



COMPROMETIDA COM A PROMOÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA ENGENHARIA E DAS CIÊNCIAS MECÂNICAS

VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA  
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING  
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil  
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

## IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DE ESTRUTURAS UTILIZANDO MÉTODOS BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Jair Gonçalves de Oliveira Borges, [jair.borges@uenf](mailto:jair.borges@uenf)<sup>1</sup>

Patrícia Habib Hallak, [phallak@uenf.br](mailto:phallak@uenf.br)<sup>1</sup>

Guilherme Chagas Cordeiro, [gcc@uenf.br](mailto:gcc@uenf.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Laboratório de Engenharia Civil, Av. Alberto Lamego, 2000, Parque Califórnia, Campos dos Goytacazes, RJ, Brasil, CEP: 28013-612.

**Resumo:** A Engenharia Estrutural enfrenta, nos dias atuais, diferentes desafios. Por um lado, têm-se estruturas há muito tempo em serviço e, por outro, estruturas modernas, esbeltas e com concepções arquitetônicas complexas e arrojadas. Além disso, grandes equipamentos e máquinas precisam trabalhar com velocidade cada vez maior. Assim, cada vez mais são utilizadas técnicas capazes de reproduzir com maior número possível de detalhes os mais variados tipos de sistemas estruturais. Tais técnicas visam reproduzir modelos que sejam capazes de representar não somente o comportamento estático da estrutura, mas também o comportamento dinâmico. No que diz respeito à identificação das características dinâmicas, que são frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração, esta pode ser feita analiticamente, através do Método dos Elementos Finitos, ou experimentalmente através da Análise Modal Experimental. Diante de tal necessidade, o trabalho em questão propõe a apresentação e a implementação computacional de dois métodos de identificação modal: o Método de Seleção de Picos também conhecido como Método Básico no Domínio da Frequência (Peak Picking – PP) e o Método da Decomposição no Domínio da Frequência (Frequency Domain Decomposition – FDD), que são métodos baseados apenas nas respostas da estrutura. Para demonstrar a eficiência destes métodos foi analisado um exemplo em que as repostas em aceleração da estrutura são simuladas numericamente através de modelos de espaço de estado.

**Palavras-chave:** identificação modal, decomposição no domínio da frequência, dinâmica das estruturas, espaço de estado

### 1. INTRODUÇÃO

A Engenharia Estrutural enfrenta, nos dias atuais, diferentes desafios. Existem estruturas há muito tempo em serviço, e ao mesmo tempo estruturas modernas, esbeltas e de concepções arquitetônicas complexas e arrojadas, além de grandes equipamentos e máquinas que precisam trabalhar com velocidade cada vez maior. Desta forma, estas estruturas devem ter um custo acessível além de longa vida útil. Essa exigência de mercado tem levado ao desenvolvimento de técnicas que representem as estruturas com o maior número de detalhes possíveis tanto para o dimensionamento quanto para a análise da integridade estrutural. Tais técnicas visam reproduzir não somente o comportamento estático, como também o comportamento dinâmico.

No que diz respeito à identificação das características dinâmicas, que são as frequências naturais, as taxas de amortecimento e os modos de vibração, esta pode ser feita analiticamente, através do Método dos Elementos Finitos, ou experimentalmente através da Análise Modal Experimental. Fundamentada em modelos matemáticos, esta técnica permite o estudo e a identificação das características dinâmicas de um sistema estrutural em serviço.

A identificação modal tem sido aplicada freqüentemente em procedimentos para a monitoração da integridade de estruturas, visto que a existência de danos estruturais implica na alteração de suas propriedades dinâmicas (Sardinha, 2006).

As técnicas de identificação modal podem ser as convencionais, nas quais o tipo de excitação é previamente conhecido, e pode-se estabelecer uma relação entre a força de excitação aplicada em um ponto  $j$  e a resposta medida em um ponto  $i$  da estrutura. Esta relação é conhecida como função de transferência, no caso do domínio da frequência esta é conhecida como Função de Resposta em Frequência (FRF). A partir desta pode-se identificar as propriedades dinâmicas da estrutura. Porém em certos casos torna-se difícil a excitação da estrutura devido ao custo, pois uma estrutura de grande porte necessita de equipamentos que sejam capazes de excitá-la a altura, ou também pelo difícil acesso, como por exemplo seria totalmente inviável parar o trânsito de uma grande ponte para realizar um ensaio.

