



COMPROMETIDA COM A PROMOÇÃO DO DESENVOLVIMENTO
DA ENGENHARIA E DAS CIÊNCIAS MECÂNICAS

VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM ALTA REGULARIDADE NA ABORDAGEM DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

Oscar Alfredo Garcia, oagsuarez@ucs.br¹

Rodrigo Rossi, rrossi@ufrgs.br²

Paulo Roberto Linzmaier, prlinzma@ucs.br¹

¹Universidade de Caxias do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130, Caxias do Sul, RS, 95070-560.

²Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Sarmiento Leite, 425, Porto Alegre, RS, 90050-170.

Resumo: Uma das limitações do Método de Elementos Finitos é a falta de precisão na determinação de altas frequências. Geralmente os autovetores obtidos pelo Método de Elementos Finitos representam um pequeno percentual do espectro de frequências do sistema em análise. Esta limitação se agrava quando são utilizados elementos de alta ordem na análise. A falta de precisão se caracteriza pelo surgimento de resultados espúrios para determinados valores de frequência. Este problema fica evidente nos diagramas normalizados de frequência para problemas específicos, onde os valores espúrios para a frequência denotam os ramos acústicos e óticos do espectro. Neste artigo é proposta uma alternativa baseada no Método de Elementos Finitos Generalizado com alta regularidade na abordagem do problema de autovetores de uma barra engastada nas suas extremidades. Os resultados mostram que as funções de enriquecimento utilizadas para construir o espaço de aproximação são capazes de capturar altas frequências.

Palavras-chave: frequências naturais, regularidade, MEEG, partição da unidade.

1. INTRODUÇÃO

Dentre as primeiras propostas para abordar problemas de modos e frequências naturais, utilizando métodos sem malha, estão os trabalhos de Lu, Belytschko e Tabbara (1994) que utilizaram o Element Free Galerkin method, EFG, na aproximação do campo de velocidades de uma barra com comportamento elástico e elastoplástico. Em (1995), Liu et al, com o Reproducing Kernel Particle Method, RKPM, mostram uma redução de tempo significativa, com relação ao MEF, na determinação de frequências naturais de baixa ordem em problemas uni e bidimensionais elásticos, elastoplásticos. Em (2002) Liew et al utilizam Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), na forma híbrida, para abordar problemas de frequências naturais em cilindros rotativos. Em (2003) G. Liu utiliza o Moving Least Square (MLS) para aproximar problemas de deflexões e vibrações livres em placas finas com formas complexas. Outros trabalhos não menos relevantes são os de Ferreira et al (2005), onde os autores utilizam o Multiquadrics Method na análise de frequências naturais em cascas rasas de dupla curvatura. Nos trabalhos supracitados os autores mostram o potencial do método na abordagem deste tipo de problema. Entretanto, não há preocupação em explorar o efeito da regularidade destes espaços na determinação de modos e frequências elevadas. Algumas das limitações são decorrentes da sistemática utilizada para construir o espaço de aproximação, que em alguns casos, gera matrizes de rigidez e massa positivas semi-definidas. É conhecido, entretanto, que os problemas de autovalores utilizando matrizes positivas semi-definidas se caracterizam por apresentar modos de deslocamento de corpo rígido que não devem surgir, por exemplo, em problemas de vibrações livres de estruturas estaticamente determinadas. O problema da obtenção de modos e frequências naturais elevadas, e com precisão aceitável, ainda é um tema de pesquisa em aberto onde devem surgir inúmeras propostas para sua abordagem.

No momento o Método de Elementos Finitos (MEF) se consolida como uma das metodologias computacionais mais difundidas na resolução de problemas de multi-física. Entretanto, ele se mostra limitado para abordar este tipo de problema. Uma das limitações do MEF na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidos é a perda de precisão à medida que as frequências ficam mais altas. Esta perda de precisão está diretamente relacionada à

regularidade do espaço de baixa ordem utilizado no MEF e fica mais crítica à medida que aumenta a ordem dos elementos utilizados. Em problemas elípticos de autovalores o aumento do erro nos autovetores com o incremento do autovalor é constatado pelos estimadores a priori da versão “ h ” do MEF. Os estimadores de erro a priori para a versão “ h ” do MEF, Hughes (1987) e Givoli (2008), mostram claramente que o erro aumenta de forma exponencial com o aumento da ordem polinomial e diminuem com o aumento da regularidade do espaço de aproximação.

