



16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering

Engineering for the New Millennium

SOLID MECHANICS AND STRUCTURES

ISBN 85-85769-06-6



Solid Mechanics and Structures

TRB0085	6
A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR SHAPE MEMORY ALLOYS INHERITED FROM CLASSICAL PLASTICITY	
Mamiya, Edgar Nobuo Viana, Dianne Magalhães	
TRB0120	14
POST-BUCKLING ANALYSIS OF SLENDER ELASTIC RODS SUBJECTED TO TERMINAL FORCES	
Vaz, Murilo Augusto Silva, Daniel Fonseca de Carvalho	
TRB0159	23
MODELING OF SHAPE MEMORY ALLOYS INCLUDING AN AUSTENITIC PHASE AND THREE VARIANTS OF MARTENSITE: ONE-DIMENSIONAL CASE	
Savi, Marcelo Amorim Paiva, Alberto Pacheco, Pedro M. C. L.	
TRB0161	31
QUENCHING GENERATED RESIDUAL STRESSES IN STEEL CYLINDERS	
Savi, Marcelo Amorim Pacheco, Pedro M. C. L. Camarão, Arnaldo Freitas	
TRB0162	41
GEOMETRICALLY NON-LINEAR STATIC ANALYSIS OF PLATES AND SHELLS USING HEXAHEDRICAL FINITE ELEMENTS WITH REDUCED INTEGRATION	
Fakhye, Rodnny Jesus Mendoza Awruch, Armando Miguel	
TRB0163	51
EFFECT OF PLASTIC STRAINS IN SHAPE MEMORY ALLOYS	
Savi, Marcelo Amorim Baêta Neves, Alessandro P. Pacheco, Pedro M. C. L.	
TRB0182	59
LARGE DEFLECTION BEHAVIOR AND STABILITY OF SLENDER BARS UNDER SELF-WEIGHT	
Gonçalves, Paulo Batista Pamplona, Djenane Jurjo, Daniel Leonardo Braga Rodriguez	
TRB0277	69
BASIC EQUATIONING FOR THE MECHANICAL BEHAVIOR IN VISCOPLASTIC EXPERIMENTS	
Oliveira, Luiz Claudio Gomide, Henner Alberto Rade, Raquel Santini Leandro	
TRB0278	78
USING SUBDOMAINS FOR THE FORMULATION OF STRESS-STRAIN DIAGRAMS	
Oliveira, Luiz Claudio Oliveira, Sonia A. Goulart	



TRB0364	85
METHODOLOGY, SYSTEMATIZATION, AND SELECTION OF EPICYCLIC GEAR TRAINS DESIGN WITH TWO LINKED EGTS	
Becker, Marcelo Amaral, Danilo Dedini, Franco Giuseppe	
TRB0636	95
A MIXED FORMULATION FOR ELASTOPLASTICITY	
Costa, Cyntia Gonçalves da Borges, Lavinia Maria Sanabio Alves lavinia@serv.com.ufjf.br Zouain, Nestor	
TRB0672	105
A GRAPHICAL INTERACTIVE ENVIRONMENT FOR STRUCTURAL MODELLING AND ANALYSIS	
Pitangueira, Roque Luiz Silva, Ramon Pereira Maia, Elizabeth Vieira Calixto, José Marcio Fonseca Calixto Andrade, Fabrício Vivas Chaves, Daniel Teixeira Silva, Frederico Mol Álvares	
TRB0688	114
BUCKLING ANALYSIS OF RIBBED PLATES FOR USE IN PIPES	
Alves, Marcelo Augusto Leal Kaminski, Paulo Carlos	
TRB0731	121
A HYBRID METHOD OF MODAL SYNTHESIS WITH BRANCH MODES	
Diniz, Alberto Carlos Guimaraes Castro Thouverez, Fabrice	
TRB0768	131
USING RECURRENT NEURAL NETWORKS TO REPRESENT NON LINEAR VISCOELASTIC BEHAVIOR	
Massarani, Marcelo Kaminski, Paulo Carlos	
TRB0778	140
STRUCTURAL MECHANICS OF FLEXIBLE RISERS SUBJECTED TO COMBINED LOADS	
Ramos, Jr., Roberto Pesce, Celso Pupo	
TRB0831	149
REVISITING THE D'ALEMBERT PRINCIPLE	
Oliveira, Agamenon	
TRB0927	155
ON THE NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE TRUSSES CONSIDERING LARGE STRAINS, DAMAGE AND PLASTICITY	
Driemeier, Larissa Alves, Marcílio	

TRB0951	165
DYNAMIC BEHAVIOR OF STRUCTURES ON VISCOELASTIC FOUNDATIONS UNDER MOVING LOADS	
Dutra, Max Suell	
Bessa, Wallace Moreira	
Da Silva, Fernando Ribeiro	
TRB0973	175
STRESS WAVES PROPAGATION PHENOMENON IN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO AXIAL IMPACT	
Karagiozova, Dora	
Alves, Marcílio	
TRB0979	185
INERTIA EFFECTS ON BUCKLING TRANSITION OF SHELLS SUBJECTED TO AXIAL IMPACT	
Karagiozova, Dora	
Alves, Marcílio	
TRB0988	194
DYNAMICAL NUMERICAL RESPONSE OF PLANE REINFORCED CONCRETE FRAMES CONSIDERING DAMAGE MODELS	
Paula, Cristina Ferreira	
Proença, Sergio Persival Baroncini	
TRB1007	203
PREDICTION OF RESIDUAL STRESSES ON WELDED PLATES	
Vieira Júnior, Alberto Borges	
Rade, Domingos Alves	
Ribeiro, Carlos Roberto	
TRB1048	213
ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF TIMBER STRUCTURES REINFORCED BY CARBON FIBERS	
Souza Jr, Dogmar Antonio	
Cunha, Jesiel	
TRB1057	222
MESHLESS METHOD APPLIED TO NONLINEAR STATIC AND DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS	
Barros, Felício Brúzzi	
Proença, Sergio Persival Baroncini	
TRB1183	232
THE INVARIANTS OF THE MECHANICS OF CONTINUOUS AND GENERALIZATION OF THE HAMILTON'S EQUATIONS	
Tonini, Antonio Carlos	
Oliveira, Eng Prof Dr. Antonio Marmo	
TRB1272	243
STRESS DISTRIBUTION ON THE LONGITUDINAL AXIS OF A CORNER SHELF UNDER TENSION AND COMPRESSION	
Gomes, Paulo De Tarso Vida	
Scaldeferri, Denis Henrique Bianchi	
Rabello, Emerson Giovani	
Maia, Nilton Da Silva	
Mansur, Tanius Rodrigues	

TRB1316	250
TOPOLOGY OPTIMIZATION OF TRUSSES AND FRAMES WITH COMPLIANCE AND BUCKLING CONSTRAINTS	
Guilherme, Carlos Eduardo Marcos Fonseca, Jun Sérgio Ono	
TRB1330	260
A TENTATIVE OBJECT-ORIENTED IMPLEMENTATION FOR A UNIFIED FEM AND BEM PROGRAMMING FRAMEWORK	
Marczak, Rogério	
TRB1338	270
ON THE STRESS INDUCED MOTION OF PHASE INTERFACES	
Mamyá, Edgar Nobuo Correia, Alvaro Pinto Dantas, Alberto Pinheiro	
TRB1680	277
PREFORM OPTIMIZATION OF 2D FORGED COMPONENTS USING SEQUENTIAL CONVEX PROGRAMMING	
Muñoz-Rojas, Pablo Andrés Fonseca, Jun Sérgio Ono Creus, Guillermo Juan	
TRB1752	287
MEDIÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS EM JUNTAS SOLDADAS POR FRICÇÃO RADIAL	
Pinto, Rosa Irene Terra Pope, Alexandre M. Strohaecker, Telmo Roberto	
TRB2031	295
PERFORMANCE EVALUATION OF SOME NEW TIME INTEGRATION METHODS IN ELASTODYNAMIC PROBLEMS FORMULATED BY DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD	
Castillo, Gustavo Adolfo, Velázquez Loeffler, Carlos Friedrich	
TRB2144	305
NUMERICAL INTEGRATION OF HIERARCHICAL QUADRI-LATERAL QUADRATIC SHELL FINITE ELEMENT	
Paschoalini, Amarildo Tabone Moreira, Loir Afonso Cassola, Silmara	
TRB2495	316
TREFFTZ-MLGFM	
Barbieri, Renato	
TRB2558	325
SIMULATION OF TERMOMECHANICAL COUPLING IN ELASTO-VISCOPLASTIC TRUSS WITH DAMAGE	
Barbosa, José Maria Ávila, Katarina	



TRB1692	333
CRACK PROPAGATION IN A FRAGILE SPECIMEN, A THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY	
Sant'Anna, Hervandil Morosini	
Iturrioz, Ignacio	
Reckziegel, Gilnei	
TRB2399	343
MODELING THE STIFFNESS OF BOLTED JOINTS	
Kenedi, Paulo Pedro	
Pacheco, Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco	
Matoso, Gustavo de Souza	
Coelho, Eduardo Motta Decnop	

A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR SHAPE MEMORY ALLOYS INHERITED FROM CLASSICAL PLASTICITY

Dianne Magalhães Viana

Universidade de Brasília, ENM-FT, 70910-900 Brasília, DF, Brazil
e-mail: diannemv@unb.br

Edgar Nobuo Mamiya

Universidade de Brasília, ENM-FT, 70910-900 Brasília, DF, Brazil
e-mail: mamiya@unb.br

Abstract: A new one-dimensional macroscopic model capable to describe the mechanical behavior of shape memory alloys is presented. Features of the model include: (i) the definition of an inelastic (phase transformation) strain, (ii) a linear stress-elastic strain relation, (iii) two inequality constraints which define the elastic domain and (iv) two flow rules for phase transformations: one associated with direct transformations between martensitic phases (during loading), and another one associated with reverse transformations (due to unloading or to heating). Numerical results corresponding to our model are compared with experimental data from the literature.

Keywords: shape memory, hysteresis, martensitic transformations.

1. Introduction

Certain materials, like for instance Ni-Ti or Cu-Zn-Al, present the ability to, after being subjected to large apparently plastic deformations (of the order of 4-8%), recover their original shapes when they are heated above certain temperature levels. Such pseudoplastic behavior is associated with stress induced martensitic phase transformations. When subjected to a loading-unloading procedure, a residual strain can be observed at a stress-free state, as is illustrated in the stress-strain curve of Fig. 1.a. Upon heating, the hysteresis loop of the stress-strain curve moves upward and eventually the strain is completely recovered (Fig 1.b). Such phenomenon is known in the literature as *shape memory*.

Since the sixties, shape memory alloys have been considered for a wide range of applications, which includes special coupling devices for hydraulic pipelines in airplanes, force actuators, smart materials, etc. (see e.g. Duering et al. (1990) for details on applications). Since then, many researchers, including Falk (1980), Frémond (1987), Graesser & Cozzarelli (1994), Fu, Huo & Müller (1996), Leclercq & LExcellent (1996), Govindjee & Hall (1999), amongst others, have proposed models for the description of the mechanical behavior of this class of materials.

From the computational perspective, one of the most interesting model currently available is (from our point of view) the one proposed by Auricchio et al. (1997) within the setting of generalized plasticity, which describes situations where, following initial plastic loading and elastic unloading, the reloading is not necessarily up to the state where unloading began (see Lubliner (1991) for details on the theory of generalized plasticity).

In this paper, we propose a much simpler approach, based upon the formalism of *classical plasticity*, to describe the shape memory effect. Features of the model include: (i) the definition of an inelastic (phase transformation) strain, (ii) a linear stress-elastic strain relation, (iii) two inequality constraints which define the elastic domain and (iv) two flow rules for phase transformations: one associated with direct transformations between martensitic phases (during loading), and another one associated with reverse transformations (due to unloading or to heating). As a first step, we present the model restricted to the setting of one-dimensional

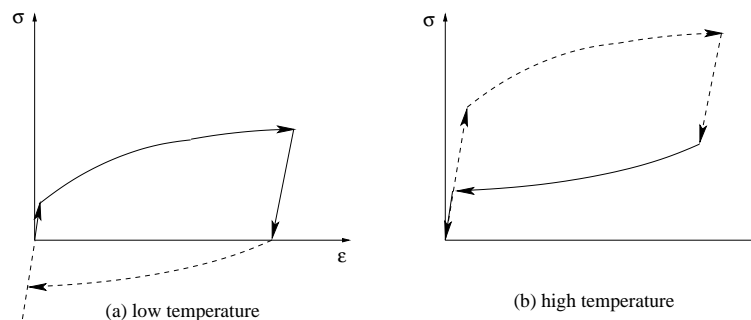


Figure 1: Shape memory effect: (a) residual strain at low temperature and stress free configuration, (b) strain recovery at higher temperature.

media.

The paper is organized as follows: Section 2 presents the mechanical model itself, while section 3 addresses the corresponding numerical issues: discretization procedures and solution algorithm. In section 4, numerical results are compared with experimental data, providing thence an assessment of the model. Some concluding remarks are included in section 5.

2. The mechanical model

Five state variables are considered in this paper to describe, in the one-dimensional setting, the macroscopic mechanical behavior of shape memory alloys: The *total strain* ε , the *absolute temperature* θ , the *transformation strain* ε_T , which describes the inelastic strain associated with the volume fraction of martensite present in the material, the *hardening variable* α_{AM} , related to direct transformations from austenite (or twined martensite) to detwined martensite and the *hardening variable* α_{MA} , related to reverse transformations from detwined martensite back to austenite (or twined martensite). In what follows, dependence upon the temperature will be restricted to the values of the material parameters and thence, unless strictly necessary, it will be omitted in the notation.

2.1. Elastic behavior

The *stress-strain relation* is expressed here by the relation:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_T), \quad (1)$$

where E is the Young modulus of the material. The stress σ in (1) must attain values within the *elastic domain*, which is defined by two inequality constraints: one associated with transformations from austenite (or twined martensite) to detwined martensite:

$$f_{AM}(\sigma, \varepsilon_T, \alpha_{AM}) := \sigma \frac{\varepsilon_T}{|\varepsilon_T|} - [\sigma_c(\varepsilon_T) + R(\alpha_{AM})] \leq 0, \quad (2)$$

and the other one associated with the reverse transformation:

$$f_{MA}(\sigma, \varepsilon_T, \alpha_{MA}) := [\sigma_c(\varepsilon_T) - R(\alpha_{MA})] - \sigma \frac{\varepsilon_T}{|\varepsilon_T|} \leq 0. \quad (3)$$

In inequalities (2) and (3),

$$\sigma_c(\varepsilon_T) := \bar{\sigma}_c + h|\varepsilon_T| \quad \text{and} \quad R(\alpha) := \bar{R} + a[1 - \exp(-b\alpha)] \quad (4)$$

describe the center and the radius of the elastic domain, respectively. Symbols $\bar{\sigma}_c$, h , \bar{R} , a and b denote material parameters.

It should be remarked that, while the material is completely in its parent phase (austenite or twined martensite), the term $\varepsilon_T/|\varepsilon_T|$ is not defined and hence, under such circumstance, the inequality constraint (2) should be replaced by:

$$f_{AM0}(\sigma) := |\sigma| - [\sigma_c(0) + R(0)] \leq 0. \quad (5)$$

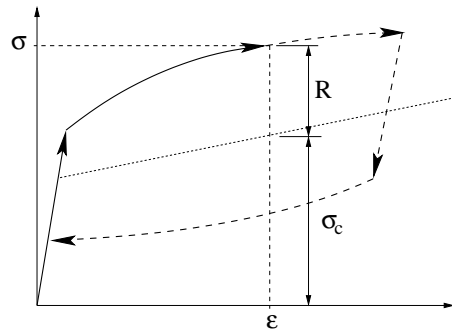


Figure 2: Stress-strain curve for a shape memory material: at strain level ε , $\sigma = \sigma_c + R$, where σ_c is the center of the elastic domain, while R is its radius.