São nesses casos que se utilizam os métodos do tipo *output only*, ou seja, métodos em que não existe a necessidade de que se conheça previamente o tipo de excitação. Dentro deste contexto este artigo visa à apresentação dos conceitos teóricos de dois métodos de identificação modal, o Método de Seleção de Picos também conhecido como

Método Básico no Domínio da Frequência (*Peak Picking* – PP) e o Método da Decomposição no Domínio da Frequência (*Frequency Domain Decomposition* – FDD). A potencialidade destes métodos é demonstrada com um exemplo de aplicação numérico, em que as respostas da estrutura foram simuladas através de modelos de espaço de estado utilizando rotinas em linguagem *Matlab*.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. Método de Seleção de Picos

Embora outros pesquisadores já a utilizassem há muito tempo, a técnica clássica de identificação dos parâmetros modais no domínio da frequência, conhecida como Método Básico no Domínio da Frequência ou Método da Seleção de Picos (*Peak Picking* – PP), foi sistematizada por Felber (1993).

O Método de Seleção de Picos é baseado no fato de que os parâmetros modais possam ser identificados assumindo que a estrutura é excitada por um ruído branco gaussiano, um processo estocástico com intensidade espectral em todas as frequências.

As frequências naturais de vibração podem ser identificadas através dos picos ressonância do espectro normalizado médio (*Average Normalized Power Spectral Density* – ANPSD), que pode ser obtido pela normalização dos auto-espectros (espectros encontrados na diagonal principal da matriz de densidade espectral), pelo somatório total dos valores das ordenadas de cada espectro, assim como apresentado na Eq. (1).

$$NPSD_i(\omega_n) = \frac{PSD(\omega_n)}{\sum_{i=1}^N PSD(\omega_n)} \quad (1)$$

Em que PSD ( $\omega_n$ ), denota a densidade espectral de potência (*Power Spectral Density* – PSD). Após a normalização faz-se a média do espectro normalizado pelo número de graus de liberdade analisados Eq. (2).

$$ANPSD(\omega_n) = \frac{1}{n_{GL}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{GL}} NPSD_i(\omega_n) \quad (2)$$

Para confirmar se as frequências identificadas pelos picos do ANPSD são realmente frequências naturais de vibração da estrutura e não picos provocados por ruído, pode-se utilizar as funções de coerência representadas na Eq. (3) em que são avaliados valores entre 0 e 1. Nas funções de coerência valores próximos a unidade revelam um elevado grau de linearidade entre os sinais medidos, significando que os valores de frequência para estas regiões são frequências naturais de vibração da estrutura, enquanto que valores próximos a zero mostram que existe um elevado nível de ruído.

$$\gamma_{ij}^2(\omega_m) = \frac{|\tilde{S}_{ij}(\omega_m)|^2}{\tilde{S}_{ij}(\omega_m) \cdot \tilde{S}_{ij}(\omega_m)} \quad (3)$$

As funções de coerência estão representadas na Eq. (3) por  $\gamma_{ij}$ , na mesma equação i e j se referem a graus de liberdade da estrutura enquanto  $S_{ij}$  são elementos da matriz de densidade espectral.

A identificação das configurações modais é feita através da função de transferência que relaciona densidade espectral de um determinado grau de liberdade com a de um grau de liberdade de referência, como apresentado na Eq. (4).

$$T_{j,ref} = \frac{\tilde{S}_{j,ref}(\omega)}{\tilde{S}_{ref,ref}(\omega)} \quad (4)$$

Como os espectros cruzados, espectros encontrados fora da diagonal principal da matriz de densidade espectral, são funções complexas, a divisão de qualquer espectro por um espectro cruzado sempre terá como resultado uma função complexa, que pode ser representada por amplitude e fase. Assim as configurações modais podem ser identificadas tomando o valor da amplitude da função de transferência na frequência identificada no ANPSD como a amplitude de determinado grau de liberdade de um modo, e o sentido deste em relação ao grau de liberdade de referência é dado pelo

ângulo da fase da função de transferência, ou seja, se o ângulo de fase é zero ou próximo de zero o sinal da amplitude é positivo e se for 180 ou um valor próximo o valor da amplitude é negativo.

É preciso destacar que esta técnica fornece a estimativa dos modos vibração operacionais em vez das formas modais exatas, levando a bons resultados se as formas modais são separadas. Todavia, se estas forem próximas, pode haver a sobreposição de formas modais (Peeters e Ventura, 2003).

As taxas de amortecimento podem ser obtidas utilizando o método de meia potencia da Eq. (5) em que são utilizadas duas frequências uma anterior  $f_1$  e outra posterior  $f_2$  com o valor da ordenada sendo metade do valor da ordenada do pico de ressonância (Clough e Penzien, 1993). Apesar de ser um método de fácil implementação este fica restrito a resolução em frequência, o que implica a adoção de interpolação para a identificação dos pontos requeridos.

