

## **SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA OS PROBLEMAS DE BURGERS E BUCKLEY-LEVERETT: UMA COMPARAÇÃO DO MÉTODO COMPOSTO LWLF-4 COM OS MÉTODOS TVD'S COM LIMITADORES DE FLUXO**

**Barbosa N.M., nmbarbosa@iprj.uerj.br**  
**Nélio Henderson, nelio@iprj.uerj.br**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, 28630-050, Nova Friburgo, RJ, Brasil

**Resumo:** *O presente trabalho foi motivado pelo fato de que um dos maiores desafios na simulação da recuperação secundária de petróleo reside na captura das ondas de choque, inerentes às não linearidades do modelo usado para descrever o processo de injeção de água. Objetivando a captura desse fenômeno físico, aqui testa-se um esquema de diferenças finitas composto, denominado LWLF-4. Essa técnica foi introduzido recentemente na literatura de métodos numéricos por Liska e Wendroff (1998). A idéia por trás do método composto é relativamente simples. De fato, essencialmente, essa técnica emprega quatro passos do esquema clássico de Lax-Wendroff (LW) seguidos de uma aplicação de outro método clássico, o método de Lax-Friedrichs (LF). Dessa forma, o esquema LF, que gera soluções satisfazendo o princípio da entropia, funciona como um filtro para o método LW, o qual é de segunda ordem no espaço.*

*Duas diferentes leis de conservação foram consideradas: a equação de Burgers e a de Buckley-Leverett. Essa última é comumente utilizada na modelagem do escoamento imiscível água-óleo em meios porosos, onde os fluidos são incompressíveis e os efeitos de pressão capilar são desprezados. As soluções numéricas para o problema de Cauchy para essas duas equações hiperbólicas não lineares (geradas pelo método LWLF-4) foram comparadas com soluções analíticas e com soluções obtidas por outros esquemas numéricos. Dentre tais soluções numéricas, destacamos aqui algumas computadas com métodos do tipo TVD (Total Variation Diminishing), que utilizam limitadores de fluxo.*

*Como resultado principal, foi observado que o método LWLF-4, com restrições no passo de tempo impostas pela condição CFL, é capaz de capturar ondas de choque que representam soluções descontínuas das equações diferenciais parciais, além de descrever de forma apropriada soluções que constituem ondas de rarefação, eliminando dessa forma as bem conhecidas oscilações espúrias e soluções excessivamente difusivas, típicas de muitos esquemas de diferenças finitas.*

**Palavras-chave:** *Equação hiperbólica não linear, Método TVD, Esquema composto, Método LWLF-4.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Durante a extração de petróleo, para aumentar a produção de óleo, água é injetada no reservatório através de poços específicos denominados de poços de injeção. Em geral, esse processo de recuperação provoca um escoamento imiscível do tipo água-óleo, que inicialmente desloca o óleo na direção de outros poços destinados à extração de fluidos, denominados de poços de produção, veja a Fig. 1.

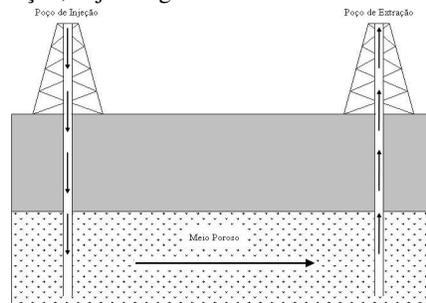


Figura 1: Escoamento de Petróleo em meios porosos

Para simular esse processo de engenharia são resolvidas equações diferenciais parciais que constituem o chamado modelo imiscível para escoamentos bifásicos em meios porosos. Essencialmente, esse modelo é formado pelas equações de conservação de massa das fases, água e óleo, juntamente com a conhecida lei de Darcy, veja Peaceman (1977) e Aziz (1979), por exemplo.

Desprezando-se os efeitos da difusão física, oriunda da pressão capilar, e considerando-se um modelo não linear para o chamado fluxo fracionário, a equação de conservação de massa da fase água se reduz a uma lei de conservação hiperbólica não linear. Na sua forma adimensional, essa lei de conservação pode ser escrita como segue:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

onde  $S = S(x, t)$  é a saturação da fase água e a função  $f = f(S(x, t))$  representa o fluxo fracionário, a qual, além de não linear, pode não ser convexa. Na Eq. (1), os parâmetros  $x$  e  $t$  denotam, respectivamente, as variáveis espacial e temporal nas suas formas adimensionais.

No problema de Buckley e Leverett (1942), formulado para estudar o deslocamento da frente de água durante o processo de recuperação secundária de petróleo, geralmente utiliza-se na descrição do fluxo fracionário o que se costuma chamar de modelo de Stone (1970), dado por

$$f(S) = \frac{S^2}{S^2 + c(1-S)^2}, \quad (2)$$

onde  $c = \mu_{\text{água}} / \mu_{\text{óleo}}$  é a razão de viscosidade entre o fluido molhante (água) e o não molhante (óleo). O gráfico dessa função não convexa encontra-se esboçado na Fig. 2. Aqui, a Eq. (1) com o fluxo  $f(S)$  descrito pela Eq. (2) será denominada equação de Buckley-Leverett.

A conhecida equação de Burgers pode também ser obtida da Eq. (1). Para isso, considera-se um fluxo fracionário convexo (veja a Fig. 3), definido pela seguinte função

$$f(S) = \frac{S^2}{2}. \quad (3)$$

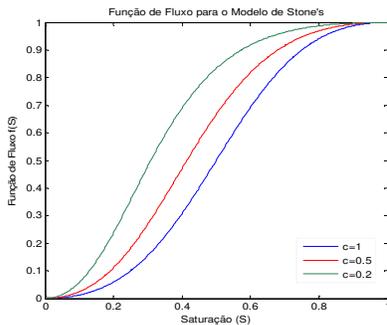


Figura 2: Gráfico da função de fluxo para o problema Buckley-Leverett.

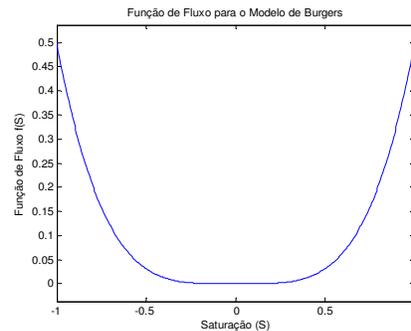


Figura 3: Gráfico da função de fluxo para o problema de Burgers.

Usando a equação de Buckley-Leverett, Welge (1952) desenvolveu uma solução analítica para a chamada saturação de choque. Mais precisamente, ele mostrou como determinar a saturação no ponto de choque a partir da geometria da função de fluxo fracionário. O trabalho de Welge (1952) fornece a seguinte relação:

$$S^* = \frac{f(S^*)}{\frac{df(S^*)}{dS}}. \quad (4)$$

Na Eq. (4) o parâmetro  $S^*$  denota a saturação de choque, também conhecida como saturação de corte.

Para o modelo de Stone, pode-se mostrar facilmente que

$$\frac{df(S)}{dS} = \frac{2cS(1-S)}{[S^2 + c(1-S)^2]^2}. \quad (5)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (4) tem-se o valor da saturação de choque, o qual depende apenas da razão de viscosidade, isto é,

$$S^* = \sqrt{\frac{c}{1+c}}. \quad (6)$$

A solução de Welge é usada no presente trabalho para ilustrar soluções analíticas para o problema de Buckley-Leverett com condições iniciais descontínuas, as quais serão descritas na próxima seção.