2.2. Evolution laws

In order to ensure that the stress remain within the elastic domain, state variables ε_T , α_{AM} and α_{MA} must eventually evolve according to the following flow rules:

$$\dot{\varepsilon}_T = \dot{\gamma}_{AM} \frac{\partial f_{AM}}{\partial \sigma} + \dot{\gamma}_{MA} \frac{\partial f_{MA}}{\partial \sigma} = (\dot{\gamma}_{AM} - \dot{\gamma}_{MA}) \frac{\varepsilon_T}{|\varepsilon_T|}, \quad (6)$$

$$\dot{\alpha}_{AM} = \dot{\gamma}_{AM} - z\dot{\gamma}_{MA}, \quad (7)$$

$$\dot{\alpha}_{MA} = \dot{\gamma}_{MA} - z\dot{\gamma}_{AM}, \quad (8)$$

where $z \gg 1$. It is interesting to notice that, due to the definition of the ‘‘yield function’’ (3), the rate of change of the transformation strain ε_T during reverse transformations is a function of the signal of ε_T and not of the signal of σ (which is the case during direct transformations or in models for classical plasticity). The flow rule (7) above reflects the facts that the hardening variable α_{AM} increases during transformation from austenite to martensite but decreases at a much higher rate during transformation back to austenite. Similarly, from (8) it follows that α_{MA} increases during transformation from martensite back to austenite (or twined martensite), but decreases at a much higher rate during transformation to detwined martensite. The hardening variables α_{AM} , α_{MA} , together with the consistency parameters $\dot{\gamma}_{AM}$ and $\dot{\gamma}_{MA}$, are subjected to the following constraints:

$$\alpha_{AM} \geq 0, \quad \alpha_{MA} \geq 0, \quad (9)$$

$$\dot{\gamma}_{AM} \geq 0, \quad \dot{\gamma}_{MA} \geq 0, \quad (10)$$

$$\dot{\gamma}_{AM} f_{AM} = 0, \quad \dot{\gamma}_{MA} f_{MA} = 0. \quad (11)$$

3. Numerical issues

3.1. Time discretization

For the sake of simplicity, time discretization of the model is performed here by considering a classical backward Euler method. In what follows, $(\bullet)_n$ denotes the quantity (\bullet) at time instant t_n , while $(\bullet)_{n+1}$ denotes the same quantity at time instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Thus, expressions (1-11) can be rewritten as:

(i) *Stress-strain relation:*

$$\sigma_{n+1} = E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{T n+1}). \quad (12)$$

(ii) *Elastic domain:*

$$f_{AM n+1} := |\sigma_{n+1}| - [\sigma_c(\varepsilon_{T n+1}) + R(\alpha_{AM n+1})] \leq 0, \quad \text{if } \varepsilon_{T n} = 0, \quad (13)$$

$$f_{AM n+1} := \sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{T n+1}}{|\varepsilon_{T n+1}|} - [\sigma_c(\varepsilon_{T n+1}) + R(\alpha_{AM n+1})] \leq 0, \quad \text{if } \varepsilon_{T n} \neq 0, \quad (14)$$

$$f_{MA n+1} := [\sigma_c(\varepsilon_{T n+1}) - R(\alpha_{MA n+1})] - \sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{T n+1}}{|\varepsilon_{T n+1}|} \leq 0, \quad (15)$$

(iii) *Flow rules:*

$$\varepsilon_{T n+1} = \varepsilon_{T n} + \Delta \gamma_{AM n+1} \frac{\sigma_{n+1}}{|\sigma_{n+1}|} - \Delta \gamma_{MA n+1} \frac{\varepsilon_{T n+1}}{|\varepsilon_{T n+1}|}, \quad (16)$$

$$\alpha_{AM n+1} = \alpha_{AM n} + \Delta \gamma_{AM n+1} - z \Delta \gamma_{MA n+1}, \quad (17)$$

$$\alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n} + \Delta \gamma_{MA n+1} - z \Delta \gamma_{AM n+1}, \quad (18)$$

subjected to constraints:

$$\alpha_{AM n+1} \geq 0, \quad \alpha_{MA n+1} \geq 0, \quad (19)$$

$$\Delta \gamma_{AM n+1} \geq 0, \quad \Delta \gamma_{AM n+1} f_{AM n+1} = 0, \quad (20)$$

$$\Delta \gamma_{MA n+1} \geq 0, \quad \Delta \gamma_{MA n+1} f_{MA n+1} = 0. \quad (21)$$

3.2. Integration of the discrete equations

The integration of the discrete constitutive equations (12-21) is completely analogous to the ones considered in classical linear plasticity (see Simo and Taylor (1986), for instance) and can be obtained as follows: Let ε_{Tn} , α_{AMn} , $\alpha_{MA n}$, ε_{n+1} and θ_{n+1} be given. Let us compute a *trial state* by assuming that no phase transformation takes place from time instant t_n to time instant t_{n+1} :

$$\varepsilon_{Tn+1}^{trial} = \varepsilon_{Tn}, \quad \alpha_{AMn+1}^{trial} = \alpha_{AMn}, \quad \alpha_{MA n+1}^{trial} = \alpha_{MA n}, \quad (22)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn+1}^{trial}). \quad (23)$$

$$f_{AMn+1}^{trial} := |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_c(0) + R(0)], \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} = 0, \quad (24)$$

$$f_{AMn+1}^{trial} := \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn+1}^{trial}}{|\varepsilon_{Tn+1}^{trial}|} - [\sigma_c(\varepsilon_{n+1}^{trial}) + R(\alpha_{AMn+1}^{trial})], \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} \neq 0, \quad (25)$$

$$f_{MA n+1}^{trial} := [\sigma_c(\varepsilon_{n+1}^{trial}) - R(\alpha_{MA n+1}^{trial})] - \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn+1}^{trial}}{|\varepsilon_{Tn+1}^{trial}|}. \quad (26)$$

Three distinct situations characterize an *elastic step* during time interval $[t_n, t_{n+1}]$:

$$|\varepsilon_{Tn}| = 0 \quad \text{and} \quad f_{AMn+1}^{trial} \leq 0 \quad \text{or} \quad (27)$$

$$|\varepsilon_{Tn}| = \varepsilon_M \quad \text{and} \quad f_{MA n+1}^{trial} \leq 0 \quad \text{or} \quad (28)$$

$$0 < |\varepsilon_{Tn}| < \varepsilon_M, \quad f_{AMn+1}^{trial} \leq 0 \quad \text{and} \quad f_{MA n+1}^{trial} \leq 0, \quad (29)$$

corresponding to whether the material is in its *parent phase* (austenite or twined martensite), *product phase* (detwined martensite) or as a mixture of phases, respectively. In any of these cases, the state variables remain unchanged and hence:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn}, \quad \alpha_{AMn+1} = \alpha_{AMn}, \quad \text{and} \quad \alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n}. \quad (30)$$

On the other hand, if $f_{AMn+1}^{trial} > 0$ while $0 < |\varepsilon_{Tn}| < \varepsilon_M$, then the material undergoes a *direct phase transformation* (from austenite or twined martensite to detwined martensite). In this case, from the stress-strain relation (12), together with the flow rule (16), we have:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn+1}) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn}) - E(\varepsilon_{Tn+1} - \varepsilon_{Tn}) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|}. \end{aligned} \quad (31)$$

Multiplication of both sides of (31) by $\frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|}$ gives:

$$\sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} - E \Delta\gamma_{AMn+1}. \quad (32)$$

Further, since:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|},$$

it follows that:

$$(|\varepsilon_{Tn+1}| - \Delta\gamma_{AMn+1}) \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = |\varepsilon_{Tn}| \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|}, \quad (33)$$

and hence:

$$\frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} \quad \text{and} \quad |\varepsilon_{Tn+1}| = |\varepsilon_{Tn}| + \Delta\gamma_{AMn+1}. \quad (34)$$

As a consequence, we can rewrite (32) as:

$$\sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} - E \Delta\gamma_{AMn+1}. \quad (35)$$

If we take into account expressions (16), (17) and (35), then condition $f_{AMn+1} = 0$ implies:

$$|\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta\gamma_{AMn+1} - \left[\sigma_c \left(\Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|} \right) + R(\Delta\gamma_{AMn+1}) \right] = 0, \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} = 0, \quad (36)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} - E \Delta\gamma_{AMn+1} - \left[\sigma_c \left(\varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_n|} \right) + R(\alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1}) \right] = 0, \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} \neq 0, \quad (37)$$

from which the consistency parameter $\Delta\gamma_{AMn+1}$ can be obtained. In the sequence, we compute:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|}, \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} = 0, \quad (38)$$

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|}, \quad \text{if } \varepsilon_{Tn} \neq 0, \quad (39)$$

$$\alpha_{AMn+1} = \alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1}, \quad (40)$$

$$\alpha_{MA n+1} = \max(\alpha_{MA n} - z \Delta\gamma_{AMn+1}, 0). \quad (41)$$

A completely analogous procedure applies if $f_{MA n+1}^{trial} > 0$ while $0 < |\varepsilon_{Tn}| \leq \varepsilon_M$, when the material undergoes a *reverse phase transformation* (from detwined martensite back to austenite or twined martensite). Indeed, we have:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn+1}) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn}) - E(\varepsilon_{Tn+1} - \varepsilon_{Tn}) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} + E \Delta\gamma_{MA n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|}. \end{aligned} \quad (42)$$

Multiplication of both sides of (42) by $\frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|}$ gives:

$$\sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} + E \Delta\gamma_{MA n+1}. \quad (43)$$

Thus, if we consider a result analogous to (33), we can rewrite (43) as:

$$\sigma_{n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|} = \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} + E \Delta\gamma_{MA n+1} \quad (44)$$

and hence the algorithm consistency condition $f_{MA n+1} = 0$ can be written as:

$$\left[\sigma_c \left(\varepsilon_{Tn} - \Delta\gamma_{MA n+1} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} \right) - R(\alpha_{MA n} + \Delta\gamma_{MA n+1}) \right] - \sigma_{n+1}^{trial} \frac{\varepsilon_{Tn}}{|\varepsilon_{Tn}|} = 0. \quad (45)$$

Once the consistency parameter $\Delta\gamma_{MA n+1}$ is computed as the root of the nonlinear equation (45), the new values of state variables ε_{Tn+1} , α_{AMn+1} and $\alpha_{MA n+1}$ can be calculated as:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} - \Delta\gamma_{MA n+1} \frac{\varepsilon_{Tn+1}}{|\varepsilon_{Tn+1}|}, \quad (46)$$

$$\alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n} + \Delta\gamma_{MA n+1}, \quad (47)$$

$$\alpha_{AMn+1} = \max(\alpha_{AMn} - z \Delta\gamma_{MA n+1}, 0). \quad (48)$$

4. Assessment of the model

In this section we present some qualitative features of the proposed model. Further, we compare the numerical results obtained from the algorithm with experimental data presented by Sittner et al. (1995) for Cu-Zn-Al-Mn and by Tobushi et al. (1991) for Ni-Ti.

4.1. Qualitative aspects

First, let us illustrate how the mechanical model at hand can describe the shape memory effect. Let us consider as material parameters: $E = 32000$, $\bar{\sigma}_c = \theta - 200.0$, $\bar{R} = 30$, $h = 2300$, $a = 50$ and $b = 1000$. The curves in Fig. 3 show stress-strain curves for a shape memory material at temperatures $220^\circ K$ and $300^\circ K$, when subjected to tractive load, followed by a compressive one. At both temperatures, the hysteresis loop can be observed and, at the lower temperature, stress-free residual strains can be observed.

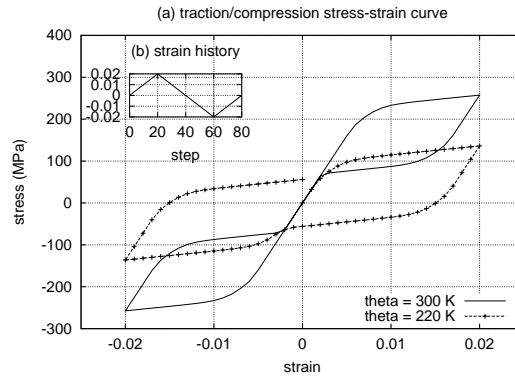


Figure 3: Qualitative behavior described by the mechanical model at temperatures 220°K and 300°K , under tractive and compressive loads.

The stress-strain curve in Fig. 4 illustrates inner loops described by the model under partial loading-unloading conditions, which have been reported in the literature (see Auricchio (1997), for instance).

4.2. Cu-Zn-Al-Mn alloy at constant temperature

An experimental study was performed by Sittner et al. (1995) on Cu 80% - Al 10% - Zn 5% - Mn 5% industrial polycrystalline shape memory alloy at temperature $A_f + 25^\circ\text{K}$ (285°K). Although many uniaxial and multi-axial tests were conducted by the authors, due to the scope of the present study we will be restricted to comparisons with simple traction tests. The following material parameters were considered in this example: $E = 32000$, $\bar{\sigma}_c = 100$, $\bar{R} = 30$, $h = 23500$, $a = 45$ and $b = 1600$.

Figure 5.a describes experimental and numerical results for a traction experiment where distinct values of the maximum strain are prescribed along the loading-unloading cycles. Figure 5.b describes the results corresponding to another traction experiment where distinct values of minimum strain are prescribed along the loading-unloading cycles. Finally, Fig. 5.c considers a traction experiment where, at each cycle, the maximum prescribed strain decreases while the minimum prescribed strain increases. Good agreement between numerical results obtained from our model and the experimental data can be observed in all three cases. It is worth remarking the ability of the model to replicate the complex inner hysteresis patterns observed experimentally under partial loading-unloading conditions.

4.3. Ni-Ti alloy at distinct temperatures

In this example, we perform a numerical comparison between the model and experimental results reported by Tobushi et al. (1991), describing tensile tests on Ni-Ti wires at temperatures varying from 333°K to

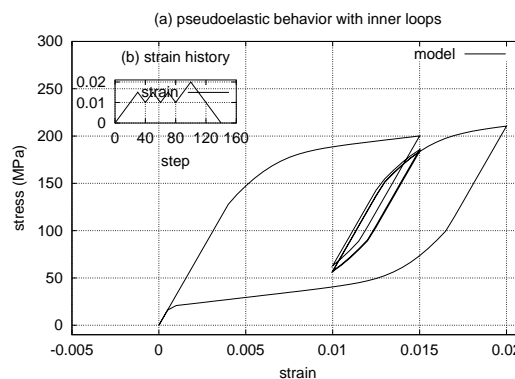


Figure 4: Inner loops described by the mechanical model at temperature 300°K , under partial loading-unloading conditions.

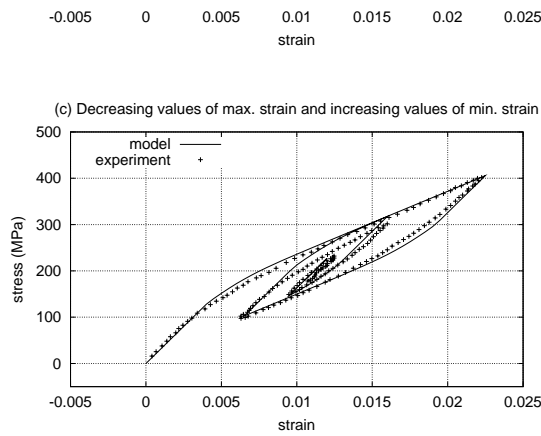


Figure 5: Comparison between numerical results for Cu-Zn-Al-Mn and experimental data from Sittner et al. (1995).

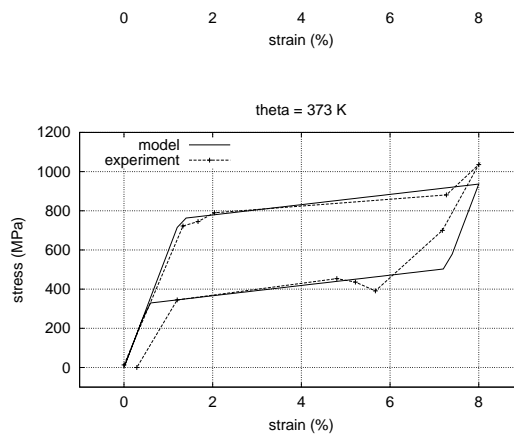


Figure 6: Comparison between numerical results for Ni-Ti and experimental data from Tobushi et al. (1991).

