerwise-FSDT.

1 INTRODUÇÃO

Os projetos de engenharia envolvem a minimização dos custos de produção, de operação e de manutenção e devem atender a severas exigências de legislações específicas quanto aos níveis de segurança aos usuários, quanto ao nível de impacto ambiental, quanto ao nível de precisão dos equipamentos, dentre outras especificações.

Um exemplo típico é observado na indústria da aeronáutica, que exige um controle muito rigoroso na seleção e aplicação dos materiais empregados no projeto e fabricação de componentes estruturais. Como normalmente ocorre neste tipo de aplicação industrial, as estruturas estão frequentemente expostas a perturbações diversas (estáticas ou quase estáticas e dinâmicas) e a efeitos ambientais (tais como a radiação solar, a chuva e o vento), podendo estes afetar as características mecânicas e comprometer a integridade estrutural desses materiais, devido a alteração de suas respostas estáticas (tais como as deformações, distribuição de tensões e etc.) e dinâmicas (tais como os modos de vibrações, frequências naturais e fatores de amortecimento da estrutura), podendo levar a degradação imediata após um grande período de exposição a essas perturbações. Em vista disto, estudos que integram os materiais (metálicos ou compostos) a técnicas passivas e ativas de atenuação de vibrações mobilizam um grande número de pesquisadores (Malekzadeh et al. (2005), Correia et al. (2000)).

Segundo Finegan e Gibson (1999), por causa da diminuição da complexidade do sistema de amortecimento requerido, as técnicas passivas de amortecimento comparadas com as técnicas ativas são as que mais contribuem na melhoria da confiança de máquinas e estruturas. Além disto, elas são consideradas estáveis, seguras e apresentam baixo requerimento energético em oposição ao controle ativo, que requer o uso de amplificadores muitas vezes bastante complexos. Assim, a combinação de materiais (compostos ou metálicos) com técnicas passivas de amortecimento, notadamente empregando materiais viscoelásticos, é uma estratégia extremamente interessante no projeto de estruturas complexas de engenharia, tornando-as mais eficazes e confiáveis, e vem recebendo muita atenção nos últimos anos de diferentes pesquisadores, tais como Meunier (2001), Makhecha et al. (2002) e Malekzadeh et al. (2005).

Além dessas considerações ao nível do material, as etapas de projeto de engenharia requerem também o uso de modelos analíticos, numéricos ou experimentais confiáveis e capazes de proporcionar previsões realistas, qualitativa e quantitativamente, do comportamento estrutural.

Dentre as diferentes técnicas de modelagem numérica, o *Método dos Elementos Finitos (MEF)*, tem se mostrado o mais adequado para a modelagem de estruturas diversas, principalmente em virtude de suas características vantajosas de flexibilidade de modelagem e relativa facilidade de implementação numérica. Além disso, o *MEF* é hoje uma ferramenta de engenharia bastante amadurecida, cujas potencialidades e limitações são amplamente conhecidas ou estudadas. Esses métodos numéricos mostram-se indispensáveis também na etapa de projeto de otimização estrutural e na avaliação dos níveis de sua confiabilidade da estrutura avaliada.

No entanto, existem diversas teorias utilizadas na modelagem numérica por elementos finitos de estruturas multicamadas. A principal distinção entre elas é a ordem das funções polinomiais escolhidas na aproximação do campo de deslocamento mecânicos ao longo da espessura do estratificado. Dentre outras, citam-se a *Teoria das Deformações Cisalhantes de Primeira Ordem (First-order Shear Deformation Theory - FSDT)*, a *Teoria das Deformações Cisalhantes de Terceira Ordem*, também conhecida pelo nome de *Teoria das Deformação Cisalhantes de Ordem Superior (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT)* e a *Teoria em Camadas Equivalentes Discretas (Teoria Layerwise)*. A escolha de uma ou outra teoria está intimamente ligada ao estudo da espessura do estratificado, aliado ao estudo da relação custo computacional/precisão requerido, e ao tipo de estrutura analisada (homogênea ou heterogênea). Para estratificados homogêneos e espessos, a preferência é dada ao uso da teoria *HSDT*, enquanto que para baixas espessuras a teoria *FSDT* fornece respostas adequadas. Como o interesse neste trabalho está na formulação de estruturas de espessura fina, optou-se pelo emprego da segunda teoria em detrimento da primeira, já que ela necessita de um baixo custo computacional em comparação à formulação da teoria *HSDT*.

Além da boa aproximação do campo de deslocamentos mecânicos, de acordo com Araújo et al. (2008), este também deve ser adequadamente representado ao longo da espessura do estratificado, de maneira a representar adequadamente a distribuição das deformações e tensões mecânicas ao longo da espessura do estratificado. Em estratificados heterogêneos, ou seja, que contém pelo menos uma camada de material com propriedades mecânicas distintas das demais, a *Teoria Layerwise*, procura contornar as limitações apresentadas pelas teorias *FSDT* e *HSDT* e que usam em sua formulação uma camada única equivalente na modelagem de estruturas heterogêneas, adotando a continuidade dos deslocamentos mecânicos ao longo da espessura do estratificado. Neste artigo, a *Teoria Layerwise* utiliza a teoria *FSDT (Layerwise-FSDT)* na aproximação do campo de deslocamentos mecânicos para cada uma das camadas do estratificado, aliada à hipótese de continuidade dos deslocamentos entre as camadas adjacentes do estratificado para a formulação numérica de estruturas amortecidas passivamente por camada viscoelástica embutida.