Recentemente, pesquisas envolvendo a construção de espaços de aproximação de alta regularidade baseadas em metodologias de análise isogeométrica, veja Cottrel et al (2007a), mostram uma superioridade surpreendente com relação ao MEF na determinação de modos e frequências elevadas de problemas de vibrações livres não amortecidas. O k -method, proposto pelos autores supracitados utilizam a análise isogeométrica para construir espaços de aproximação de alta ordem e com regularidade desejada. Os resultados obtidos com esta metodologia mostraram valores mais precisos que o MEF na análise de frequências naturais elevadas quando analisado o problema de vibrações livres de uma barra elástica vinculadas nas extremidades. As curvas para valores normalizados de frequência natural são suaves e a precisão aumenta à medida que é aumentada a ordem polinomial do espaço de aproximação, Cottrel et al (2007b). Por outro lado, quando é utilizado o MEF com elementos de alta ordem ocorre uma perda significativa de precisão na curva supracitada a qual se manifesta por um salto no diagrama definindo os chamados ramos acústicos e óticos do espectro. Esta metodologia, promissora sem dúvida, mostra seu surpreendente potencial na abordagem de problemas suaves, contudo, apesar de se ter uma representação muito mais precisa da geometria, acredita-se que deva apresentar um custo computacional elevado por conta da integração numérica de funções não suaves. Por outro lado não se tem a versatilidade dos métodos sem malha de inclusão de modos conhecidos da solução em problemas de localização e nem a possibilidade de enriquecimento anisotrópico da solução, já que o espaço de aproximação do campo é o mesmo que o espaço utilizado para representar a geometria.

Por outro lado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), com os espaços de aproximação construídos conforme Melenk e Babuska (1996), Oden et al (1996) e Duarte et al (2000), apresentam alguns inconvenientes para abordar o problema geral autovalores. Estas dificuldades provém da sistemática utilizada para construir as funções de aproximação que gera modos linearmente dependentes resultando numa matriz de rigidez e de massa positiva semi-definida cujas limitações foram supracitadas neste texto.

Neste artigo os autores utilizam o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) com espaços de alta regularidade e alta ordem na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas em barras elásticas vinculadas nas extremidades. O espaço de aproximação do campo de deslocamento é obtido por enriquecimento explícito de partições de unidade com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$, obtidas a partir de polinomiais racionais. O escopo do trabalho consta das seguintes seções: Introdução; Construção do espaço de aproximação segundo o MEFG; Espaços de aproximação com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$; Resultados numéricos; Conclusões; Agradecimentos; Referências.

2. ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO SEGUNDO O MEFG

O Método dos Elementos Finitos Generalizados é derivado das metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento da partição da unidade. O procedimento de enriquecimento nodal consiste, essencialmente, na multiplicação da Partição de Unidade (PU), vinculada a uma partição de elementos, por funções de aproximação associadas aos nós ativos, isto é, nós seletivamente escolhidos para serem enriquecidos entre aqueles que compõem a malha.

Neste trabalho as funções de enriquecimento são definidas em um domínio paramétrico Σ vinculado ao domínio físico por meio de uma função vetorial de mapeamento $\mathbf{X}(s)$, ver Fig. 1, Garcia e Proença (2007). No MEFG o espaço de aproximação global constitui-se de todas as combinações lineares possíveis de um espaço de dimensão finita gerado pelo produto entre as funções $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ que definem uma partição da unidade e pelas funções que geram o espaço de aproximação local (\mathcal{C}_α^n) . A seguir são apresentadas as definições que serão utilizadas para mostrar a metodologia de construção do espaço de aproximação global.

2.1 Partição de unidade (PU) do tipo Lipschitz

Definição: Seja $\Sigma \subset R^n$ um conjunto aberto, seja ainda $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ uma cobertura aberta de Σ que satisfaz a seguinte condição de cobertura:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Sigma \quad \text{card}\{\alpha / x \in \omega_\alpha\} \leq M \quad (1)$$

Diz-se que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ é uma PU do tipo Lipschitz subordinada à cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ se satisfazer as propriedades:

$$i. \text{supp}(\varphi_\alpha) \subset \bar{\omega}_\alpha \forall \alpha \quad (2)$$

$$ii. \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha = 1 \quad \forall x \in \Sigma \quad (3)$$

$$iii. \|\varphi_\alpha\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty \quad (4)$$

$$iv. \|\nabla \varphi_\alpha\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\omega_\alpha)} \quad (5)$$

Nas Eqs. (1)-(5), M é o número de funções da PU que cobrem um ponto $x \in \omega_\alpha$ e N é o conjunto dos naturais. As constantes C_∞ e C_G independem de φ_α . A partição de unidade $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ é dita com regularidade $m \in N$ se $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n \subset C^m(R^n)$.

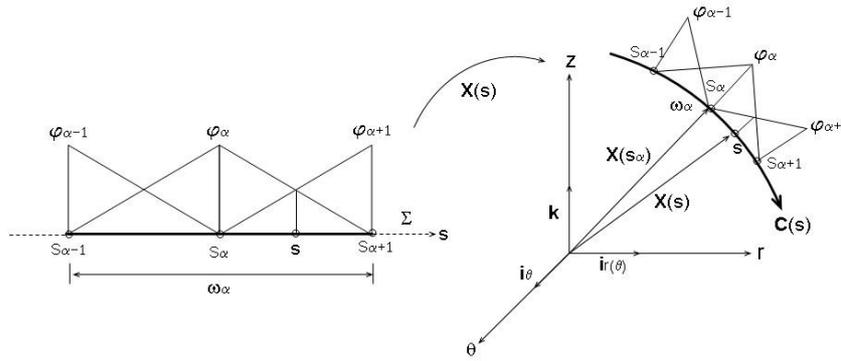


Figure 1: a) PU sobre a cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, b) PU definida sobre o domínio físico do problema.