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{2 \cdot f_i} \quad (5)$$

## 2.2. Método da Decomposição no Domínio da Frequência

O Método de Decomposição no Domínio da Frequência foi introduzido por Brinker *et al.* (2000). Inicialmente é necessário estimar a matriz de densidade espectral de potência de saída  $S_{yy}$  para valores discretos de frequência  $\omega = \omega_i$ . A partir de então esta deve ser decomposta em valores singulares

$$S_{yy}(j\omega_i) = U_i S_i U_i^H \quad (6)$$

Em que  $U_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}]$  é a matriz formada pelos vetores singulares  $u_{ij}$  e  $S_i$  é a matriz diagonal formada pelos valores singulares  $s_{ij}$  da matriz de densidade espectral de saída. Ainda na Eq. (6) o termo  $( )^H$  significa que a matriz que o contém está transposta e é conjugada de outra matriz.

Quando existe apenas um modo dominante na estrutura o primeiro vetor singular é uma estimativa do primeiro modo de vibração Eq.(7).

$$\hat{\phi} = u_{i1} \quad (7)$$

O primeiro valor singular  $s_{ij}$  da diagonal principal da matriz  $S_i$  correspondente ao vetor singular  $u_{i1}$  representa a função de densidade espectral de um grau de liberdade (1GL) e que se refere a contribuição daquele modo. Essa função de densidade espectral é decomposta em torno do pico para cada linha de frequência, fazendo uma comparação do modo identificado com os vetores singulares para cada frequência em torno do pico. Esta comparação é feita iterativamente utilizando coeficientes MAC (*Modal Assurance Criterion*) mostrado na equação Eq. (8) (Alemany, 2003).

Os valores singulares fazem parte desta função de densidade espectral quando os respectivos vetores singulares apresentam um valor de MAC da Eq.(8) em relação ao modo identificado previamente acima de um valor pré-estabelecido. A partir da identificação da frequência em que a correspondência não está acima do valor pré-estabelecido a procura termina e as linha de frequências restantes são completadas com zeros Brinker et al. (2001).

$$MAC_{i,j} = \frac{|\varphi_i^T \cdot \varphi_j|^2}{(\varphi_i^T \cdot \varphi_i) \cdot (\varphi_j^T \cdot \varphi_j)} \quad (8)$$

Identificadas as funções de densidade espectral de 1GL que correspondem ao k-ésimo modo, as frequências naturais e as taxas de amortecimento podem ser identificadas fazendo a transformação destas funções para o domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier, encontrando-se assim as funções de auto-correlação.

Para a identificação das taxas de amortecimento é utilizado o conceito de decremento logaritmo (Clough e Penzien, 1993), o qual pode ser estimado pelo ajuste linear de todos os máximos e mínimos com número de semi-ciclos observados na função de auto-correlação, o decremento é então dado pela inclinação da reta ajustada.

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left( \frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (9)$$

A partir do valor do decremento logaritmo pode-se calcular o valor da taxa de amortecimento utilizando a Eq.(10).

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (10)$$

A frequência natural pode ser ajustada utilizando regressão linear para número de máximos encontrados na função de autocorrelação pelo instante temporal em que ocorrem. A inclinação desta reta encontrada fornece a frequência ajustada.

A partir do valor da frequência amortecida e do amortecimento é possível encontrar as frequências naturais não amortecidas utilizando a Eq.(11).

$$f = \frac{f_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (11)$$

### 3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Com o intuito de uma melhor visualização das potencialidades dos métodos apresentados nas seções anteriores estes foram implementados utilizando rotinas *Matlab*. Esta seção mostra a aplicação dos dois métodos de identificação modal, PP e FDD, através de um exemplo de pórtico proposto por (Mendes e Oliveira, 2008). As propriedades dinâmicas foram calculadas analiticamente através de elementos finitos para serem tomadas como referência e comparados com os valores encontrados pelos métodos identificação modal apresentados neste trabalho.

#### 3.1. Descrição da estrutura estudada e resultados analíticos

O modelo de pórtico plano apresentado neste trabalho está mostrado na Fig. (1) e foi estudado por (Mendes e Oliveira, 2008). Este é analisado como uma estrutura discreta de três graus de liberdade, pois nos pisos há uma maior concentração de massas, quando comparados aos pilares.