Para a equação de Burgers, se considera aqui soluções analíticas de dois problemas de Cauchy com diferentes dados iniciais. O primeiro problema exemplo apresenta a seguinte condição inicial

$$S(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (7)$$

A Fig. 4 esboça a função de fluxo definida na região de interesse deste primeiro exemplo, enfatizando a localização de um choque. Para este problema, as retas características são ilustradas na Fig. 5, onde se observa a formação de choque, típica de uma solução descontínua. Tal solução analítica descontínua se encontra resumida na Eq. (8).

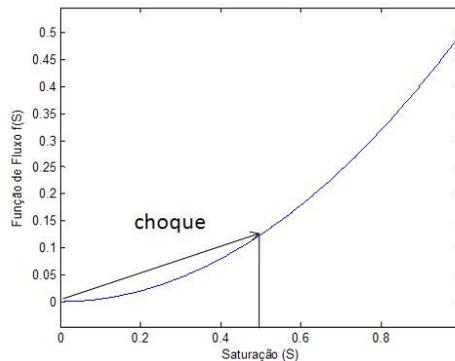


Figura 4: Função de fluxo fracionário em uma região de interesse.

$$S(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } t > 0 \text{ e } x < \frac{1}{4}t \\ 0, & \text{se } t > 0 \text{ e } x > \frac{1}{4}t \end{cases} \quad (8)$$

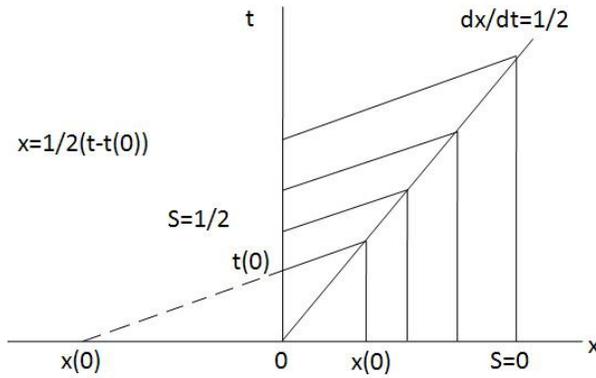


Figura 5: Retas características para o problema de Burgers com dados iniciais indicados na Eq. (7).

O segundo exemplo teste para a equação de Burgers utiliza a seguinte condição inicial:

$$S(x,0) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

As retas características para este problema são mostradas na Fig. 6, onde se observa um leque de rarefação seguido de uma onda de choque. A solução analítica é dada por

$$S(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{t}, & -1 < x < \frac{t}{2}-1 \\ \frac{1}{2}, & \frac{t}{2}-1 < x < \frac{1}{4}t \\ 0, & \frac{1}{4}t < x \end{cases} \quad (10)$$

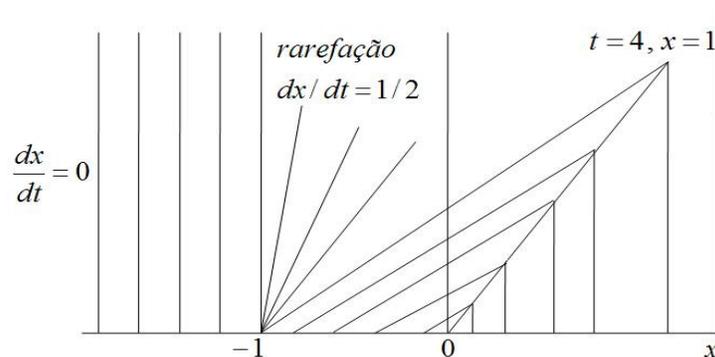


Figura 6 – Retas características para o problema de Burgers com condição inicial dada na Eq. (9).

O objetivo principal deste trabalho é testar o esquema composto LWLF-4 na resolução numérica das leis de conservação hiperbólicas não lineares descritas acima, visando à captura de ondas de choque, provavelmente seguidas por uma rarefação. Comparações são feitas com métodos do tipo TVD com limitadores de fluxo, tanto para o problema de Buckley-Leverett como para o de Burgers.

## 2. METODOLOGIA

Nesta seção são descritos os esquemas numéricos utilizados no presente trabalho. Tais esquemas são apresentados em consonância com o problema de Buckley-Leverett possuindo as seguintes condições iniciais descontínuas:

$$\begin{cases} S_t + (f(S))_x = 0; & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ S(x,0) = \begin{cases} S^L & \text{se } x \leq 0 \\ S^R & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

### 2.1. A Grade de Discretização e a Formulação Conservativa

Considera-se o domínio espacial dividido em células denotadas por  $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Assim, obtém-se uma malha uniforme de comprimento  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  para cada célula. O domínio temporal é discretizado utilizando-se passos de tempo constantes, denotados por  $\Delta t$ , de modo que  $t_n = n\Delta t$  representa o nível de tempo  $n$ . Nesta discretização,  $x_i$  é o centro da  $i$ -ésima célula e os bordos do intervalo  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  são os seus vértices.

O valor médio de  $S(x,t)$  em  $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  no instante de tempo  $t = t_n$  é dado por

$$S_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S(x, t_n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Omega_i} S(x, t_n) dx \quad (12)$$

A lei de conservação escalar restrita ao intervalo  $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} S(x, t) dx = F(S(x_{i-1/2}, t)) - F(S(x_{i+1/2}, t)) \quad (13)$$

Integrando a Eq.(13) ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$ , obtém-se

$$\int_{\Omega_i} S(x, t_{n+1}) dx - \int_{\Omega_i} S(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(S(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(S(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (14)$$

Dividindo a Eq. (14) por  $\Delta x$  e utilizando a definição descrita na Eq.(12), tem-se

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(S(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(S(x_{i-1/2}, t)) dt \right] \quad (15)$$

Defini-se o fluxo médio no intervalo de tempo  $\Delta t$  (para um determinado bordo  $x_{i\pm 1/2}$ ) como sendo

$$\Xi_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(S(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (16)$$

Combinando as Eqs. (15) e (16), obtém-se o que se costuma chamar de forma geral de um esquema (explícito) conservativo para o problema mostrado na Eq. (11), dado por:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\Xi_{i+1/2}^n - \Xi_{i-1/2}^n] \quad (17)$$

### 2.2. Os Métodos Numéricos de Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff

O método de Lax-Friedrichs (LF) é um esquema conservativo clássico que possui precisão numérica de primeira ordem no espaço, veja Thomas (1999) e Leveque (2002), por exemplo. Esse método costuma gerar solução numérica

com comportamento difusivo, o qual tende a ser mitigado quando o número de Courant é minimizado. Esse esquema pode ser escrito na seguinte forma:

$$S_i^{n+1} = \frac{1}{2}(S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{i-1}^n - F_{i+1}^n], \quad (18)$$

onde o fluxo numérico associado à Eq. (18) é

$$\Xi_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_i^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [S_i^n - S_{i+1}^n]. \quad (19)$$

O método de Lax-Wendroff (LW) é um esquema conservativo com precisão de segunda ordem no espaço, veja novamente Thomas (1999) e Leveque (2002), por exemplo. Tal método é muito utilizado em problemas de escoamentos em canais, desde que as ondas de choque não sejam frequentes. Para problemas cujas soluções apresentam severas descontinuidades, o método LW introduz oscilações espúrias nas proximidades do choque, tais oscilações podem ser reduzidas se o número de Courant utilizado não for muito distante da unidade. O fluxo numérico relacionado com esse esquema é dado por

$$\Xi_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_i^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{i+1/2}^n [S_i^n - S_{i+1}^n], \quad (20)$$

onde  $A_{i+1/2}^n \equiv (F')_{i+1/2}^n$ .

