

## **DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS EM UM ESCOAMENTO PADRÃO GOLFADAS DE LÍQUIDO NA VERTICAL**

**Navarro, J. G, jjgn2010@gmail.com**  
**Mazza, R. A, mazza@fem.unicamp.br**

Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. Rua Mendeleiev, s/n, Cidade Universitária "Zeferino Vaz", Barão Geraldo, Campinas-SP, Caixa Postal: 6122, CEP: 13.083-970

**Resumo:** *O escoamento gás-líquido intermitente em golfadas de líquido é composto por uma sucessão de bolhas de gás alongadas e pistões de líquido, que interagem cinematicamente e dinamicamente à medida que viajam ao longo da tubulação. Essas interações produzem o caráter intermitente do escoamento fazendo com que o escoamento não seja periódico nem no tempo nem no espaço. Desta forma, modelar o escoamento padrão golfadas de líquido é um desafio aos pesquisadores. O presente trabalho tem como objetivo determinar as frequências características/naturais da oscilação da velocidade do pistão e da pressão da bolha em escoamento padrão golfadas de líquido em um duto vertical. O fenômeno oscilatório é estudado numericamente utilizando-se um modelo de seguimento dinâmico de pistões, no qual se obtém um sinal característico da evolução da velocidade de líquido e da pressão da bolha ao longo do tempo. Esses sinais são analisados utilizando-se a transformada de Hilbert-Huang para determinar as frequências características. Também é proposta uma solução analítica aproximada para determinar as frequências naturais de oscilação, sendo comparada com os resultados numéricos, determinando os limites da validade para a solução analítica aproximada. A solução analítica é obtida por meio de análise dimensional das principais grandezas envolvidas e a similaridade com sistemas massa-mola.*

**Palavras-chave:** *escoamento bifásico, padrão golfadas, Hilbert-Huang*

### **1. INTRODUÇÃO**

A ocorrência de escoamentos bifásicos de ar e água em tubulações verticais, horizontais e inclinadas é muito comum em diversas atividades industriais. Dentre essas podem ser citadas a indústria química, a indústria de geração de energia e com destaque a indústria do petróleo. Dentre os padrões de escoamento bifásico acredita-se que o mais comum seja o padrão golfadas, que é caracterizado pela passagem alternada de pistões de líquido seguidos, na tubulação, por longas bolhas de gás. Apesar dos diversos trabalhos e modelos para entender o padrão de escoamento intermitente em regime de golfadas, pouco interesse vem sendo dado as características oscilatórias desse tipo de escoamento. Dentro dos autores que vêm propondo modelos para capturar as características oscilatórias para o padrão golfadas pode-se citar Vergnolle e Brandeis (1996), Polonsky et al. (1999), Liang e Ma (2004), James et al. (2004), Mazza e Rosa (2008), Madani et al. (2009), entre outros.

Vergnolle e Brandeis (1996) apresentam um modelo que determina a variação da pressão acústica num conduto vulcânico para uma grande bolha. Conforme a bolha viaja no conduto de magma, o modelo identifica o tipo de oscilação. Liang e Ma (2004), apresentam um modelo Lagrangiano para escoamento horizontal que descreve as características oscilatórias para o padrão golfadas em um tubo capilar. James et al. (2004), fazem uma comparação das frequências obtidas experimentalmente com as previstas pelo modelo de Vergnolle e Brandeis (1996) obtendo boa concordância. Mazza e Rosa (2008), utilizando o modelo Slug-Traking obtém as frequências naturais para uma e duas bolhas. O modelo é obtido a partir de uma filtragem linear nas flutuações e análise da ordem de grandeza, sendo os resultados comparados com a solução numérica. Madani et al. (2009), apresentam um estudo experimental em um tubo vertical oscilante. O modelo mostra o mecanismo físico da propagação da bolha, os efeitos do diâmetro da tubulação, e a influência das propriedades físicas dos líquidos no movimento da bolha de Taylor.

Desta maneira, esforços para caracterizar a oscilação de uma bolha alongada imersa em um pistão de líquido devem ser realizados. O objetivo principal é estudar o fenômeno oscilatório em escoamento padrão golfadas de líquido, para uma bolha em um duto vertical utilizando-se um modelo de seguimento dinâmico de pistões, no qual se obtém um sinal característico da evolução da velocidade de líquido e da pressão da bolha no longo do tempo.