Na Fig. 1 apresenta-se um exemplo de partição da unidade subordinada a cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ de forma que $\Sigma \subset \bigcup \bar{\omega}_\alpha$. A partição de unidade da figura é de regularidade $m=0$, portanto, $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^n \in C_0^0(\Sigma)$.

Definição (**Espaço de Aproximação Local, \mathcal{Q}_α^p**): O espaço de aproximação local de ordem “ p ” associado à partição da unidade “ α ” é definido como,

$$\mathcal{Q}_\alpha^p = \text{span} \left[\left\{ \rho_{k\alpha} \right\}_{k=1}^p \right] \quad (6)$$

sendo $\rho_{k\alpha}$ monômios de grau “ k ” definidos no sistema de coordenadas com origem no α -ésimo nó ativo da malha. Os espaços locais \mathcal{Q}_α^p são construídos usando bases polinomiais, devido à boa capacidade de aproximação e a facilidade de aplicação a uma ampla variedade de problemas.

Definição (**Espaço de Elementos Finitos Generalizados, \mathcal{F}_n^p**): Seja $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, define-se o espaço de aproximação global de ordem “ p ” como sendo,

$$\mathcal{F}_n^p = \text{span} \left[\left\{ \varphi_\alpha \mathcal{Q}_\alpha^p \right\}_{\alpha=1}^n \right] \quad (7)$$

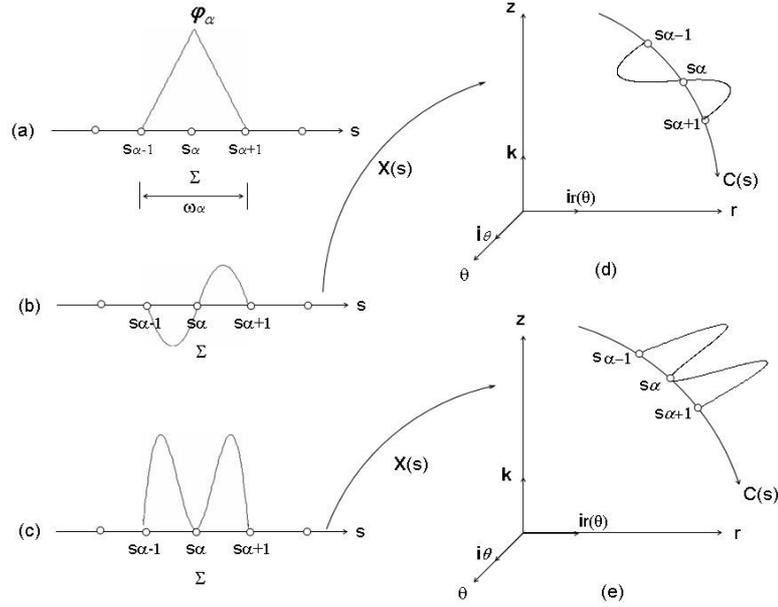


Figura 2: a) PU linear; b) $\psi_2^\alpha = \varphi_\alpha \cdot \bar{s}$; c) $\psi_3^\alpha = \varphi_\alpha \cdot \bar{s}^2$; d) Mapeamento da função ψ_2^α no domínio físico; e) Mapeamento da função ψ_3^α no domínio físico.

Na Fig. 2 apresenta-se um exemplo de espaço local gerado a partir de uma partição da unidade formada por funções lineares. Para este exemplo, toma-se $\rho_2 = \{1, \bar{s}, \bar{s}^2\}$ com espaço de aproximação local dado por $\mathcal{Q}_\alpha^2 = span[\{1, \bar{s}, \bar{s}^2\}]$. As Fig. 2b e 2c mostram as funções ψ_2^α e ψ_3^α que geram o espaço do MEFG dado por,

$$\mathcal{F}_\alpha^2 = span\{\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, \psi_3^\alpha\} = span\{\varphi_\alpha, 1, \varphi_\alpha \bar{s}, \varphi_\alpha \bar{s}^2\} \quad (8)$$

As Fig. 2d e 2e representam o mapeamento $\mathbf{X}: \Sigma \rightarrow \Omega$ do espaço de elementos finitos generalizados do domínio parametrizado para o domínio real, Garcia e Proença (2007).

3. PARTIÇÕES DE UNIDADE COM REGULARIDADE $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$

As características do espaço \mathcal{F}_n^p são:

- $\dim(\mathcal{F}_n^p) < np$; conforme demonstrado em Duarte et al (2000);
- a regularidade de uma função $\psi \in \mathcal{F}_n^p$ com $\psi = \varphi\rho$ é igual à menor regularidade das funções φ ou ρ conforme Duarte e Oden (1996).