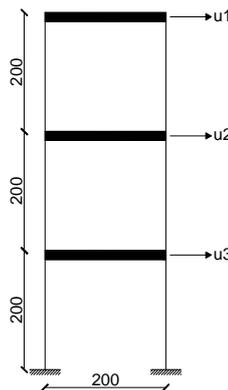


Figura 1. Pórtico Plano de Três Pisos (medidas em milímetros)

Primeiramente foi feita uma análise plana por elementos finitos considerando os três graus de liberdade na direção horizontal como mostrado na Fig.(1), para que os valores encontrados sejam tomados como referência.

As matrizes massa (M) e rigidez (K) do pórtico plano são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} (\text{kg}) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 20833.33 & -20833.33 & 0 \\ -20833.33 & 41666.67 & -20833.33 \\ 0 & -20833.33 & 41666.67 \end{bmatrix} (\text{N/m})$$

Resolvendo o problema de auto-valor e auto-vetor utilizando a função *eig* do *Matlab*, pode-se obter as frequências naturais não-amortecidas ( $f_i$ ) e modos de vibração ( $\Phi$ ).

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 4.57 \\ 12.81 \\ 18.51 \end{bmatrix} (\text{Hz}) \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -0.3296 & -0.2643 & 0.1467 \\ -0.2643 & 0.1467 & -0.3296 \\ -0.1467 & 0.3296 & 0.2643 \end{bmatrix}$$

Através da formulação de Rayleigh Eq.(12) (Clough e Penzien, 1993), na qual a matriz de amortecimento (C) é considerada proporcional as matrizes de massa e rigidez, pode-se obter a matriz de amortecimento e então a partir da Eq.(13) na qual  $\omega_n$  representa as frequências naturais em radianos por segundo, pode-se obter as taxas de amortecimento ( $\xi$ ).

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K} \quad (12)$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_n} + \frac{\beta \cdot \omega_n}{2} \quad (13)$$

A matriz de amortecimento encontrada como sendo proporcional a massa e rigidez, no qual foram considerados  $\alpha=0.05$  e  $\beta=0.0001$ . e as taxas de amortecimento são:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.3333 & -2.0833 & 0 \\ -2.08333 & 4.4167 & -2.0833 \\ 0 & -2.0833 & 4.4167 \end{bmatrix} \quad \xi_i = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.43 \\ 0.60 \end{bmatrix} (\%)$$

### 3.2. Simulação das respostas em aceleração

O pórtico de três pisos foi excitado em todos os graus de liberdade analisados por um ruído branco gaussiano utilizando a função *randn* e para a simulação das respostas em aceleração foi utilizado um modelo de espaço de estado discreto muito utilizado na engenharia de controle segundo Gawronski (2004). O modelo de espaço de estado é representado pelo sistema de equações mostrado pela Eq.(14) e pode ser facilmente resolvido pela implementação em *Matlab* através da função *lsim*.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Em que  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  são respostas e excitações respectivamente.

As matrizes necessárias para aplicação do modelo de espaço de estado são:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{C}_a \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \quad (18)$$

Em que  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento,  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade,  $\mathbf{B}_f$  é uma matriz composta por zeros e uns posicionados nos graus de liberdade que indicam os graus de liberdade os quais as excitações estão sendo aplicadas, e por fim a matriz  $\mathbf{C}_a$  formada por zeros e uns que indica os graus de liberdade os quais se quer obter as respostas.

Na Fig.(2) estão apresentadas as respostas em aceleração para o pórtico de três pisos, para amostras de 100 segundos com taxa de amostragem de 50 Hertz, totalizando 5000 pontos.

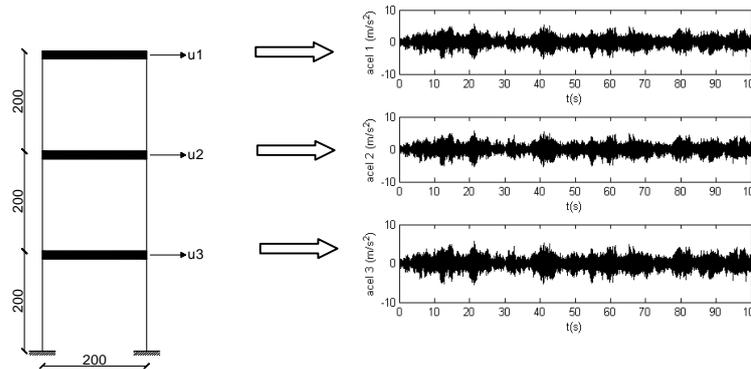


Figura 2. Respostas em aceleração simuladas

#### 4. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para os métodos PP e FDD utilizando as séries temporais de aceleração simuladas por modelos de espaço de estado. A estas series temporais ainda foram adicionados níveis de ruído de 10% e 20%.