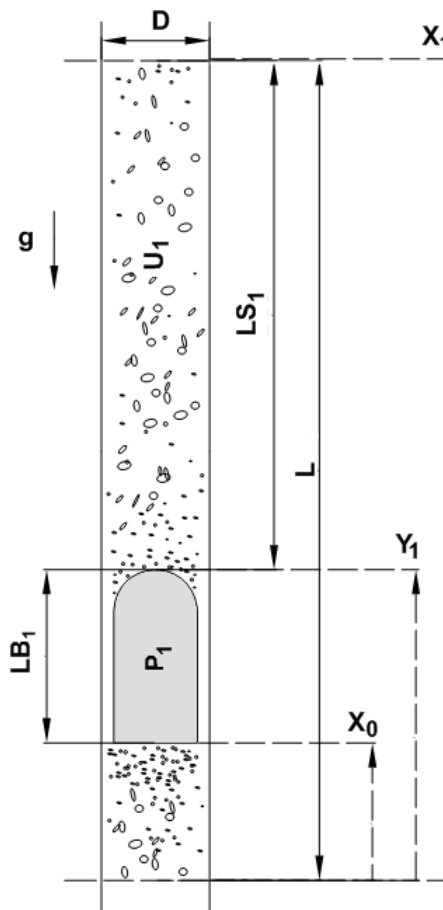
## 2. MODELO MATEMÁTICO

Nessa seção é apresentado um modelo Lagrangeano para escoamento padrão golfadas de líquido, seguindo a metodologia de seguimento dinâmico de pistões e bolhas (Slug-Traking). Com esse tipo de modelo é possível capturar as características intermitentes do escoamento obtendo-se além dos valores médios das propriedades do escoamento, suas distribuições. Além disso, o modelo requer uma pequena quantidade de equações constitutivas. O modelo é baseado nas equações de conservação de massa e quantidade de movimento na forma integral e aplicadas a volumes de controle que se deslocam acompanhando os pistões de líquido, de forma similar aos propostos por Grenier (1997) e Franklin (2004). O modelo resultante é formado por duas equações diferenciais no tempo relacionando propriedades das células adjacentes como velocidade do líquido no pistão de líquido, pressão na bolha de Taylor, características geométricas do escoamento e físicas do fluido. Estas equações podem ser expressas como:

$$P_j = P_{j+1} + \rho_L \cdot g \cdot LS_j + \rho_L LS_j \left( \frac{dU_j}{dt} \right) \quad (1)$$

$$U_j = U_{j-1} - \frac{LB_j \cdot \overline{RG}_j}{P_j} \left( \frac{dP_j}{dt} \right) \quad (2)$$

onde  $U$  é a velocidade do pistão de líquido;  $LB$  e  $LS$  é o comprimento da bolha e do pistão de líquido, respectivamente;  $\overline{RG}$  é a fração de vazio média na região da bolha;  $P$  é a pressão na bolha;  $D$  é o diâmetro da tubulação. A posição da frente e da traseira da bolha é representada pelas coordenadas  $Y_1$  e  $X_0$ , respectivamente. A Fig. (1) traz, de forma simplificada, as variáveis envolvidas.



**Figura 1 – Diagrama esquemático de uma única bolha no interior de um duto.**

O modelo descrito acima considera que: O modelo é uni-dimensional, isotérmico e aplica-se a escoamentos verticais ascendentes; O pistão de líquido é tratado como uma fase única; A densidade do líquido é considerada constante ao longo do escoamento; Considera-se que o filme de líquido possui altura constante, não variando no espaço e no tempo; A pressão ao longo de uma bolha de gás é constante; A velocidade do líquido no pistão é constante;

Considera-se que não há transferência de massa entre as fases nem mudanças de fase; A fase líquida tem comportamento de fluido newtoniano.

