



**VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**  
**18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil**  
**August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil**

## **DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA ANISOTRÓPICA**

**Alfredo Carlos do Prado, [alfredocarlos.prado@gmail.com](mailto:alfredocarlos.prado@gmail.com)**  
**Ezio Castejon Garcia, [ezio@ita.br](mailto:ezio@ita.br)**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Div. Engenharia Mecânica, Pç Marechal Eduardo Gomes, n° 50 - Vila das Acácias, São José dos Campos – SP, CEP: 12228-530.

**Resumo:** *A condução de calor em sólidos é estudada geralmente em materiais isotrópicos onde a condutividade térmica não é dependente da direção. Porém, muitos materiais (naturais ou não) são ditos anisotrópicos. Destes podemos citar cristais, madeiras, rochas, forjados a frio, laminados, estruturas reforçadas com fibras (de vidro, de carbono, etc). Matematicamente, a condutividade térmica de isotrópico é um escalar. Já em um material anisotrópico, esta se apresenta como um tensor de segunda ordem (nove componentes). Desta forma, o estudo de trocas de calor torna-se muito dificultoso. Uma maneira adequada de tratar tais dificuldades é transformar este tensor de nove componentes, função de três coordenadas de direção, em três únicas componentes (ditas principais) com suas respectivas (e novas) direções (ditas também principais). Esta abordagem é semelhante ao estudo de tensor de tensões mecânicas em sólidos. Mesmo reduzindo o número de componentes ainda, logicamente, é necessário conhecer estas “ditas principais” para que haja solução do problema de troca de calor. Para tanto, este projeto propõe o desenvolvimento de um modelo matemático-experimental para determinação destas condutividades principais e de suas direções, que são obtidas pela determinação dos seus respectivos autovalores e cossenos diretores*

**Palavras-chave:** *condutividade térmica, anisotropia, materiais anisotrópicos.*

### **1. INTRODUÇÃO**

O assunto sobre condutividade térmica anisotrópica (condutividade em materiais não homogêneos) como acontece em cristais, materiais compostos, madeiras, laminados dentre outros é de grande importância na engenharia para se saber de forma mais precisa como o calor se propaga nesses materiais e quais são as direções preferenciais para a propagação do calor. Hoje, o que se conhece são valores aproximados e muitos dos materiais são tratados como sendo isotrópicos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de desenvolvimento de um modelo matemático-experimental para determinação da medição das condutividades térmicas em materiais anisotrópicos. A parte experimental é realizada em uma câmara termovácuo com ensaios em corpos de prova com fluxo de calor unidimensional (Garcia, 1987). Esta unidimensionalidade, objetivo principal do ensaio em câmara termovácuo, é obtida pela ausência de convecção (alto vácuo) e radiação térmica nula da parede destes corpos de prova (blindagem por superisolantes). Assim é obtido o fluxo de calor por condução no sentido apenas longitudinal. A unidimensionalidade, no modelo em questão, é requisito essencial na determinação das condutividades principais, e de seus eixos, em materiais anisotrópicos (Özisik, 1979).

A taxa de calor que atravessa o corpo de prova é gerada por meio de um aquecedor de película (“skin heater”). O fluxo de calor é unidimensional e tem direções preestabelecidas. No estudo em questão, os fluxos foram impostos nas direções dos eixos em coordenadas cartesianas e os gradientes de temperaturas foram medidos ao longo do corpo em nas direções de X, Y e Z. Assim, através do embasamento teórico sobre o assunto de anisotropia chegou-se ao resultado dos valores das condutividades térmicas principais do corpo de prova e seus respectivos ângulos diretores.

O desenvolvimento do aparato experimental e as medições foram realizados na Bancada de teste (Câmara termovácuo), atualmente localizada no Laboratório de Máquinas Hidráulicas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica. A Fig. (1) apresenta o esquema da bancada de ensaio.