##### 4.1 Resultados obtidos pelo Método de Seleção de Picos (PP)

Na matriz de densidade espectral os auto-espectros foram obtidos utilizando a função *pwelch* e os espectros cruzados através da função *cpsd*, ambas funções do *Matlab*. O espectro normalizado médio (ANPSD) foi obtido através matriz de densidade espectral como explicado na Seção 2.1 e está apresentado na Fig.3.

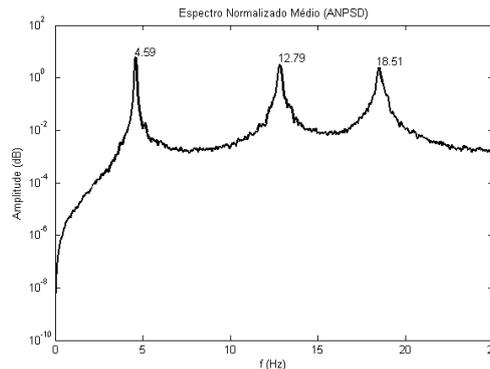


Figura 3. Espectro normalizado médio

Através dos picos do espectro normalizado médio é possível obter as frequências naturais de vibração. Na Tab.(1) estão apresentados os valores encontrados sem ruído, com 10% e com 20% de ruído, os valores teóricos de referência obtidos pelo método dos elementos finitos. Também são apresentados os valores encontrados por Mendes e Oliveira (2008), quando estes utilizaram amostras de 20.48s totalizando 1024 pontos com sobreposição de 2/3 e a aplicação de janelas Hanning.

Tabela 1. Frequências obtidas através do Método de Seleção de Picos

	Teórico (Hz)	Mendes e Oliveira (2008) (Hz)	Sem ruído (Hz)	10% ruído (Hz)	20% ruído (Hz)
1º Modo	4.57	4.59	4.59	4.59	4.59
2º Modo	12.81	12.79	12.79	12.79	12.84
3º Modo	18.51	18.55	18.51	18.55	18.51

Pode-se observar pela Tab.(1) que os resultados obtidos pelo Método de Seleção de Picos para as frequências naturais foram satisfatórios, apresentando pouca variação entre os casos analisados.

Os modos de vibração encontrados através dos valores da função de transferência, podem ser observados na Fig.(4) na qual a estrutura indeformada está representada de preto e a estrutura deformada de vermelho.

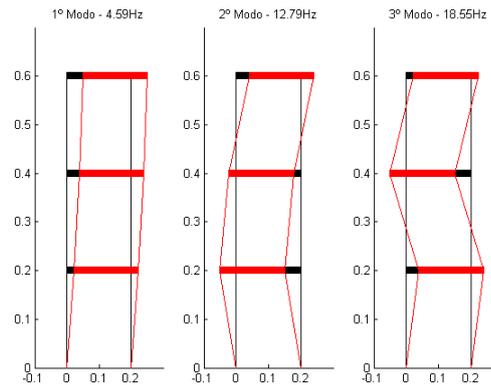


Figura 4. Modos de Vibração obtidos pelo Método de Seleção de Picos

As taxas de amortecimento foram calculadas utilizando o método de meia potência, o qual pode ser avaliado utilizando a Eq.(5) apresentada na seção 2.1 e estão apresentadas na Tab.(2).

Tabela 2. Taxas de Amortecimento obtidas através do Método de Seleção de Picos

	Teórico (%)	Mendes e Oliveira (2008) (%)	Sem ruído (%)	10% ruído (%)	20% ruído (%)
1º Modo	0.23	1.10	1.09	0.98	1.20
2º Modo	0.43	0.56	0.55	0.55	0.55
3º Modo	0.60	0.71	0.57	0.70	0.57

#### 4.1 Resultados obtidos pelo Método da Decomposição no Domínio da Frequência

O primeiro passo no Método da Decomposição no Domínio da Frequência é a estimativa da função de densidade espectral para valores discretos de  $\omega_n$ . Logo após, pode-se proceder fazendo a decomposição em valores singulares desta como mostrado na Fig.(5)

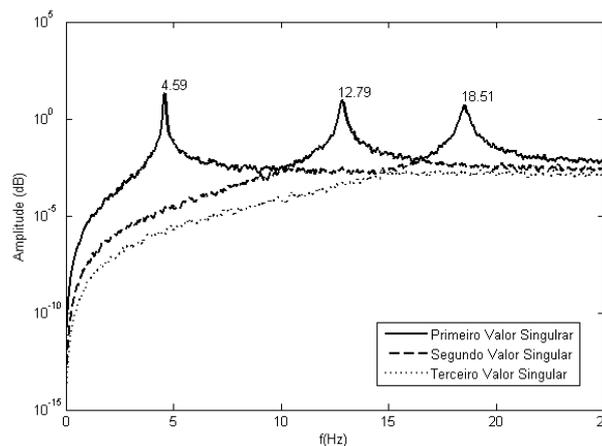


Figura 5. Decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral

Pode-se observar pelo espectro de valores singulares que os picos de ressonância são os mesmos identificados no espectro normalizado médio.