As Eqs. (1) e (2) possuem coeficientes não constantes, o que dificulta ou mesmo impossibilita obter uma solução analítica exata, contudo utilizando técnicas específicas é possível obter uma solução analítica aproximada. Uma solução analítica pode ser obtida decompondo os termos médios e um de flutuação. Analisando ordem de grandeza dos termos e as variações médias, o modelo é simplificado e uma solução analítica para uma bolha na vertical pode ser obtida.

$$\left(\frac{d^2 \tilde{P}_1}{dt^2}\right) + 2a \left(\frac{d\tilde{P}_1}{dt}\right) + \omega_d^2 \tilde{P}_1 = 0 \quad (3)$$

onde:

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_L \cdot g \cdot VB}{P_{atm} + \rho_L \cdot g \cdot LS_1} \right) \quad (4)$$

e,

$$\omega_o^2 = \frac{P_{atm} + \rho_L \cdot g \cdot \overline{LS_1}}{\rho_L \cdot LS_1 \cdot LB_1 \cdot RG_1} \quad (5)$$

A solução em frequência é:

$$\omega_d = (1/2\pi) \sqrt{\omega_o^2 - a^2} \quad (6)$$

A Eq. (3) representa um sistema Massa – Mola – Amortecedor com um coeficiente não linear, uma vez que  $\overline{LS_1}$  é função do tempo. Para se determinar a frequência natural analítica foi imposta uma linearização adotando que o comprimento do pistão de líquido a frente da bolha fosse constante. A Eq. (6) representa a frequência natural do sistema, nesta equação pode – se observar que para obter uma solução analítica aproximada foi considerado  $\omega_o$  constante; todos os parâmetros não variam no tempo exceto  $\overline{LS_1}$ . Determino-se uma condição para que  $\overline{LS_1}$  seja considerado constante.

Sabendo que a variação de  $\overline{LS_1}$  no tempo é determinada por:

$$\overline{LS_1} = (LS_{1_{ini}} - VB.t) \quad (7)$$

onde o termo  $LS_{1_{ini}}$  é o comprimento do pistão de líquido à frente da bolha no instante inicial.

Agora como  $P_{atm} \gg \rho_L$  então  $a^2 \ll \omega_o^2$ , portanto a frequência é determinada por:

$$\omega_d = (1/2\pi) \omega_o^2 \quad (8)$$

Pode-se observar que a solução analítica para o caso de uma bolha no interior do duto mostra que a frequência natural varia ao longo do tempo, também pode – se notar que a frequência natural obtida é para flutuação de velocidade, não obstante a velocidade é obtida pela derivada da flutuação de pressão, portanto terá a mesma frequência só que ficará apenas defasada.

A solução numérica é obtida utilizando-se um modelo de seguimento dinâmico de pistões, no qual se obtém um sinal característico da evolução da velocidade de líquido e da pressão da bolha ao longo do tempo. Esses sinais são analisados utilizando-se a Transformada de Hilbert – Huang para determinar as frequências características já que é uma ferramenta efetiva para o processamento de sinais estacionários e não-estacionários.

### 3. TRANSFORMADA DE HILBERT – HUANG

A Transformada de Hilbert – Huang (THH) é uma técnica de análise Tempo–Frequência proposta por Huang et. al. (1998), e que tem como principal característica o fato de poder ser aplicada a sinais não estacionários e não lineares. Alguns autores têm aplicado a HHT para o estudo de escoamento bifásico destacam-se os trabalhos apresentados por

James et. al. (2004), Sun et. al. (2006), Ding et. al. (2007), Sun et. al. (2008). Outras aplicações da THH podem ser obtidas em Huang e Attoh-Okine (2005).

A THH é um processo que comporta duas fases Decomposição Empírica em Modos (EMD) e Análise Espectral de Hilbert (HSA). A EMD decompõe um conjunto de dados num número finito, e frequentemente pequeno de funções modais intrínsecas (IMF). A EMD separa uma seqüência de dados numa soma de componentes (IMFs) e cada um destes contém diferentes modos oscilatórios. As funções base do IMFs são derivadas diretamente do mesmo sinal e só requer que o sinal tenha no mínimo dois extremos, um mínimo e um máximo. As IMFs devem satisfazer duas condições: (a) O número de extremos e o número de cruces por zero devem ser iguais ou diferentes de um. (b) Em qualquer momento, o valor médio dos envolventes definidos pelos máximos locais e pelos mínimos locais é zero. O processo de filtragem para encontrar as IMFs de um sinal arbitrário denotado por  $x(t)$  é:

- i. Encontrar as posições e as amplitudes de todos os máximos locais e os mínimos no sinal de entrada. Criar o envolvente superior pela interpolação Spline dos máximos locais e o envolvente mais baixo pela interpolação Spline dos mínimos locais.
- ii. Para cada instante de tempo  $t$ , calcular a média  $m_1(t)$  da envolvente superior e da envolvente inferior e subtrair o sinal da média da envolvente do sinal de entrada para obter o primeiro componente  $h_1(t) = x(t) - m_1(t)$ .
- iii. Se o primeiro componente não for uma IMF, seja  $h_1(t)$  o novo sinal a analisar. Repetir o processo (i) e (ii) até que o primeiro componente seja uma IMF.
- iv. O primeiro componente que ademais é uma IMF é chamado  $c_1(t)$ . Seja  $r_1(t) = x(t) - c_1(t)$ . Continuar com o processo (i) – (iii) até que  $r_n(t)$  seja menor que um valor predeterminado ou converter-se num sinal monótona decrescente de onde não possa ser extraída nenhuma função IMF.

Este algoritmo continua até que o resíduo se torne muito pequeno e não contenha pontos de inflexão. Ao final do processo o sinal pode ser expresso da seguinte maneira:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) \quad (9)$$

onde  $n$  é o número total de IMFs,  $r_n(t)$  é o resíduo final e  $c_j(t)$  são as diferentes IMFs. Uma vez que as IMF tenham sido obtidas com o algoritmo iterativo, o próximo passo é aplicar a transformada de Hilbert a cada uma, definida como:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} (\text{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds \quad (10)$$

onde VP indica o valor do princípio de Cauchy, com esta definição é possível expressar de forma fasorial, de forma que possamos ter um sinal analítico.

A parte real de um sinal analítico é a série temporal original, enquanto que a parte imaginária é a transformada de Hilbert, desta forma pode – se expressar uma função analítica como:

$$z(t) = x(t) + i.y(t) = a(t).e^{i.\theta(t)} \quad (11)$$

onde,  $a(t)$  é a amplitude instantânea,  $\theta(t)$  é a fase instantânea e  $\omega_i(t)$  é a frequência instantânea.

$$a(t) = \sqrt{[X^2(t) + Y^2(t)]} \quad (12)$$

$$\theta(t) = \arctan(Y(t) / X(t)) \quad (13)$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (14)$$

Finalmente combinando a amplitude e a frequência instantânea é possível obter a representação tempo, frequência e amplitude do sinal original.

$$x(t) = \text{RE} \left[ \sum_{j=1}^n a_j(t). \exp(i \int \omega_j(t). dt) \right] \quad (15)$$

A Eq. (15) permite representar a amplitude e a frequência instantânea como funções do tempo em um gráfico tridimensional, em que a amplitude pode ser contorneada no plano da frequência-tempo. Esta distribuição da frequência-tempo da amplitude é designada como espectro de Hilbert.

#### 4. RESULTADOS

Os resultados aqui apresentados são para uma única bolha no interior do duto com: Comprimento: 20(m); Fração de vazio: 0.5; Pressão atmosférica: 100 (kPa); Fluidos: Água e ar; Tempo da simulação: 12(s). Velocidade superficial da água: 0.5 (m/s). Foram executados um total de cinco testes com velocidades superficiais do ar variando entre 0.4 e 0.6 (m/s) e com o diâmetro variando entre 0.0265 e 0.0530 (m). A grade de testes é mostrada na Tab. (1). Os valores das velocidades superficiais de ar, de água e da mistura,  $J_G$ ,  $J_L$  e  $J$  respectivamente, estão mostrados nas colunas 2,3 e 4. O comprimento da bolha e diâmetro nas colunas 5 e 6. São calculados por referência o número de Reynolds (Re), Eotvos (Eo), e Froude (Fr) do pistão de água nas colunas 7, 8 e 9. Por último a velocidade da frente da bolha é identificada na última coluna.