373°K. All material parameters, with exceptions to $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$, which were set to zero, were set as linear functions of the absolute temperature as follows: $E = 5.075\theta - 1297$, $\bar{\sigma}_c = 8\theta - 2440$, $\bar{R} = 1.38\theta - 299$, $h = 0.375\theta - 112.4$. Figure 6 illustrate the good agreement between numerical results and experimental data, for the three temperature levels.

5. Concluding Remarks

A phenomenological mechanical model for shape memory materials, within the setting of one-dimensional media, was presented in this paper. Its formulation is strongly influenced by classical descriptions of the infinitesimal elastoplastic behavior. The shape memory effect as well as inner hysteresis loops can be described by the model. Quantitative comparisons with data from the literature provides an assessment of the model. Features which makes the model at hand interesting include: (i) integration of the resulting equations with techniques very well known in classical plasticity, (ii) possibility of extension to the setting of three-dimensional media (iii) good agreement with experimental data.

6. Acknowledgments

This project was supported by CNPq under projects 520564/96-0 and 465046/00-2. These supports are gratefully acknowledged.

7. References

Auricchio, F., Taylor, R. L. & Lubliner, J., 1997. "Shape Memory Alloys: Macromodelling and Numerical Simulation of the Superelastic Behavior". *Comp. Methods Appl. Engrg.*, Vol. 146, pp. 281–312.

- Duering T. W., Melton K. N., Stockel D., Wayman C. M. (eds), 1990. "Engineering Aspects of Shape Memory Alloys, Butterworth-Heinemann, London.
- Falk, F., 1980. "Model Free Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys". *Acta Metall. Mater.*, Vol. 28, pp. 1773–1780.
- Fu, S., Huo, Y. & Müller, I., 1994. "Thermodynamics of Pseudoelasticity — an Analytical Approach". *Acta Mech.*, Vol. 99, pp. 1–19.
- Govindjee, S. & Hall, G. J., 1999. "A Computational Model for Shape Memory Alloys". *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 37, pp. 735–760.
- Graesser, E. J. & Cozzarelli, F. A., 1994. "A Proposed Three-Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys". *J. Int. Mat. Systems and Struct.*, Vol. 5, pp. 78–89.
- Leclercq, S. & LExcellent, C., 1996. "A General Macroscopic Description of the Thermomechanical Behavior of Shape Memory Alloys". *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, pp. 953–980.
- Lubliner, J., 1991. "A Simple Model of Generalized Plasticity". *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 28, pp. 769–778.
- Simo J. C. & Taylor R. L., 1986. "A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 22, pp. 649–670.
- Sittner, P., Hara, Y. & Tokuda, M., 1995. "Experimental Study on the Thermoelastic Martensitic Transformation in Shape Memory Alloy Polycrystal Induced by Combined External Forces". *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 26A, pp. 2923–2935.
- Tobushi, H., Iwanaga, N., Tanaka, K., Hori, T. & Sawada, T., 1991. "Deformation Behavior of TiNi Shape Memory Alloy Subjected to Variable Stress and Temperature". *Continuum Mech. Termodyn.*, Vol. 3, pp. 79–93.

POST-BUCKLING ANALYSIS OF SLENDER ELASTIC RODS SUBJECTED TO TERMINAL FORCES

M. A. Vaz and D. F. C. Silva

Ocean Engineering Department, Federal University of Rio de Janeiro
P.O. Box 68508, 21945-970, Rio de Janeiro – RJ, Brazil
murilo@peno.coppe.ufrj.br and danfcs@yahoo.com

Abstract. This paper presents formulation and solutions for the elastica of slender rods subjected to axial terminal forces and boundary conditions assumed hinged and elastically restrained with a rotational spring. The set of five first-order nonlinear ordinary differential equations with boundary conditions specified at both ends constitutes a complex two-point boundary value problem. Solutions for buckling, initial post-buckling (perturbation), large loads (asymptotic) as well as numerical integration are developed. Results are presented in non-dimensional graphs for a range of rotational spring stiffness tuning the analysis from double-hinged to hinged-built-in rods.

Keywords: post-buckling, slender rods.

1. Introduction

The equilibrium of rods has drawn the attention of many scientists as early as 1744 with Euler's model for calculation of critical buckling load in simply supported columns, constituting the longest and still widely employed structural stability engineering formula (see Gordon (1978)). Love's (1944) seminal textbook on theory of mathematical elasticity has been extensively used in many fields of applied mechanics, establishing the basis for most research on the equilibrium of elastic rods. However old, the equilibrium problem of long slender elastic rods under terminal and distributed forces and moments still attracts considerable attention, as in recent works, for instance, from Gottlieb and Perkins (1999), Heinen and Fischer (1998), Lu and Perkins (1995), Tan and Witz (1993) and (1995) and Koenig and Bolle (1993).

Classical elastica solutions via elliptic integrals may be found, for instance, in Timoshenko and Gere (1961) and Dym and Shames (1985), respectively for encastré and double-hinged beams. Wang (1997) presents an interesting formulation for asymmetric boundary conditions (ends built-in and hinged) employing a one parameter shooting method for numerical integration of the set of governing equations as well as providing classical techniques for initial post-buckling, with a perturbation approach, and an asymptotic expansion model for large loads. This paper extends Wang's work by considering a rotational spring in lieu of the built-in end so that the solution may be tuned from double-hinged to hinged-built-in. However, for this case a two parameter shooting method is employed.

2. The Governing Equations

Fig. 1 shows a deflected rod subjected to an axial load. The equations governing the elastica of rods derive (see Appendix A) from geometrical compatibility, equilibrium of forces and moments and constitutive relations:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \mathbf{q} \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \mathbf{q} \quad (1b)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \mathbf{k} \quad (1c)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{ds} = -p \sin \mathbf{q} - h \cos \mathbf{q} \quad (1d)$$

$$\frac{dh}{ds} = 0 \quad (1e)$$

where (x, y) constitutes the deflected rod non-dimensional Cartesian coordinates, s the non-dimensional arc-length, \mathbf{k} the non-dimensional curvature, \mathbf{q} the angle formed by the curve tangent and longitudinal axis, p and h the non-dimensional longitudinal and lateral loads, respectively. A set of five boundary conditions must be specified:

$$x(0) = 0 \tag{2a}$$

$$y(0) = 0 \tag{2b}$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds}(0) - \mathbf{b}\mathbf{q}(0) = 0 \tag{2c}$$

$$y(1) = 0 \tag{2d}$$

$$\mathbf{k}(1) = 0 \tag{2e}$$

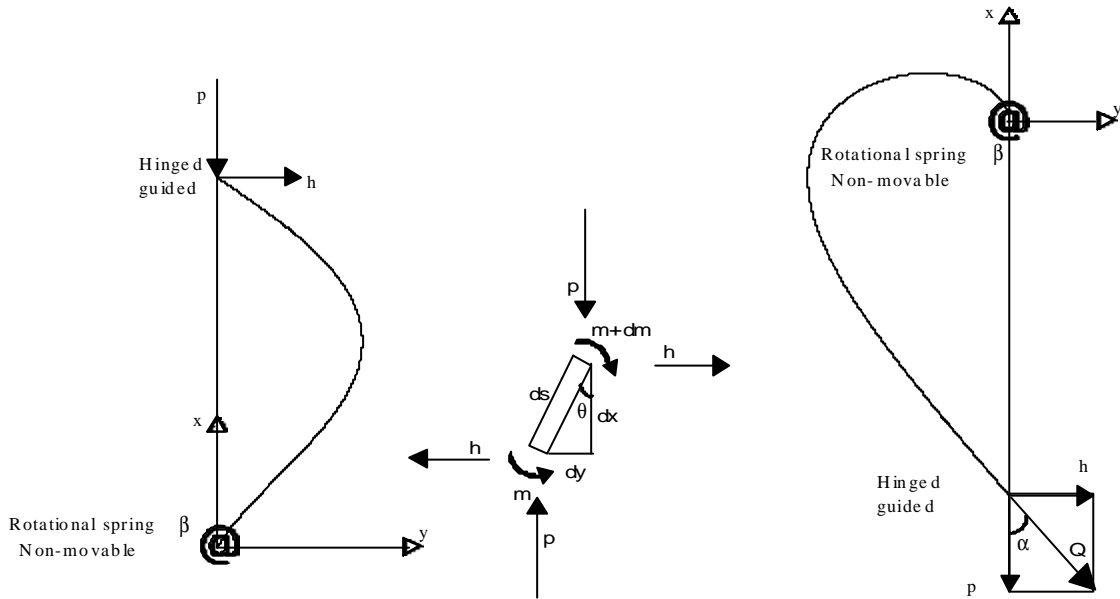


Figure 1. Schematic of deflected rod

Eq. (2a) - (2c) represent non-movable boundary conditions for a rotational spring with stiffness constant \mathbf{b} applied at the lower end whereas Eqs. (2d) and (2e) refer to a hinged condition at the upper end allowing movement in the x axis.

Solutions for buckling, initial post-buckling, numerical integration and asymptotic expansion are presented next.

Buckling loads

Calculation of buckling loads follows straightforward approximation of moment equilibrium equation by assuming small displacements, i.e., $\sin\mathbf{q} \cong \mathbf{q}$, $\cos\mathbf{q} \cong 1$. The solution, developed in Appendix B, is presented in Fig. 2 for critical buckling load as a function of \mathbf{b} . It shows, as expected, asymptotic approximation of the hinged-built-in critical load as \mathbf{b} increases.

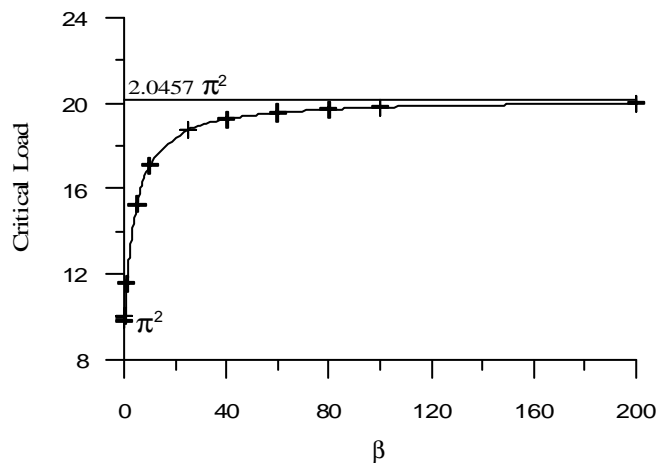


Figure 2. Buckling loads as a function of \mathbf{b}

Initial post-buckling

Perturbation methods may be well employed in weakly nonlinear problems thus they have been extensively used in initial post-buckling analyses (El Naschie (1990)). A solution is sought as an expansion in terms of a perturbation parameter, rendering a set of sequentially solvable linear equations. Hence, the elastica initial post-buckling solution may be obtained by expanding the function $\mathbf{q}(s)$, p and h in terms of a perturbation parameter ϵ as follows:

$$\mathbf{q}(s) = \epsilon \mathbf{q}_0(s) + \epsilon^3 \mathbf{q}_1(s) + \dots \tag{3a}$$

$$p = a_0 + \epsilon^2 a_1 + \dots \tag{3b}$$

$$h = \epsilon b_0 + \epsilon^3 b_1 + \dots \tag{3c}$$

where $\mathbf{q}(s)$ and h correspond to odd functions due to their symmetry while p is expressed by an even function. Substituting Eqs. (3a) - (3c) in (1a) - (1e) and (2a) - (2e), expanding them and rearranging terms proportional to each power of ϵ yields:

$$\epsilon \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mathbf{q}_0}{ds^2} + a_0 \mathbf{q}_0 + b_0 = 0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{ds}(1) = 0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{ds}(0) - \mathbf{b} \mathbf{q}_0(0) = 0 \\ \int_0^1 \mathbf{q}_0 ds = 0 \end{array} \right. \tag{4a}$$

$$\epsilon^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{ds^2} + a_0 \mathbf{q}_1 = \frac{a_0}{6} \mathbf{q}_0^3 - a_1 \mathbf{q}_0 + \frac{b_0}{2} \mathbf{q}_0^2 - b_1 \\ \frac{d\mathbf{q}_1}{ds}(1) = 0 \\ \frac{d\mathbf{q}_1}{ds}(0) - \mathbf{b} \mathbf{q}_1(0) = 0 \\ \int_0^1 \mathbf{q}_1 ds = \frac{1}{6} \int_0^1 \mathbf{q}_0^3 ds \end{array} \right. \tag{4b}$$

Higher order expansion improves solution but it becomes analytically very complex so direct numerical integration is preferable. The solution of Eq. (4a) gives:

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{m} \cos(\mathbf{I} s) + \mathbf{I} \sin(\mathbf{I} s) - 1 \tag{5}$$

where $\mathbf{m} = \mathbf{I} \cot(\mathbf{I})$ and \mathbf{I} is given by:

$$\mathbf{I}^2 \tan(\mathbf{I}) + \mathbf{b} \tan(\mathbf{I}) - \mathbf{bI} = 0 \tag{6}$$

The solution of transcendental Eq. (6) gives the eigenvalues (buckling loads) as alternatively calculated in Appendix B. For $\mathbf{b} \rightarrow 0$ and given that $\mathbf{I} \neq 0$, Eq. (6) becomes $\tan(\mathbf{I}) = 0$ with solution $\mathbf{I} = n\pi$ ($n=1,2,3,\dots$) which characterizes the double-hinged beam. For $\mathbf{b} \rightarrow \infty$, Eq. (6) becomes $\tan(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$ with solution $\mathbf{I} = (4.4934, 7.7253, \dots)$, which characterizes the hinged-built-in beam.

Substituting Eq. (5) in (4a) yields $a_0 = b_0 = \mathbf{I}^2$. Now substituting Eq. (5) in (4b) and solving for $\mathbf{q}(s)$ after long and tedious trigonometric manipulation yields:

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{a}_1 \sin(\mathbf{I}s) + \mathbf{a}_2 \cos(\mathbf{I}s) + \mathbf{a}_3 \sin(3\mathbf{I}s) + \mathbf{a}_4 \cos(3\mathbf{I}s) + \mathbf{a}_5 \quad (7)$$

where:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{64} \left[\mathbf{m} \left(-\frac{32}{\mathbf{I}} a_1 + 4\mathbf{I}\mathbf{m}^2 - 16\mathbf{I} + 4\mathbf{I}^3 \right) - \frac{32}{\mathbf{I}} a_1 + \frac{64}{\mathbf{I}} C_2 + 7\mathbf{I}\mathbf{m}^2 + 3\mathbf{I}^3 - 16\mathbf{I} \right]$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{192} \left[s(96a_1 + 48\mathbf{I}^2 - 12\mathbf{I}^4 - 12\mathbf{I}^2\mathbf{m}^2) + \frac{192}{\mathbf{I}}(b_1 - a_1) + \mathbf{m}^3 - 3\mathbf{I}^2\mathbf{m} + 192C_1 - 64 \right]$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{I}}{192} (\mathbf{I} - 3\mathbf{m}^2)$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{\mathbf{m}}{192} (3\mathbf{I}^2 - \mathbf{m}^2)$$

$$\mathbf{a}_5 = \frac{a_1 - b_1}{\mathbf{I}} + \frac{1}{3}$$

If the terms from the homogeneous solution in Eq. (4b) are disregarded, i.e., setting $C_1 = C_2 = 0$, as this is already contemplated in Eq. (4a), and applying boundary conditions from (4b), a_1 and b_1 may be determined for any value of the spring stiffness (\mathbf{b}), resulting in Table 1.

Table 1. Coefficients of perturbation analysis

\mathbf{b}	\mathbf{I}	$a_0 = b_0$	a_1	b_1
0.0	3.14159	9.86960	1.2337	0
0.1	3.17279	10.0665	13095.5	26288.2
1.0	3.40561	11.5982	248.706	524.556
5.0	3.90856	15.2768	51.2509	129.006
∞	4.49340	20.1907	38.3390	101.916

Now the axial displacement of the upper end may be obtained by $\mathbf{d} = 1 - \mathbf{k}(0)/h$, where $\mathbf{k}(s) = \mathbf{e} \, d\mathbf{q}_0/ds + \mathbf{e}^3 \, d\mathbf{q}/ds$. The rod's geometrical configuration may be also determined as $x(s) = s - \varepsilon^2/2! \int_0^s \theta_0^2(s) ds$ and $y(s) = \varepsilon \int_0^s \theta_0(s) ds + \varepsilon^3 \int_0^s [-\theta_0^3(s)/3! + \theta_1(s)] ds$.