O propósito deste artigo é a modelagem em elementos finitos de estruturas sanduíches amortecidas pela adição de núcleo em material viscoelástico, sendo ela estudada no domínio do tempo utilizando as *Derivadas Fracionárias (DF)*, para a formulação do núcleo viscoelástico, e o *método de integração numérica de Newmark*, na resolução do sistema de equações diferenciais resultante da modelagem em elementos finitos. Esta modelagem é feita pelo emprego das teorias *FSDT* e *Layerwise-FSDT*.

A seguir é apresentada uma breve revisão sobre a modelagem matemática do comportamento de materiais viscoelásticos, no tocante à utilização das *Derivadas Fracionárias (DF)*.

2 MODELOS DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO LINEAR

Materiais viscoelásticos são materiais elastoméricos de cadeias moleculares longas que convertem energia mecânica em calor quando deformados. Estes materiais passam de um estado pouco rígido (borracha), sob elevadas temperaturas e baixas frequências de vibração, a um estado rígido (vítreo), sob baixas temperaturas e altas frequências. Na região de transição entre estes dois estados, em que suas propriedades materiais elásticas variam rapidamente, eles transformam a energia de deformação mecânica em energia térmica, dissipando sob a forma de calor a energia vibratória da estrutura sobre o qual são inseridos ou colados.

Segundo Nashif et al. (1985), existem basicamente dois tipos de modelos matemáticos utilizados para representar o comportamento mecânico dos materiais viscoelásticos lineares: *Modelos clássicos* (ou reológicos simples) e *Modelos modernos*. Dentre os modelos clássicos destacam-se os de *Hooke (Histerético ou Estrutural)*, de *Newton*, de *Maxwell* e de *Kelvin-Voigt, Kelvin-Voigt Generalizado*, de *Maxwell Generalizado*, e de *Zener (modelo Sólido Linear Padrão - SLP)*. E dentre os modelos modernos os do *Modelo do Módulo Complexo (MMC)*, o de *Golla-Hughes-McTavish (GHM)*, o do *Campo de Deslocamentos Anelásticos (CDA)* e o das *Derivadas Fracionárias (DF)*.

Esses modelos são representados pela combinação de molas e amortecedores viscosos simples sujeitos a uma força externa aplicada. Os *modelos clássicos*, de maneira geral, possuem elevado número de parâmetros a serem identificados experimentalmente, relacionados ao número de derivadas de ordem inteira dos modelos. Em virtude disso, a combinação destes modelos com *MEF* conduz a sistemas de equações do movimento de ordem muito elevada, cuja solução computacional requer um alto custo de processamento (Lima (2007)). Isto dificulta, ou mesmo inviabiliza o uso destes modelos com o *MEF* para aproximar o comportamento dos materiais viscoelásticos aplicados em estruturas complexas de engenharia. Revisões detalhadas sobre os *modelos clássicos* na modelagem matemática do comportamento de materiais viscoelásticos são encontrados em Christensen (1982) e Nashif et al. (1985).

Dentre os modelos modernos utilizados na modelagem matemática dos materiais viscoelásticos se destacam os das *Derivadas Fracionárias (DF)* aplicada para formulações no domínio do tempo. Já os modelos *MMC*, *GHM* e *CDA*, que

também são utilizados para este propósito, são revisados em Lima (2007), e merecem evidência para aplicações no domínio da frequência.

3 CÁLCULO FRACIONÁRIO: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS

No tocante à resolução de equações diferenciais de ordem fracionária relacionadas à dinâmica de sistemas estruturais, métodos de discretização no domínio do tempo merecem destaque. Um dos mais utilizados trata-se do *método de Grünwald-Letnikov*, o qual propõe que a derivada fracionária de uma função $f(t)$ pode ser aproximada, segundo Schmidt e Gaul (2002), pela expressão:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} f\left(t - j \frac{t}{N}\right), \quad (1)$$

onde o intervalo de derivação é $[0, t)$, N é o número de divisões do intervalo de derivação, N_t é o número de pontos do histórico de $f(t)$ utilizados na discretização e, finalmente, $A_{j+1}^{(\alpha)}$ são os *coeficientes de Grünwald* para uma derivada de ordem α , sendo estes dados por:

$$A_{j+1}^{(\alpha)} = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j^{(\alpha)}, \quad (2)$$

com $A_1^{(\alpha)} = 1$ para qualquer valor de α . Os autores Schmidt e Gaul (2002) detalham toda a dedução deste método de discretização do operador fracionário, inclusive justificando a possibilidade de utilização de um número de pontos N_t em vez de todo o histórico da função $f(t)$ no cálculo da aproximação.

Outro método de resolução de equações diferenciais fracionárias por discretização no domínio do tempo é proposto por Galucio et al. (2006), sendo este baseado no método (discreto) de resolução de equações diferenciais ordinárias de ordem inteira, chamado de *Gear scheme*. Aplicado a derivadas fracionárias assume a forma:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N_t} \sum_{l=0}^j \left(\frac{4}{3}\right)^j \left(\frac{1}{4}\right)^l A_{j+1}^{(\alpha)} B_{l+1}^{(j)} f\left(t - j \frac{t}{N} - l \frac{t}{N}\right), \quad (3)$$

com $A_{j+1}^{(\alpha)}$ dado pela Eq. (2) e $B_{l+1}^{(j)}$ dado por:

$$B_{l+1}^{(j)} = \frac{l - j - 1}{l} B_l^{(j)}, \quad (4)$$

de maneira que $B_1^{(j)} = 1$ para qualquer valor de j . Alternativamente, este método de discretização pode ser expresso de forma semelhante àquele de *Grünwald-Letnikov*, ou seja:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} f\left(t - j \frac{t}{N}\right), \quad (5)$$

o que simplifica muito sua implementação. Galucio et al. (2006) avalia ainda a eficiência do método proposto, chegando à conclusão de que o mesmo apresenta uma taxa de convergência de segunda ordem para aplicações dinâmicas, maior do que aquela associada ao *método de Grünwald-Letnikov*, justificando sua utilização.