Duarte et al (2000) mostram que os espaços de elementos finitos generalizados construídos a partir de PU lineares, função tenda, possuem regularidade $C_0^0(\Sigma)$ e a matriz de rigidez é singular. No presente trabalho é apresentada uma alternativa para construir o espaço de aproximação unidimensional sem problemas graves de condicionamento da matriz de rigidez e com regularidade desejada.

3.1. PU definida a partir de polinômios racionais

As funções da partição de unidade, apresentadas neste trabalho, são funções de Shepard Eq. (14), construídas a partir de funções peso obtidas por polinomiais racionais com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$. Estas funções são definidas em R , como segue: Seja $W_\alpha: R \rightarrow R$ tal que $W_\alpha \in C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$, com as seguintes propriedades:

i. $W_\alpha(s) \geq 0, \forall s \in \Sigma$ (9)

ii. $W_\alpha(s) = W_\alpha(s - s_\alpha)$, $W_\alpha(s) \in C_0^k$, $k = 0, 2, 4, \dots, \infty$ (10)

iii. $\forall s \in \bar{\Sigma} \rightarrow \text{card}\{\alpha / s \in \omega_\alpha\} \leq M \in N$ (11)

Para o caso específico desta proposta as funções peso são $W_1(\xi)$ e $W_2(\xi)$ são definidas no domínio paramétrico do elemento. Neste caso $M=2$, ou seja, tem no máximo duas funções peso que cobrem qualquer ponto no domínio do elemento, ver Figura 3a e 3b. Para as funções peso propostas às propriedades gerais podem ser resumidas em:

$$i. W_\beta(\xi) \in C_0^\infty(\Omega_e) \quad (12)$$

$$ii. W_\beta(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \Omega_e \quad (13)$$

As funções de Shepard neste caso são resumidas pela expressão:

$$\varphi_\beta(\xi) = W_\beta(\xi) / \sum_{\gamma=1}^2 W_\gamma(\xi). \quad (14)$$

A partir da Eq. (14) as funções da partição de unidade associadas aos nos do elemento de coordenadas paramétricas $\xi = -1$ e $\xi = 1$; são definidas por:

$$\varphi_1(\xi) = W_1(\xi) / (W_1(\xi) + W_2(\xi)) \quad (15)$$

$$\varphi_2(\xi) = W_2(\xi) / (W_1(\xi) + W_2(\xi)) \quad (16)$$

A forma geral da função peso indicada em (12) e (13) é dada por:

$$W_\beta(\xi) = \left[1 - (1 \pm \xi)^2 / h_\alpha^2 \right]^n, \quad n \in N^*, \beta = 1, 2 \quad (17)$$

As funções definidas na Eq. (17) possuem regularidade $C_0^\infty(\Omega_e)$ e $C_0^n(\Sigma)$ se n for par e $C_0^{n-1}(\Sigma)$ se n for ímpar sendo $n \in N$. Para o caso em que a partição de unidade tem regularidade $C_0^0(\Sigma)$ as funções $W_1(\xi)$ e $W_2(\xi)$ são definidas pela Eq.(18) e Eq.(19) a seguir

$$W_1(\xi) = 1 - (1 + \xi)^2 / 4 \quad (18)$$

$$W_2(\xi) = 1 - (1 - \xi)^2 / 4. \quad (19)$$

Enquanto que para as funções de partições de unidade com regularidade $C_0^6(\Sigma)$ se tem,

$$W_1(\xi) = \left[1 - (1 + \xi)^2 / 4 \right]^6 \quad (20)$$

$$W_2(\xi) = \left[1 - (1 - \xi)^2 / 4 \right]^6. \quad (21)$$

Nas Fig. 3a e 3b são apresentados os gráficos das funções definidas nas Eqs. (18), (19) e Eqs. (20), (21) respectivamente. Já nas Figures 4a e 4b são apresentados os gráficos das PU's com regularidade $C_0^0(\Sigma)$ e $C_0^6(\Sigma)$ definidas pelas Eq. (15) e Eq.(16). Na Fig. 4a, nota-se a presença de cúspides das partições de unidade com regularidade $C_0^0(\Sigma)$, indicando que a primeira derivada da função não existe nas fronteiras entre elementos conforme indicado na Fig. 5a. Por outro lado às funções com regularidade $C_0^6(\Sigma)$, com extremidades achatadas, observadas na Fig. 5b indicam que a primeira derivada é contínua e nula nas fronteiras entre elementos como pode ser observado na Fig. 5b.