Costuma-se empregar a seguinte aproximação:

$$A_{i+1/2}^n \equiv F' \left( \frac{S_{i+1}^n - S_i^n}{2} \right). \quad (21)$$

Dessa forma, o esquema LW pode ser escrito como

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n + F_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[ A_{i+1/2}^n (F_{i+1}^n - F_i^n) - A_{i-1/2}^n (F_i^n - F_{i-1}^n) \right] \quad (22)$$

As Figs. 7 e 9 ilustram soluções numéricas do problema mostrado na Eq.(11), obtidas com os métodos LF e LW para diferentes tempos e diferentes razões de viscosidade. Foram utilizados os valores de saturação iniciais  $S^L = 0.5$  e  $S^R = 0.0$ , onde  $S^L$  faz o papel da saturação da água no ponto de injeção, e  $S^R$  representa essa saturação no ponto de extração.

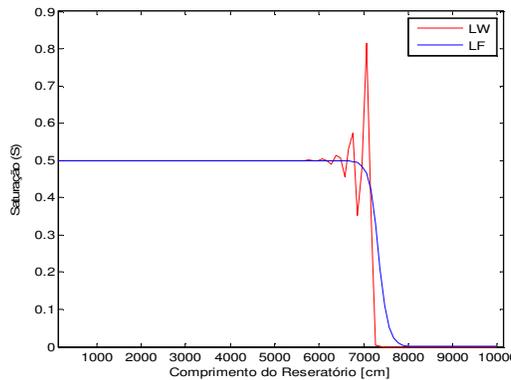


Figura 7: Soluções geradas pelos métodos LW e LF para o problema de Buckley-Leverett em  $t = 360$  com uma grande formada por 100 células, onde  $c = 1$  e  $\Delta t = 20$ .

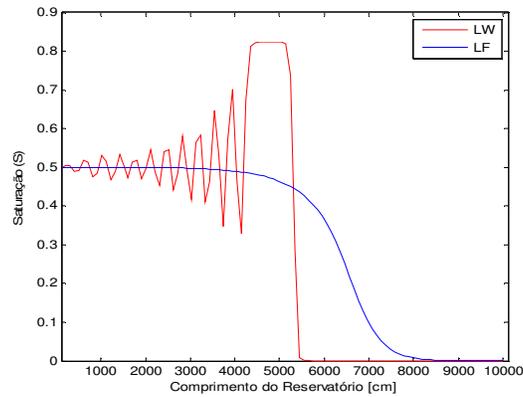


Figura 8: Soluções geradas pelos métodos LW e LF para o problema de Buckley-Leverett em  $t = 900$  com uma grande formada por 100 células, onde  $c = 0.5$  e  $\Delta t = 5$ .

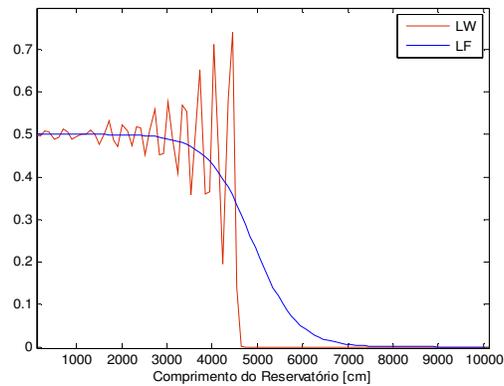


Figura 9: Soluções geradas pelos métodos LW e LF para o problema de Buckley-Leverett em  $t = 900$ , com uma grande formada por 100 células, onde  $c = 1$  e  $\Delta t = 20$ .

Os resultados ilustrados nas Figs. 7 - 9 mostram claramente as deficiências dessas duas formulações. De fato, o método de Lax-Wendroff mostrou-se oscilatório nas proximidades do choque e o método de Lax-Friedrichs apresentou difusão numérica. Como era de se esperar, as soluções são bem distintas e variam quando se altera a razão de viscosidade.

### 2.3. Esquema Composto LWLF-4

O esquema composto LWLF-4 é uma estratégia numérica elaborada recentemente por Liska e Wendroff (1998), a qual tem como objetivo obter uma solução mais acurada e apropriada para a captura de choques, eliminando as oscilações espúrias do esquema LW e a difusão numérica do método LF.

O LWLF-4 é obtido de uma composição dos esquemas de Lax-Wendroff e Lax-Friedrichs. Para essa composição, o método de Lax-Wendroff é modificado para contornar a exigência do cálculo da derivada da função de fluxo em cada passo de tempo, veja a Eq. (21). A tal modificação é conhecida como o método de Lax-Wendroff em duas etapas. A primeira etapa desse método modificado é de predição, sendo dada por

$$S_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (S_i^n + S_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(S_i^n) - f(S_{i+1}^n)]. \quad (23)$$

A segunda etapa é de correção e tem a forma do método das diferenças centradas, como se vê na equação abaixo:

$$S_i^{n+1} = S_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(S_{i-1/2}^{n+1/2}) - F(S_{i+1/2}^{n+1/2})]. \quad (24)$$

Nota-se que esse método modificado utiliza a estratégia das grades deslocadas, de forma que os valores da saturação nos bordos das células nos tempos médios são apenas cálculos intermediários, pois os valores efetivos da saturação são obtidos em cada nó da grade no tempo  $n+1$ .

O método composto LWLF-4 de Liska e Wendroff (1998) utiliza quatro passos do esquema de Lax-Wendroff (em duas etapas) seguidos de uma aplicação do método de Lax-Friedrichs, o qual funciona como um filtro para o esquema de segunda ordem aplicado antes. Nessa composição, o esquema de Lax-Friedrichs também trabalha em duas etapas. A primeira é a mesma mostrada na Eq. (23) e a segunda é escrita como segue:

$$S_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2} (S_{i+1/2}^{n+1/2} + S_{i+3/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(S_{i+1/2}^n) - F(S_{i+3/2}^n)] . \quad (25)$$

Em seguida, para tornar mais claro o emprego de cada etapa do esquema composto, denota-se por  $L_W$  o operador que define o método de Lax-Wendroff em duas etapas e por  $L_F$  o operador do método de Lax-Friedrichs, também em duas etapas. Assim, de uma forma geral, o operador  $\Psi_k$  denotará  $k-1$  etapas de  $L_W$  seguidas por uma aplicação de  $L_F$ . Usando essa notação, a estratégia geral do esquema composto LWLF-k de Liska e Wendroff pode agora ser descrita como

$$\Psi_k = L_F \circ \underbrace{L_W \circ \dots \circ L_W}_{(k-1) \text{ vezes}} . \quad (26)$$

Portanto, a solução para o ponto que se encontra no nó  $i$ , no nível de tempo  $n+1$ , é dada por

$$S_i^{n+1} = \Psi_k S_i^n . \quad (27)$$

Baseados em testes computacionais, Liska e Wendroff (1998) sugeriram o valor  $k=4$ , daí vem a denominação LWLF-4 utilizada aqui e também no trabalho original de Liska e Wendroff.