A aplicação da teoria das *Derivadas Fracionárias* dar-se-á à modelagem de materiais viscoelásticos abordada sucintamente a seguir.

4 MODELO DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS

No âmbito da implementação do modelo de viscoelasticidade à formulação de elementos finitos, Schmidt e Gaul (2002) desenvolveram um elemento finito tridimensional que leva em conta as relações tensão-deformação do material em sua forma fracionária e que é solucionado pelo método de *discretização de Grünwald-Letnikov*, levando em conta o histórico dos deslocamentos e das tensões em tempos anteriores. Por outro lado, Galucio et al. (2004) apresentam outro método de implementação dos materiais viscoelásticos em rotinas de elementos finitos com custo de resolução

computacional mais baixo. A idéia do autor é eliminar uma das derivadas fracionárias presentes no modelo viscoelástico unidimensional, cuja equação constitutiva da lei tensão-deformação é dada por:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (6)$$

visto que t denota a variável temporal, $\sigma(t)$ denota a tensão, $\varepsilon(t)$ denota a deformação, τ é o tempo de relaxação do material, E_0 é o módulo estático (ou de baixa frequência) do material, e E_∞ é o módulo dinâmico (ou de alta frequência) do material. Para tanto, Galucio et al. (2004) utilizam-se da seguinte substituição de variável:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_\infty}, \quad (7)$$

com $\bar{\varepsilon}(t)$ sendo a deformação inelástica. Pela introdução dessa definição na Eq. (6), tem-se que a relação tensão-deformação do material pode ser reescrita na forma:

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t). \quad (8)$$

Fazendo uso do método de discretização *Gear scheme*, Eq. (5), chega-se à forma discretizada:

$$\bar{\varepsilon}(t + \Delta t) = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t + \Delta t) - c \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}(t + \Delta t - j\Delta t), \quad (9)$$

levando à seguinte definição da constante c :

$$c = \frac{(3/2)^\alpha \tau^\alpha}{(3/2)^\alpha \tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha} \quad (10)$$

Galucio et al. (2004) destaca que os *coeficientes de Grünwald*, que são estritamente decrescentes à medida que j aumenta, são os responsáveis, em termos matemáticos, assim como os coeficientes $g_{j+1}^{(\alpha)}$, pelo efeito de memória exibido por materiais viscoelásticos. Este comportamento estabelece que o comportamento do material viscoelástico em um dado instante de tempo depende mais fortemente de seu histórico temporal recente do que o mais distante.

A implementação da relação constitutiva do material dada na Eq. (9) ao *MEF* pode ser aplicada a modelos de estruturas de barras e viga sanduíche de três camadas. Essas estruturas são modeladas em elementos finitos com a teoria *FSDT* em camada equivalente única a teoria *FSDT-Layerwise* apresentadas na seção posterior.

Considerando esses dois modelos numéricos, a nível elementar, a parcela devida à energia de deformação do material é representada pelo produto entre a matriz de rigidez elementar associada a este elemento e o vetor de graus de liberdade elementar, o qual pode ser calculado por:

$$[K_e^v] \{u_e(t)\} = \int_V [B]^T \{ \sigma^s(\{u_e(t)\}) \} dV = \int_V [B]^T [C^s] \{ \varepsilon^s(\{u_e(t)\}) \} dV, \quad (11)$$

onde: $\{ \sigma^s(\{u_e(t)\}) \}$ e $\{ \varepsilon^s(\{u_e(t)\}) \}$ são os vetores de tensão e de deformação a nível elementar dependentes do vetor dos deslocamentos mecânicos, $\{u_e(t)\}$; $[B]$ é a matriz que relaciona os graus de liberdade do elemento a sua deformação, isto é, $\{ \varepsilon^s(\{u_e(t)\}) \} = [B] \{u_e(t)\}$, sendo ela independente de $\{u_e(t)\}$, estando relacionada às derivadas das funções de forma adotadas na formulação do elemento finito e são definidas na seção 1.4; e, finalmente, $[C^s]$ é a matriz das propriedades do material que relaciona deformação à tensão, $\{ \sigma^s(\{u_e(t)\}) \} = [C^s] \{ \varepsilon^s(\{u_e(t)\}) \}$.

No caso da utilização de um material viscoelástico, a lei de tensão não segue mais a relação clássica dada pela expressão $\{ \sigma^s(u_e(t)) \} = [C^s] \{ \varepsilon^s(u_e(t)) \}$. Por outro lado, tal como pode ser visualizado no modelo fracionário

adotado, Eq. (7), para um incremento de tempo Δt , a adição das deformações inelásticas, $\bar{\varepsilon}^s$, deve ser feita àquelas puramente elásticas, ε^s . Assim, é estabelecida a relação seguinte:

$$\{\sigma^s(t + \Delta t)\} = E_\infty \{\varepsilon^s(t + \Delta t) - \bar{\varepsilon}^s(t + \Delta t)\}. \quad (12)$$

Através da utilização da discretização anterior com inclusão da formulação para a deformação inelástica $\bar{\varepsilon}^s$, Eq. (9), e da extensão da relação tensão-deformação para um modelo tridimensional aplicado à formulação de um material isotrópico, tem-se que as componentes de tensão podem ser escritas em termos de suas deformações, axiais e cisalhantes, como se segue:

$$\{\sigma^s(t + \Delta t)\} = [C^s] \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \{\varepsilon^s(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{\varepsilon}^s(t + \Delta t - j\Delta t)\} \right], \quad (13)$$

de maneira que as constantes E_0 , E_∞ e c são parâmetros relacionados ao modelo fracionário para o material viscoelástico, dado na Eq. (6).