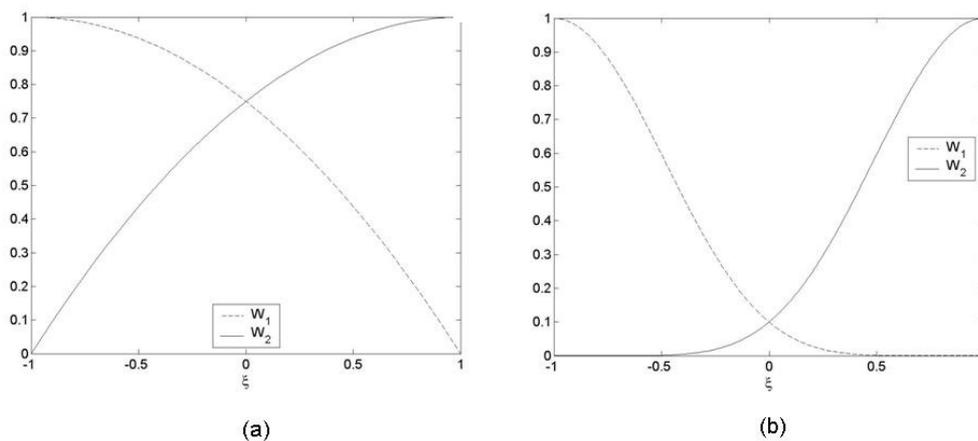


Figura 3 - a) Gráficos das funções W_1 e W_2 com regularidade $C_0(\Sigma)$; b) Gráficos das funções W_1 e W_2 com regularidade $C_6(\Sigma)$.

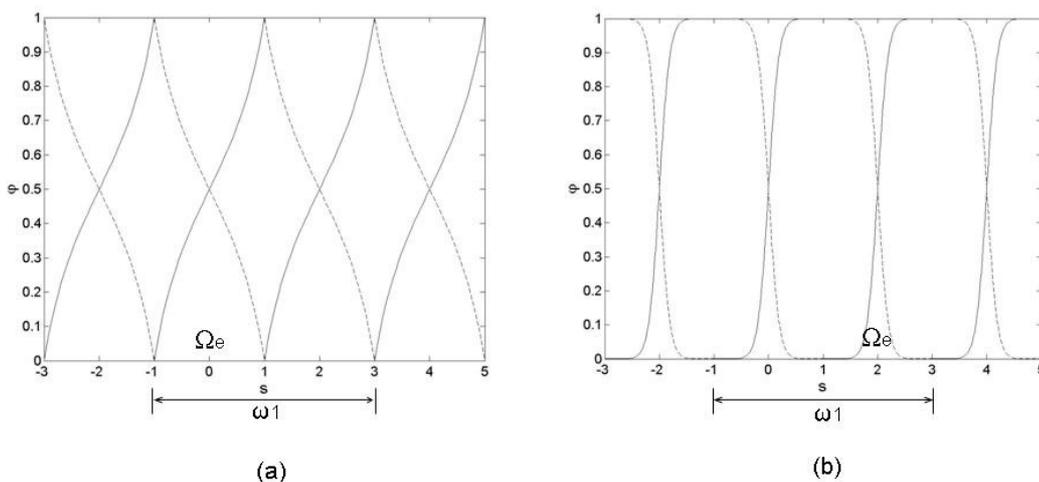


Figura 4 - a) PU's com regularidade $C_0(\Sigma)$; b) PU's com regularidade $C_6(\Sigma)$.

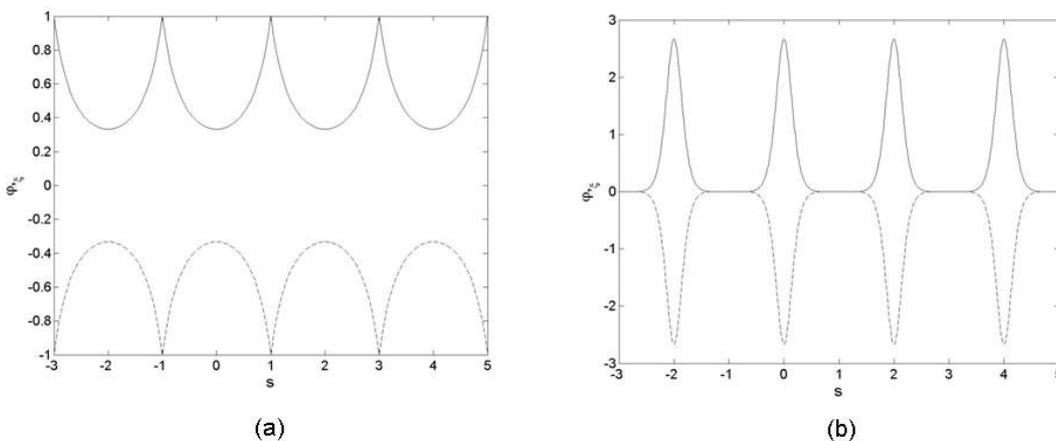


Figura 5 - a) Derivadas da PU, regularidade $C_0(\Sigma)$; b) derivada da PU, regularidade $C_6(\Sigma)$.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção é apresentado um estudo de caso constituído de uma haste vinculada nas duas extremidades onde é analisada a capacidade dos espaços de aproximação de alta regularidade determinar com precisão frequências elevadas do sistema.