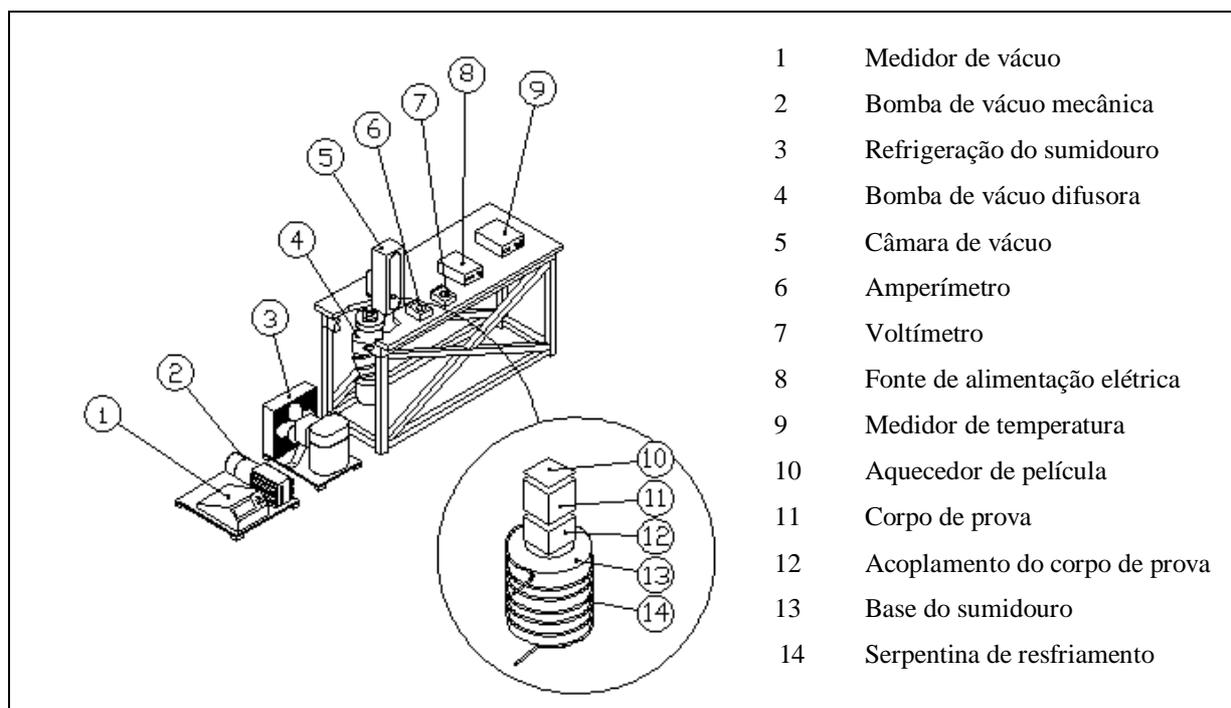


Figura 1. Esquema da bancada de ensaio

O corpo de prova escolhido para este trabalho é o celeron C-1001. O Celeron é um laminado industrial, duro e denso, fabricado através de aplicação de calor e pressão em camadas de tecido de algodão impregnadas com resinas sintéticas (fenólicas). Quando o calor e a pressão são aplicados simultaneamente às camadas, uma reação química (polimerização) ocorre, aglomerando as camadas em uma massa sólida e compacta, diferenciado de acordo com a malha do tecido usado, variando de grosso, médio, fino e extrafino. As chapas em malha grossa são largamente utilizadas no mercado industrial (Vick do Brasil). O celeron C-1001 é um laminado produzido com malha grossa.

Para o desenvolvimento do trabalho foi utilizado uma série de instrumentos, de materiais, e equipamentos [Fig. (2)] com as seguintes descrições: - **Corpo de prova** [Fig. (3)], celeron C-1001 da Vick do Brasil, Formato cúbico com 26 mm de aresta, condutividade térmica nominal de 0,30 Kcal/m/h°C ou 0,35 W/m°C; - **Aquecedor de película** [Fig. (4)], modelo HK5163R157L12 da Minco tamanho de 25,4 x 25,4 mm, resistência elétrica 52,3 ohms e potência de 5 W a 28 V; - **Medidor de temperatura**, Termômetro digital YEM TYPE 2575 da Yokogawa, termopar junção tipo T (cobre e constantan), resolução de 0,1°C e acuracidade de 0,5° na faixa de -100 a 230 °C; - **Fonte de alimentação elétrica** Harrison 6200-B-DC da Hawlett Packard, tensão: 0 ~ 10 V, corrente: 0 ~ 2 A e resolução de 1,5 mV e 2,5 mA; - **Voltímetro** DT-830B Digital Multimeter da Ferrari, resolução de 10 mV na faixa de 0 a 20V e acuracidade de 1% DC.V; - **Amperímetro** DT-830B Digital Multimeter, resolução de 10 mA na faixa de 0 a 10<sup>a</sup> e acuracidade de 1,8% DC.A; - **Câmara de vácuo** de aço carbono 1025, com espessura de 11mm, nas dimensões 0,15 m x 0,13 m x 0,50 m (comprimento, largura e altura) com volume útil de 4,5 litros; - **Sistema de vácuo** composto por bomba mecânica de duplo estágio E28M8 da Edwards, deslocamento de 11,4 m<sup>3</sup>/h e último vácuo de 2,5 x 10<sup>-4</sup> mbar. E, bomba de difusão térmica Diffstak MK2-100/300 da Edwards deslocamento de 280 l/s e último vácuo: 3 x 10<sup>-8</sup> mbar; - **Medidor de vácuo** digital controler 1105 da Edwards, com capacidade para 2 sensores Pirani e 01 sensor Penning; - **Sensores de vácuo Prani** PRM10 da Edwards na faixa de medição de 200 a 10<sup>-3</sup> mbar e **Penning** CP25-K na faixa de medição de 10<sup>-2</sup> a 10<sup>-7</sup> mbar; - **Superisolante térmico** [Fig. (4)], confeccionado com 15 camadas de kapiton perfurados, metalizados, espaçados por reticulado de nylon preso por fita adesiva de kapiton; - **Sumidouro**, circuito de refrigeração formado por um compressor alternativo de 1 hp, um condensador a ar forçado por ventilador com micromotor de 1/40 cv, um capilar de 0,32 mm de orifício no comprimento de 1250 mm, um evaporador de tubo de cobre de 1/4" de comprimento 900 mm com formato de espiral que envolve a base do sumidouro no interior da câmara de vácuo. A seguir figuras do aparo experimental.



Figura 2. Vista geral, sistema de bombeamento de vácuo e sistema de refrigeração do sumidouro.



Figura 3. Corpo de prova e vista frontal da câmara de vácuo.