Numerical solution

The solution of Eqs. (1a) - (1e) requires specification of five boundary conditions as h is not known, a priori. Furthermore, three boundary conditions are given at one end while two are specified at the other end, which characterizes a two-point boundary value problem. Several techniques have been employed for this class of problem (e.g., finite element methods, finite difference schemes and energy methods). Solutions via the shooting method with direct integration are conveniently employed in linear or nonlinear problems when only one parameter is required for interpolation but they become rather complex if two conditions are sought in nonlinear systems.

However, a simple but robust way to transform a boundary into an initial value problem is available in Mathcad (1997) through the following procedure: (a) initial missing values are guessed; (b) the boundary value endpoints are specified; (c) the set of differential equations are defined; (d) a load function which returns the initial conditions is established; (e) a score function to measure the distance between terminal conditions and desired terminal conditions is employed; (f) the equivalent initial conditions are finally calculated. From this point a classical Runge-Kutta high order solution may be employed to solve the set of nonlinear ordinary differential equations.

Asymptotic solution

A special class of solution may be also sought for high values of applied loads through an asymptotic expansion. For extreme loading conditions it is convenient to rewrite Eq. (1d). The forces p and h may be written as (see Fig. 1):

$$p = Q \cos \mathbf{a} \quad (8)$$

$$h = Q \sin \mathbf{a} \quad (9)$$

where Q is the resultant force and \mathbf{a} is the angle between p and Q . Using an auxiliary variable:

$$\varphi = \theta + \alpha \tag{10}$$

and substituting Eqs. (8) - (10) in (1d) yields:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + Q \sin\varphi = 0 \tag{11}$$

As $Q \rightarrow \infty$, $\sin\mathbf{j} = 0$. Hence:

$$\mathbf{j} = n\mathbf{p}, \quad n = (0,1,2,\dots) \tag{12}$$

Further substituting the change of variable $q = \sqrt{Q} s$ in Eq. (11) gives:

$$\frac{d^2\mathbf{j}}{dq^2} + \sin\mathbf{j} = 0 \tag{13a}$$

with boundary conditions:

$$\mathbf{b}[\mathbf{j}(0) - \mathbf{a}] = \frac{d\mathbf{j}}{ds}(0) \tag{13b}$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbf{j} = \mathbf{p} \tag{13c}$$

$$\int_0^1 \sin(\mathbf{j} - \mathbf{a}) ds = 0 \tag{13d}$$

Multiplying Eq. (13a) by $d\mathbf{j}/dq$, integrating it in q and applying condition (13c) yields:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dq} = \pm 2 \cos\left(\frac{\mathbf{j}}{2}\right) \tag{14}$$

Assuming the negative value in the right hand side of Eq. (14) and employing trigonometric relations gives:

$$\ln \left[\tan\left(\frac{\mathbf{j} + \mathbf{p}}{4}\right) \right] = -q + \bar{K} \tag{15}$$

where \bar{K} is a constant of integration. Isolating \mathbf{j} in Eq. (15) gives:

$$\mathbf{j}(s) = 4 \arctan(Ze^{-q}) - \mathbf{p} \tag{16}$$

where $Z = e^{\bar{K}}$. Applying $d\mathbf{j}/ds = \sqrt{Q} d\mathbf{j}/dq$ and Eq. (13b) results:

$$Q = \left\{ \frac{\beta}{4Z} (1 + Z^2) [4 \arctan(Z) - \pi - \alpha] \right\}^2 \tag{17}$$

Equation (13d) may be rewritten as:

$$\int_0^1 [\sin\mathbf{a} - \sin\mathbf{q}] ds = \sin\mathbf{a} \tag{18}$$

Recalling that $dq = \sqrt{Q} ds$, substituting Eq. (16) and isolating \sqrt{Q} after algebraic manipulation in Eq. (18) yields:

$$\sqrt{Q} = \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{1}{\sin\mathbf{a}} [-\sin[4 \arctan(Ze^{-q})] \cos\mathbf{a} + \cos[\arctan(Ze^{-q})] \sin(\mathbf{a})] \right\} dq \tag{19}$$

Applying the variable substitution $u = Ze^{-q}$ and setting $Q \rightarrow \infty$ gives:

$$\sqrt{Q} = -\int_0^Z \left\{ 1 - \cos[4 \arctan(u)] + \cot(\alpha) \sin[4 \arctan(u)] \right\} \frac{du}{u} \tag{20}$$

Expanding the trigonometric functions and solving the integral yields:

$$Q = \left\{ \frac{4Z [\cot(\alpha) + Z]}{1 + Z^2} \right\}^2 \tag{21}$$

It is now possible to determine the values of p and h employing Eqs. (17) and (21) for any value of α , as well as displacement d , which is determined from:

$$\delta = 1 - \frac{1}{h} \frac{d\theta}{ds}(0) = 1 + \frac{4Z}{\sqrt{Q} \sin \alpha (1 + Z^2)} \tag{22}$$

The geometrical configuration may be also obtained.

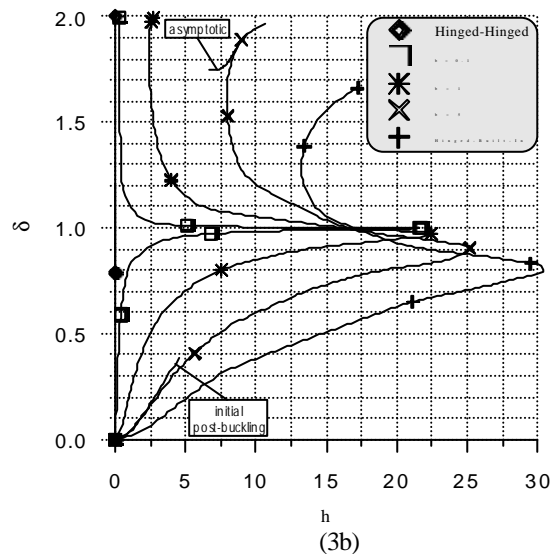
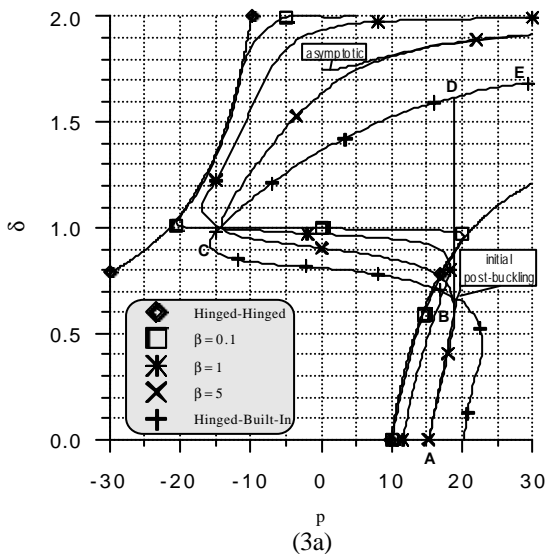
3. Analysis of Results

As described by Wang (1997), there are several interesting phenomena such as limit load, jump, hysteresis, bifurcation and non-uniqueness as the load (p) displacement (d) relation is not monotonic and equilibrium configuration may depend on the load-unloading path (i.e., if displacement or load is controlled).

Results for numerical analysis are presented in Figs. 3a - 3f from double-hinged to hinged-built-in slender elastic rods, including simulations for $\beta = 0.1, 1$ and 5 , which illustrate the solution dependence on the rotational constraint. For the sake of conciseness, results for initial post-buckling and asymptotic expansions are only displayed in Figs. 3a - 3f for $\beta = 5$. They respectively show curves $d-p, d-h, q(0)-p, q(0)-h, k(0)-p, q(1)-h$. Excellent agreement is obtained with analytical (i.e., initial post-buckling and asymptotic expansions) and numerical techniques for all figures.

Let's examine more carefully results for $\beta = 5$ and consider the rod initially straight. As a compressive load is progressively applied, the rod buckles at point (A) in Fig. 3a. Further increasing the load it reaches a limit load (B) and jumps to (D) and then (E). However, if displacement is controlled the path sequentially follows (A) to (E). The unloading may also be load or displacement controlled. In the first case it follows path (E), (D), (B) and (A) otherwise (E) to (A). A combination of load and/or displacement controlled paths is also feasible.

For each boundary condition eight elastica configurations are presented in Figs. 4a - 4e for different values of d . The geometry becomes more symmetric as the spring stiffness reduces. Also note that for double-hinged rods the solution is given by two curves, which actually represent same equilibrium states.



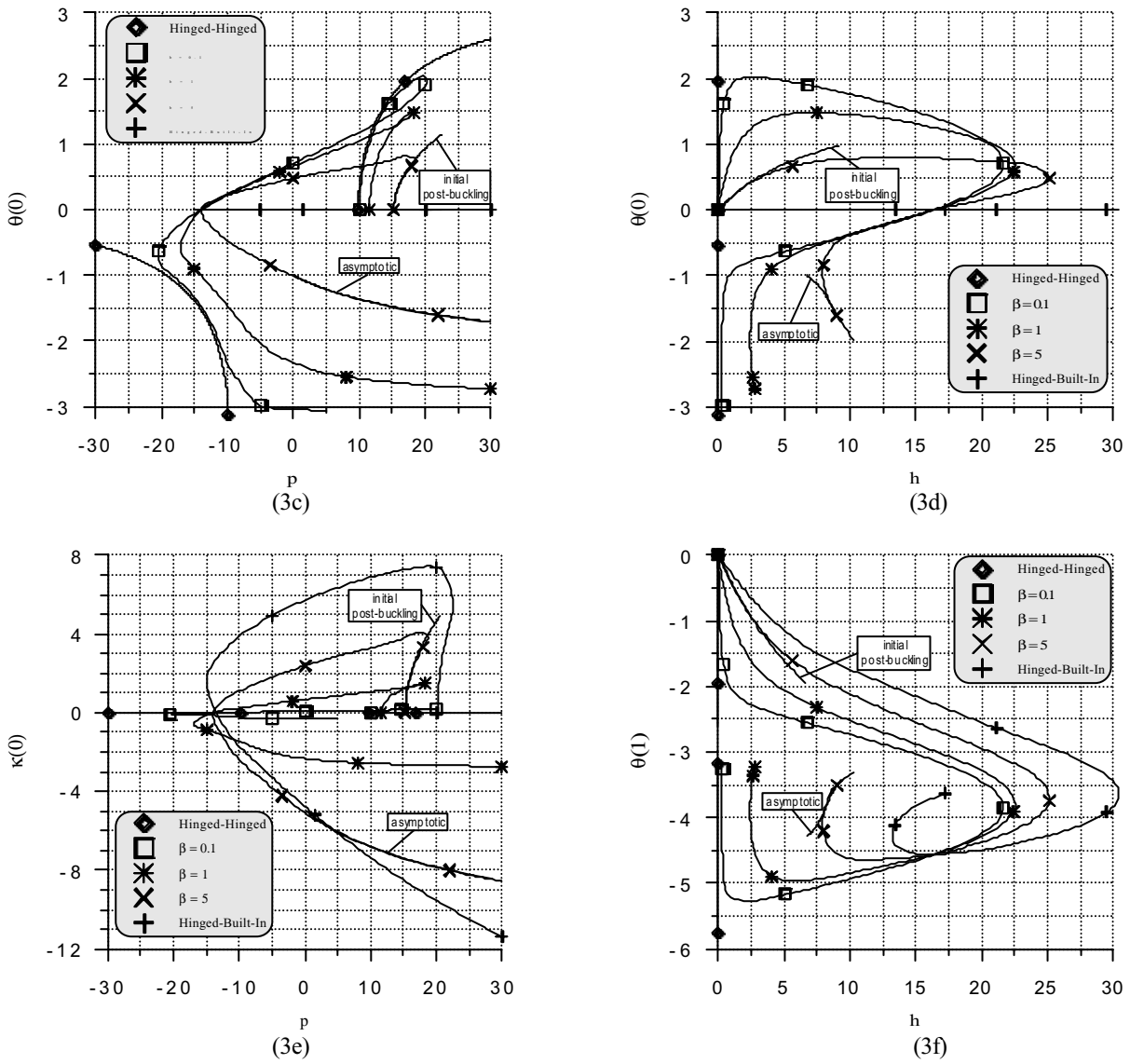
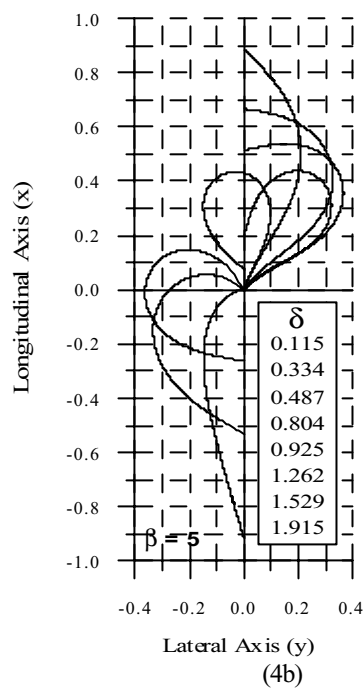
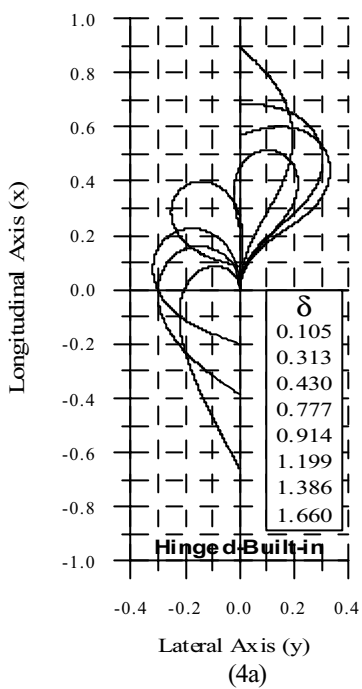


Figure 3. Post-buckling mapping



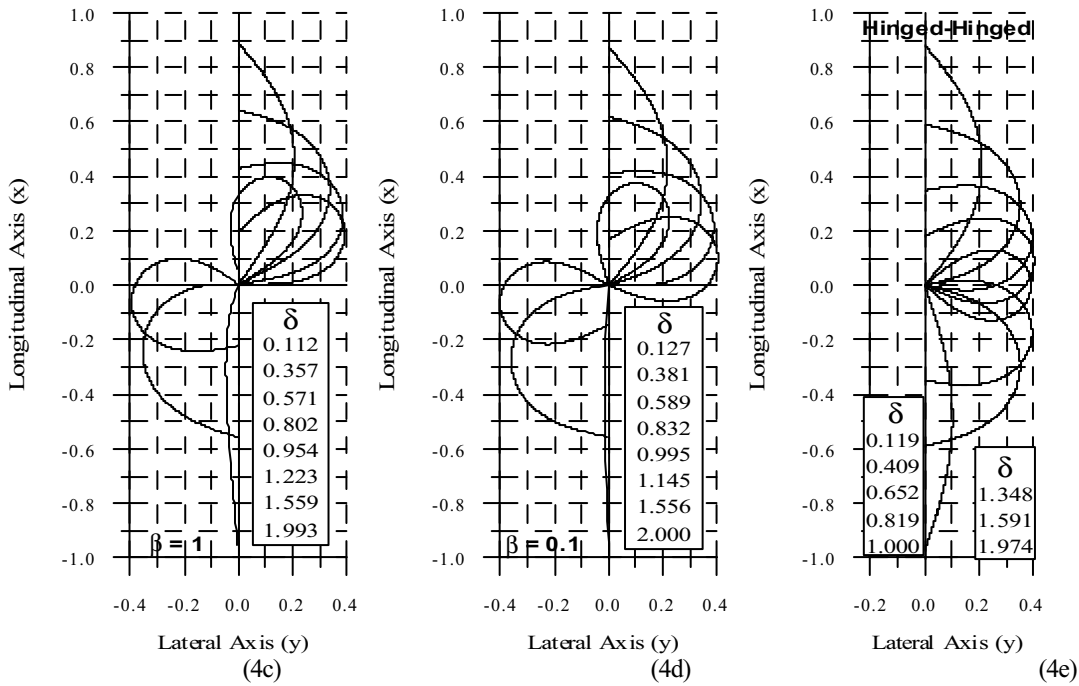


Figure 4. Post-buckling geometric configurations

4. Conclusions

The analytical and numerical techniques presented in this paper have been successfully employed in a two-point boundary value problem governed by a set of five first-order non-linear ordinary differential equations.