Deve ser enfatizado que todos os resultados gerados com os esquemas empregados no presente trabalho respeitaram rigorosamente a condição CFL descrita pela seguinte relação, veja Thomas (1999) e Leveque (2002):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |f'_i| \leq 1 . \quad (28)$$

#### 2.4. Métodos do Tipo TVD com Limitadores de Fluxo

Nesta seção resumem-se alguns métodos do tipo TVD com limitadores de fluxo, conforme Sweby (1984), Blunt e Rubin (1992), Thomas (1999) e Leveque (2002).

Esses métodos também foram desenvolvidos com o objetivo de evitar oscilações espúrias tipicamente encontradas nas soluções numéricas geradas pelos esquemas clássicos. Tais métodos obedecem à seguinte discretização,

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} + \frac{f(S_{i+1/2}^n) - f(S_{i-1/2}^n)}{\Delta x} = 0 . \quad (29)$$

Nota-se que a discretização do termo convectivo  $\partial(f_w)/\partial x$  foi obtida através de uma simples diferença centrada de segunda ordem. O cálculo da saturação nos pontos médios,  $S_{i\pm 1/2}^n$ , representa o grande diferencial desses métodos. Tais valores são obtidos por

$$S_{i+1/2}^n = S_i^n + \frac{\phi(r_{i+1/2}^n)}{2} (S_{i+1}^n - S_i^n) , \quad (30)$$

onde a função  $\phi$  (denominada de limitador de fluxo) depende de um parâmetro  $r_{i+1/2}^n$ . Esse parâmetro mede a razão de inclinação da saturação nos bordos da célula  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , como segue

$$r_{i+1/2}^n = \text{Max} \left\{ 0, \frac{S_i^n - S_{i-1}^n}{S_{i+1}^n - S_i^n} \right\} . \quad (31)$$

Se  $S$  é suave, espera-se que o parâmetro  $r_{i+1/2}^n$  se aproxime da unidade, por outro lado, na presença de uma descontinuidade essa razão deve se afastar do valor unitário. Assim, usando a seguinte notação

$$F_{i+1/2}^n \equiv F(S_{i+1/2}^n) = F\left(S_i^n + \frac{\varphi(r_{i+1/2}^n)}{2}(S_{i+1}^n - S_i^n)\right), \text{ a partir das Eqs. (29) e (30), obtém-se o esquema:}$$

$$S_i^{n+1} = S_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1/2}^n - F_{i+1/2}^n). \quad (32)$$

Diferentes opções para a função  $\varphi$  definem uma família de esquemas do tipo limitadores de fluxo. Assim, de acordo com Sweby (1984), um membro dessa família difere de outro pela escolha de  $\varphi(r)$ . A Tabela 1 mostra alguns limitadores de fluxo clássicos, veja Thomas (1999).

**Tabela 1. Alguns limitadores de fluxo.**

Função $\varphi(r)$	Denominação
$\varphi(r) = \max\{0, \min(1, r)\}$	MINMOD
$\varphi(r) = \max\{0, \min(2, r)\}$	OSHER
$\varphi(r) = \max\{0, \min(2r, (r+1)/2, 2)\}$	MUSCL
$\varphi(r) = \max\{0, \min(1, 2r), \min(2, r)\}$	SUPERBEE

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Resultados Obtidos com o Esquema Composto LWLF-4

Inicialmente, considerou-se o problema de Buckley-Leverett. Para esse problema, conforme a Eq. (11), se tomou os valores  $S^L = 1$  e  $S^R = 0$ . As soluções numéricas obtidas foram comparadas com as soluções de Welge (1952), para as saturações de choque. As Figs. 10-13 mostram os resultados numéricos gerados pelo esquema LWLF-4 para o problema de Buckley-Leverett em diferentes instantes de tempo.

As Figs. 10 e 11 ilustram o efeito do refinamento da grade. De fato, a Fig. 10 foi gerada com uma grade relativamente grossa, com 150 células e passo de tempo igual a 10. Por outro lado, a Fig.11 apresenta soluções numéricas mais acuradas, obtidas com uma grade mais fina constituída de 250 células e  $\Delta t = 7$ . Todos os resultados mostrados nessas duas figuras foram obtidos com razão de viscosidade igual à unidade, fornecendo uma saturação de choque de Welge igual a 0.707.

Em seguida, com uma grade mais fina, ilustrou-se o efeito da razão de viscosidade sobre a solução do problema de Buckley-Leverett. Como se pode observar nas Figs. 12-13, a saturação de choque decresce à medida que a razão de viscosidade diminui. Em outras palavras, quanto maior a viscosidade do óleo, com relação à da água, menor será o valor de saturação da água relacionado com o choque. Para  $c = 0.5$  obteve-se uma saturação de choque igual a 0.577. Para  $c = 0.1$  essa saturação assumiu o valor 0.302.

Passaremos a descrever os resultados obtidos na resolução da equação de Burges com o esquema LWLF-4, para os dois exemplos considerados acima. Enfatizamos que esses exemplos constituem testes desafiadores para qualquer esquema desenvolvido para capturar ondas de choques. Em vista disso, como veremos, soluções numéricas acuradas exigirão uma grade muito fina. Para atender essa exigência, consideramos passos de tempo suficientemente pequenos de modo que a condição CFL seja respeitada. As Figs. 14-16 mostram as soluções numéricas obtidas para o primeiro exemplo teste no instante 1.8, para três diferentes grades. Para efeito de comparação, tais figuras também exibem as soluções analíticas desses problemas. A Fig. 14 mostra claramente que a grade inicial com 150 blocos não é suficiente para descrever a solução desse problema de Burges. De fato, nesse caso o esquema numérico fornece uma solução extremamente difusiva, semelhante aquelas geradas pelo método LF. Conforme a Fig. 14, como era de se esperar esse fenômeno de difusão numérica pode ser minimizado com a utilização de uma grade com 350 blocos. De fato, a Fig. 16 mostra que método LWLF-4 é capaz de capturar o choque com uma grade formada de 450 blocos.

As Figs. 17-19 exibem as soluções analíticas e numéricas do segundo problema teste para a equação de Burges no instante igual a 3. Como mostrado na Fig. 6, a parte essencial da solução desse problema é uma rarefação seguida de uma onda de choque. Tal problema apresenta dificuldades maiores do que o anterior. Observando-se as Figs. 17-19, pode-se notar que soluções numéricas satisfatórias só foram obtidas a partir de uma grade com 800 blocos. Usando 1000 blocos, o esquema LWLF-4 foi capaz de gerar uma solução numérica bastante aceitável.

Em resumo, tais resultados numéricos mostraram-se satisfatórios para todos os tempos considerados. Como se pode ver, poucos pontos são observados nos saltos das soluções numéricas. Além disso, a difusão numérica do esquema composto é pequena, desde que uma grade suficientemente fina seja utilizada.