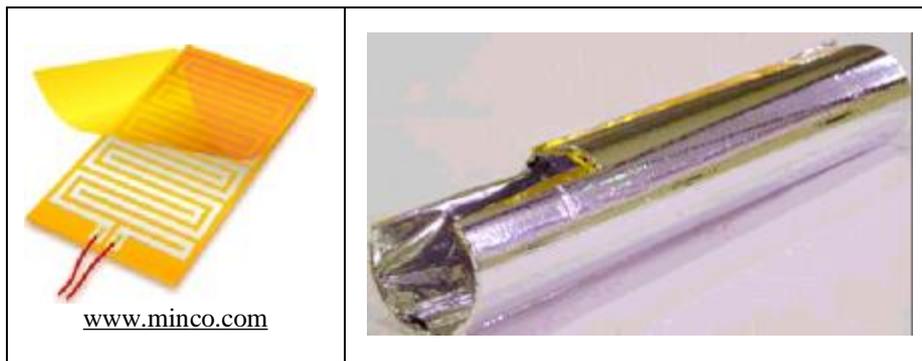


Figura 4. Película aquecedora e superisolante térmico.

## 2. Formulação matemática

O fluxo de calor em sólidos obedece a Lei de Fourier de Condução. Em sólidos isotrópicos, a condutividade térmica é independente das direções, assim o vetor fluxo de calor, Eq. 1, é normal à linha isotérmica (gradiente normal da temperatura) que passa na posição do corpo considerado em estudo, que é dado pela Eq. (1).

$$q = -k\nabla T \quad (1)$$

Para sólidos anisotrópicos a situação é bastante diferente. A componente do fluxo de calor para uma dada direção  $q_x$  depende da combinação linear dos gradientes de temperatura nas direções de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Desta forma, levando em conta essa consideração, as expressões gerais para as três componentes de fluxo de calor,  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ , respectivas às direções  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ , para um dado sistema de coordenadas cartesianas, são dadas, respectivamente, como:

$$-q_1 = k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

$$-q_2 = k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3)$$

$$-q_3 = k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4)$$

De forma resumida, a equação geral do fluxo de calor é dada por:

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (5)$$

Portanto, para um sólido anisotrópico, o vetor fluxo de calor  $q$  não é necessariamente normal à linha isotérmica que passa na posição do corpo considerado em estudo. A condutividade térmica do sólido anisotrópico envolve nove componentes de condutividade,  $k_{ij}$ , que são as componentes do tensor,  $k$  de segunda ordem, apresentados a seguir:

$$k \equiv \begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A fonte de calor foi dada pela dissipação elétrica em uma resistência elétrica. Utilizou-se para tanto uma película aquecedora (“*skin heater*”). Esta película cobria exatamente uma das faces do corpo de prova. Assim o fluxo de calor imposto sobre o espécime foi dado por:

$$q = \frac{Q}{A} \quad (7)$$

Onde:

$Q$ : é a taxa de calor dada pela Potência Elétrica Dissipada ( Tensão x Corrente elétrica) [ W ].

$A$ : é a área do corpo de prova (face do espécime) [m<sup>2</sup>].

A face oposta do espécime foi acoplada a um sumidouro de calor, no caso um bloco de alumínio envolvido por uma serpentina por onde circula um fluido refrigerante. Assim, entre as faces, quente (acoplada a uma fonte de calor) e a fria (acoplada a um sistema de refrigeração) foram obtidos os gradientes de temperatura. Os gradientes de temperatura no espécime foram obtidos em três ensaios. No primeiro ensaio, a película, fonte de calor, foi acoplada a uma das faces transversais ao eixo X e o sumidouro na face oposta, também transversal a esse mesmo eixo. Assim os gradientes relativos aos eixos X, Y e Z podem ser obtidos, logicamente, após a obtenção do regime permanente.

Terminado este primeiro ensaio, a película aquecedora (fonte de calor) foi removida e colada na outra face, agora transversal ao eixo Y. O sumidouro agora ficou acoplado na face oposta à fonte de calor (transversal também ao eixo Y). Desta forma, iniciando o segundo ensaio e após obtido o regime permanente, com fluxo de calor unidirecional na direção do eixo Y, os gradientes ao longo dos três eixos podem ser obtidos.

Em relação ao eixo Z, o procedimento adotado foi similar ao aplicado aos eixos X e Y, e assim, com fluxo de calor unidirecional na direção do eixo Z, os gradientes de temperatura ao longo dos três eixos foram obtidos após a conclusão do terceiro ensaio.

Para a obtenção dos gradientes nos três eixos são necessárias funções das temperaturas com as posições. Estas temperaturas foram obtidas primeiramente por medições experimentais ao longo dos três eixos, assim, para obter as funções  $T=f(x,y,z)$  foram construídas equações polinomiais representativas para tal objetivo.

As equações que representam as variações da temperatura com a posição no corpo de prova foram obtidas pelo método de interpolação de Lagrange, Eq. (8). Como, para o corpo de prova deste trabalho foram medidos cinco pontos sobre cada eixo, as equações polinomiais representativas da variação da temperatura com a posição resultaram na expressão:

$$T_{(i)} = l_1(i) \cdot T_1 + l_2(i) \cdot T_2 + l_3(i) \cdot T_3 + l_4(i) \cdot T_4 + l_5(i) \cdot T_5 \quad (8)$$

Para variação da temperatura sobre eixo X temos:

$$T_{(x)} = l_1(x) \cdot T_1 + l_2(x) \cdot T_2 + l_3(x) \cdot T_3 + l_4(x) \cdot T_4 + l_5(x) \cdot T_5 \quad (9)$$

Onde:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \cdot (x-x_5)}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot (x_1-x_4) \cdot (x_1-x_5)} \quad (10) \quad l_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \cdot (x-x_5)}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4) \cdot (x_2-x_5)} \quad (11)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_4) \cdot (x-x_5)}{(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4) \cdot (x_3-x_5)} \quad (12) \quad l_4(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_5)}{(x_4-x_1) \cdot (x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3) \cdot (x_4-x_5)} \quad (13)$$

$$l_5(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_5-x_1) \cdot (x_5-x_2) \cdot (x_5-x_3) \cdot (x_5-x_4)} \quad (14)$$

Para variação da temperatura sobre os eixos  $Y$  e  $Z$  são repetidos o procedimento das Eq (9-14) onde  $x_i$  são substituído por  $y_i$  e  $z_i$  que representa as posições das coordenadas de medidas das temperaturas  $T_i$ .