The post-buckling configuration of slender elastic rods subjected to terminal forces is highly dependable on the prescribed boundary condition. Results, presented in non-dimensional format, reveal several interesting features such as limit load, jump, hysteresis, bifurcation and non-uniqueness.

The simple but powerful numerical procedure employed may facilitate further developments in two-point boundary value problems such as post-buckling analysis of slender elastic rods subjected to self-weight and applied terminal moments and is the object of research.

5. Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the support from the Brazilian Council of Research (CNPq).

6. References

- Gordon, J. E.: Structures, or why things don't fall down, 1st ed., p. 286. London: Penguin Books 1978.
- Love, A. E. H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed., p. 399. New York: Dover Publications 1944.
- Gottlieb, O., Perkins, N. C.: Local and global bifurcation analyses of a spatial cable elastica. ASME J. Appl. Mech. 66, 352-60 (1999).
- Heinen, A. H., Fischer, O.: Nonlinear vibration and stability analyses on the basis of a kinetic stability theory for arbitrarily curved rods. Archive of Appl. Mech. 68, 46-63 (1998).
- Lu, C. -L., Perkins, N. C.: Complex spatial equilibria of u-joint supported cables under torque, thrust and self-weight. Int. J. Non-Linear Mech. 30, 271-285 (1995).
- Tan, Z., Witz, J. A.: On the flexural-torsional behavior of a straight elastic beam subject to terminal moments. ASME J. Appl. Mech. 60, 498-505 (1993).
- Tan, Z., Witz, J. A.: On the deflected configuration of a slender elastic rod subject to parallel terminal forces and moments. Proc. R. Soc. London Ser. A449, 337-349 (1995).
- Koenig, H. A., Bolle, N. A.: Non-Linear formulation for elastic rods in three-space. Int. J. Non-Linear Mech. 28, 329-335 (1993).
- Timoshenko, S. P., Gere, J. M.: Theory of elastic stability, 2^d ed., p. 76. Singapore: McGraw-Hill International Editions 1961.
- Dym, C. L., Shames, I. H.: Energy and finite element methods in structural mechanics, 1st ed., p. 423. USA: McGraw-Hill Book Company 1985.
- Wang, C. Y.: Post-Buckling of a clamped-simply supported elastica. Int. J. Non-Linear Mech. 32, 1115-1122 (1997).
- El Naschie, M. S.: Stress, stability and chaos in structural engineering: an energy Application, 1st ed., p. 245. England: McGraw-Hill Book Company 1990.

Mathcad: Mathcad 7 Professional for PC, MathSoft Inc. 1997.

APPENDIX A - Derivation of governing equations

Equilibrium of moments on the infinitesimal element of Fig. 1 gives:

$$(M + dM) - M + H dX + P dY = 0 \tag{A1}$$

where M is the bending moment, P and H are the longitudinal and lateral forces, respectively. Dividing Eq. (A1) by dS and employing $dX/dS = \cos\mathbf{q}$ and $dY/dS = \sin\mathbf{q}$ yields:

$$\frac{dM}{dS} + H \cos\mathbf{q} + P \sin\mathbf{q} = 0 \tag{A2}$$

For linear elastic materials Hooke's Law applies and $M = EI K$, where E is the modulus of Young, I is the cross-sectional inertia and $K = d\mathbf{q}/dS$ is the deflected rod curvature. Furthermore variables may be made non-dimensional by using following relations: $S = L s$, $Y = L y$, $X = L x$, $\mathbf{k} = L K$, $P = p EI/L^2$ and $H = h EI/L^2$. Hence Eq. (A2) reduces to (1d). The boundary conditions are: $X(0) = 0$, $Y(0) = 0$, $EI \frac{d\theta}{dS}(0) - C\theta(0) = 0$, $Y(L) = 0$ and $K(L) = 0$ which, in non-dimensional form, results in equation (2a) to (2e). Note that in this context $\beta = \frac{C L}{EI}$.

APPENDIX B - Determination of buckling loads

If small displacements are assumed the governing Eq. (1d) reduces to:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + p \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \tag{B1}$$

Four boundary conditions must be applied:

$$\text{at } x = 0 \quad y(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(0) - \mathbf{b} \frac{dy}{dx}(0) = 0 \tag{B2a}$$

$$\text{at } x = 1 \quad y(1) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(1) = 0 \tag{B2b}$$

Solution of Eq. (B1) is:

$$y(x) = A \sin(\sqrt{p} x) + B \cos(\sqrt{p} x) + C x + D \tag{B3}$$

Application of boundary conditions in Eq. (B3) yields a system of four algebraic equations. To avoid trivial solution the determinant of the coefficients is set equal to zero hence providing the critical loads:

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\mathbf{b}\sqrt{p} & -p & -\mathbf{b} & 0 \\ \sin\sqrt{p} & \cos\sqrt{p} & 1 & 1 \\ -p \sin\sqrt{p} & -p \cos\sqrt{p} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{B4}$$

Results of p as a function of the spring stiffness \mathbf{b} are shown in Fig. 2.

MODELING OF SHAPE MEMORY ALLOYS INCLUDING AN AUSTENITIC PHASE AND THREE VARIANTS OF MARTENSITE: ONE-DIMENSIONAL CASE

Alberto Paiva

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Pedro M. C. L. Pacheco

CEFET/RJ

Departamento de Engenharia Mecânica

20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ

E-Mail: calas@cefet-rj.br

Abstract. The thermomechanical behavior of shape memory alloys (SMAs) may be modeled either by microscopic or macroscopic point of view. Shape memory, pseudoelasticity and thermal expansion are phenomena related to the SMA behavior. Constitutive models consider phenomenological aspects of these phenomena. The present contribution considers a one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory contemplates four phases: three variants of martensite and an austenitic phase. Two different elastic moduli for austenitic and martensitic phases and new constraints are concerned for a correct description of phenomena related to SMA. Thermal expansion phenomenon is also contemplated. A numerical procedure is developed and numerical results show that the proposed model is capable to describe shape memory alloys thermomechanical behavior.

Key-words: Shape memory alloys, constitutive equations.

1. Introduction

Shape memory alloys (SMAs) are a family of metals with the ability of changing shape depending on their temperature. SMAs undergo thermoelastic martensitic transformations which may be induced either by temperature or stress. When a specimen of SMA is stressed at a constant higher temperature, inelastic deformation is observed above a critical stress. This inelastic deformation, however, fully recovers during the subsequent unloading. The stress-strain curve, which is the macroscopic manifestation of the deformation mechanism of the martensite, forms a hysteresis loop (Figure 1a). At a lower temperature, some amount of strain remains after complete unloading. This residual strain may be recovered by heating the specimen (Figure 1b). The first case is the pseudoelastic effect, while the last is the shape memory effect (SME) or one way SME. These effects are inter-related in the sense that, if the hysteresis cycle in the pseudoelastic case is not completed when the applied stress is removed, then reversion of the residual martensite must be induced upon heating, by employing the SME (Sun & Hwang, 1993). In the process of returning to their remembered shape, these alloys can generate large forces which may be useful for actuation (Rogers, 1995). Because of such remarkable properties, SMAs have found a number of applications in engineering.

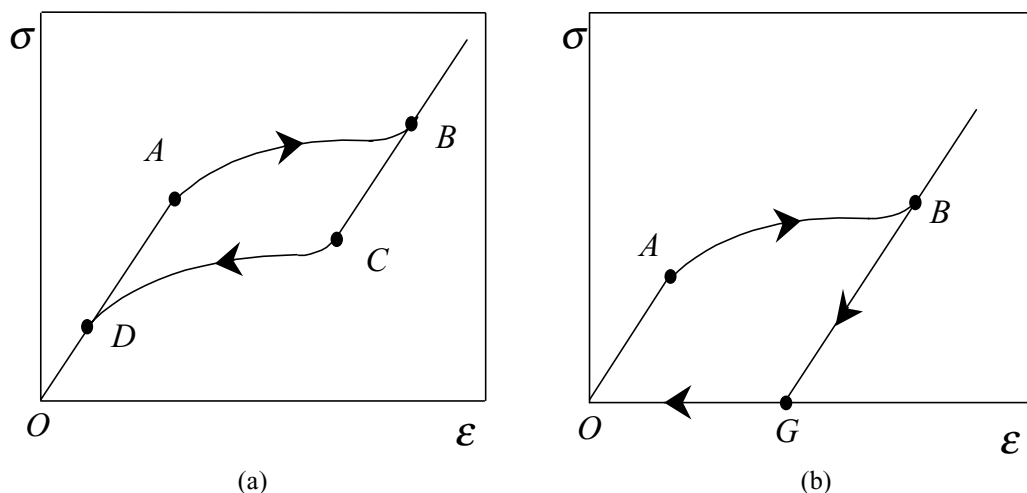


Figure 1. (a) Pseudoelastic effect; (b) Shape memory effect.

Metallurgical studies have revealed the microstructural aspects of the behavior of SMAs. Basically, there are two possible phases on SMAs: austenite and martensite. In martensitic phase, there are plates which may be internally twin-related. Hence, different deformation orientations of crystallographic plates constitute what is known by martensitic variants. On SMAs there are 24 possible martensitic variants which are arranged in 6 plate groups with 4 plate variants per group (Zhang *et al.*, 1991). Schroeder & Wayman (1977) have shown that when a specimen is deformed below a temperature where only martensitic phase is stable, with increasing stress, only one of the 4 variants in a given plate group will begin to grow. This variant is the one that has the largest partial shear stress. On the other hand, because the crystal structure of martensite is less symmetric than the austenite, only a single variant is created on the reverse transformation (Zhang *et al.*, 1991). For one-dimensional cases, it is possible to consider only three variants of martensite on SMAs: the twinned martensite (M), which appears without stress field, and two other martensitic phases (M^+ , M^-), which are induced by positive and negative stress fields, respectively.

The thermomechanical behavior of shape memory alloys may be modeled either by microscopic or macroscopic point of view. Constitutive models consider phenomenological aspects of this behavior (Birman, 1997) and, despite the large number of applications, the modeling of SMA is not well established. The following classification may be considered to the phenomenological theories: Polynomial models, models based on plasticity, model with assumed phase transformation kinetics and models with internal constraints.

Polynomial model was proposed by Falk (1980) and is based on the Devonshire theory for temperature-induced first order phase transition combined with hysteresis. This is a one-dimensional model that defines a polynomial free energy which describes pseudoelasticity and shape memory in a very simple way.

Models based on plasticity exploit the well-established principles of the theory of plasticity. Bertram (1982) proposes a three-dimensional model using the concepts of kinematics and isotropic hardening. Mamiya and co-workers (Silva, 1995; Souza *et al.*, 1998; Motta *et al.*, 1999) also presents models which are capable to describe shape memory and pseudoelastic effects. Auricchio and co-workers also introduces models using these ideas. First, Auricchio & Lubliner (1997) and Auricchio & Sacco (1997) present a one-dimensional model and then, it is extrapolated to include the analysis in the set of three-dimensional media (Auricchio *et al.*, 1997).

Models with assumed transformation kinetics consider that the phase transformation is governed by a known function which is determined through the current values of stress and temperature. Tanaka & Nagaki (1982) proposed the first model based on this formulation. This theory originates other models proposed by Liang & Rogers (1990), Brinson (1993), Boyd & Lagoudas (1994), Ivshin & Pence (1994). Perhaps, these are the most popular models to describe SMA behavior.

Models with internal constraints consider internal variables to describe the volumetric fractions of the material phase and constraints, which establishes the form how the phases may coexist. Fremond (1987, 1996) develops a three-dimensional model which considers three phases: two variants of martensite and an austenitic phase. Limitations of this theory are discussed in Savi & Braga (1993a). Abeyaratne *et al.* (1994) describes phase transformation kinetics with the aid of some constraints based on thermodynamic admissibility rules. The model of Auricchio and co-workers also may be included in this classification.

The present contribution considers a one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory is based on Fremond's model and includes four phases in the formulation: three variants of martensite and an austenitic phase. The inclusion of twinned martensite allows one to describe a stable phase when the specimen is at a lower temperature and free of stress. This is an improvement of the proposed model when compared to the original Fremond's model. Furthermore, two different elastic moduli for austenitic and martensitic phases and new constraints are conceived in the formulation. A thermal expansion term is also included in the formulation. A numerical procedure based on the operator split technique (Ortiz *et al.*, 1983) and on the orthogonal projection algorithm (Savi & Braga, 1993b) is developed. Numerical results show that the proposed model is capable to describe the thermomechanical behavior of shape memory alloys.

2. Constitutive Model

Fremond (1987) has proposed a three-dimensional model for the thermomechanical response of SMA where martensitic transformations are described with the aid of two internal variables. These variables represent volumetric fractions of two variants of martensite (M^+ and M^-), and must satisfy constraints regarding the coexistence of three distinct phases, the third being the parent austenitic phase (A). It has been noted (Savi & Braga, 1993a) that Fremond's original model can not present good results in three-dimensional problems, however, one-dimensional results are qualitatively good. Here, an alternative one-dimensional model is considered introducing a fourth variant of martensitic phase: twinned martensite.

SMA behavior can be characterized by the Helmholtz free energy, ψ , and the potential of dissipation, ϕ . The thermodynamic state is completely defined by a finite number of state variables: deformation, ϵ , temperature, T , the volumetric fractions of martensitic variants, β_1 and β_2 , which are associated with detwinned martensites (M^+ and M^- , respectively) and austenite (A), β_3 . The fourth phase is associated with twinned martensite (M) and its volumetric fraction is β_4 . Each phase have a free energy function as follows,

$$M^+ : \rho\psi_1(\varepsilon, T) = \frac{1}{2}E_M\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon - \Omega_M(T - T_0)\varepsilon \quad (1)$$

$$M^- : \rho\psi_2(\varepsilon, T) = \frac{1}{2}E_M\varepsilon^2 + \alpha\varepsilon - \Omega_M(T - T_0)\varepsilon \quad (2)$$

$$A : \rho\psi_3(\varepsilon, T) = \frac{1}{2}E_A\varepsilon^2 - \frac{L_A}{T_M}(T - T_M) - \Omega_A(T - T_0)\varepsilon \quad (3)$$

$$M : \rho\psi_4(\varepsilon, T) = \frac{1}{2}E_M\varepsilon^2 + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \Omega_M(T - T_0)\varepsilon \quad (4)$$

where α , $L_M=L_M(T)$ and $L_A=L_A(T)$ are material parameters that describe martensitic transformation, E_M and E_A represents the elastic moduli for martensitic and austenitic phases, respectively; Ω_M and Ω_A represents the thermal expansion coefficient for martensitic and austenitic phases, respectively; T_M is a temperature below which the martensitic phase becomes stable in the absence of stress while T_0 is a reference temperature; ρ is the density. A free energy for the mixture can be written as follows,

$$\rho\hat{\psi}(\varepsilon, T, \beta_i) = \rho \sum_{i=1}^4 \beta_i \psi_i(\varepsilon, T) + \hat{\mathbf{J}}(\beta_i) \quad (5)$$

where the volumetric fraction of the phases must satisfy constraints regarding the coexistence of four distinct phases:

$$0 \leq \beta_i \leq 1 \quad (i=1,2,3,4); \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \quad (6)$$

In the absence of stress, detwinned martensites, M^+ and M^- , do not exist. In order to include this physical aspect, an additional constraint must be written,

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{if } \sigma = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1^S = \beta_2^S = 0 \quad (7)$$

where β_1^S and β_2^S are the values of β_1 and β_2 , respectively, when the phase transformation begins to take place. With these considerations, $\hat{\mathbf{J}}$ is the indicator function of the convex τ (Rockafellar, 1970):

$$\tau = \left\{ \beta_i \in \Re \mid 0 \leq \beta_i \leq 1 (i=1, 2, 3, 4); \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1; \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{if } \sigma = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1^S = \beta_2^S = 0 \right\} \quad (8)$$

Using constraints (6), β_4 can be eliminated and the free energy can be rewritten as:

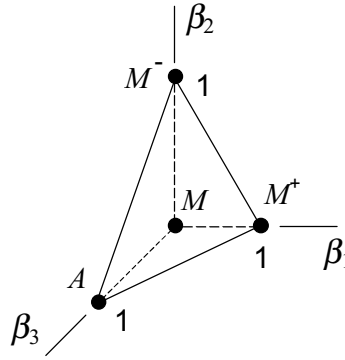
$$\rho\psi(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \rho\tilde{\psi}(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) + \mathbf{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (9)$$

where,

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\psi}(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = & \beta_1 \left[-\alpha\varepsilon - \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) \right] + \beta_2 \left[\alpha\varepsilon - \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) \right] + \\ & + \beta_3 \left[\frac{1}{2}(E_A - E_M)\varepsilon^2 - \frac{L_A + L_M}{T_M}(T - T_M) - (\Omega_A - \Omega_M)(T - T_0)\varepsilon \right] + \frac{1}{2}E_M\varepsilon^2 + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \Omega_M(T - T_0)\varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

Now, \mathbf{J} represents the indicator function of the tetrahedron π of the set (Figure 2),

$$\pi = \left\{ \beta_i \in \Re \mid 0 \leq \beta_i \leq 1 (i=1, 2, 3); \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq 1; \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{if } \sigma = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1^S = \beta_2^S = 0 \right\} \quad (11)$$


 Figure 2. Tetrahedron of the constraints π .