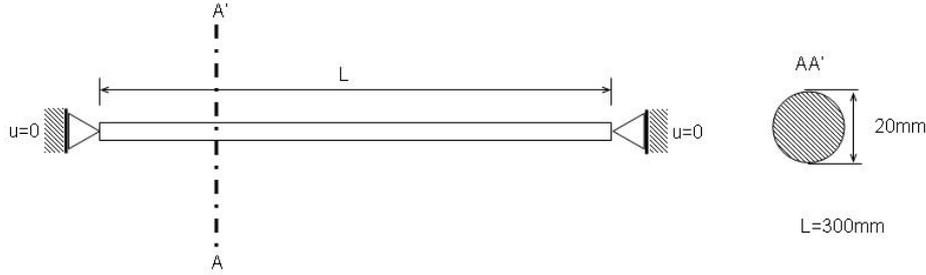


Figura 6: Barra vinculada nas extremidades.

A barra tem módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$, massa específica $\rho = 7,850 \times 10^{-5} \text{ kg/mm}^3$ e propriedades geométricas indicadas na Figura 6. O resultado obtido para a barra provém de um problema elíptico de autovalores definido pelas Eqs (22)-(24).

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + w^2 \frac{\rho}{E} u(x) = 0 \quad (22)$$

$$u(x) = 0, \quad x = 0 \quad (23)$$

$$u(x) = 0, \quad x = L \quad (24)$$

As Eqs. (22), (23) e (24) descrevem a formulação forte para um problema de vibrações livres não amortecidas da barra onde $u(x)$, corresponde ao modo de vibração na direção x e w a frequência natural associada a este modo. A solução analítica do problema para as frequências naturais e os modos é dada pelas Eqs.(25) e (26),

$$w = \frac{n\pi}{L\sqrt{\rho/E}} \quad (25)$$

$$u(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} w x\right) + B \text{sen}\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} w x\right) \quad (26)$$

Em (26) as constantes A e B são determinadas a partir das condições de contorno do problema.

A equação discretizada para o problema, obtida a partir do método dos resíduos ponderados (Galerkin), é definida pela Eq. (27).

$$\int_0^L B^T E B dx - w^2 \int_0^L \rho N^T N dx = 0 \quad (27)$$

onde,

$$N = [\psi_1^1 \quad \psi_2^1 \quad \psi_3^1 \quad \cdots \quad \psi_i^\alpha \quad \cdots \quad \psi_p^n]; \quad \alpha=1,\dots,n; \quad i=1,\dots,p \quad (28)$$

e

$$B = [\psi_{1,x}^1 \quad \psi_{2,x}^1 \quad \psi_{3,x}^1 \quad \cdots \quad \psi_{i,x}^\alpha \quad \cdots \quad \psi_{p,x}^n]; \quad \alpha=1,\dots,n; \quad i=1,\dots,p. \quad (29)$$

Em (28) e (29), ψ_i^α é a função de aproximação i correspondente ao nó α .

A primeira análise corresponde aos valores relativos de frequência natural obtidos a partir dos resultados numéricos e da solução analítica da Eq. (25). Os resultados numéricos foram obtidos utilizando funções de aproximação linear tanto para o MEF quanto para o MEEG sendo que em todos os casos foram utilizados duzentos graus de liberdade para modelar o problema.

Os resultados indicados na Figura 7, correspondem aos seguintes espaços de aproximação:

- i. PU polinomial racional com regularidade $C_0^0(\Sigma)$ com enriquecimento com base polinomial $p=1$;
- ii. PU polinomial racional com regularidade $C_0^2(\Sigma)$ com enriquecimento com base polinomial $p=1$;
- iii. PU polinomial racional com regularidade $C_0^4(\Sigma)$ com enriquecimento com base polinomial $p=1$;
- iv. MEF, linear.

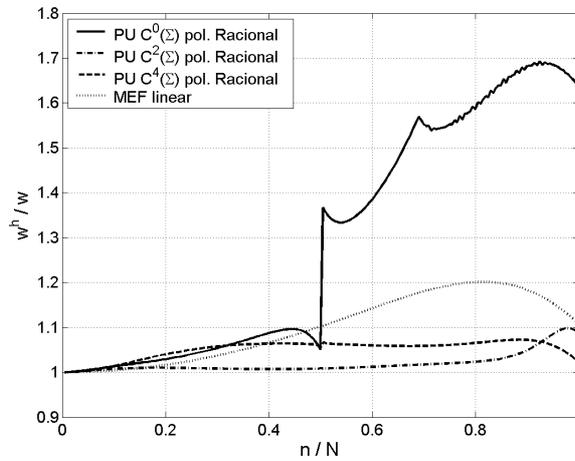


Figura 7: Valores normalizados de frequências naturais da barra.