Ao derivar a equação polinomial em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  obtêm-se os gradientes  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$  e  $\frac{\partial T}{\partial z}$ . Estes, por conveniência, são indexados de acordo com a direção do fluxo de calor.

Para o calor aplicado na direção  $x$ , os gradientes passam a serem denominados de  $\frac{\partial T}{\partial x_x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y_x}$  e  $\frac{\partial T}{\partial z_x}$ . Na direção de  $y$ , por conveniência, passam a ser denominados de  $\frac{\partial T}{\partial x_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z_y}$ , e. O mesmo ocorre quando o fluxo é na direção de  $z$ , que, passam a ser denominados de  $\frac{\partial T}{\partial x_z}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y_z}$  e  $\frac{\partial T}{\partial z_z}$ .

Com os resultados do primeiro ensaio onde se tem fluxo de calor unidirecional apenas no eixo  $x$ , e com os gradientes térmicos, agora conhecidos, foi possível montar o sistema de equações baseadas nas Eq. (2-4). Vale lembrar que para este primeiro ensaio os fluxos de calor nas direções  $y$  e  $z$  são nulos oriundos da convecção térmica e radiação de calor desprezíveis (alto vácuo e uso de superisolantes no ambiente próximo às paredes laterais do espécime). Assim, com os dados do primeiro ensaio foram obtidos o sistema de Eq. (15-17). De maneira análoga, para o segundo ensaio onde a fonte de calor e o sumidouro foram impostos nas áreas normais ao eixo  $y$ , o sistema de equações resultam nas Eq. (18-20). O mesmo para o terceiro ensaio (fonte e sumidouro nas faces transversais em relação ao eixo  $z$  do espécime) que resultaram no sistema de Eq. (21-23).

$$k_{11} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y_x} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z_x} = -q_x \quad (15)$$

$$k_{21} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y_x} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z_x} = 0 \quad (16)$$

$$k_{31} \frac{\partial T}{\partial x_x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y_x} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z_x} = 0 \quad (17)$$

$$k_{11} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y_y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z_y} = 0 \quad (18)$$

$$k_{11} \frac{\partial T}{\partial x_z} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y_z} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z_z} = 0 \quad (21)$$

$$k_{21} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y_y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z_y} = -q_y \quad (19)$$

$$k_{21} \frac{\partial T}{\partial x_z} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y_z} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z_z} = 0 \quad (22)$$

$$k_{31} \frac{\partial T}{\partial x_y} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y_y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z_y} = 0 \quad (20)$$

$$k_{31} \frac{\partial T}{\partial x_z} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y_z} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z_z} = -q_z \quad (23)$$

Estas equações são resolvidas por partes: primeiro trabalha-se com as equações que têm como coeficientes  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{13}$ . Ao resolver o sistema de três equações e três incógnitas, encontram-se os valores de tais componentes de condutividades. Note que para montar o sistema de equações acima foram necessários dados dos três ensaios, tanto para Eq. (24) quanto para as Eq. (25-26). Que são apresentadas em forma de produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_x} & \frac{\partial T}{\partial y_x} & \frac{\partial T}{\partial z_x} \\ \frac{\partial T}{\partial x_y} & \frac{\partial T}{\partial y_y} & \frac{\partial T}{\partial z_y} \\ \frac{\partial T}{\partial x_z} & \frac{\partial T}{\partial y_z} & \frac{\partial T}{\partial z_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Para encontrar os valores de  $k_{21}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{23}$ ,  $k_{31}$ ,  $k_{32}$  e  $k_{33}$  adotou-se o procedimento semelhante ao da eq. (24).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_x} & \frac{\partial T}{\partial y_x} & \frac{\partial T}{\partial z_x} \\ \frac{\partial T}{\partial x_y} & \frac{\partial T}{\partial y_y} & \frac{\partial T}{\partial z_y} \\ \frac{\partial T}{\partial x_z} & \frac{\partial T}{\partial y_z} & \frac{\partial T}{\partial z_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_x} & \frac{\partial T}{\partial y_x} & \frac{\partial T}{\partial z_x} \\ \frac{\partial T}{\partial x_y} & \frac{\partial T}{\partial y_y} & \frac{\partial T}{\partial z_y} \\ \frac{\partial T}{\partial x_z} & \frac{\partial T}{\partial y_z} & \frac{\partial T}{\partial z_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