State equations can be obtained from the Helmholtz free energy as follows:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon} = [E_M - \beta_3(E_M - E_A)]\varepsilon + \alpha(\beta_2 - \beta_1) - [\Omega_M - \beta_3(\Omega_M - \Omega_A)](T - T_0) \quad (12)$$

$$B_1 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_1} - \partial_1 J = \alpha\varepsilon + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \partial_1 J \quad (13)$$

$$B_2 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_2} - \partial_2 J = -\alpha\varepsilon + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \partial_2 J \quad (14)$$

$$B_3 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_3} - \partial_3 J = -\frac{1}{2}(E_A - E_M)\varepsilon^2 + \frac{L_M + L_A}{T_M}(T - T_M) + (\Omega_A - \Omega_M)(T - T_0)\varepsilon - \partial_3 J \quad (15)$$

where B_i are thermodynamic forces and σ represents the uniaxial stress; ∂_i is the *sub-differential* with respect to β_i (Rockafellar, 1970). Lagrange multipliers offer a good alternative to represent sub-differentials of the indicator function (Savi & Braga, 1993b). Considering a pseudo-potential of dissipation of the following type,

$$\phi(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3) = \frac{\eta}{2}(\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2) \quad (16)$$

where η is a parameter associated with the internal dissipation of the material. At this point, it is possible to write the following complementary equations:

$$B_i = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}_i} = \eta \dot{\beta}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

These equations form a complete set of constitutive equations. Since the pseudo-potential of dissipation is convex, positive and vanishes at the origin, the Clausius-Duhem inequality (Eringen, 1967), is automatically satisfied if the entropy is defined as $s = -\partial \psi / \partial T$.

Further, it is important to consider the definition of the parameters $L_M = L_M(T)$ and $L_A = L_A(T)$, which is obtained assuming $\dot{\beta}_1 = 0$ and $\varepsilon = \varepsilon_R = \alpha / E_M$ in a critical temperature, T_C , below which there is no residual strain. Hence, using these conditions in Equation (14), the following expressions are obtained,

$$L_M(T) = \begin{cases} L_M = L, & \text{if } T \geq T_C \\ L_M = L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)}, & \text{if } T < T_C \end{cases} \quad (18)$$

$$L_A(T) = \begin{cases} L_A = L, & \text{if } T \geq T_C \\ L_A = 2L - \left[L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)} \right], & \text{if } T < T_C \end{cases} \quad (19)$$

3. Numerical Procedure

In order to solve the governing equations, an algorithm based on the operator split technique (Ortiz *et al.*, 1983) are conceived. The procedure isolates the sub-differentials and uses the implicit *Euler's method* combined with an *orthogonal projection* algorithm (Savi & Braga, 1993b) to evaluate evolution equations. Orthogonal projections assure that volumetric fractions of the martensitic variants will obey the imposed constraints. In order to satisfy constraints expressed in (6), values of volumetric fractions must stay inside or on the boundary of π , the tetrahedron shown in Figure 2. For instance, if trial values of volumetric fractions calculated by (17) fall outside the region π , $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3)$, the projection are prescribed in such a way that the result will be pulled to the nearest point on the boundary of the tetrahedron, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (Figure 3).

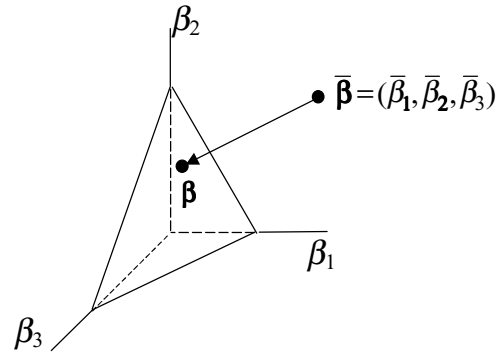


Figure 3. Orthogonal projection in tetrahedron of the constraints π .

4. Numerical Simulations

In order to evaluate the response predicted by the proposed model, a SMA specimen which properties are presented in Table 1, is subjected to thermomechanical loadings.

Table 1. Thermomechanical properties.

E_A (GPa)	E_M (GPa)	α (GPa)	L (MPa/ $^{\circ}$ C)	η (MPa/ $^{\circ}$ C)
67.0	26.3	0.228	61.6	70,000

Ω_A (MPa/ $^{\circ}$ C)	Ω_M (MPa/ $^{\circ}$ C)	T_M ($^{\circ}$ C)	T_0 ($^{\circ}$ C)
0.55	0.35	18.4	25

At first, the pseudoelastic effect is contemplated regarding a SMA specimen subjected to a mechanical loading with a constant temperature ($T = 60^{\circ}$ C). The stress-strain curve for stress driving cases is presented in Figure 4a. Notice that there are two different elastic moduli for the austenitic and martensitic phase. Figure 4b shows the volumetric fraction evolution of each phase, allowing the identification of phase transformation process. When the specimen is free of stress, the austenitic phase is stable. After this, positive stresses induce the formation of the M^+ variant of martensite. The unloading process induces the austenite formation again. When there are negative stresses, the M^- variant of martensite is induced. Finally, the unloading process induces the formation of the austenitic phase (A).

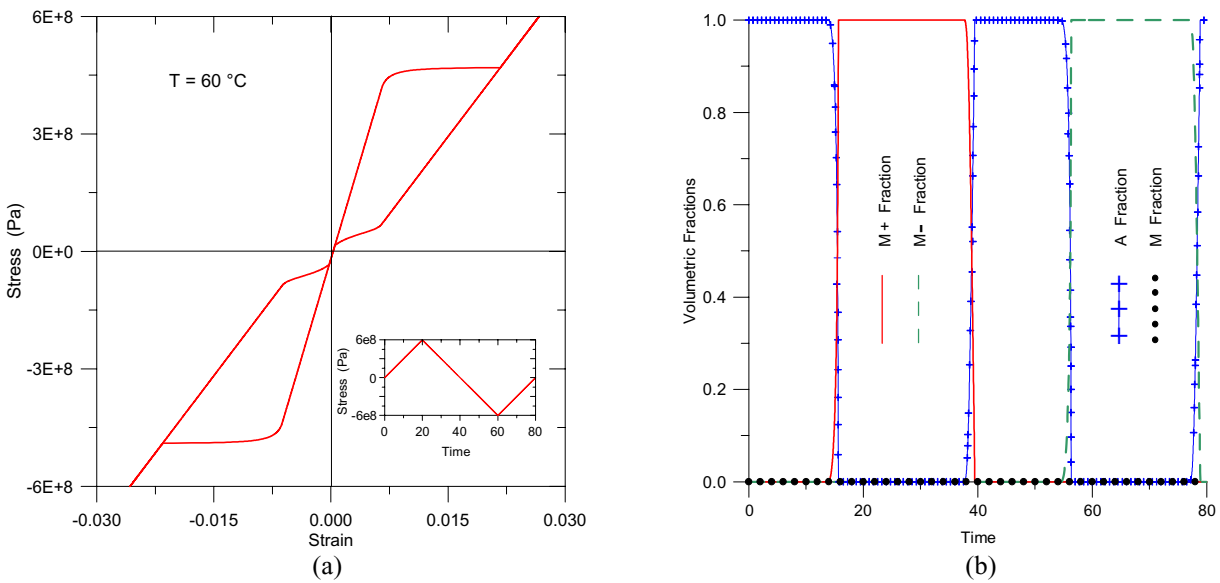


Figure 4. Pseudoelastic effect ($T = 60\text{ }^{\circ}\text{C} > T_A$). (a) Stress-strain curve; (b) Volumetric fractions.

The shape memory effect is now focused regarding a thermomechanical loading depicted in Figure 5a. Firstly, one conceives a constant temperature $T = -10\text{ }^{\circ}\text{C}$, where the martensitic phase is stable. After mechanical loading-unloading process, the specimen presents a residual strain that can be eliminated by a subsequent thermal loading (Figure 5a). Notice that the stress-strain-temperature curve represents the shape memory effect and it is important to observe that there is a stable phase, associated with the twinned martensite (M), when the specimen is free of stress. The heating process induces the transformation from detwinned martensite, $M+$, to twinned martensite, M and, for higher temperatures, the austenitic phase (A). The nonlinear behavior promoted by phase transformation can be observed in the detailed zoom of Figure 5a. Figure 5b shows the volumetric fraction evolution of each phase, pointing out the cited phase transformation.

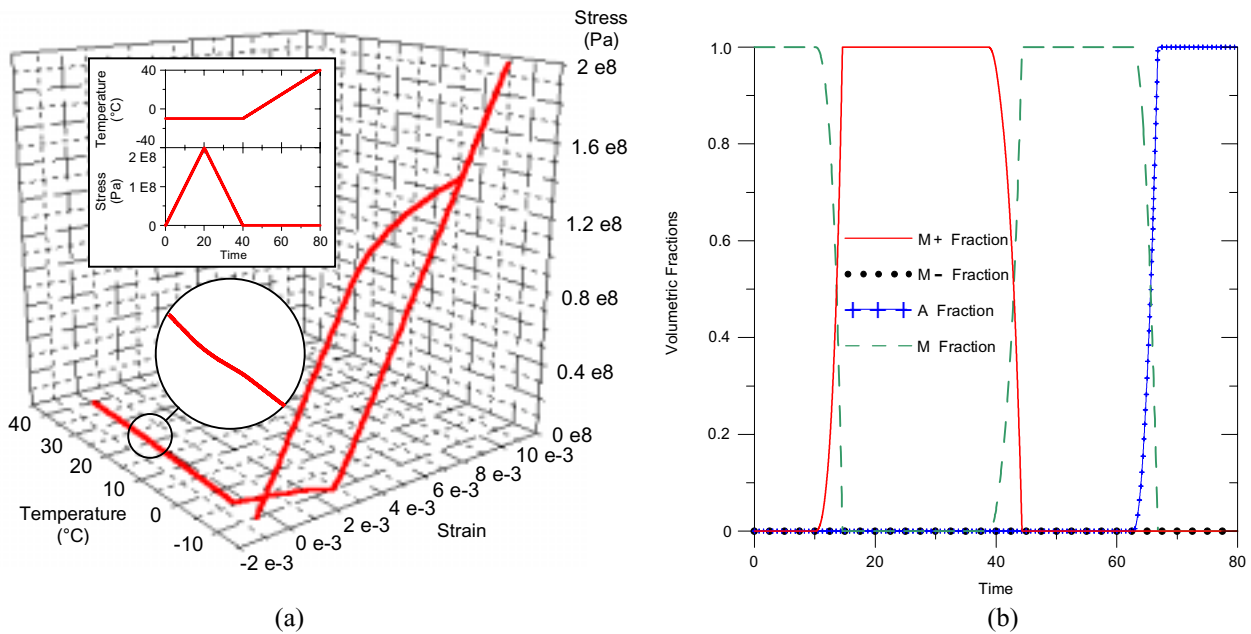


Figure 5. Shape Memory effect.

The thermal expansion effect is now considered regarding a thermal loading depicted in Figure 6a, free of stress. Figure 6a presents the strain-temperature curve, showing the thermal expansion and the phase transformations related to a thermal loading. Notice the hysteretic characteristics of phase transformation, defined by the critical temperature T_M (vertical line at $18.4\text{ }^{\circ}\text{C}$). Experimental data presented by Jackson *et al.* (1972) show a similar curve, indicating that the model is capable to describe the coupling between shape memory effects and thermal expansion. Figure 6b presents the volumetric fraction evolution of each phase, showing the conversion between twinned martensite (M) and austenite (A).

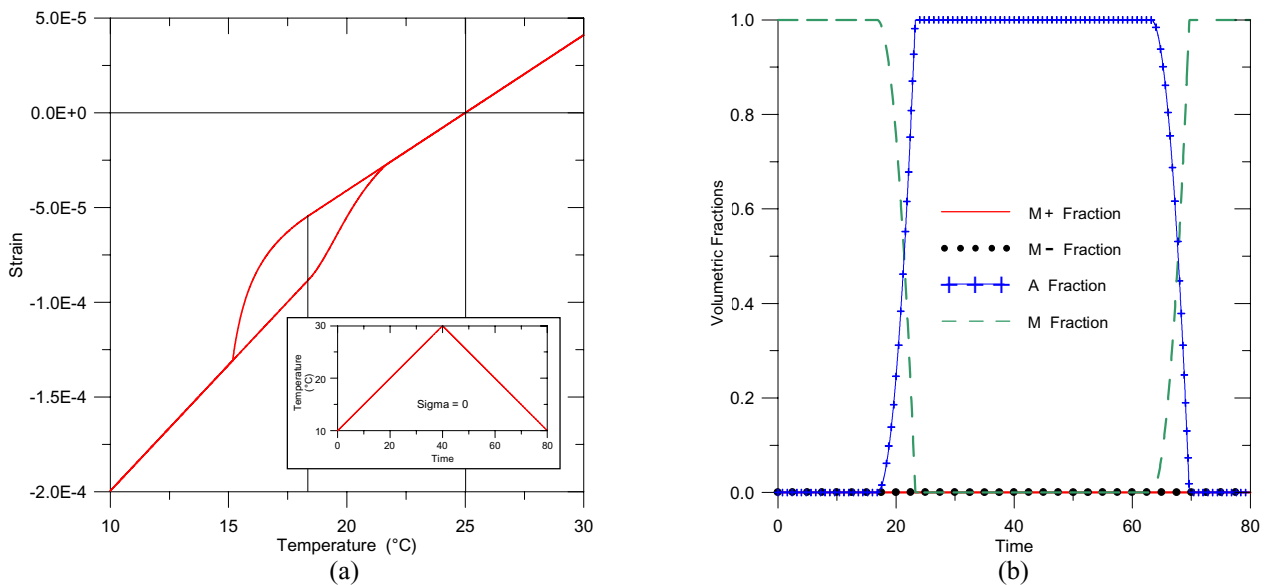


Figure 6. Thermal expansion effect.

5. Conclusions

The present contribution proposes a new one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory considers the twinned martensite in the formulation and, as a consequence, there is a stable phase when the material is free of stress at low temperatures. The consideration of different elastic moduli for austenite and martensite is another improvement of the theory. The inclusion of the constraint which establishes that the detwinned martensites does not exist in the absence of stresses, and also the thermal expansion term allows one to describe the coupling between shape memory effect and thermal expansion phenomena. A numerical procedure based on the operator split technique associated with a orthogonal projection algorithm is developed. Numerical results show that the proposed model is capable to describe the main aspects of thermomechanical behavior of shape memory alloys. Some features are still needed to be contemplated in the proposed model and one could mention the elimination of the softening behavior for strain driving case and also the internal loops observed during cyclic loads associated with incomplete phase transformations.