**Tabela 1. Grade de testes das condições iniciais.**

	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m)	(---)	(---)	(---)	(m/s)
Teste	$J_G$	$J_L$	$J$	LB	D	Re	Eo	Fr	VB
1	0.4	0.5	0.9	0.236	0.0265	23850	172.02	1.77	1.26
2	0.5	0.5	1.0	0.236	0.0265	26500	172.02	1.96	1.38
3	0.6	0.5	1.1	0.236	0.0265	29150	172.02	2.16	1.50
4	0.5	0.5	1.0	0.354	0.0398	39800	388.02	1.60	1.42
5	0.5	0.5	1.0	0.472	0.0530	53000	688.08	1.39	1.45

Para se obter uma representação Tempo – Frequência foi utilizada a THH no sinal velocidades de oscilação obtidas numericamente. As frequências analíticas instantâneas foram determinadas pelas Eqs. (6) e (14), obtendo-se:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}(\omega_d.t) = \frac{1}{4\pi} \left[ t \frac{\left( \frac{VB}{K_2} \frac{2k_1}{k_3} - \frac{2k_4}{k_3} - \frac{k_4^3}{k_1^3} \right)}{\sqrt{\frac{4k_1}{k_3} - \frac{k_4^2}{k_1^2}}} + \sqrt{\frac{4k_1}{k_3} - \frac{k_4^2}{k_1^2}} \right] \quad (16)$$

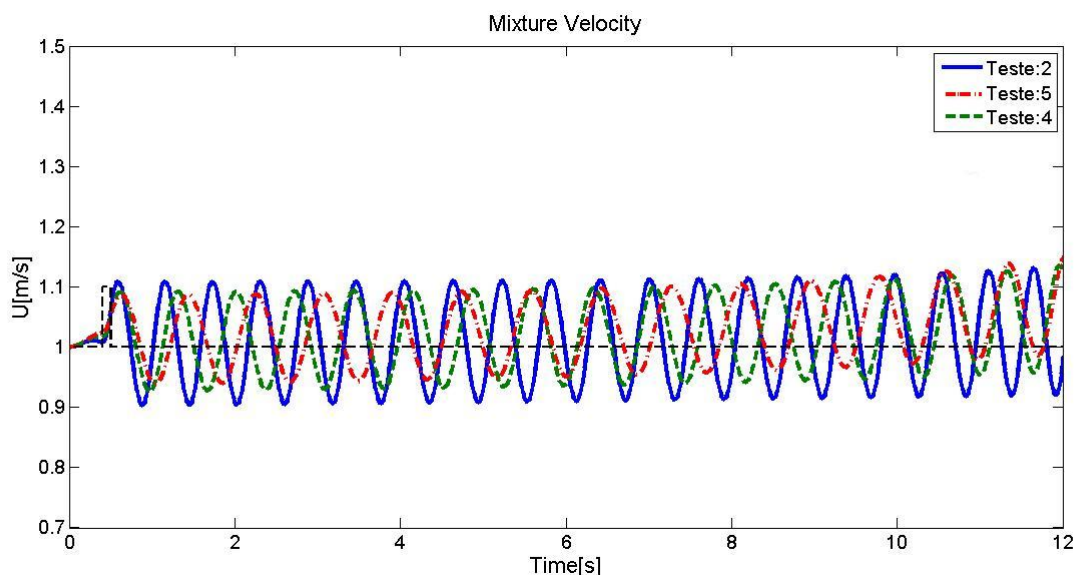
onde,

$$k_1 = P_{atm} + \rho.g.(K_2) \quad K_2 = LS_0 - VB.t \quad k_3 = (K_2)\rho.LB.RG \quad K_4 = \rho.g.VB \quad (17)$$