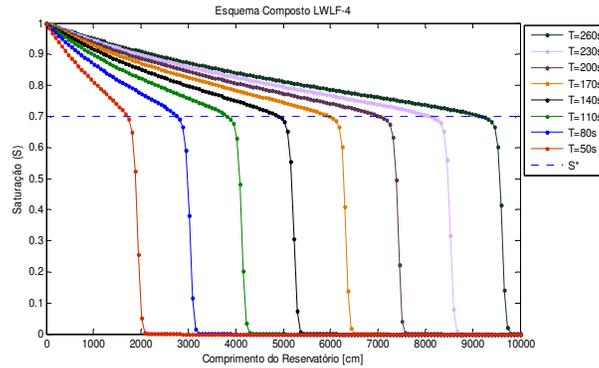


Figura 10. Solução do método LWLF-4 para o problema de Buckley-Leverett com  $c = 1$ , 150 células e  $\Delta t = 10$ .

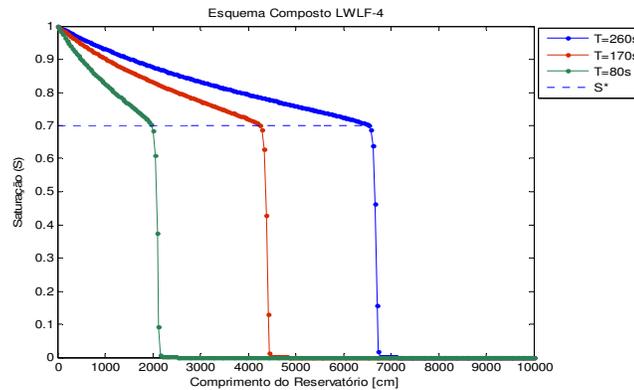


Figura 11. Solução do método LWLF-4 para o problema de Buckley-Leverett com  $c = 1$ , 250 células e  $\Delta t = 7$ .

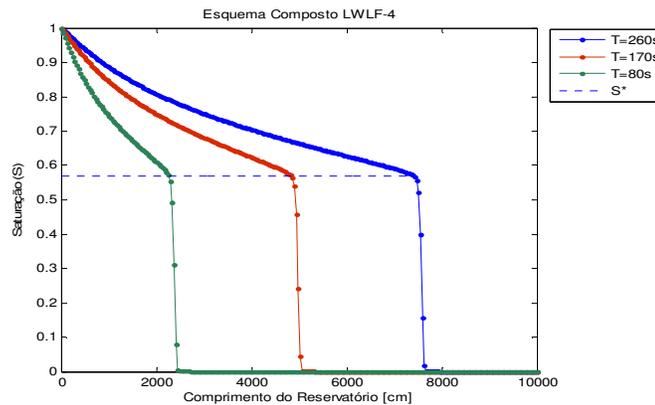


Figura 12. Solução do método LWLF-4 para o problema de Buckley-Leverett com  $c = 0,5$ , 250 células e  $\Delta t = 7$ .

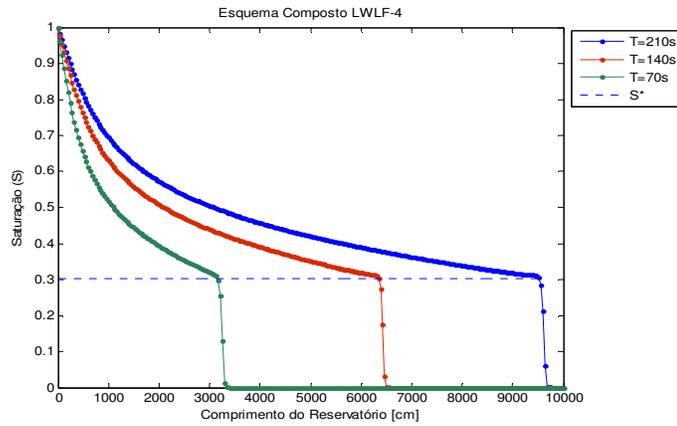


Figura 13. Solução do método LWLF-4 para o problema de Buckley-Leverett com  $c = 0.1$ , 250 células e  $\Delta t = 7$ .

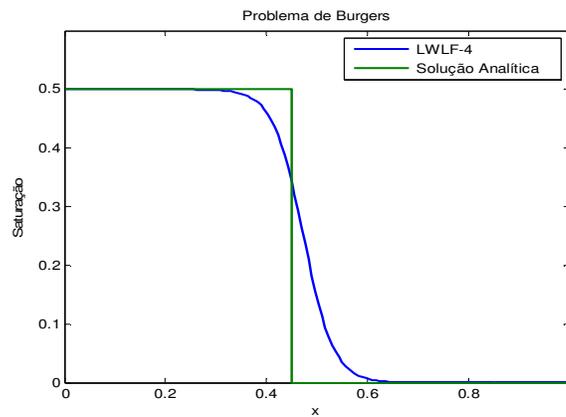


Figura 14. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do primeiro problema de Burgers para uma grade com 150 células, no instante 1.8.

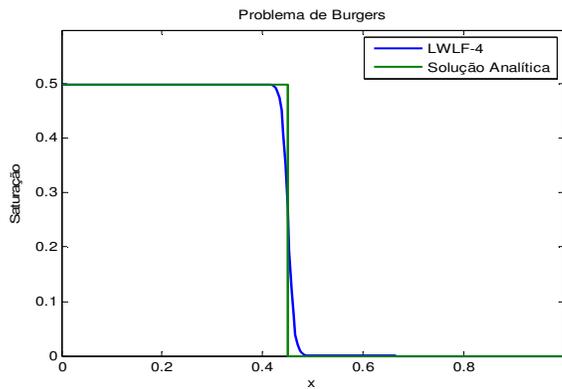


Figura 15. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do primeiro problema de Burgers para uma grade com 350 células, no instante 1.8.

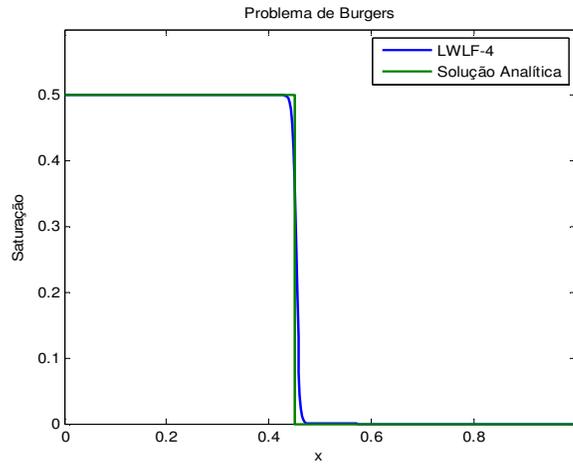


Figura 16. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do primeiro problema de Burgers para uma grade com 450 células, no instante 1.8.

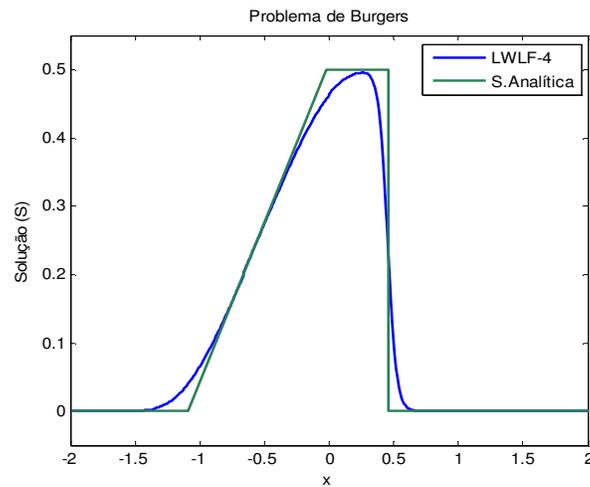


Figura 17. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do segundo Problema de Burgers para uma grade com 400 células, no instante igual a 3.