6. Acknowledgements

The authors acknowledge the support of CNPq, CAPES and FAPERJ.

7. References

- Abeyaratne, R., Kim, S.J. & Knowles, J.K., 1994, "A One-Dimensional Continuum Model for Shape Memory Alloys", *Int. J. Solids and Structures*, v.31, pp.2229-2249
- Auricchio, F. & Lubliner, J., 1997, "A Uniaxial Model for Shape Memory Alloys", *Int. J. of Solids and Structures*, v.34, n.27, pp. 3601-3618.
- Auricchio, F. & Sacco E., 1997, "A One-Dimensional Model for Superelastic Shape Memory Alloys with Different Elastic properties Between Austenite and Martensite", *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, v. 32, n.6, pp.1101-1114
- Auricchio, F., Taylor, R.L. & Lubliner, J., 1997, "Shape-Memory Alloys: Macromodeling and Numerical Simulations of the Superelastic Behavior", *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, v.146, pp. 281-312.
- Bertran, A., 1982, "Thermo-Mechanical Constitutive Equations for the Description of Shape Memory Effects in Alloys", *Nuclear Eng. and Design*, v.74, pp. 173-182.
- Birman, V., 1997, "Review of Mechanics of Shape Memory Alloy Structures", *Applied Mechanics Review*, v. 50, pp.629-645.
- Boyd, J.G. & Lagoudas, D.C., 1994, "Constitutive Model for Simultaneous Transformation and Reorientation in Shape Memory Alloys", *Mech. of Phase Transf. and Shape Memory Alloys*, L.C. Brinson and B. Moran (eds), ASME New York, pp. 159-177.
- Brinson, L.C., 1993, "One Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Themomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable", *J. Intelligent Material Systems and Structures*, n.4, pp.229-242.

- Eringen, A.C., 1967, “*Mechanics of Continua*”, John Wiley & Sons.
- Falk, F., 1980, “Model Free-Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys”, *ACTA Metallurgica*, v.28, pp.1773-1780.
- Fremont, M., 1987, “Matériaux à Mémoire de Forme”, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Tome 34, s.II, n.7, pp. 239-244.
- Fremont, M., 1996, “Shape Memory Alloy: A Thermomechanical Macroscopic Theory”, CISM courses and lectures, Springer Verlag.
- Ivshin, Y. & Pence, T.J., 1994, “A Constitutive Model for Hysteretic Phase Transition Behavior”, *Int. J. Eng. Sci.*, n.32, pp. 681-704.
- Jackson, C.M., Wagner, H.J. & Wasilewski, R.J., 1972, “55-Nitinol – The Alloy with a Memory: Its Physical Metallurgy, Properties and Applications”, *NASA Report SP-5110*.
- Liang, C. & Rogers, C.A., 1990, “One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials”, *J. Intelligent Material Systems and Structures*, n.1, pp.207-234.
- Motta, L.B., Guillén, L.L., Mamiya, E.N. & Vianna, D.M., 1999, “A Study on the Hardening in Particular Model for Pseudoelastic Materials”, *COBEM 99 - 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Rockafellar, R.T., 1970, “*Convex Analysis*”, Princeton Press.
- Rogers, C.A., 1995, “Intelligent Materials”, *Scientific American*, September, pp.122-127.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993a, “Chaotic Vibrations of an Oscillator with Shape Memory”, *J. Brazilian Society for Mechanical Sciences - RBCM*, v.XV, n.1, pp.1-20, 1993.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993b, “Chaotic Response of a Shape Memory Oscillator with Internal Constraints”, *COBEM 93 - 12th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Schroeder, T.A. & Wayman, C.M., 1977, “The Formation of Martensite and the Mechanism of the Shape Memory Effect in Single Crystals of Cu-Zn Alloys”, *Acta Metallurgica*, v.25, pp.1375.
- Silva, E.P., 1995, “*Modelagem Mecânica de Transformações de Fase Induzidas por Tensões em Sólidos*”, Dissertação de Mestrado, UnB - Departamento de Engenharia Mecânica.
- Souza, A.C., Mamiya, E.N. & Zouain, N., 1998, “Three-Dimensional Model for Solids Undergoing Stress-induced Phase Transformations”, *European J. Mechanics A - Solids*, v.17, pp.789-806.
- Sun, Q.P. & Hwang, K.C., 1993, “Micromechanics Modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys: II-Study of the Individual Phenomena”, *J. Mech.Phys. Solids*, v.41, n.1, pp.19-33.
- Tanaka, K. & Nagaki, S., 1982, “Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transformation”, *Ingenieur – Archiv.*, v.51, pp.287-299.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. & Taylor, R.L., 1983, “Operator Split Methods for the Numerical Solution of the Elastoplastic Dynamic Problem”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.39, pp.137-157.
- Zhang, X.D., Rogers, C.A. & Liang, C., 1991, “Modeling of Two-Way Shape Memory Effect”, *ASME - Smart Structures and Materials*, v.24, pp.79-90.

QUENCHING GENERATED RESIDUAL STRESSES IN STEEL CYLINDERS

Pedro M. C. L. Pacheco

CEFET/RJ, Department of Mechanical Engineering
20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil
E-Mail: calas@cefet-rj.br

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia, Department of Mechanical and Materials Engineering
22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brazil
E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Arnaldo F. Camarão

Debis Humaitá IT- Services Latin America Ltda.
Al. Campinas, 1070, Jd.Paulista
01.404.002 - São Paulo - SP - Brazil
E-Mail: afcamarao@debis-humaita.com.br

Abstract. Internal stresses generated during quenching can produce warping and even cracking of a steel body, and therefore, the prediction of such stresses is an important task. Phenomenological aspects of quenching involve couplings among different physical processes occurring in the phenomena. The present contribution regards on modelling and simulation of quenching, presenting an anisothermal model formulated within the formalism of continuum mechanics and thermodynamics of irreversible processes. This procedure allows one to identify couplings, estimating the effect of each one. A numerical procedure is developed based on operator split technique associated with an iterative numerical scheme in order to deal with nonlinearities in the formulation. With this assumption, coupled governing equations are solved from four non-coupled problems: Thermal, phase transformation, thermoelastic and elastoplastic. The proposed general formulation is applied to analyse progressive induction hardening of steel cylinders. Numerical results show that the proposed model is capable of capturing the main behaviour observed on experimental data.

Key-words: Quenching, Phase Transformation, Numerical Simulation, Modeling.

1. Introduction

Quenching is a commonly used heat treatment to increase the strength of steels by the formation of a hard microstructure called martensite. In brief, quenching consists of raising the temperature of the steel above a certain critical temperature, called austenitizing temperature, holding it at that temperature for a fixed time, and then rapidly cooling it in a suitable medium to room temperatures. The resulting microstructures formed from quenching (pearlite, bainite and martensite) depend on cooling rate and on steel characteristics expressed in isothermal transformation (IT) diagram. If the steel is cooled sufficient rapidly following austenitizing, the formation of pearlite and bainite is avoided, and martensite is produced. Martensite formation begins at M_s , which is the temperature where martensite starts to form under stress-free state, and finished at M_f , the temperature where martensite finishes its formation. In order to enhance the ability to avoid austenite decomposition before M_s is reached, and thus to achieve a totally martensitic microstructure, alloying elements are added to steels promoting a convenient alteration of IT curves. The volume expansion associated with the formation of martensite combined with large temperature gradients and non-uniform cooling promote high residual stresses in quenching steels. The prediction of such stresses is a rather difficult task.

Phenomenological aspects of quenching involve couplings among different physical processes occurring in the phenomena and, therefore, its description is unusually complex. Basically, three couplings are essential: thermal phenomena, phase transformation and mechanical aspects.

Thermal Phenomena: Temperature gradients resulting from heat transfer problem are associated with changes in physical properties of the material;

Phase Transformation: When phase transformation takes place it causes a kinetic modification and sometimes leads to a different morphology in the phase produced. Also, there is a mechanical modification related to the progress of transformation, and takes place when plastic deformation occur under stresses lower than the yield stress of the material;

Mechanical: temperature evolution and phase transformations cause elastic and plastic deformations, resulting in residual stresses.

Usually, quenching represents one of last stages in the fabrication of mechanical components. Since the process may induce distortion or even cracking, it is important to predict residual stresses caused by this process. Many authors are devoted to this aim (Denis *et al.*, 1985; Denis *et al.*, 1999; Woodard, *et al.*, 1999; Sjöström, 1985; Sen *et al.*, 2000), however, the proposed models are not general and usually are applicable to simple geometry.

Progressive induction hardening, applied to bodies previously quenched and tempered, is a heat treatment process carried out by moving a workpiece at a constant speed through a coil and a cooling ring. Applying an alternating current to the coil, a magnetic field is generated which induces eddy currents in the workpiece and through the eddy current losses it becomes heated. During heating, a thin surface layer of austenite is formed. At subsequent quenching, this

layer is transformed into martensite, pearlite, bainite and proeutectoid ferrite/cementite depending on, among other things, the cooling rate. A hard surface layer with high compressive residual stresses, combined with a tough core with tensile residual stresses, is often obtained.

The present contribution regards on modelling and simulation of quenching process, presenting an anisothermal model formulated within the formalism of continuum mechanics and thermodynamics of irreversible processes. Therefore, it is possible to identify couplings, estimating the effect of each one on the process. A numerical procedure is developed based on the operator split technique (Ortiz *et al.*, 1983) associated with an iterative numerical scheme in order to deal with nonlinearities in the formulation. With this assumption, the coupled governing equations are solved from four non-coupled problems: Thermal, phase transformation, thermoelastic and elastoplastic. The proposed general formulation is applied to progressive induction hardening of steel cylinders. Numerical results show that the proposed model is capable of capturing the main behaviour observed on experimental data.

2. Phenomenological Aspects of Phase Transformation

Deformation of the material during phase transformation process from austenite to martensite results from interactions of many phenomena. It is postulated here that the total strain increment $d\epsilon_{ij}$, can be divided into five parts (Sjöström, 1985):

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^T + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^{lv} + d\epsilon_{ij}^{tp} \quad (1)$$

where i and j assume 1, 2 and 3; $d\epsilon_{ij}^e$, $d\epsilon_{ij}^T$ and $d\epsilon_{ij}^p$ are, respectively, increments of elastic, thermal and plastic strains observed in thermoelastoplastic materials (Lemaitre & Chaboche, 1990). Also, $d\epsilon_{ij}^{lv}$ and $d\epsilon_{ij}^{tp}$ are associated with phase transformation process, being denoted, respectively, by volumetric and transformation plasticity deformations.

Phase transformation from austenite to martensite is related to a volumetric expansion, which usually is near 4%. Therefore, when part of a material experiments phase transformation, there is an increment of volumetric deformation, $d\epsilon_{ij}^{lv}$, given by (Denis *et al.*, 1985),

$$d\epsilon_{ij}^{lv} = \gamma d\beta \delta_{ij} \quad (2)$$

where $d\beta$ is the increment of volumetric fraction of martensitic phase formed during the decrease in temperature; γ is a material property related to the total expansion associated with martensitic transformation and δ_{ij} is the Kronecker delta.

The increment of transformation plasticity deformation, $d\epsilon_{ij}^{tp}$, is the result of several physical mechanisms. The development of a model for material behaviour may be based on phenomenological aspects where the martensitic transformation causes localised plastic deformation. Many authors agree with the following expression to describe the phenomenon (Denis *et al.*, 1985; Sjöström, 1985; Desalos *et al.*, 1982):

$$d\epsilon_{ij}^{tp} = (3\kappa \sigma_{ij}^d)(1-\beta)d\beta \quad (3)$$

where κ is a material parameter and $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \delta_{ij}(\sigma_{kk}/3)$ is the deviator stress component. It should be emphasised that this deformation may be related to stress states that are inside the yield surface.

The kinetics of phase transformation from austenite to martensite may be expressed by the equation proposed by Koistinen and Marburger (Koistinen & Marburger, 1959),

$$\beta = 1 - \exp[-k(M_s - T)] \quad (4)$$

where k is a material constant, T is the temperature and M_s is the temperature where martensite starts to form under stress-free state. It is also convenient to define the temperature where martensite finishes its formation as follows: $M_f = M_s - 2\log(10)/k$.

3. Constitutive Model

The thermodynamic state of a solid is completely defined by the knowledge of state variables. Constitutive equations may be formulated within the formalism of continuum mechanics and thermodynamics of irreversible processes, by considering thermodynamic forces, defined from the Helmholtz free energy, ψ , and thermodynamic fluxes, defined from the pseudo-potential of dissipation, ϕ (Lemaitre & Chaboche, 1990).

The quenching model here proposed allows one to identify different coupling phenomena, estimating the effect of each one on the process. With this aim, a Helmholtz free energy is proposed as a function of observable variables, total deformation, ε_{ij} , and temperature, T ; also, internal variables are regarded: plastic deformation, ε_{ij}^p , volumetric fraction of martensitic phase, β , and another set of variables associated with phase transformation, hardening and damage effects. Here, this set considers a variable related to kinematic hardening, α_{ij} and two variables related to martensitic phase transformation: volumetric deformation, ε_{ij}^{lv} and transformation plasticity deformation, ε_{ij}^{lp} . Therefore, the following free energy is conceived,

$$\rho \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \alpha_{ij}, \beta, T) = W(\varepsilon_{ij}^e, \alpha_{ij}, \beta, T) = W_e(\varepsilon_{ij}^e) + W_\alpha(\alpha_{ij}) + W_\beta(\beta) - W_T(T) \quad (5)$$

where $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \alpha_T(T - T_0)\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{lv} - \varepsilon_{ij}^{lp}$ is the elastic deformation and energy functions are expressed by the following expressions which conceives summation convention,

$$\left\{ \begin{array}{l} W_e = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e \quad ; \quad W_\alpha(\alpha_{ij}) = \frac{1}{2} H_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} \\ W_\beta(\beta) = I_\beta \quad ; \quad W_T(T) = \rho \int_{T_0}^T C_1 \log(\xi) d\xi + (\rho/2) C_2 T^2 \end{array} \right. \quad (6)$$

The components E_{ijkl} and H_{ijkl} are associated with elastic and hardening tensors and α_T is the coefficient of linear thermal expansion. These parameters are temperature dependent; C_1 e C_2 are positive constants, T_0 is a reference temperature and ρ the material density; $I_\beta(\beta)$ is the indicator function associated with convex $C_\beta = \{\beta \mid 0 \leq \beta \leq 1\}$ [10].

Thermodynamical forces $(\sigma_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, X_{ij}, Z, s)$, associated with state variables $(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^{lv}, \varepsilon_{ij}^{lp}, \alpha_{ij}, \beta, T)$, are defined from W , as follows (Lemaitre & Chaboche, 1990):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad ; \quad P_{ij} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \sigma_{ij} \quad ; \quad Q_{ij} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^{lv}} = \sigma_{ij} \quad ; \quad R_{ij} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^{lp}} = \sigma_{ij} \quad (7)$$

$$X_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ij}} = H_{ijkl} \alpha_{kl} \quad ; \quad Z \in \partial_\beta I_\beta(\beta) \quad ; \quad s = -(1/\rho) \frac{\partial W}{\partial T} \quad (8)$$

where $\partial_\beta I_\beta(\beta)$ is the subdifferential of the indicator function I_β (Rockafellar, 1970).