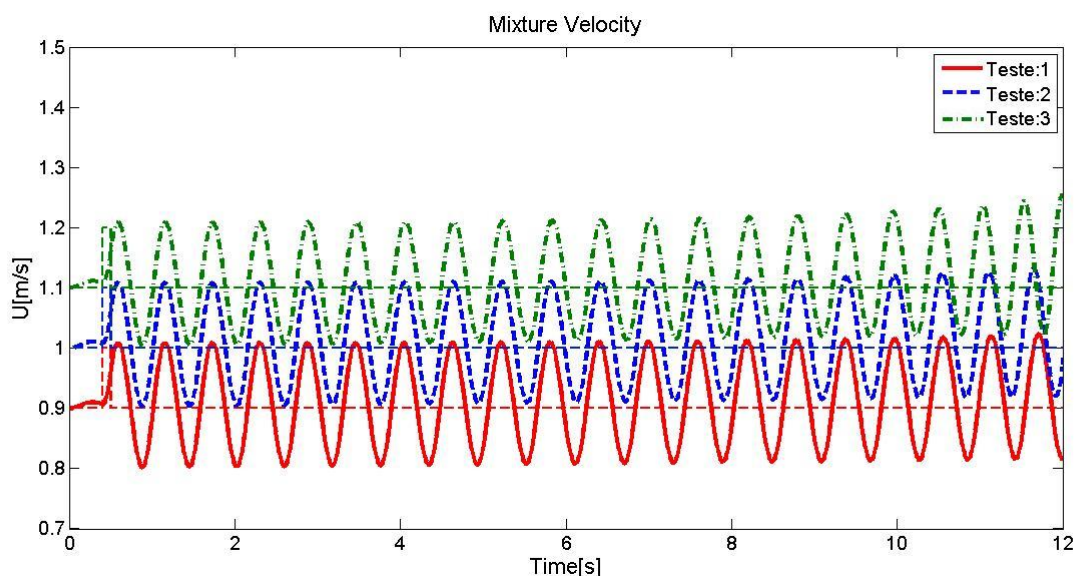
Enfatiza-se que: a frequência  $\omega_i$ , definida pela Eq. (14) e (16) determina a taxa de mudança de fase, é chamada de frequência instantânea, e sua alteração de valor é função do tempo. Esta definição de frequência instantânea foi adotado por Huang et. al., (1992) e usado por Cherneva e Veltcheva, (1993) para a investigação das propriedades locais de ondas do mar. Mais tarde Huang et. al., 1998 enfatizou uma considerável controvérsia nesta definição de frequência instantânea, mesmo com a utilização da HHT. A definição da  $\omega_i$  é uma área de pesquisa ativa e controversa, contudo para este trabalho empregou-se o conceito mais comumente aceito definido por Huang et. al., (1998).

Os resultados que serão apresentados mostram a resposta no tempo da velocidade e frequência instantânea do pistão de líquido. Os cinco testes mostrados na Tab. (1) são divididos em dois subcasos: (i) Testes 1,2 e 3. (ii) Teste 2, 4 e 5. Esta subdivisão foi feita para conhecer o comportamento da frequência instantânea em função da velocidade superficial do ar e do diâmetro da tubulação, casos (i) e (ii) respectivamente.

As Fig. (2) e Fig. (3) mostram a velocidade do pistão de líquido em função do tempo para os casos (i) e (ii). Tanto para o primeiro quanto para o segundo caso a velocidade do pistão de líquido na entrada foi alterada em um décimo durante um intervalo de 0.1(s), como se pode observar nas figuras citadas anteriormente.