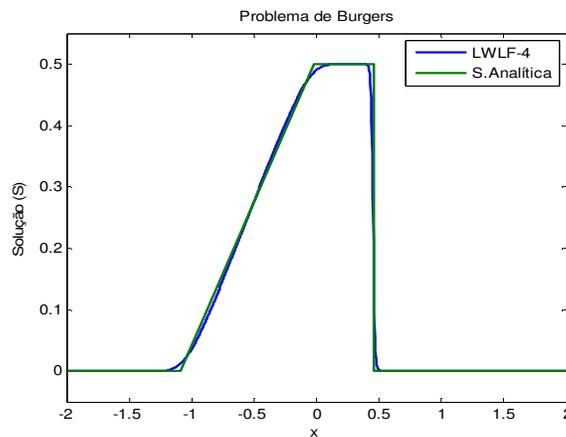


Figura 18. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do segundo problema de Burgers para uma grade com 800 células, no instante igual a 3.

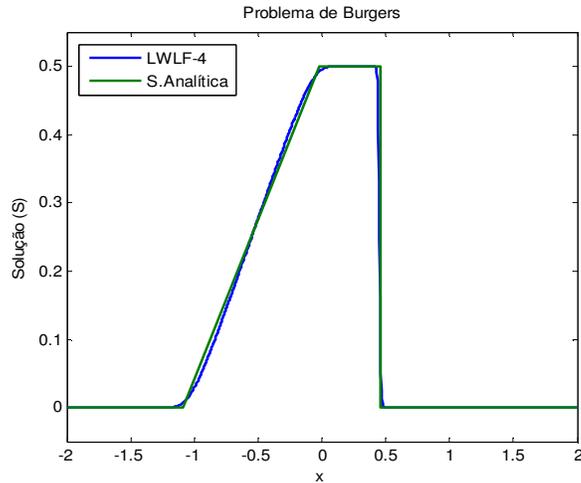


Figura 19. Comparação da solução gerada pelo método LWLF-4 com a solução analítica do segundo problema de Burgers para uma grade com 1000 células, no instante igual a 3.

### 3.2. Comparação do Método LWLF-4 com Métodos do Tipo TVD

Nesta seção, com o objetivo de comparar o método LWLF-4 com alguns métodos do tipo TVD, cujos limitadores de fluxo são mostrados na Tabela 1, aborda-se novamente a resolução da equação de Buckley-Leverett. Em vista disso, a solução analítica de Welge (1952) para a saturação de choque volta também a ser utilizada aqui.

Para todas as simulações, se considerou uma grade uniforme com 350 células, sendo  $\Delta x = 0.0028$ . A fim de satisfazer a condição CFL, utilizou-se um passo de tempo suficientemente pequeno,  $\Delta t = 0.0005$ .

Foram testados três limitadores de fluxo, os mais utilizados em problemas de petróleo: Superbee, Van Leer e Minmod.

As Figs. 20-22 comparam os resultados obtidos com os esquemas LWLF-4 e TVD-Superbee, para três diferentes valores da razão de viscosidade: 1, 0.5 e 0.1. Nota-se que em todos os casos a solução numérica gerada pelo método composto de Liska e Wendroff é superior aquela fornecida pelo esquema Superbee, principalmente próximo à descontinuidade, onde se observa claramente que esse método TVD, ao contrário do esquema LWLF-4, não foi capaz de reproduzir a saturação de choque de Welge, para uma grade com 350 blocos.

As Figs. 23 e 24 comparam as soluções do esquema composto com as do método TVD de Van Leer, para dois diferentes valores da razão de viscosidade, 1 e 0.1. Os resultados exibidos nas Figs. 23 e 24 mostram que o esquema LWLF-4 foi novamente superior a um método TVD. Apesar do esquema de Van Leer ter apresentado resultados melhores do que o método Superbee, a Fig. 24 deixa claro que esse esquema TVD também não foi capaz de capturar o valor da saturação de choque de Welge, pelo menos para a grade utilizada.

Por outro lado, como se pode observar nas Figs. 25 e 26, o limitador de fluxo Minmod apresentou solução compatível com a do método LWLF-4. Sendo mais robusto que os outros limitadores, o Minmod mostrou capacidade de capturar a solução analítica de Welge (1952), para uma grade com 350 blocos.

As Tabelas 2 e 3 mostram em detalhes os erros cometidos por cada esquema numérico considerado nesta análise. Os cálculos para os erros relativos mostrados nessas tabelas foram feitos usando-se a seguinte fórmula

$$\text{ERRO} = \left| \frac{S^* - S_{\text{Numérico}}}{S^*} \right|, \quad (33)$$

onde  $S^*$  é o valor analítico da saturação de choque de Welge e  $S_{\text{Numérico}}$  denota o valor da saturação no ponto de choque obtido por um dos métodos numéricos.

Os resultados contidos nas Tabelas 2 e 3 enfatizam novamente a superioridade do esquema LWLF-4, seguido do limitador Minmod.

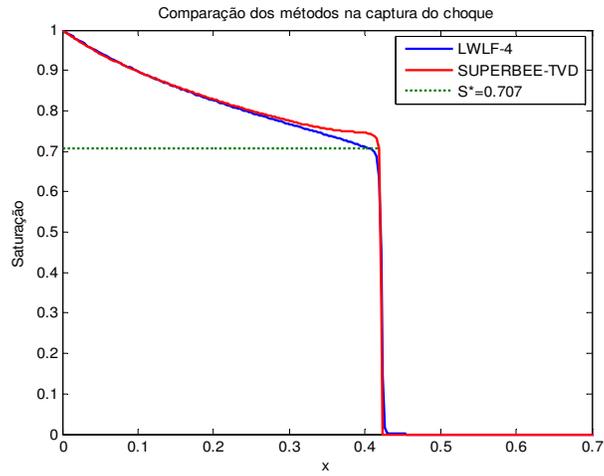


Figura 20. Comparação do método LWLF-4 com o método Superbee, para  $c = 1$ .

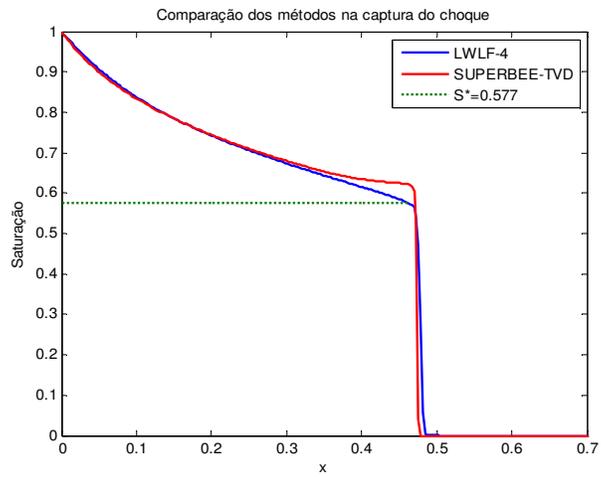


Figura 21. - Comparação do método LWLF-4 com método Superbee, para  $c = 0.5$ .