Levando em conta ainda que $\{\bar{\varepsilon}^s(\{u_e(t)\})\} = [B]\{\bar{u}_e(t)\}$, sendo $\{\bar{u}_e(t)\}$ o vetor de graus de liberdades inelásticos, e que $\{\varepsilon^s(\{u_e(t)\})\} = [B]\{u_e(t)\}$, a Eq. (13) toma a forma:

$$\{\sigma^s(t + \Delta t)\} = [C^s][B] \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \{u_e(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \right]. \quad (14)$$

A introdução da Eq.(14) à Eq. (11), para um incremento de tempo Δt qualquer, conduz a seguinte equação:

$$\int_V [B]^T \{\sigma^s(\{u_e(t + \Delta t)\})\} dV = \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) [K_e^v] \{u_e(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} [K_e^v] \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\}, \quad (15)$$

sendo a matriz $[K_e^v]$ definida na seção posterior, e o vetor $\bar{u}_e(t + \Delta t)$, a partir da Eq. (9), dado por:

$$\{\bar{u}_e(t + \Delta t)\} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \{u_e(t + \Delta t)\} - c \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\}. \quad (16)$$

Logo, a nível elementar, a inclusão do comportamento viscoelástico é dada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$[M_e] \{\ddot{u}_e(t + \Delta t)\} + \left([K_e^v] + [\tilde{K}_e^v] \right) \{u_e(t + \Delta t)\} = \{F_e(t + \Delta t)\} + \{\tilde{F}_e(t + \Delta t)\}, \quad (17)$$

de maneira que:

$$[\tilde{K}_e^v] = c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} [K_e^v] \quad (18)$$

e

$$\{\tilde{F}_e(t + \Delta t)\} = -c \frac{E_\infty}{E_0} [K_e^v] \sum_{j=1}^{N_t} g_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\}, \quad (19)$$

onde o vetor $\{F_e\}$ das forças elementares apresentado na Eq. (17) é definido na seção posterior.

Vale à pena ressaltar que os termos dependentes do *histórico* do tempo estão localizados no lado direito na equação dinâmica elementar, Eq. (17), e cuja referida dependência está representada na Eq. (19). Já a força externa $\{F_e(t + \Delta t)\}$ pode ou não depender do tempo.

5 FORMULAÇÕES FSDT EM CAMADAS EQUIVALENTES ÚNICA E DISCRETAS

A seguir é expresso o campo de deslocamentos da teoria *Layerwise-FSDT*.

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z, t) &= u_0^k(x, y, t) + (z - z^k) \psi_x^k(x, y, t); \\ v^k(x, y, z, t) &= v_0^k(x, y, t) + (z - z^k) \psi_y^k(x, y, t); \\ w^k(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (20)$$

onde: u_0^k , v_0^k , e w_0^k são os deslocamentos nas direções coordenadas (x, y, z) de um ponto material do plano médio de referência $(x, y, 0)$; ψ_x^k e ψ_y^k são rotações dos segmentos normais à superfície de referência (x, y, \bar{z}^k) em torno dos eixos y e x , respectivamente, de cada camada k do estratificado. Adotando $z^k = 0$, tem-se a expressão do campo de deslocamentos mecânicos da teoria *FSDT* em camada equivalente única.

As variáveis mecânicas apresentadas na Eq. (20) são convertidas para sua formulação em elementos finitos usando funções de forma e variáveis mecânicas nodais apropriadas.

O elemento considerado é um elemento de placa que apresenta três nós por aresta, num total de 8 nós e é conhecido como elemento Serendipity (Reddy, 1997). A matriz de transformação linear entre as coordenadas globais (x, y) e locais (ξ, η) elementares e as oito funções de interpolação (funções de forma) N_i , com $i = 1$ a 8, são fornecidas por Reddy (1997).

O campo de deslocamentos mecânicos da teoria *FSDT* em camada equivalente única é reescrito em coordenadas locais elementares como sendo:

$$\{U(\xi, \eta, z, t)\}_{1 \times 3} = [A(z)]_{3 \times 5} [N(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{u_e(t)\}_{40 \times 1}, \quad (21)$$

onde: $\{U(\xi, \eta, z, t)\} = \{u(\xi, \eta, z, t) \ v(\xi, \eta, z, t) \ w(\xi, \eta, z, t)\}^T$; $\{u_e(t)\}$ é o vetor que contém as 40 variáveis mecânicas nodais e $[N(\xi, \eta)]$ é a matriz das funções de forma.

As deformações mecânicas na teoria *FSDT* são apresentadas em termos das funções de forma e dos deslocamentos mecânicos nodais, a partir da Eq. (21), sob a forma:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta, z, t)\}_{6 \times 1} = [D(z)]_{6 \times 5} [N(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{u_e(t)\}_{40 \times 1} = [B(\xi, \eta, z)]_{6 \times 40} \{u_e(t)\}_{40 \times 1}, \quad (22)$$

onde as matrizes $[D(z)]$, $[B(\xi, \eta, z)]$, $[N(\xi, \eta)]$ e $[A(z)]$ são indicadas em Faria (2006).