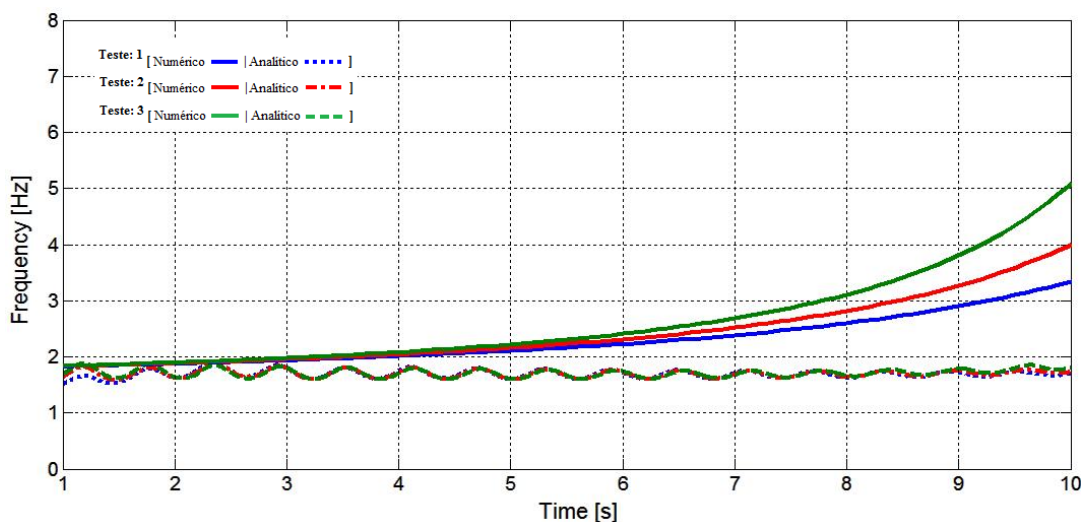


**Figura 2 – Velocidade do pistão de líquido no domínio do tempo: Caso (i)**

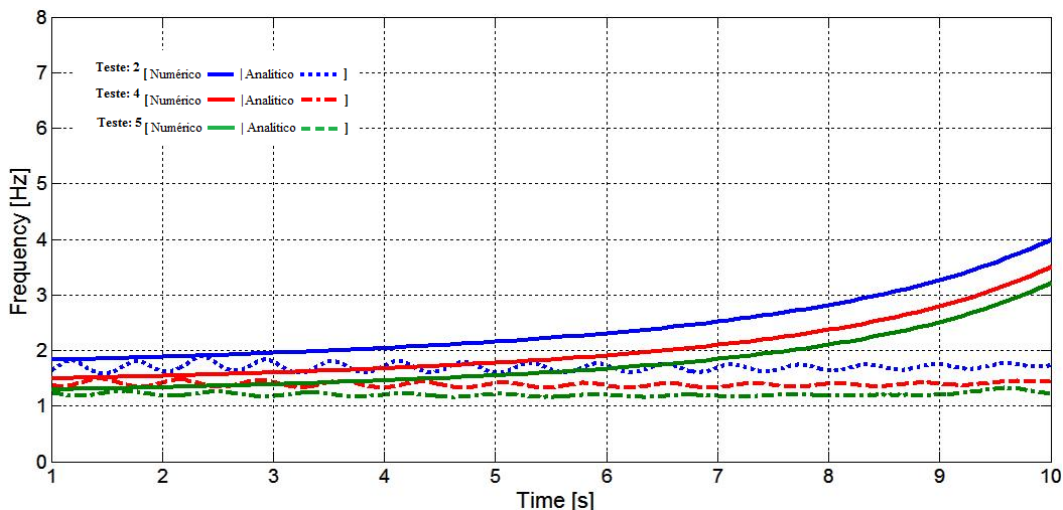


**Figura 3 – Velocidade do pistão de líquido no domínio do tempo: Caso (ii)**

Nas Figs. (4) e (5) pode-se observar que a frequência do pistão está aumentando conforme o pistão de líquido na saída do duto diminui o seu tamanho. Da Fig. (4) e Fig. (5) pode-se observar a comparação da frequência instantânea obtida mediante a transformada de Hilbert – Huang e a frequência instantânea obtida analiticamente para o primeiro e segundo caso Fig. (4) e Fig. (5) respectivamente. Empregando a THH no sinal da velocidade foi possível observar claramente a variação de frequência no tempo. Os valores obtidos analiticamente são muito próximos aos valores numéricos onde as maiores diferenças ocorrem ao final, pois a variação do comprimento do pistão é significativa.



**Figura 4 – Comparação entre a frequência instantânea analítica e numérica em função do tempo (Caso: i)**



**Figura 5 – Comparação entre a frequência instantânea analítica e numérica em função do tempo (Caso: ii)**

## 5. CONCLUSÕES

O estudo sobre o comportamento da frequência no tempo foi apresentado, por meio de um procedimento numérico e de um analítico simplificado. Para se determinar a frequência natural analítica foi imposta uma linearização adotando que o comprimento do pistão de líquido a frente da bolha era constante. Um estudo comparativo das frequências determinadas por esses dois procedimentos é realizado mostrando que há uma boa concordância entre as frequências analíticas e numéricas. As maiores diferenças ocorrem ao final, pois a variação do comprimento do pistão é significativa.

No presente trabalho o escoamento padrão golfadas pode ser visto como um sistema massa – mola, portanto haverá tantas frequências quantos forem as bolhas no interior do duto.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio recebido pela Petrobras sob contrato no. 0050.0030935.07.2 para realização deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS

Cherneva Z., Velcheva A. “Wave Group Analysis based on Phase Properties.” The First International Conference on the Mediterranean coastal environment , 1993: 1213–1220.