Uma vez obtidos os coeficientes de condutividades foi possível montar a matriz de condutividades térmicas:

$$k = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \quad (27)$$

As condutividades térmicas principais  $k_1$ ,  $k_2$ , e  $k_3$  de um sólido anisotrópico podem ser determinadas através da matriz dos coeficientes das condutividades,  $k_{ij}$ , de um sistema de coordenadas retangulares  $x$ ,  $y$ , e  $z$  previamente estabelecido. Ao resolver o determinante desta matriz obtém-se uma equação do terceiro grau com três raízes, que são valores distintos para  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , e  $\lambda_3$  Eq.(28). Assim, segundo Özisik (1979), os autovalores encontrados são condutividades térmicas principais  $k_1$ ,  $k_2$ , e  $k_3$  do material no ponto analisado Eq. (29):

$$\begin{vmatrix} k_{11} - I_1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - I_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - I_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

$$\lambda_1 = k_1; \quad \lambda_2 = k_2; \quad \lambda_3 = k_3 \quad (29)$$

Para que os autovalores  $\lambda$  sejam raízes reais, a condição é que a matriz de coeficiente térmica seja uma matriz simétrica onde  $k_{ij} = k_{ji}$ . Neste trabalho, o método adotado para a obtenção da matriz simetrizada  $k_S$  foi assumir o valor como sendo a média aritmética da soma da matriz  $k$  com a matriz transposta  $k^T$ . Assim, a matriz de coeficientes térmicos passa a assumir os seguintes valores de coeficientes na simetriação:

$$k_S = \left[ \frac{k + k^T}{2} \right] = \begin{pmatrix} \left( \frac{k_{11} + k_{11}}{2} \right) & \left( \frac{k_{12} + k_{21}}{2} \right) & \left( \frac{k_{13} + k_{31}}{2} \right) \\ \left( \frac{k_{21} + k_{12}}{2} \right) & \left( \frac{k_{22} + k_{22}}{2} \right) & \left( \frac{k_{23} + k_{32}}{2} \right) \\ \left( \frac{k_{31} + k_{13}}{2} \right) & \left( \frac{k_{32} + k_{23}}{2} \right) & \left( \frac{k_{33} + k_{33}}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Já os ângulos de defasagem,  $\phi$ , entre os eixos principais,  $O\xi_i$ , e o eixo inicialmente preestabelecidos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são os autovetor,  $\ell_i$  o cosseno diretor do eixo  $x$ ,  $\mu_i$  o cosseno diretor do eixo  $y$  e  $h_i$  o cosseno diretor do eixo  $z$ , da matriz  $k_{ij}$ .

$$\begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{vmatrix} \quad (31)$$

As Eq. (32-34) dão as condições que garantem a ortogonalidade entre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\mathbf{l}_1^2 + \mathbf{l}_2^2 + \mathbf{l}_3^2 = 1 \quad (32); \quad \mathbf{m}_1^2 + \mathbf{m}_2^2 + \mathbf{m}_3^2 = 1 \quad (33); \quad \mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_2^2 + \mathbf{h}_3^2 = 1 \quad (34)$$

## 2.1. Valores das Medições

As Tab. (1-3) apresentam os valores médios de um número de doze medidas de temperatura, tensão, intensidade da corrente elétrica e pressão, obtidas das medições realizadas experimentalmente. Estas são respectivamente os valores obtidos dos três ensaios realizados referentes às taxas de calor aplicadas ao eixo X, Y, e Z.

**Tabela 1. Valores médios obtidos em 12 medições experimentais de temperatura, tensão, corrente elétrica e vácuo, com a taxa de calor aplicada na direção do eixo X.**

Temperatura [°C]			Tensão, Corrente e Vácuo
X	Y	Z	
T <sub>1</sub> = -10,67	T <sub>6</sub> = 36,88	T <sub>10</sub> = 84,46	U = 4,92 V I = 0,59 A P = 9,5 x 10 <sup>-5</sup> mbar q <sub>x</sub> = q <sub>z</sub> = 0 - q <sub>x</sub> = - 4294 W/m <sup>2</sup>
T <sub>2</sub> = 27,09	T <sub>7</sub> = 31,34	T <sub>11</sub> = 89,77	
T <sub>3</sub> = 60,30	T <sub>3</sub> = 60,30	T <sub>3</sub> = 60,30	
T <sub>4</sub> = 96,27	T <sub>8</sub> = 10,43	T <sub>12</sub> = 89,77	
T <sub>5</sub> =150,68	T <sub>9</sub> = 33,37	T <sub>13</sub> = 81,44	

**Tabela 2. Valores médios obtidos em 12 medições experimentais de temperatura, tensão, corrente elétrica e vácuo, com a taxa de calor aplicada na direção do eixo Y.**

Temperatura [°C]			Tensão, Corrente e Vácuo
X	Y	Z	
T <sub>1</sub> = 77,60	T <sub>6</sub> = 0,01	T <sub>10</sub> = 84,50	U = 5 V I = 0,600 A P = 4 x 10 <sup>-5</sup> mbar q <sub>x</sub> = q <sub>z</sub> = 0 - q <sub>y</sub> = - 4437 W/m <sup>2</sup>
T <sub>2</sub> = 84,36	T <sub>7</sub> = 30,69	T <sub>11</sub> = 89,80	
T <sub>3</sub> = 97,73	T <sub>3</sub> = 97,73	T <sub>3</sub> = 97,73	
T <sub>4</sub> = 99,97	T <sub>8</sub> = 93,73	T <sub>12</sub> = 27,60	
T <sub>5</sub> = 92,43	T <sub>9</sub> = 128,81	T <sub>13</sub> = 41,09	

**Tabela 3. Valores médios obtidos em 12 medições experimentais de temperatura, tensão, corrente elétrica e vácuo, com a taxa de calor aplicada na direção do eixo Z.**