Do equilíbrio das forças interlaminares, os campos de deformações e de deslocamentos das camadas adjacentes k e $k + 1$ devem satisfazer as seguintes condições:

$$\left((u \ v \ w)^{(k)} \right)^T = \left((u \ v \ w)^{(k+1)} \right)^T. \quad (23)$$

O campo de deslocamentos mecânicos da formulação da teoria *Layerwise-FSDT* é expresso em termos das suas 72 variáveis mecânicas nodais, no lugar das 40 requeridas na teoria *FSDT*, visto que dois graus de liberdade suplementares por camada k , são adicionados as variáveis mecânicas nodais da camada de referência $(x, y, 0)$. Esses dois graus de liberdade adicionais correspondem às rotações $(\psi_{ix}^{(k)}, \psi_{iy}^{(k)})$ da camada k . Como o estratificado em estudo é composto por três camadas, tem-se: $\{\hat{u}_e\} = \{u_i^{(k)} \ v_i^{(k)} \ w_i^{(k)} \ \psi_{xi}^{(1)} \ \psi_{yi}^{(1)} \ \psi_{xi}^{(2)} \ \psi_{yi}^{(2)} \ \psi_{xi}^{(3)} \ \psi_{yi}^{(3)}\}^T$, com $i = 1$ à 8, e assim, o vetor deslocamentos nodais é aproximado numericamente pela expressão:

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{9 \times 1} = [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1}. \quad (24)$$

As funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ do elemento finito Serendipity, com $i = 1$ a 8, são incluídas na matriz de funções de forma mecânicas $[\hat{N}(\xi, \eta)]$ de dimensão 9×72 .

O campo de deslocamentos *Layerwise-FSDT* então é reescrito em coordenadas locais elementares tal como:

$$\{\widehat{U}(\xi, \eta, z, t)\}_{3 \times 1}^{(k)} = [\widehat{A}(z)]_{3 \times 9} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1}. \quad (25)$$

Usando a expressão anterior, as deformações mecânicas na teoria *Layerwise-FSDT* são apresentadas em termos do uso da matriz que contém as derivadas das funções de forma dadas pela expressão:

$$[\widehat{B}^{(k)}(\xi, \eta, z)]_{6 \times 72} = [\widehat{D}^{(k)}(z)]_{6 \times 9} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72}. \quad (26)$$

Através do uso do *Princípio Variacional de Hamilton*, que incorpora todas as contribuições energéticas presentes na estrutura, são obtidas as matrizes de rigidez e de massa elementares da estrutura, segundo procedimento detalhado por Faria (2006), assim resultando nas matrizes elementares $[M_e]$, $[K_e^v]$, $[K_e^{nv}]$ e no vetor elementar $\{F_e(t)\}$. Os procedimentos adotados para a obtenção dessas matrizes de massa e rigidez da teoria *FSDT* são semelhantes aos empregados com a teoria *Layerwise-FSDT*, porém empregando as matrizes $[\widehat{B}^{(k)}(\xi, \eta, z)]$ correspondentes desta teoria.

Por meio da utilização da matriz de transformação $[L_e]$, as matrizes de rigidez viscoelástica elementar $[K_e^v]$, de rigidez não viscoelástica elementar $[K_e^{nv}]$, a matriz elementar $[\widetilde{K}_e^v]$ definida na Eq. (18), a matriz de massa elementar $[M_e]$, e os vetores de força elementares $\{F_e\}$ e $\{\widetilde{F}_e\}$ (Eq.(19)), são transformados em suas formas globais, resultando nas seguintes equações dinâmicas, Eq. (27) e Eq. (28) ao nível global, aplicáveis respectivamente à modelagem da estrutura totalmente em material viscoelástico e estruturas sanduíche dotada de camadas viscoelásticas embutidas ao longo da espessura do estratificado e estudadas no domínio do tempo. Assim,

$$[\overline{M}_g] \{\ddot{u}_g(t)\} + [\overline{K}_g^v] \{u_g(t)\} = \{\overline{F}_g(t)\}, \quad (27)$$

com: $[\overline{K}_g^v] = [K_g^v] + [\widetilde{K}_g^v]$ e $\{\overline{F}_g(t)\} = \{F_g(t)\} + \{\widetilde{F}_g(t)\}$ e,

$$[\overline{M}_g] \{\ddot{u}_g(t)\} + [\overline{K}_g] \{u_g(t)\} = \{\overline{F}_g(t)\}, \quad (28)$$

com: $[\overline{K}_g] = \sum_{k=1}^{N_{nv}} [\overline{K}_g^{nv}]_k + \sum_{k=1}^{N_v} [\overline{K}_g^v]_k$, $\{\overline{F}_g\} = \sum_{k=1}^{N_{nv}} \{\overline{F}_g^{nv}\}_k + \sum_{k=1}^{N_v} \{\overline{F}_g^v\}_k$, sendo que os sobrescritos N_{nv} e N_v do somatório indicam, respectivamente, o número de camadas laminadas e o número de camadas puramente viscoelásticas ao longo da espessura da estrutura do tipo sanduíche formada. E, $(nv) =$ não viscoelástico e $(v) =$ viscoelástico.