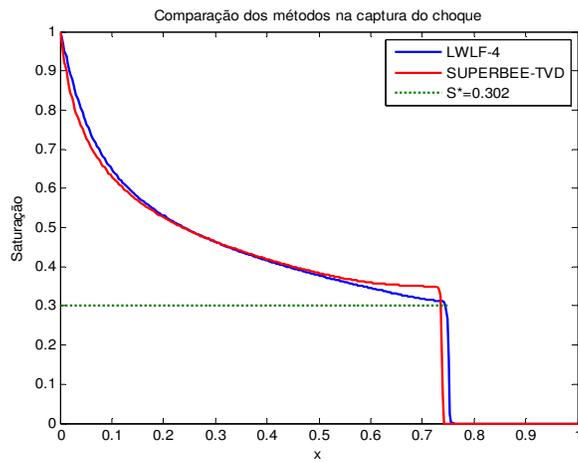


Figura 22. Comparação do método LWLF-4 com o método Superbee, para  $c = 0.1$ .

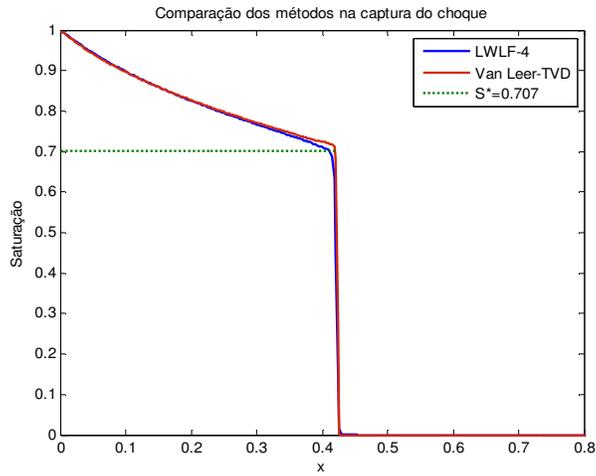


Figura 23. Comparação do método LWLF-4 com o método de Van Leer, para  $c = 1$ .

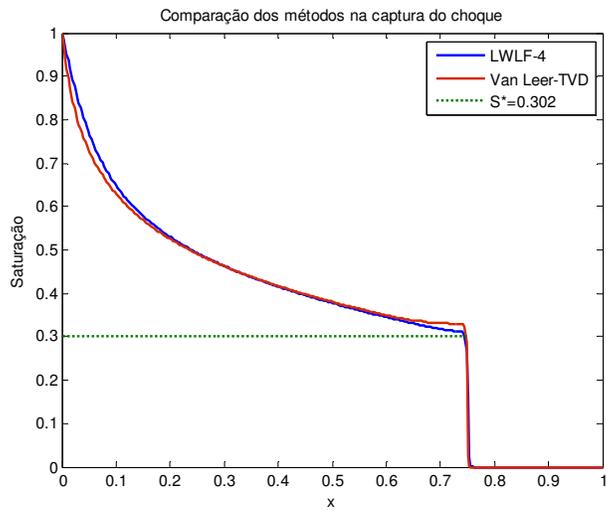


Figura 24. Comparação do método LWLF-4 com o método de Van Leer, para  $c = 0.1$ .

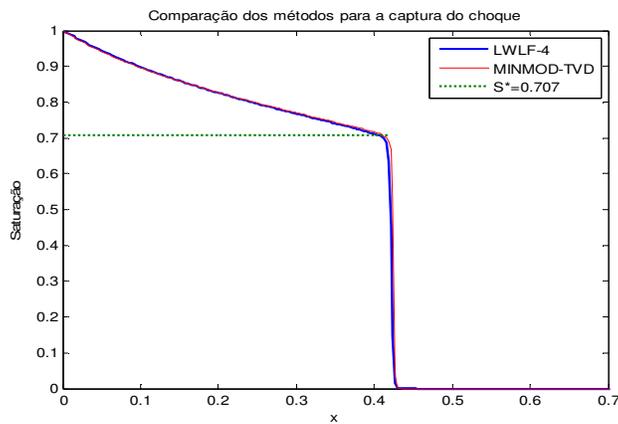


Figura 25. Comparação do método LWLF-4 com o método Minmod, para  $c = 1$ .

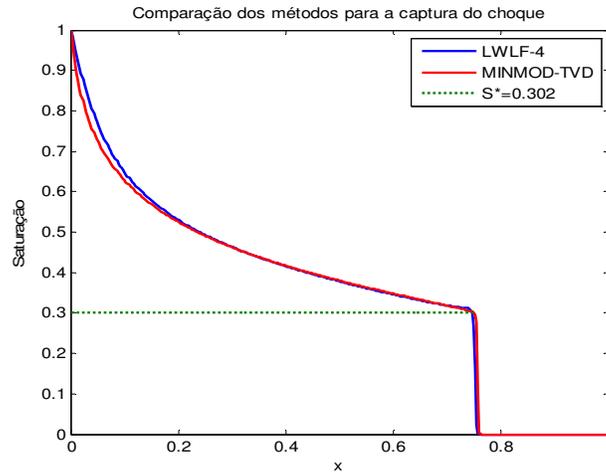


Figura 26. Comparação do método LWLF-4 com o método Minmod, para  $c = 0.1$ .

**Tabela 2. Valores da saturação no ponto de choque: comparações usando  $c=1$ .**

$c = 1$	$S^*$	ERRO[%]
LWLF - 4	0.7058	(-) 0.169
SUPERBEE	0.7451	(+) 5.4
VAN LEER	0.7185	(+) 1.63
MINMOD	0.7058	(-) 0.169

**Tabela 3. Valores da saturação no ponto de choque: comparações usando  $c=0.1$ .**

$c = 0.1$	$S^*$	ERRO[%]
LWLF - 4	0.308	(+) 1.98
SUPERBEE	0.3501	(+) 15.93
VAN LEER	0.3301	(+) 9.27
MINMOD	0.305	(+) 0.99

### 3.3. Tempo de Computação

Aqui, refinando-se a grade de discretização, foram calculados os tempos computacionais de processamento (em segundos) dos métodos TVD com os limitadores de fluxo Superbee e Minmod, e do método composto LWLF-4, todos para um mesmo problema de Buckley-Leverett. Tais resultados são mostrados na Tabela 4 e ilustrados na Fig. 25.

Nota-se que os tempos computacionais dos métodos TVD crescem linearmente com o número de bloco na grade, mantendo essencialmente a mesma taxa de variação. O Método composto de Liska e Wendroff apresenta também um crescimento linear no seu tempo computacional, relativo ao número de células na grade. No entanto, a taxa desse esquema composto parece não manter-se constante.

Apesar das diferenças dos tempos utilizados por esses métodos não serem muito acentuadas, surpreendentemente o método composto LWLF-4 foi mais eficiente que os outros esquemas, para todas as grades testadas.