Os resultados indicam um desempenho satisfatório embora pouco preciso do MEF. Neste caso os resultados mostram um comportamento suave e contínuo, contudo os valores com precisão aceitável não vão além de vinte por cento do número total de modos obtidos pelo modelo. Para o caso dos espaços obtidos segundo o MEFG fica evidente a influência da regularidade nas respostas. Para o espaço construído com regularidade do tipo $C_0^0(\Sigma)$, nota-se um resultado muito pobre com precisão que não vai além de dez por cento do número total de modos aproximados pelo modelo, além disto, nota-se o surgimento de valores espúrios de frequência que fica claro com o salto no diagrama para $n/N = 0,5$. Para os espaços com regularidade $C_0^2(\Sigma)$, se observa um ganho significativo em precisão apresentando um comportamento suave da curva. Finalmente para espaços com regularidade $C_0^4(\Sigma)$, os resultados mostram um comportamento suave da curva, entretanto, pouco preciso para enriquecimentos obtidos com baixa ordem polinomial.

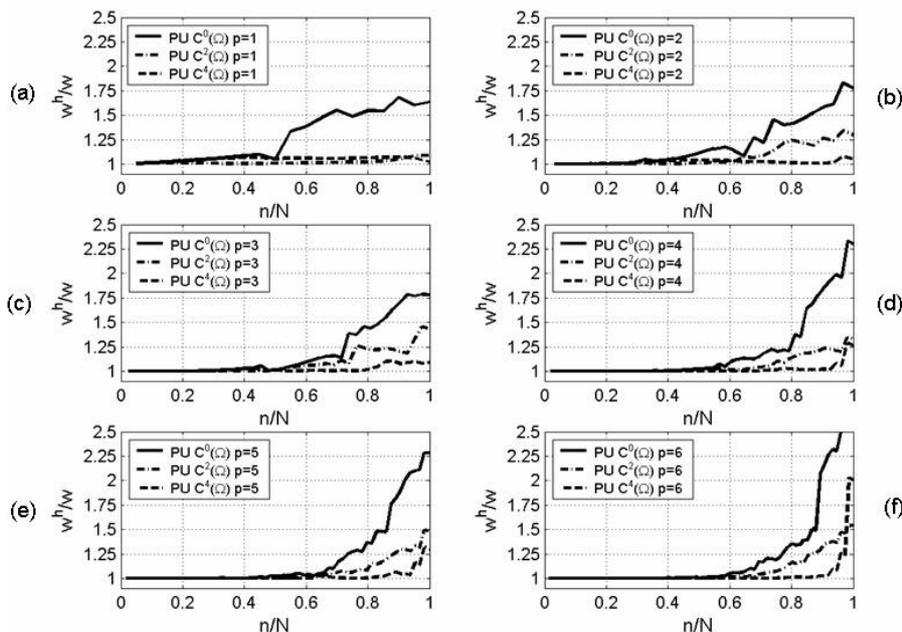


Figura 8: a) frequência normalizada $p=1$; b) frequência normalizada $p=2$; c) frequência normalizada $p=3$; d) frequência normalizada $p=4$; e) frequência normalizada $p=5$; f) frequência normalizada $p=6$.

A análise a seguir mostra a influência da regularidade do espaço de aproximação construído segundo a versão “ p ” do MEFG na captura de valores elevados do espectro de frequências naturais do problema em questão. Os resultados

para esta análise são obtidos a partir de um enriquecimento das PU's com regularidades indicadas nos itens i,ii e iii do modelo anterior, com bases polinomiais com ordem $p = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A geometria do problema foi representada com dez elementos unidimensionais lineares, entretanto, para aproximar o campo de deslocamento foi utilizado um número máximo de setenta e cinco graus de liberdade correspondente ao espaço de aproximação gerado com polinômio de sexta ordem.

Os resultados mostrados nas Figuras 8a-f mostram a influência da regularidade do espaço de aproximação na versão "p" do método. A análise das figuras mostra claramente uma melhora significativa na convergência dos valores normalizados da frequência com o refino "p" para o espaço construído com regularidade $C_0^0(\Sigma)$. Por outro lado para os espaços construídos com regularidade $C_0^2(\Sigma)$ houve uma melhora na convergência de valores normalizados para frequências inferiores a cinquenta por cento do total dos modos aproximados pelo modelo, sendo que acima deste valor, nota-se uma nítida perda de precisão. Para o espaço com regularidade $C_0^4(\Sigma)$ o refino "p" melhora sensivelmente a convergência atingindo valores precisos até aproximadamente oitenta por cento do espectro de frequências.