Para análise transiente de problemas não lineares indicados pelas equações globais, Eq. (27) e Eq. (28), é necessário a utilização de um método estável de integração temporal. Os *métodos de integração de Newmark* são adotados para a obtenção da solução numérica aproximada das equações de equilíbrio dinâmicas resultantes da modelagem em elementos finitos das estruturas amortecidas analisadas. No entanto, nesses métodos de integração algumas modificações nos algoritmos clássicos de integração são efetuadas para levar em consideração a presença dos materiais viscoelásticos modelados usando o método das *Derivadas Fracionárias* apresentado anteriormente. A formulação do *método implícito de Newmark* é detalhada em Galucio et al. (2004). Já a *formulação do método de integração explícita de Newmark*, usada neste estudo, também é bem conhecida na literatura e ambas formulações podem ser consultadas através de Bathe (1996).

Duas importantes observações devem ser consideradas na implementação dos *métodos de integração de Newmark*. Primeiramente, para um passo de tempo constante, a matriz de rigidez $[\overline{K}_g]$ é avaliada uma única vez, e, em segundo lugar, a avaliação do carregamento modificado, $\{\overline{F}_g^e(t_{n+1})\}$, trata-se de um processo relativamente simples, uma vez que somente o histórico dos deslocamentos inelásticos deve ser armazenado ao longo dos incrementos de tempo, Δt . Além disso, o histórico dos deslocamentos inelásticos pode ser truncado de maneira a considerar apenas os primeiros incrementos de tempo (por exemplo, $N_t = 25$ incrementos de tempo anterior) sem perder a acuracidade nas respostas numéricas obtidas, propiciando assim uma redução apreciável no cálculo computacional realizado.

6 VALIDAÇÕES NUMÉRICAS

A validação do algoritmo aqui apresentado é realizada levando em conta o exemplo numérico apresentado por Galucio et al. (2004). A simulação envolve uma barra viscoelástica engastada-livre de comprimento $L = 500$ mm, largura $b = 50$ mm e espessura $h = 50$ mm, conforme é ilustrada na Figura 1(a) a seguir.

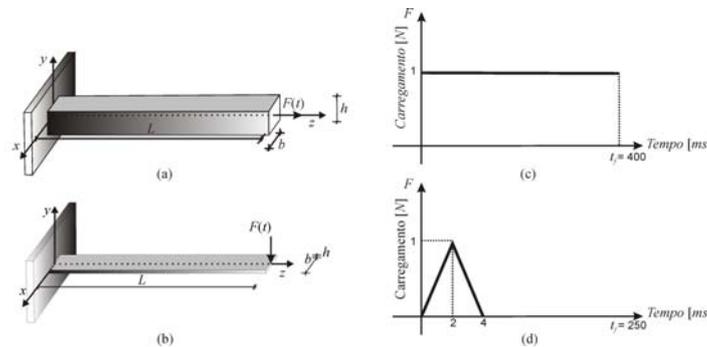


Figura 1 - Modelos implementados (a, b) e seus respectivos históricos de força aplicada (c, d).

Para avaliar os resultados obtidos, são implementados modelos de elementos finitos usando as teorias *FSDT* e *Layerwise-FSDT* contendo também 10 elementos finitos, 53 nós, com 5 (*FSDT*) ou 9 graus de liberdade (*Layerwise-FSDT*). Os resultados obtidos pelas duas metodologias são confrontados a partir dos dados fornecidos na literatura por Galucio et al. (2004) utilizando a formulação clássica de vigas pela *teoria de Timoshenko* para a camada viscoelástica e a *teoria de Euler* para as camadas externas.

Os dados relacionados ao material viscoelástico (polímero fictício) são $\rho = 1000$ kg/m³, $E_0 = 7$ MPa, $E_\infty = 10$ MPa e $\tau = 20$ ms. A estrutura é submetida a uma carga axial do tipo degrau unitário, aplicada em sua extremidade livre, dada por $F(t) = 1H(t)$ N, sendo $H(t)$ a função de *Heaviside*, mostrada na Fig. 1(c).

O tempo final de simulação é adotado como sendo $T = 400$ ms e o incremento de tempo utilizado é de $\Delta t = 1$ ms. A ordem da derivada fracionária aqui utilizada vale $\alpha = 0,5$ e consideram-se os cinquenta primeiros pontos ($N_t = 50$) para compor o histórico da deformação inelástica no cálculo da discretização do operador fracionário. A Figura 2 ilustra o deslocamento axial da extremidade livre da barra em função do tempo e é obtida mediante os algoritmos implementados neste artigo, e aqueles apresentados por Galucio et al. (2004).