**Tabela 4. Tempo computacional em segundos**

Células	$\Delta x$	Superbee	Minmod	LWLF-4
250	0.004	34.79	34.41	32.57
550	0.0018	86.41	83.46	73.60
850	0.0011	138.52	135.50	124.58
1050	0.0009	167.91	164.68	153.52

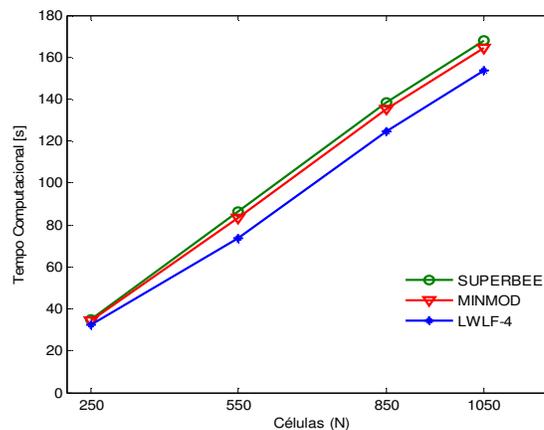


Figura 25. Tempo computacional versus o número de células.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi testada uma metodologia para a solução numérica de leis de conservação não lineares, constituída de um esquema composto formulado por Liska e Wendroff (1998), denominado LWLF-4. Tal esquema foi aplicado aos problemas de Buckley-Leverett e Burgers, visando principalmente à simulação do escoamento imiscível água-óleo em meios porosos e objetivando a captura de ondas de choque.

O esquema composto LWLF-4 combinou, de forma apropriada, os métodos de Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff, de modo que o primeiro funcionou como um filtro para o método de Lax-Wendroff.

Os resultados foram satisfatórios, uma vez que as soluções obtidas não apresentaram oscilações espúrias típicas do esquema de Lax-Wendroff e nem tão pouco foram excessivamente difusivas, como comumente ocorre com os resultados gerados pelo método de Lax-Friedrichs. Dessa forma, se obteve valores da saturação no ponto de choque bem próximos aos valores encontrados analiticamente pela abordagem de Welge (1952). Assim, o esquema LWLF-4 se mostrou um método com perspectivas viáveis para a simulação do escoamento imiscível em meios porosos.

O método composto LWLF-4 apresentou superioridade com relação a dois métodos do tipo TVD, com limitadores de fluxo, comumente usados na simulação de reservatórios de petróleo, o limitador Superbee e o de Van Leer. O limitador de fluxo Superbee obteve um valor de saturação no ponto de choque superior ao valor analítico de Welge. Por outro lado, o método composto de Liska e Wendroff e o TVD com o limitador de fluxo Minmod obtiveram resultados satisfatórios na captura de ondas de choque.

Devido aos bons resultados obtidos aqui, recomenda-se a utilização do método composto de Liska e Wendroff na resolução numérica do problema de Buckley-Leverett unidimensional. Recomenda-se também um estudo futuro do desempenho desse método composto aplicado aos problemas de Buckley-Leverett multidimensionais.

## NOMECLATURA

$c$	razão de viscosidade
$f_\alpha$	função de fluxo fracionária do fluido $\alpha = (w, o)$
$k$	permeabilidade efetiva
$L_F$	abreviação do método de Lax-Friedrichs
$L_W$	abreviação do método de Lax-Wendroff
$LWLF - k$	abreviação do método composto
$r$	parâmetro do limitador de fluxo
$S_0$	saturação inicial ou residual
$S_w$	ou $S$ , saturação do fluido água
$S_w^*$	ou $S^*$ valor da saturação da água no ponto de choque
$t$	instante de tempo
$TVD$	abreviação para Total Variation Diminishing
$u_\alpha$	velocidade de Darcy para o fluido $\alpha = (w, o)$
$u_T$	velocidade total ( $u_w + u_o$ )
$\tilde{u}_x$	velocidade total dividida pela a porosidade do meio
$V$	velocidade do choque na condição de Rankine-Hugoniot
$x$	variável espacial

### Letras gregas

$\Delta$	incremento de uma função
$\Delta t$	passo de tempo
$\Delta x$	comprimento da célula na direção $x$
$\mu_\alpha$	viscosidade da fase $\alpha$
$\phi$	porosidade do meio
$\phi(r)$	limitador de fluxo
$\Psi$	operador definido por (k-1) etapa de $L_w$ seguido de uma aplicação do método $L_F$
$\Xi$	fluxo numérico
$\Omega$	domínio do reservatório

### Subíndices

$\alpha$	relativo ao fluido $\alpha$ , ( $\alpha = o, w$ com $o = \text{óleo}$ e $w = \text{água}$ )
$i$	relativo a $i$ -ésima célula na discretização espacial

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Carlos Chagas Filho de Apoio e Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e ao Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro (IPRJ/UERJ), pelo apoio e suporte financeiro.

N. Henderson agradece também ao Prociência-UERJ e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## REFERÊNCIAS

- AZIZ, K.; SETTARI, A. Petroleum reservoirs simulation. London: Applied Science, 1979.
- BLUNT, M.; RUBIN, B. Implicit flux limiting schemes for petroleum reservoir simulation. Journal of Computation Physics, 102, 194, 1992.
- BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 146, 107, 1942.
- LEVEQUE, R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Cambridge Texts in Applied Mathematics.
- LISKA, R.; WENDROFF, B. Composite schemes for conservation laws. Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 35, n. 6, 1998.
- PEACEMAN, D.W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. New York: Elsevier, 1977.
- STONE, H. L. Probability model for estimating three-phase relative permeability. Trans. SPE of AIME, v. 249, p. 214-218, 1970.
- SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. SIAM Journal of Numerical Analysis, v. 21, n.5, 1984.
- THOMAS, J. W. Numerical partial differential equations: conservation laws and elliptic equations. New York: Springer, 1999. Texts in Applied Mathematics, 33.
- WELGE, H. J. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. Trans. AIME, n. 195, p. 91-99, 1952.

## NUMERICAL SOLUTIONS TO THE BURGERS AND BUCKLEY-LEVERETT PROBLEMS: A COMPARISON OF THE LWLF-4 COMPOSITE METHOD WITH TVD'S METHODS WITH FLUX LIMITERS

Barbosa N.M., nmbarbosa@iprj.uerj.br  
Luiz Nelio Henderson, nelio@iprj.uerj.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, 28630-050, Nova Friburgo, RJ, Brazil

**Abstract:** *The present work was motivated by the fact that one of the biggest challenges in the simulation of the secondary petroleum recuperation resides in the capture of shock waves, inherent to the nonlinearity of the used model to describe the water injection process. Objectifying the capture of this physical phenomenon, here a composite scheme of finite differences (called LWLF-4) is tested. This technique was introduced recently in the literature of numerical methods by Liska and Wendroff (1998). The idea behind the composite method is relatively simple. In fact, essentially, this technique uses four steps of the classical scheme of Lax-Wendroff (LW), followed by one application of another classical method, the scheme of Lax-Friedrichs (LF). In that way, LF scheme, which generates solutions satisfying the entropy principle, works as a filter for LW method, which is of second order in the space.*

*Two different conservation laws were considered here: the Burgers equation and the Buckley-Leverett equation. This last one is commonly used in modeling of the water-oil immiscible flow in porous media, where the fluids are incompressible and the effects of capillary pressure are despised. The numerical solutions for the Cauchy problem (generated by LWLF-4 technique), involving these two equations, were compared with analytic solutions and with solutions obtained by other numerical schemes. Among such numerical solutions, we highlighted some solutions computed with TVD (Total Variation Diminishing) methods, that use flow limiters. As main result, it was observed that LWLF-4 method, with the time step constrained by CFL condition, is capable to capture shock waves, that represent discontinuous solutions of the differential partial equations, moreover LWLF-4 method adequately describes the solutions that constitute rarefaction waves, eliminating, in that way, the well-known spurious oscillations and the excessively diffusive solutions, typical of many finite difference schemes.*

**Keywords:** *Nonlinear hyperbolic equation, TVD method, Composite scheme, LWLF-4 method.*