5. CONCLUSÕES

De forma geral constatou-se um bom desempenho dos espaços de alta regularidade na abordagem de problemas elípticos de autovalores. A utilização de partições de unidade construídas a partir de polinomiais racionais permite obter matrizes de massa e rigidez simétricas e positivas definidas excluindo, desta forma, os modos de deslocamento de corpo rígido do problema de autovalores. A influência de espaços de aproximação de alta regularidade corrobora a prescrição dos estimadores a priori para problemas elípticos de autovalores, modelados segundo a versão "h" do MEF. Neste caso o aumento da regularidade do espaço de aproximação produz uma redução sensível do erro esperado nas frequências e nos modos com o aumento dos autovalores. Por outro lado, ao contrário que no MEF, onde a utilização de elementos de alta ordem produz uma perda significativa de precisão dos valores obtidos para as frequências naturais do problema, Cottrell (2007), os resultados das Figuras 8a-f mostram um bom desempenho da versão "p" do MEFG principalmente para espaços de baixa regularidade $C_0^0(\Sigma)$. Os resultados obtidos neste trabalho mostram um desempenho surpreendente para os espaços de alta regularidade construídos a partir de polinomiais racionais na abordagem de problemas de modos e frequências elevados em barras com comportamento elástico. Embora o estudo de caso tenha sido feito sobre uma componente estrutural simples, como é caso da barra, resultados igualmente promissores estão sendo obtidos, pelos autores deste artigo, em problema axissimétricos de placas e cascas que por brevidade não podem ser citados neste artigo.

6. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer o suporte do Conselho Nacional de Pesquisa pelo apoio a este projeto. Processos números 473343/2008-8 e 303662-2009-3.

7. REFERÊNCIAS

- Babuska I, Melenk J.M., 1996, "Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM): Basic theory and applications", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 139, pp 289-314.
- Cottrell J. A., Hughes T. J. R., Reali A., Sangalli G., 2007a, "Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation", ECOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Crete, Greece, 13-16 June 2007.
- Cottrell J. A., Hughes T. J. R., Reali A., 2007b, "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 196, pp 4160-4183.
- Duarte C. A., Oden J. T., 1996, "An h-p adaptative method using clouds", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 139, pp 237-262.
- Duarte C.A, Babuska I, Oden J. T., 2000, "Generalized finite element method for three-dimensional structures mechanics problems", Computer and Structures, Vol. 77, pp. 215-232.
- Ferreira A. J. M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N, 2005, "Natural frequencies of FSDT cross-ply composite shell by mutiquadrics", Composite Structures,
- G. Liu, 2003; A mesh-free method for static and free vibration analyses of thin plates of complicated shape. Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 5, pp 839-855.
- Garcia O. A, Proença S.P.B., 2007, "Linear analysis of axis-symmetric plates and shells by Generalized Finite Element Method", Latin American Journal of Solid and Structures, Vol. 4, pp. 121-148.

- Givoli D., 2007, On the number of reliable finite-element eigenmodes, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 1967-1977.
- Hughes, T.J.R., 1987, The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications.
- Liew K. M., T. Y. Ng, X. Zhao, J. N. Reddy, 2002, “Harmonic Reproducing Kernel Particle Method for free vibration analysis of rotating cylindrical shell”, Computer Method and Applied Mechanics in Engineering, Vol 19, pp. 4141-4157.
- Liu W. K., Jun S., Li S., J. Adee, Belytschko T., 1995, “Reproducing Kernel Particle Method for structural dynamics”, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 38, No. 10, pp 1655-1679.
- Lu Y. Y., Belytschko T., Tabbara M., 1995, “Element-Free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture”, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 126, pp 131-153.
- Oden J. T., Duarte C. A, Zienkiewicz O.C., 1996, “A new cloud-based hp finite element method”, Tec. Rep. TICAM Report 96-55, The University of Texas, Austin, Texas, USA.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

HIGH REGULARITY GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD IN THE ANALYSIS OF THE FREE VIBRATION PROBLEM

Oscar Alfredo Garcia, oagsuarez@ucs.br¹

Rodrigo Rossi, rrossi@ufrgs.br²

Paulo Roberto Linzmaier, prlinzma@ucs.br¹

¹Universidade de Caxias do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130, Caxias do Sul, RS, 95070-560.

²Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Sarmiento Leite, 425, Porto Alegre, RS, 90050-170.

SUMMARY: *One of the limitations of the Finite Element Method is the lack of precision in the estimation of the high frequencies. In general the eigenmodes obtained by the Finite Element Method represent a small percentage of the total modes. This limitation gets worse when high order finite elements are employed into the analysis. The lack of accuracy is characterized by the appearance of spurious results which starts from a particular value of frequency. This problem becomes evident when normalized diagrams for a particular problem are constructed and are denoted as acoustic and optical branches. In this article an alternative method based on the enrichment of the partition of unity, sometimes called Generalized Finite Element Method, is derived and applied to solve the simple problem of eigenmodes of a rod clamped at both ends. Results show that the enriched shape functions, approximation space, are able to capture high order frequencies.*

Keywords: *natural frequencies, regularity, MEFG, partição da unidade.*

9. AUTHOR RIGHTS

The authors state that they are the solely responsible for the print content presented in this work.