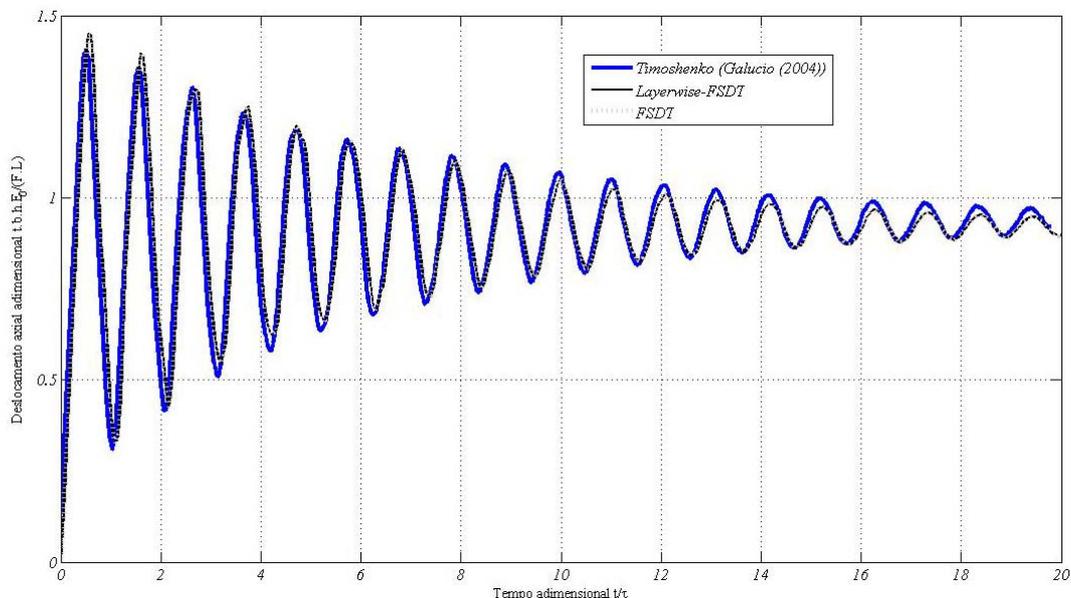


Figura 2 - Comparação entre as três implementações numéricas.

Nota-se, por meio da Fig. 2, que as duas metodologias (*FSDT* e *Layerwise-FSDT*) convergem para um mesmo resultado que é próximo ao obtido por Galucio et al. (2004).

A segunda aplicação numérica consiste na modelagem de uma viga engastada-livre, formada por três camadas, sendo um núcleo de material viscoelástico (ISD112 à 27°C) revestido por duas camadas elásticas de alumínio.

A viga apresenta comprimento $L = 200$ mm, largura $b = 10$ mm, espessuras das camadas da base e do topo respectivamente de $h_a = h_b = 1$ mm e camada viscoelástica central $h_c = 0,2$ mm, conforme ilustrado na Figura 1(b).

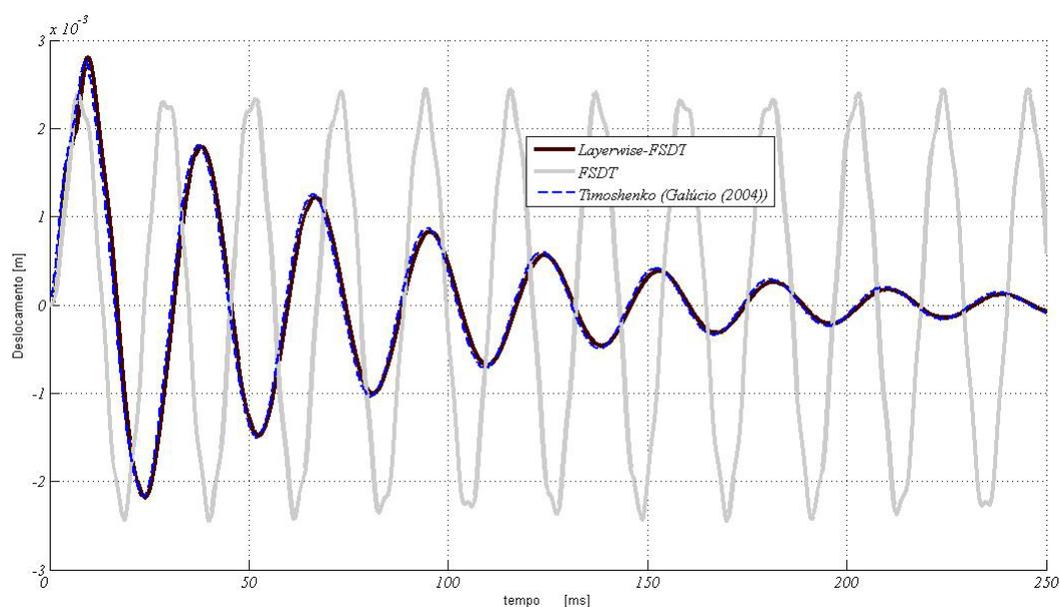


Figura 3 - Comparação entre as três formulações numéricas adotadas a modelagem da viga sanduíche engastada-livre, dotada de carga impulsiva aplicada na extremidade livre.

As propriedades mecânicas do material das faces de alumínio são $\rho = 2690$ kg/m³, $E = 70,3 \times 10^3$ MPa e $\nu = 0,345$. Já do núcleo viscoelástico, $\rho = 1600$ kg/m³, $\nu = 0,5$, $E_0 = 1,5$ MPa, $E_\infty = 69,9495$ MPa, $\alpha = 0,7915$ e $\tau = 1,4052 \times 10^{-2}$ ms. A estrutura sanduíche é submetida a uma carga triangular do tipo impulsiva, aplicada em sua extremidade livre da viga, na direção de y , conforme ilustrado pelas Figs. 1(b) e 1(d).

O tempo final de simulação adotado vale $T = 250$ ms e o incremento de tempo usado é de $\Delta t = 0,25$ ms. Considera-se $N_t = 50$ para o histórico da deformação inelástica no cálculo da discretização do operador fracionário.

A Figura 3 ilustra os resultados obtidos da variação do deslocamento na direção y em relação ao tempo para as três formulações empregadas. Observa-se desta figura que as duas metodologias, *FSDT-Layerwise* e aquela formulada por Galúcio et al. (2004), convergem para um mesmo resultado, enquanto que teoria *FSDT* não consegue captar o amortecimento promovido pela camada viscoelástica embutida, além que a estrutura apresenta uma rigidez suplementar em relação à observada pelas duas outras teorias.