Temperatura [°C]			Tensão, Corrente e Vácuo
X	Y	Z	
T <sub>1</sub> = 69,81	T <sub>6</sub> = 101,17	T <sub>10</sub> = 84,50	U = 4,98 V I = 0,580 A P = 9,0 x 10 <sup>-5</sup> mbar q <sub>x</sub> = q <sub>y</sub> = 0 - q <sub>z</sub> = - 4273 W/m <sup>2</sup>
T <sub>2</sub> = 51,79	T <sub>7</sub> =110,22	T <sub>11</sub> = 89,80	
T <sub>3</sub> = 51,92	T <sub>3</sub> = 51,92	T <sub>3</sub> = 51,92	
T <sub>4</sub> = 49,19	T <sub>8</sub> =130,89	T <sub>12</sub> = 27,60	
T <sub>5</sub> = 53,17	T <sub>9</sub> = 111,55	T <sub>13</sub> = 41,09	

Com os valores médios das temperaturas das Tab. (1-3) e as Eq. (8-14) foram determinadas os polinômios que representam a variação das temperaturas e apresentadas na Tab. (4).

Substituindo os valores das quatro tabelas nas Eq. (24-26), é possível determinar os valores dos coeficientes de condutividade térmica anisotrópica  $k_{ij}$  da Eq. (28) e dar seqüência para a resolução das Eq. (29-34). Esses resultados são apresentados em forma de tabelas para as posições de coordenadas X=0,0 m; Y=0,012 m; Z=0,012 m e tensão nominal de 5V na Tab. (5), de coordenadas X=0,012 m; Y=0,012 m; Z=0,012 m e tensão nominal de 5V na Tab. (6) e de coordenadas X=0,024 m; Y=0,012 m; Z=0,012 m e tensão nominal de 5V na Tab. (7).

**Tabela 4. Funções polinomiais que representam as variações das temperaturas com a posição de acordo com a direção da taxa de calor. Para uma tensão nominal de 5V.**

Direção da taxa de calor	Equação polinomial da variação da temperatura com a posição
$q_x$	$T_x = 2,69 \cdot 10^8 x^4 - 4,05 \cdot 10^6 x^3 - 5,82 \cdot 10^4 x^2 + 6,73 \cdot 10^3 x - 10,67$
	$T_y = 8,52 \cdot 10^9 y^4 - 3,94 \cdot 10^8 y^3 + 5,43 \cdot 10^6 y^2 - 2,11 \cdot 10^4 y + 36,88$
	$T_z = -6,13 \cdot 10^9 z^4 + 2,93 \cdot 10^8 z^3 - 4,21 \cdot 10^6 z^2 + 1,69 \cdot 10^4 z + 84,46$
$q_y$	$T_x = 6,14 \cdot 10^8 x^4 - 3,58 \cdot 10^7 x^3 + 5,81 \cdot 10^5 x^2 - 1,21 \cdot 10^3 x + 77,6$
	$T_y = 6,99 \cdot 10^9 y^4 - 3,35 \cdot 10^8 y^3 + 4,77 \cdot 10^6 y^2 - 1,29 \cdot 10^4 y + 0,01$
	$T_z = 7,79 \cdot 10^9 z^4 - 3,43 \cdot 10^8 z^3 + 4,24 \cdot 10^6 z^2 - 1,39 \cdot 10^4 z + 84,5$
$q_z$	$T_x = 9,83 \cdot 10^8 x^4 - 5,16 \cdot 10^7 x^3 + 9,33 \cdot 10^5 x^2 - 6,96 \cdot 10^3 x + 69,81$
	$T_y = -1,42 \cdot 10^{10} y^4 + 6,67 \cdot 10^8 y^3 - 9,38 \cdot 10^6 y^2 + 3,68 \cdot 10^4 y + 101,17$
	$T_z = -5,05 \cdot 10^9 z^4 + 2,48 \cdot 10^8 z^3 - 3,65 \cdot 10^6 z^2 + 2,12 \cdot 10^4 z - 1,18$

Tabela 5. Sumário de resultados para o ponto com coordenadas  $X=0,0$  m;  $Y=0,012$  m;  $Z=0,012$  m

Valores válidos para a posição: $X=0,0$ m; $Y=0,012$ m; $Z=0,012$ m e tensão nominal de 5V								
Gradientes Térmicos [ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ]	Condutividade [ $\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$ ]			$\lambda_i = k_i$	Cossenos diretores [rad]		ângulo [ $^{\circ}$ ]	
	$k_{ij}$	simetrizado			$\ell_1$	$\ell_2$		
6730,44	$k_{11}$	0,3128	0,3128	$\lambda_1 = k_1$ -0,57	$\ell_1$	-0,6743	$\phi_{11}$	-38,6
-21134,86	$k_{12}$	0,1611	0,8095		$\ell_2$	0,2263	$\phi_{12}$	13,0
16931,94	$k_{13}$	-0,1769	0,2476		$\ell_3$	-0,7029	$\phi_{13}$	-40,3
-1205,14	$k_{21}$	1,4578	0,8095	$\lambda_2 = k_2$ -0,08	$\mu_1$	0,6020	$\phi_{21}$	34,5
-12946,67	$k_{22}$	0,3544	0,3544		$\mu_2$	-0,3827	$\phi_{22}$	-21,9
-13917,36	$k_{23}$	-0,1371	-0,0206		$\mu_3$	-0,7008	$\phi_{23}$	-40,2
-6957,22	$k_{31}$	0,6721	0,2476	$\lambda_3 = k_3$ 1,16	$h_1$	0,4276	$\phi_{31}$	24,5
36830,28	$k_{32}$	0,0959	-0,0206		$h_2$	0,8957	$\phi_{32}$	51,3
21228,06	$k_{33}$	-0,1474	-0,1474		$h_3$	-0,1218	$\phi_{33}$	-7,0