Os modos de vibração podem ser identificados a partir do primeiro vetor singular utilizando um conceito parecido com o que foi aplicado para as funções de transferência no Método de Seleção Picos. A partir do primeiro vetor singular que é uma função complexa são identificados os valores de amplitude para as frequências dos picos de ressonância do primeiro valor singular, estes valores de amplitude são valores de amplitude dos modos de vibração. O

sentido da amplitude é dado pela fase do primeiro vetor singular, se a fase é zero o sinal da amplitude é positivo e se a fase é 180 o sinal da amplitude é negativo. Os modos identificados estão apresentados na Fig.(6).

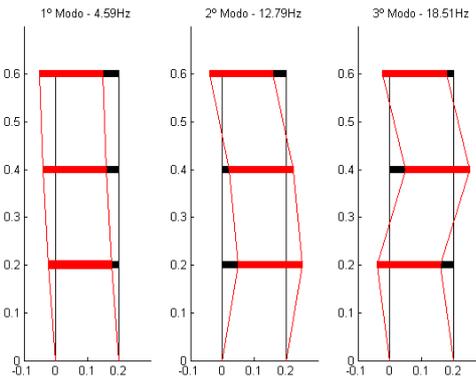


Figura 6. Modos de Vibração obtidos pelo Método da Decomposição

A fim de se obter as frequências naturais ajustadas e as taxas de amortecimento, são encontradas as funções de densidade espectral dos osciladores de um grau de liberdade, utilizando o conceito de coeficientes MAC como explicado na seção 2.2. Neste caso foi adotado um coeficiente MAC de 0.99. Os osciladores de um grau de liberdade estão apresentados na Fig.(7) pela linha mais grossa.

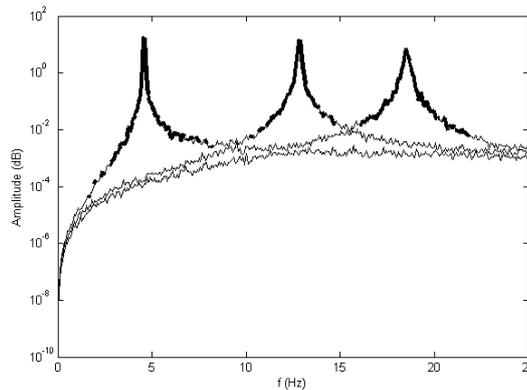


Figura 7. Decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral com os osciladores de um grau de liberdade

As taxas de amortecimento podem ser identificadas transformando as funções de densidade espectral dos osciladores de um grau de liberdade para o domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier, encontrando-se assim as funções de autocorrelação. A partir do conceito do decremento logarítmico, as taxas de amortecimento podem ser identificadas pela Eq.(10). O decremento logarítmico foi identificado pela inclinação da reta ajustada, considerando apenas os pontos mais relevantes, do logaritmo de todos os máximos e mínimos da função de autocorrelação pelo número de semi-ciclos. A Fig.(8) mostra as funções de autocorrelação dos três osciladores de um grau de liberdade nos quais foram identificados todos os máximos e mínimos. E a Fig.(9) mostra a reta que ajusta o logaritmo de todos os máximos e mínimos das funções de autocorrelação dos 3 osciladores de um grau de liberdade.