- Ding H., Huang Z., Song Z., Yan Y. "Hilbert–Huang transform based signal analysis for the characterization of gas–liquid two-phase flow." *Flow Measurement and Instrumentation* 18 (2007): 37–46.
- Franklin E. M. "Modelagem numérica para seguimento dinâmico de bolhas em escoamento intermitente gás-líquido." Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004, 255.
- Grenier P. "Evolution des longueurs de bouchons en écoulement intermittent horizontal." Tese de Doutorado, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, 1997, 193.
- Huang N. E., Long S. R., Tung C. C., Donelan M. A., Yuan Y., et. al. "The local properties of ocean surface waves by the phase-time method." *Geophys. Res. Lett.* 19, no. 7 (1992): 685–88.
- Huang N. E., Shen Z., Long R. S., et. al. "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis." *Proc. R. Soc. Lond* 454 (1998): 903-995.
- Huang N., Attoh-Okine N. O. . *The Hilbert-Huang Transform in Engineering*. Florida: Taylor & Francis, 2005.
- James M. R., Lane S. J., Chouet B., Gilbert J. S. "Pressure changes associated with the ascent and bursting of gas slugs in liquid-filled vertical and inclined conduits." *Journal of Volcanology and Geothermal* 129 (2004): 61-82.
- Liang S. B., Ma H. B. "Oscillating Motions of Slug Flow in Capillary Tubes." *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 31, no. 3 (2004): 365-373.
- Madani S., Caballina O., Souhar M. "Unsteady Dynamics of Taylor Bubble Rising in Vertical Oscillating Tubes." *Int. J. Multiphase Flow* 35 (2009): 363–375.
- Mazza R. A., Rosa E. S. "Frequências naturais de bolhas em um escoamento pistonado." *Encontro Brasileiro sobre Ebulição Condensação e Escoamento Multifásico Líquido-Gás*, 2008.
- Polonsky S., Barnea D., Shemer L. "Averaged and time-dependent characteristics of the motion of an elongated bubble in a vertical pipe." *Int. J. Multiphase Flow* 25 (1999): 795-812.
- Sun B., Zhang H., Cheng L., Zhao Y. "Flow Regime Identification of Gas-liquid Two-phase Flow Based on HHT." *Chinese J. Chem. Eng.* 14, no. 1 (2006): 24-30.
- Sun B., Zheng Y., Liu T. "Analysis of void fraction of Gas-liquid Two-phase Flow on the Hilbert-Huang Transform." *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2008: 4960-4963.
- Vergnolle S., Brandeis G. "Strombolian explosions I. A Large Bubble Breaking at the Surface of a Lava Column as a Source of Sound." *Journal of Geophysical Research* 101, no. B9 (1996): 433-447.

## **8. DIREITOS AUTORAIS**

O material no presente documento é de responsabilidade dos autores.



## NATURAL FREQUENCIES OF ELONGATED AIR BUBBLES RISING IN WATER STREAM FLOWING IN A VERTICAL PIPE

Navarro, J. G, [jjgn2010@gmail.com](mailto:jjgn2010@gmail.com)

Mazza, R. A, [mazza@fem.unicamp.br](mailto:mazza@fem.unicamp.br)

Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. Rua Mendeleiev, s/n, Cidade Universitária "Zeferino Vaz", Barão Geraldo, Campinas-SP, Caixa Postal:6122, CEP:13.083-970

**Abstract.** *The slug flow pattern is described by a succession of liquid pistons trailed by elongated gas bubbles. One of the least known features of this specific flow pattern is the compressibility effect associated with the elongated gas bubble. In fact when the gas-liquid mixture is subjected to a pressure or velocity disturbance it is expected that the system, composed by liquid pistons trailed by elongated bubbles, oscillates. The objective of this work is to disclose the natural frequency modes of this system as a function of the flow properties including the lengths of the liquid piston and gas bubble, the bubble liquid holdup among others. The physical problem is reduced to a prototype of the slug flow consisting of a single or paired elongated gas bubbles rising in vertical liquid stream flowing in a pipe. The kinematical and dynamical interactions among the bubbles and the liquid pistons are modeled accordingly to the slug tracking model. A numerical and an analytical solution to this model are sought. The first one retains all non-linear terms and the frequency signal response is obtained using Hilbert-Huang transform. The second one is an approximated solution given by linearizing the slug tracking model to get an analytical solution to the frequency in terms of the slug flow properties. An analysis of the frequency spectra obtained from the analytical solution and from the Hilbert-Huang transformation is performed within the linear range of the model. Both techniques disclose that the gas pressure and the liquid piston velocity have time dependent frequencies.*

**Keywords:** slug flow, natural frequency, Hilbert-Huang, oscillations