Tabela 6. Sumário de resultados para o ponto central do corpo de prova

Valores válidos para a posição: $X=0,012$ m; $Y=0,012$ m; $Z=0,012$ m e tensão nominal de 5V								
Gradientes Térmicos [ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ]	Condutividade [ $\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$ ]			$\lambda_i = k_i$	Cossenos diretores [rad]		ângulo [ $^{\circ}$ ]	
	$k_{ij}$	simetrizado			$\ell_1$	$\ell_2$		
5445,21	$k_{11}$	-0,7289	-0,7289	$\lambda_1 = k_1$ -0,86	$\ell_1$	-0,7311	$\phi_{11}$	-41,9
-2274,58	$k_{12}$	0,1418	-0,0435		$\ell_2$	-0,6486	$\phi_{12}$	-37,2
39,17	$k_{13}$	-0,0594	-0,1460		$\ell_3$	-0,2118	$\phi_{13}$	-12,1
1528,47	$k_{21}$	-0,2288	-0,0435	$\lambda_2 = k_2$ -0,60	$\mu_1$	-0,4143	$\phi_{21}$	-23,7
5215,56	$k_{22}$	-0,5443	-0,5443		$\mu_2$	0,6686	$\phi_{22}$	38,3
-6308,19	$k_{23}$	0,1979	-0,1840		$\mu_3$	-0,6175	$\phi_{23}$	-35,4
-57,78	$k_{31}$	-0,2326	-0,1460	$\lambda_3 = k_3$ -0,34	$h_1$	-0,5421	$\phi_{31}$	-31,1
2152,50	$k_{32}$	-0,5660	-0,1840		$h_2$	0,3638	$\phi_{32}$	20,8
5851,94	$k_{33}$	-0,5243	-0,5243		$h_3$	0,7575	$\phi_{33}$	43,4

Tabela 7. Sumário de resultados para o ponto com coordenadas  $X=0,024$  m;  $Y=0,012$  m;  $Z=0,012$  m

Valores válidos para a posição: $X=0,024$ m; $Y=0,012$ m; $Z=0,012$ m e tensão nominal de 5V								
Gradientes Térmicos [ $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ]	Condutividade [ $\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$ ]			$\lambda_i = k_i$	Cossenos diretores [rad]		ângulo [ $^{\circ}$ ]	
	$k_{ij}$	simetrizado			$\ell_1$	$\ell_2$		
11824,98	$k_{11}$	-0,2997	-0,2997	$\lambda_1 = k_1$ -0,44	$\ell_1$	-0,8425	$\phi_{11}$	-48,3
29355,69	$k_{12}$	-0,0219	-0,1393		$\ell_2$	-0,2872	$\phi_{12}$	-16,5
-17853,61	$k_{13}$	0,0060	-0,1692		$\ell_3$	0,4558	$\phi_{13}$	26,1
-1201,25	$k_{21}$	-0,2567	-0,1393	$\lambda_2 = k_2$ -0,01	$\mu_1$	-0,3082	$\phi_{21}$	-17,7
24284,44	$k_{22}$	0,0009	0,0009		$\mu_2$	-0,4371	$\phi_{22}$	-25,0
28297,64	$k_{23}$	-0,1685	-0,0416		$\mu_3$	-0,8450	$\phi_{23}$	-48,4
3028,33	$k_{31}$	-0,3445	-0,1692	$\lambda_3 = k_3$ 0,06	$h_1$	-0,4419	$\phi_{31}$	-25,3
-42845,28	$k_{32}$	0,0853	-0,0416		$h_2$	0,8523	$\phi_{32}$	48,8
-4850,83	$k_{33}$	-0,0879	-0,0879		$h_3$	-0,2779	$\phi_{33}$	-15,9

Para a análise das incertezas este trabalho adotou-se o nível de confiança de 95% (20:1). A propagação das incertezas primárias para a total seguiu o método de Kline e McClintock (1953). A seguir são apresentados os valores das condutividades principais e a incertezas associadas do ponto central  $X=0,012$  m;  $Y=0,012$  m;  $Z=0,012$  m.

$$k_1 = -0,86 \pm 0,3 \text{ W}/\text{m}^{\circ}\text{C}; \quad k_2 = -0,60 \pm 0,27 \text{ W}/\text{m}^{\circ}\text{C}; \quad k_3 = -0,34 \pm 0,01 \text{ W}/\text{m}^{\circ}\text{C};$$

### 3. Conclusão

Como conclusão principal pode-se afirmar que o objetivo deste trabalho foi alcançado: foi desenvolvido um Método para Determinação das Condutividades Térmicas de um material anisotrópico. A vantagem de ter um método para medir a condutividade térmica anisotrópica é notada nos projetos térmicos. Na medida em que o engenheiro passa a conhecer a característica anisotrópica do material, pode-se explorar esta característica e otimizar os projetos.

As Tab. (5-7) apresentam valores das condutividades térmicas anisotrópicas,  $\lambda_i = k_i$ , como esperado para sólidos anisotrópicos, estas condutividades sofrem variações com a posição. Vale comentar que a condutividade é uma grandeza física positiva, embora, alguns autovalores,  $\lambda_i$ , aparecem nas Tab. (5) e Tab. (7) com sinal negativo. Isto nos leva a uma suposição de inversão no sentido do fluxo de calor.