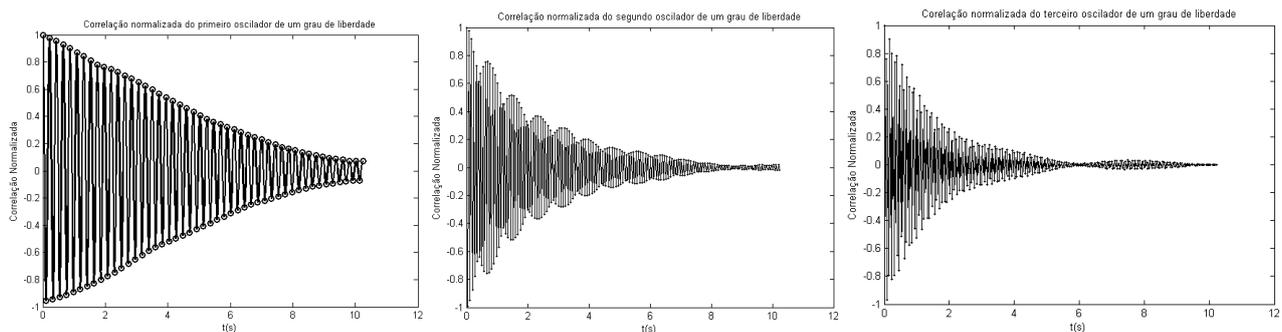
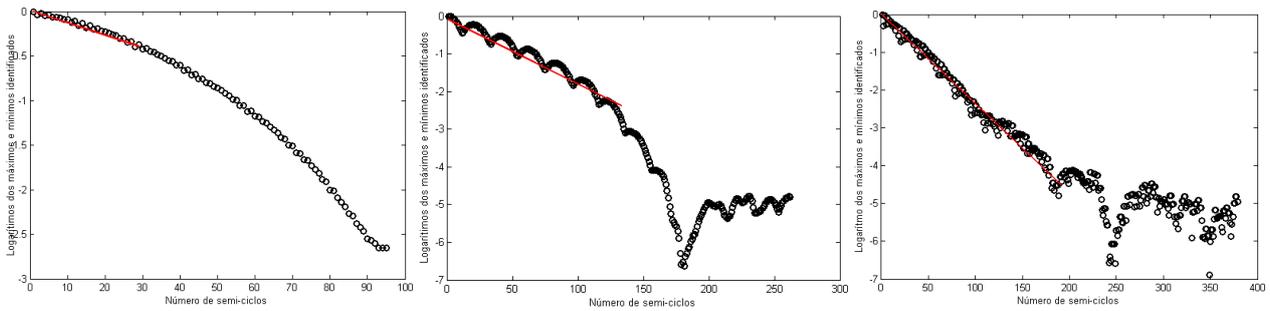


Figura 8. Função de autocorrelação dos osciladores de um grau de liberdade



**Figura 9. Ajuste do logaritmo de todos os máximos e mínimos das funções de autocorrelação para a identificação do decaimento logarítmico**

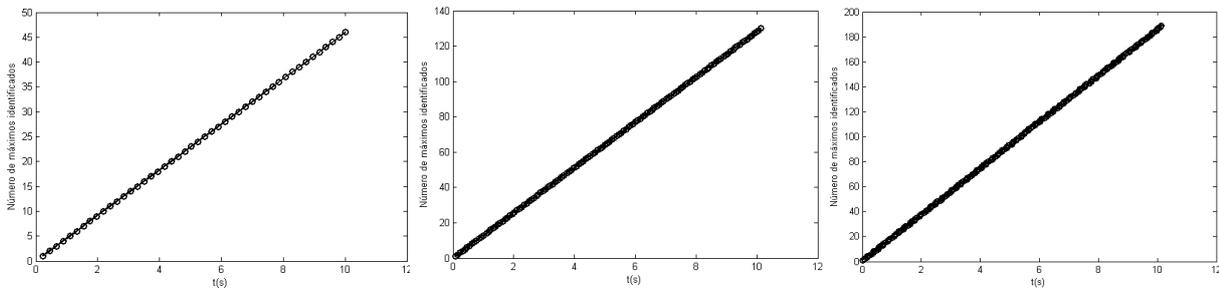
Na Tab.(3) estão apresentadas as taxas de amortecimento encontradas pelo Método da Decomposição no Domínio da Frequência.

**Tabela 3. Taxas de Amortecimento obtidas através do Método da Decomposição no Domínio da Frequência**

	Teórico (%)	Mendes e Oliveira (2008) (%)	Sem ruído (%)	10% ruído (%)	20% ruído (%)
1º Modo	0.23	0.23	0.26	0.26	0.33
2º Modo	0.43	0.25	0.24	0.28	0.20
3º Modo	0.6	0.36	0.32	0.24	0.38

Pode-se observar pela Tab.(3) que apesar de os resultados não acertarem completamente com os resultados teóricos apresentam-se melhores do que os resultados encontrados pelo Método de Seleção de Picos.

Para encontrar as frequências amortecidas pode-se utilizar um procedimento semelhante ao do amortecimento. Neste caso uma reta ajusta o número de máximos pelos instantes de tempo de ocorrência dos máximos, assim a inclinação desta reta é a frequência ajustada como mostrado na Fig.(10). Para se obter as frequências naturais utiliza-se a Eq(11), em que a taxa de amortecimento é a previamente calculada.