7 CONCLUSÕES

Os procedimentos de modelagem numérica por elementos finitos realizados para estruturas dotadas de camadas passivas permitem a validação dos algoritmos numéricos implementados.

A teoria *Layerwise-FSDT* apresenta bons resultados em comparação aos da referência bibliográfica na modelagem de estruturas homogêneas e heterogêneas, dotada de fina camada viscoelástica. Já a teoria *FSDT*, em camada equivalente única, é mais indicada para a modelagem de estruturas homogêneas, ou seja, de camada única viscoelástica. O uso das *Derivadas Fracionárias* permite a formulação de estruturas heterogêneas amortecidas estudadas no domínio do tempo, sem a adição de custo computacional apreciável, sendo, portanto uma importante ferramenta promissora de integração com o *MEF* na modelagem de estruturas amortecidas através do uso dos materiais viscoelásticos.

8 AGRADECIMENTOS

Ao CNPq e a Capes pelas bolsas PDEE e de Doutorado de Faria, A. W., pelo apoio financeiro dos projetos de pesquisa dos demais autores e ao Programa de Pós-Graduação em Eng. Mecânica da UFU pelo apoio material e profissional.

9 REFERÊNCIAS

Araújo, A. L., Mota Soares, C. M., Mota Soares, C. A., Herskovits, J., 2008, "Damping Optimization of Viscoelastic Laminated Sandwich Composite Structures", EngOpt 2008, International Conference on Engineering Optimization. Rio de Janeiro, Brazil.

Bathe, K-J, 1996, "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1037 p.

Christensen, R. M., 1982, "Theory of Viscoelasticity: An Introduction. Inc.: Academic Press" New York, 2nd edition.

Correia, V. M. F; Gomes, M. A. A., Suleman, A.; Soares, C. M. M.; Soares, C. A. M, 2000, "Modelling and Design of Adaptive Composite Structures", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 185, pp. 325-346.

Faria, A. W., 2006, "Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica", Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Faria, A. W., Lima, A. A., Rade, R. S. L. and Rade, D. A., 2008, "Avaliação numérica por elementos finitos do amortecimento em material composto", Conem 2008, Salvador, Bahia.

Finegam, I. C. and Gibson, R. F., 1999, "Recent Research on Enhancement of Damping in Polymer Composites, Composite Structures", Vol. 44, pp. 89-88.

Galucio, A. C., Deü, J.-F. and Ohayon, R., 2004, "Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivations operators", Computational Mechanics, Vol. 33, pp. 282-291.

Galucio, A. C., Deü, J.-F., Mengué, S. and Dubois, F., 2006, "An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 195, pp. 6073-6085.

Lima, A. M. G., 2007, "Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de amortecimento viscoelástico", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Makhecha, D. A., Ganapathi, M. and Patel, B. P., 2002, "Vibration and Damping Analysis of Laminated/Sandwich Composite Plates using Higher-Order Theory. Journal of Reinforced Plastic and Composites", Vol. 21, pp. 554-575.

Malekzadeh, K. and Khalili, M.R., 2005, "Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach", Journal of Sandwich Structures and Materials", Vol.7, pp. 431-456.

Meunir, M. and Sheno, R. A., 2001, "Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modeled using high-order shear deformation theory", Composite Structures, Vol.54, pp. 243-254.

Nashif, A. D.; Jones, D. I. G. and Henderson, J. P. Vibration Damping, Inc.: John Wiley & Sons, 1985.

Reddy, J. N., 1997, "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", 2th Edition, CRC Press.

Schmidt, A and Gaul, L., 2002, "Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations Using Fractional Time Derivatives", Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp.37-55.

DAMPING OF TIME DOMAIN OF THE SANDWICHES STRUCTURES WITH VISCOELASTIC LAYER IMPLEMENTED IN FINIT ELEMENTS OF USE FRACTIONAL DERIVATIVES AND STUDY OF THE FSDT AND LAYERWISE-FSDT THEORIES

Albert Willian Faria, awfaria@yahoo.com.br¹

Thiago de Paula Sales, thiago1c@yahoo.com.br²

Adailton Silva Borges, adailton_sborges@hotmail.com³

Edson Borges, edsonborgesmec@yahoo.com.br⁴

Domingos Alves Rade, domingos@ufu.br⁵

^{1,2,3,4,5} Federal University of Uberlândia. Av. João Naves de Avila, 2160 , Bloco 10, Laboratório de Mecânica de Estruturas, Prof. José Eduardo Tannús Reis (Lmest), Sta. Mônica, Uberlândia, MG

Abstract. This article refers to the characterization by means of finite element models of the dissipative effects in sandwich structures in the context of passive vibration control. The damping is increased by application of viscoelastic internal treatments, resulting in a sandwich structure. This technique is used in finite element modeling of the sandwich formed by using two theories: the First-order Shear Deformation Theory (FSDT) and Layerwise-FSDT. The damping of the dissipative materials is formulated by using the method of Fractional Derivatives in the context of time domain. The finite element modeling of the structures examined include the use of a Serendipity rectangular element with eight nodes. Five or nine degrees of freedom per node are present by use respectively of FSDT or Layerwise-FSDT theories. The responses are presented in dynamic response functions in time domain, obtained using the Newmark numerical integrator. Numerical simulations are carried in order to validate the implementation of the viscoelastic materials using the mathematical method of fractional derivatives, and numerical confrontation of the two theories in the time domain in the study of a beam sandwich structure which is adopted with a viscoelastic core.

Keywords: sandwich structures and viscoelastic materials, finite elements, Fractional Derivatives, FSDT and Layerwise-FSDT.