O tempo necessário empregado na medição da condutividade térmica por este método foi em média de 160 h no total. O tempo pode variar em função da capacidade da câmara de vácuo, potência do sistema de aquecimento e potência do sistema de resfriamento (sumidouro de calor). Este tempo é sem dúvida maior do que o tempo dos métodos de medidas de condutividade térmica convencionais, porém este tempo é justificado quando se está realmente interessado em conhecer a condutividade térmica anisotrópica do material, já que pelos os outros métodos, mesmo que o material seja anisotrópico, a condutividade térmica encontrada não traz as informações da anisotropia.

São inúmeros os materiais que podem ser encontrados na natureza com propriedades anisotrópicas. Neste trabalho o celeron C-1001 foi escolhido devido as suas características mecânicas, por serem favoráveis e de fácil usinabilidade. Com limitações maiores ou menores, porém este método pode ser aplicado para qualquer outro material.

O método utilizado é inverso, pois utiliza o perfil de temperatura no espécime para identificar a propriedade, no caso, a condutividade térmica anisotrópica. Com a taxa de calor imposta e conhecida, e por meio de medições de temperatura foi possível, em três ensaios, identificar o tensor de nove componentes  $k_{ij}$ . Realizando uma simetriação na matriz representativa deste tensor, foi possível aplicar o método apresentado por Özisik (1979) para reduzir esta matriz cheia de nove componentes numa diagonal. Essa transformação foi dada pela identificação dos autovalores do tensor  $k_{ij}$ . A matriz diagonal obtida, também são as denominadas condutividades principais do corpo de prova, no ponto de estudo. As direções dessas condutividades principais foi possível de serem identificadas pelos cálculos dos respectivos cossenos diretores, oriundos dos autovetores obtidos na transformação do tensor  $k_{ij}$  na matriz diagonal  $k_i$ .

A necessidade de uma matriz simétrica exigiu uma simetriação do tensor  $k_{ij}$ . No entanto esta imposição da simetriação foi o fator de maior grau no incremento dos erros do método. Através da análise de incerteza foi possível de constatar um alto percentual de erros.

Embora a etapa de simetriação da matriz não seja o único fator que contribuiu para a incerteza da medição da condutividade térmica anisotrópica principal, esta sem dúvida é a mais difícil de ser tratada. Outros Fatores também contribuíram como: corpo de prova; instrumentos; processos de medição; relação entre dimensões dos furos feitos no corpo de prova e diâmetro da sonda do termopar (relação entre dimensões entre o furo feito no corpo de prova e as dimensões do corpo de prova); possível efeito aleatório do sensor de temperatura; variação da condutividade anisotrópica em relação ao aumento da temperatura; entre outros.

### 4. REFERÊNCIAS

- Garcia, E. C., 1987, "Desenvolvimento de um aparato experimental para medidas de condutividade térmica de materiais sólidos e de resistência térmica de contato", Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 104p.
- Garcia, E. C., Carajilesco, P., 1987, "Medida experimental de condutividade térmica de sólidos e resistência térmica de contato", COBEM, Florianópolis, pp. 263-266.
- Kline, S. J., McClintock, F.A., 1953, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments: mechanical engineering", v.75, pp. 3-8.
- Özisik, M., 1979, "Heat conduction", Wiley, pp 611 –650.
- Prado, A. C., 2009, "Desenvolvimento de Um Método Para Determinação de Condutividade Térmica Anisotrópica", Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 86p.
- Vick do Brasil. celeron -1001, 30 de Nov. de 2009, <<http://www.vick.com.br/vick/produtos/celeron>>.
- Minco Inc. Thermofoil, 30 de Nov. de 2009, <<http://www.minco.com/products/heaters.aspx?id>>.

### 5. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## DEVELOPMENT OF A METHOD FOR DETERMINATION OF THERMAL ANISOTROPIC CONDUCTIVITY

Alfredo Carlos do Prado, [alfredocarlos.prado@gmail.com](mailto:alfredocarlos.prado@gmail.com)

Ezio Castejon Garcia, [ezio@ita.br](mailto:ezio@ita.br)

Technological Institute of Aeronautics, Mechanical Division; Pç Marechal Eduardo Gomes , n° 50 - Vila das Acácias, São José dos Campos – SP, CEP: 12228-530.

**Abstract:** *The heat conduction in solid is generally studied in isotropic materials where the thermal conductivity is not dependent of the direction. However, many material (natural or not) are called anisotropic. For examples, wood, rocks, cold forged, laminated, structures reinforced with fibers (of glass, of carbon, etc). Mathematically the thermal conductivity of isotropic is a simple factor-escale. But the anisotropic conductivity is a tensor of second-order with nine components. And in this case the heat conduction study is more difficult. A adequate way to treat these difficulties is to transform the tensor of nine components, function of three coordinates of direction, in only three new main components, with their respective directions, denominated main directions. This approach is similar to study of mechanical stress tensor, tensions in solid. Even reducing the number of components yet, logically, is necessary to know the new and main conductivities with their main directions to solve the heat conduction problem in anisotropic medium. Because of this, the thesis proposes the development of a model mathematicial-experimental for determination of the main conductivities with their main directions, that are obtained when we know the eigenvalues and director cosines of the matrix, which is a tensor of second-order.*

**Keywords:** thermal conductivity, anisotropy, anisotropic materials.

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.