**Figura 10. Ajuste do número de máximos identificados pelos instantes de tempo em que ocorrem**

Na Tab.(4) estão apresentadas as frequências encontradas pelo Método da Decomposição no Domínio da Frequência. Observa-se que foram obtidos resultados satisfatórios e que estes praticamente não foram afetados devido a incorporação de ruído nos sinais analisados.

**Tabela 4. Frequências ajustadas obtidas através do Método da Decomposição no Domínio da Frequência**

	Teórico (Hz)	Mendes e Oliveira (2008)	Sem ruído (Hz)	10% ruído (Hz)	20% ruído (Hz)
1º Modo	4.57	4.59	4.58	4.58	4.58
2º Modo	12.81	12.79	12.72	12.82	12.86
3º Modo	18.51	18.55	18.56	18.59	18.50

## 5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentada a teoria, bem como a implementação de dois métodos de identificação modal baseados apenas nas respostas da estrutura. Através de um exemplo de pórtico plano em que as respostas foram simuladas por modelo de espaço de estado. O Método de Seleção de Picos e o Método da Decomposição no Domínio da Freqüência, ambos os métodos se baseiam na utilização das densidades espectrais de potência das respostas em aceleração.

Os modos de vibração, as freqüências naturais e as taxas de amortecimento foram obtidas através dos métodos de identificação modal e posteriormente foram comparados com os valores calculados analiticamente.

Pode-se então concluir que as rotinas implementadas para os dois métodos foram bastante confiáveis, pois apresentaram valores muito próximos aos valores encontrados analiticamente, devendo a partir de então serem testadas com valores de ensaios reais de vibração para uma avaliação mais realística.

## 6. REFERÊNCIAS

- Allemang, R., 2003, "The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse, Journal of Sound and Vibration, August".
- Brincker, R., Zhang, L., and Andersen, P., 2000 "Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition," Proc. 18th Int. Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida
- Brincker, R., Ventura, C. E., Andersen, P., 2001, "Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition", In: Proceedings of the International Modal Analysis Conference – XIX IMAC.
- Clough, R.W., Penzien, J., 1993, Dynamics of Structures, 2 ed. McGraw-Hill.
- Felber, A.J., 1993, "Development of a Hybrid Bridge Evaluation System", Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Vancouver, Canada
- Gawronski, W.K, 2004, "Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures", Springer-Verlag, New York
- Mendes, P., Oliveira, S., 2008, "Análise Dinâmica de Estruturas – Utilização Integrada de Modelos de Identificação Modal e Modelos de Elementos Finitos", Lisboa, Portugal
- Peeters, B., Ventura, C. E., 2003, "Comparative Study of Modal Analysis Techniques for Bridge Dynamic Characteristics", Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 17(5), pp.965-988.
- Sardinha, I. B.; Veloso, L. A. C. M.; Amador, S. D. R., 2006, "Monitoração de Estruturas para Identificação de Parâmetros Modais", Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# IDENTIFICATION OF MODAL PARAMETERS OF STRUCTURES USING METHODS BASED ON FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION

Jair Gonçalves de Oliveira Borges, [jair.borges@uenf](mailto:jair.borges@uenf)<sup>1</sup>

Patrícia Habib Hallak, [phallak@uenf.br](mailto:phallak@uenf.br)<sup>1</sup>

Guilherme Chagas Cordeiro, [gcc@uenf.br](mailto:gcc@uenf.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, , Laboratory of Civil Engineering, Av. Alberto Lamego, 2000, Parque Califórnia, Campos dos Goytacazes, RJ, Brasil, CEP: 28013-612.

**Abstract:** *The Structural Engineering deal nowadays with different challenges. First, structures have been in service in a long time and, secondly, modern structures, slender and with complex architectural designs. In addition, major equipment and machinery must work with increasing speed. So, techniques are increasingly used to perform with as many details as possible all kinds of structural systems. Such techniques aim to reproduce models that are able to represent not only the static behavior of the structure, but also the dynamic behavior. The identification of modal parameters, which are natural frequencies, damping rates and mode shapes, can be done analytically, by Finite Element Method, or experimentally by Experimental Modal Analysis. In this context, the present work proposes the study and the implementation of two modal identification methods, the Peak Picking Method (PP) and the Frequency Domain Decomposition (FDD) which are output-only methods. In order to demonstrate the efficiency of these methods, an example is evaluated where the responses are simulated using state space models*

**Keywords:** *modal identification, frequency domain decomposition, dynamics of structures, state-space models*