In order to describe dissipation processes, it is necessary to introduce a potential of dissipation $\phi(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lv}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lp}, \dot{\alpha}_{ij}, \dot{\beta}, q_i)$, which can be split into two parts: $\phi(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lv}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lp}, \dot{\alpha}_{ij}, \dot{\beta}, q_i) = \phi_1(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lv}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{lp}, \dot{\alpha}_{ij}, \dot{\beta}) + \phi_2(q_i)$. Also, this potential can be written through its dual $\phi^*(P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, X_{ij}, Z, g_i) = \phi_1^*(P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, X_{ij}, Z) + \phi_2^*(g_i)$, as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^* = I_f^*(P_{ij}, X_{ij}) + \gamma \dot{\beta} Q_{ij} + \frac{3\kappa \dot{\beta} (1 - \beta)}{2} \left(R_{ij} - \frac{R_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \left(R_{ij} - \frac{R_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + \zeta(T, \dot{T}) Z \\ \phi_2^* = \frac{T}{2} \Lambda g_i g_i \end{array} \right. \quad (9)$$

where $\zeta(T, \dot{T})$ is a function associated with phase transformation kinetics, $g_i = (1/T) \partial T / \partial x_i$ and Λ is a material parameter which is function of temperature; $I_f^*(P_{ij}, X_{ij})$ is the indicator function associated with elastic domain, related to the *von Mises* criterion,

$$f(P_{ij}, X_{ij}) = \left[\frac{3}{2} (P_{ij}^d - X_{ij}^d)(P_{ij}^d - X_{ij}^d) \right]^{1/2} - \sigma_Y \leq 0 \quad (10)$$

σ_Y is the material yield stress, $X_{ij}^d = X_{ij} - \delta_{ij}(X_{kk}/3)$ and $P_{ij}^d = \sigma_{ij}^d$. A set of evolution laws obtained from ϕ^* characterises dissipative processes,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p \in \partial_{P_{ij}} I_f^*(P_{ij}, X_{ij}) = \lambda \text{sign}(\sigma_{ij} - H_{ijkl} \alpha_{kl}) \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{tv} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Q_{ij}} = \gamma \dot{\beta} \delta_{ij} \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{tp} = \frac{\partial \phi^*}{\partial R_{ij}} = 3\kappa \dot{\beta} (1 - \beta) \sigma_{ij}^d \quad (13)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} \in -\partial_{X_{ij}} I_f^*(\sigma_{ij}, X_{ij}) = \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (14)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial Z} = -\zeta(T, \dot{T}) \quad (15)$$

$$q_i = -\frac{\partial \phi^*}{\partial g_i} = -\Lambda T g_i = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (16)$$

where $\text{sign}(x) = x / |x|$; q_i is the heat flux vector, λ is the plastic multiplier (Lemaitre & Chaboche, 1990) and $\zeta(T, \dot{T})$ is defined by the following equation:

$$\zeta(T, \dot{T}) = \begin{cases} k\dot{T} \exp[-k(M_s - T)] & \text{if } M_s \geq T \geq M_f \\ 0 & \text{if } T > M_s \text{ and } T < M_f \end{cases} \quad (17)$$

Using the following definition for the specific heat $c = -(T/\rho) \partial^2 W / \partial T^2$ and the set of constitutive equations (7-8,11-16), the heat equation can be written as:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho c \dot{T} = -a_I - a_T \quad (18)$$

where

$$a_I = \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^{tv} + \dot{\epsilon}_{ij}^{tp}) - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - Z \dot{\beta} \quad ; \quad a_T = T \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial X_{ij}}{\partial T} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial Z}{\partial T} \dot{\beta} \right) \quad (19)$$

The term a_I is denoted as internal coupling and is always positive. It has a role in (18) similar to a heat source in the classical heat equation for rigid bodies. The term a_T is denoted by thermal coupling and can be either positive or negative.

With these assumptions, the set of constitutive equations formed by (7-8,11-16) verify the inequality established by the second law of thermodynamics which can be expanded in a local form as:

$$\begin{cases} d_1 = \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^{tv} + \dot{\epsilon}_{ij}^{tp}) - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - Z \dot{\beta} \geq 0 \\ d_2 = -(q_i g_i) \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

The term d_1 represents mechanical dissipation while d_2 is thermal dissipation.

In metal forming, the thermomechanical coupling is usually taken into account by an empirical constant called the heat conversion factor, which represents part of plastic power transformed into heat (Pacheco,1994):

$$\chi = \frac{a_I + a_T}{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (21)$$

4. Cylindrical Bodies

This contribution considers cylindrical bodies as applications of the proposed general formulation. Other references present different analysis of this problem (Pacheco *et al.*, 1997; Camarão *et al.*, 2000). With this assumption, heat transfer analysis may be reduced to one-dimensional problem. Also, a plane stress or plane strain state can be conceived. Under these assumptions, only radial, r , tangential, θ , and longitudinal, z , components need to be considered and a one-dimensional model is formulated. This section presents the simplified model employed to simulate cylindrical bodies. In order to present the simplified equations, the normal components of the second order tensors (ε_{ij} , σ_{ij} , α_{ij} , for $i = j$) are denoted by $(\)_i$ with $i = r, \theta, z$ and the summation convention is not evoked.

At first, consider the isotropic Hooke's law to establish a relation among stresses and elastic strains (Boley & Weiner, 1985):

$$\varepsilon_r^e = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (22)$$

$$\varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad (23)$$

$$\varepsilon_z^e = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (24)$$

where E and ν are, respectively, Young modulus and Poisson's coefficient. Thermal strain is defined as:

$$\varepsilon_i^T = \alpha_i(T - T_0), \quad \text{for } i = r, \theta, z. \quad (25)$$

The evolution equations for plastic variables are described by,

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \lambda \text{sign}(\sigma_i - H\alpha_i), \quad \text{for } i = r, \theta, z. \quad (26)$$

where H is a material parameter associated with kinematic hardening and λ is a plastic multiplier from the classical theory of plasticity (Lemaitre & Chaboche, 1990; Chakrabarty, 1987). The yield function, associated with elastic domain, is defined employing the *von Mises* criteria,

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r^* - \sigma_z^*)^2 + (\sigma_r^* - \sigma_\theta^*)^2 + (\sigma_\theta^* - \sigma_z^*)^2]} - \sigma_Y \leq 0 \quad (27)$$

with the following definitions

$$\sigma_i^* = \sigma_i^d - H \alpha_i^d, \quad \sigma_i^d = \sigma_i - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}, \quad \alpha_i^d = \alpha_i - \frac{\alpha_r + \alpha_\theta + \alpha_z}{3}, \quad \text{for } i = r, \theta, z. \quad (28)$$

The evolution equations for the deformation related to martensitic phase transformation are described by,

$$\dot{\varepsilon}_i^{tv} = \gamma \dot{\beta}, \quad \text{for } i = r, \theta, z. \quad (29)$$

$$\dot{\varepsilon}_i^{tp} = 3\kappa \dot{\beta} (1 - \beta) \sigma_i^d, \quad \text{for } i = r, \theta, z. \quad (30)$$

At this point, it is necessary to consider kinematics relations among strains and the radial displacement, u , which is written as follows

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (31)$$

Three-dimensional equilibrium equations are reduced to

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (32)$$

Furthermore, heat conduction problem is governed by the one-dimensional energy equation, (Boley & Weiner, 1985):

$$-\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r}q = \rho c \dot{T} \quad (33)$$

and the constitutive relation between heat flux and temperature is established by the Fourier law,

$$q = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (34)$$

where Λ is the coefficient of thermal conductivity.

5. Numerical Procedure

The numerical procedure here proposed is based on the operator split technique (Ortiz *et al.*, 1983; Pacheco, 1994) associated with an iterative numerical scheme in order to deal with nonlinearities in the formulation. With this assumption, coupled governing equations are solved from four non-coupled problems: Thermal, phase transformation, thermoelastic and elastoplastic.

Thermal Problem - Consists on a radial conduction problem with surface convection. Material properties depend on temperature, and therefore, the problem is governed by nonlinear parabolic equations. An implicit predictor-corrector procedure is used for numerical solution (Pacheco, 1994; Ames, 1992).

Phase Transformation Problem - Volumetric fraction of martensitic phase is determined in this problem. Evolution equations are integrated from a simple implicit Euler method (Ames, 1992, Nakamura, 1993).

Thermoelastic Problem - Stress and displacement fields are evaluated from temperature distribution. Numerical solution is obtained employing a shooting method procedure (Ames, 1992, Nakamura, 1993).

Elastoplastic Problem - Stress and strain fields are determined considering the plastic strain evolution in the process. Numerical solution is based on the classical return mapping algorithm (Simo & Miehe, 1992; Simo & Hughes, 1998).

6. Numerical Simulations

As an application of the general proposed model, numerical investigations of quenching of long steel cylindrical bar (SAE 4140H) are carried out simulating a progressive induction (PI) hardening.

Material parameters of the cylinder are the following (Denis *et al.*, 1985; Denis *et al.*, 1999; Woodard, *et al.*, 1999; Sjöström, 1985): $k = 1.100 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$, $\gamma = 1.110 \times 10^{-2}$, $\kappa = 5.200 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$, $\rho = 7.800 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$, $M_s = 748 \text{ K}$, $M_f = 573 \text{ K}$. Other parameters depend on temperature and needs to be interpolated from experimental data. Therefore, parameters E , H , σ_y , α_T , c , K , h , are evaluated with the following expressions (Melander, 1985; Hildenwall, 1979):

$$E = E_A (1-\beta) + E_M \quad \begin{cases} E_A = 1.985 \times 10^{11} - 4.462 \times 10^7 T - 9.909 \times 10^4 T^2 - 2.059 T^3 \\ E_M = 2.145 \times 10^{11} - 3.097 \times 10^7 T - 9.208 \times 10^4 T^2 - 2.797 T^3 \end{cases} \quad (35)$$

$$H = \begin{cases} 2.092 \times 10^6 + 3.833 \times 10^5 T - 3.459 \times 10^2 T^2, & \text{if } T \leq 723 \text{ K} \\ 2.259 \times 10^9 - 2.988 \times 10^6 T, & \text{if } 723 \text{ K} < T \leq 748 \text{ K} \\ 5.064 \times 10^7 - 3.492 \times 10^4 T, & \text{if } T > 748 \text{ K} \end{cases} \quad (36)$$

$$\sigma_y = \begin{cases} 7.520 \times 10^8 + 2.370 \times 10^5 T - 5.995 \times 10^2 T^2, & \text{if } T \leq 723 \text{ K} \\ 1.598 \times 10^{10} - 2.126 \times 10^7 T, & \text{if } 723 \text{ K} < T \leq 748 \text{ K} \\ 1.595 \times 10^8 - 1.094 \times 10^5 T, & \text{if } T > 748 \text{ K} \end{cases} \quad (37)$$

$$\alpha_T = \begin{cases} 1.115 \times 10^{-5} + 1.918 \times 10^{-8} T - 8.798 \times 10^{-11} T^2 + -2.043 \times 10^{-13} T^3, & \text{if } T \leq 748 \text{ K} \\ 2.230 \times 10^{-5}, & \text{if } T > 748 \text{ K} \end{cases} \quad (38)$$

$$c = 2.159 \times 10^2 + 0.548 T \quad (39)$$

$$K = 5.223 + 1.318 \times 10^{-2} T \quad (40)$$

$$h = \begin{cases} 6.960 \times 10^2, & \text{if } T \leq 404K \\ 2.182 \times 10^4 - 1.030 \times 10^2 T + 1.256 \times 10^{-1} T^2, & \text{if } 404K < T \leq 504K \\ -2.593 \times 10^4 + 5.500 \times 10^2 T, & \text{if } 504K < T \leq 554K \\ -9.437 \times 10^4 + 4.715 \times 10^2 T - 7.286 \times 10^{-1} T^2 + 3.607 \times 10^{-4} T^3, & \text{if } 554K < T \leq 804K \\ 1.210 \times 10^3, & \text{if } T > 804K \end{cases} \quad (41)$$

Progressive induction hardening simulations regards a 5mm thickness layer which is heated to 1120K (850°C) for 10s and then, immersing in a liquid medium with 293K (20°C) until time instant 120s is reached. In order to consider the restriction associated with adjacent regions of the heated region, which is at lower temperatures, a plane strain state is adopted.

Reference (Camarão, 1998) presents an experimental set up to promote progressive induction hardening in cylindrical bodies. Experimental apparatus is depicted in Fig. (1), showing the cylindrical bar, the coil and the cooling ring. Experimental data obtained from this set up is used here to validate the proposed model. Therefore, consider a cylindrical bar, which is quenched in the apparatus. Fig. (2a) shows a cross-section of a quenched bar submitted to a Nital etch 2%, while Fig. (2b) presents its hardness measures. Using X-ray diffraction technique it is possible to estimate stress values on the surface layer, furnishing $\sigma_\theta = -830\text{MPa}$ and $\sigma_z = -500\text{MPa}$. These values present an uncertainty of 30 MPa.



Figure 1. Experimental apparatus for progressive induction hardening.

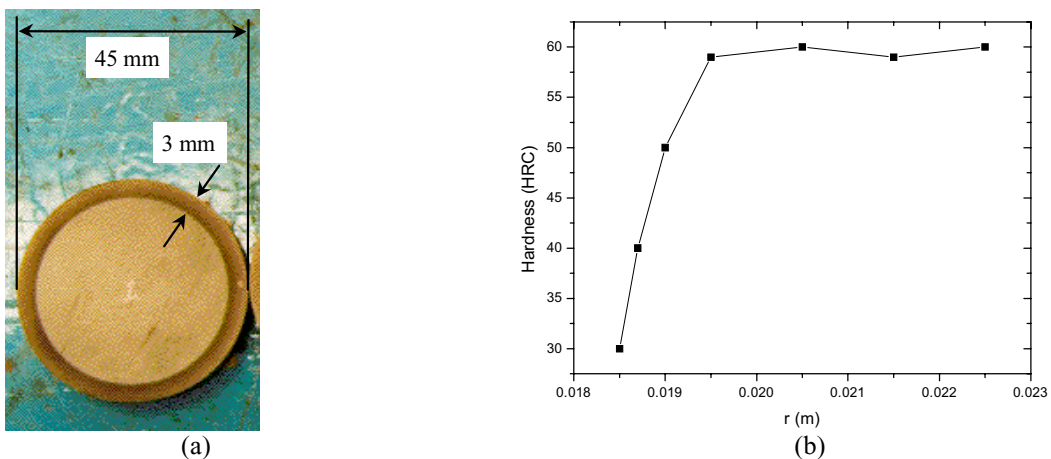


Figure 2. PI quenched body: (a) Cross-section view; (b) Hardness measures.

Numerical simulations are considered on the forthcoming analysis. Temperature time history for different positions of the cross-section are presented in Fig. (3). Notice that for regions with thickness greater than 5mm, the temperature does not reaches austenitizing limit.

The stress distribution over the radius for the final time instant is presented in Fig. (4a). Notice the stress values on the external surface, $\sigma_\theta = -866\text{MPa}$ and $\sigma_z = -255\text{MPa}$. The circumferential stress, σ_θ , is close to experimental results. The longitudinal stress, σ_z , on the other hand, presents a discrepancy that could be explained by the assumption of plane strain state adopted to simulate the restriction associated with adjacent regions of the heated region, which is at lower temperatures.

The analysis of phase transformation is now in focus. In order to compare numerical and experimental results, a relation between volume fraction of martensitic phase and hardness is established. Therefore, it is assumed that martensitic phase ($\beta = 1$) has 60HRC while austenite ($\beta = 0$) has 30HRC. The volumetric fraction of martensite distribution, represented by variable β , is presented in Fig. (4b). Also, Figure (4b) shows the experimental data related to hardness measures. Notice that the process quenches only points from external surface to 3mm thick and, once again, numerical results predicted by the model is closer to experimental data.

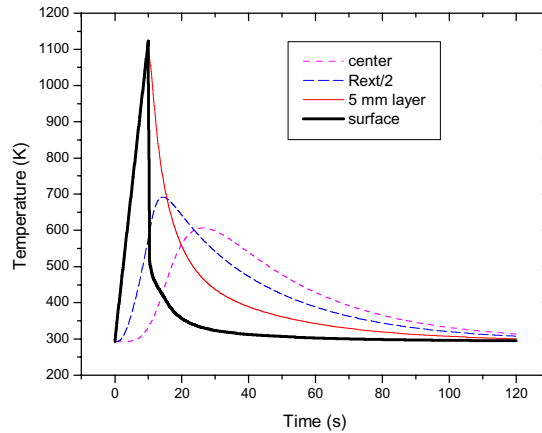


Figure 3. PI hardening: Temperature time history for different positions.

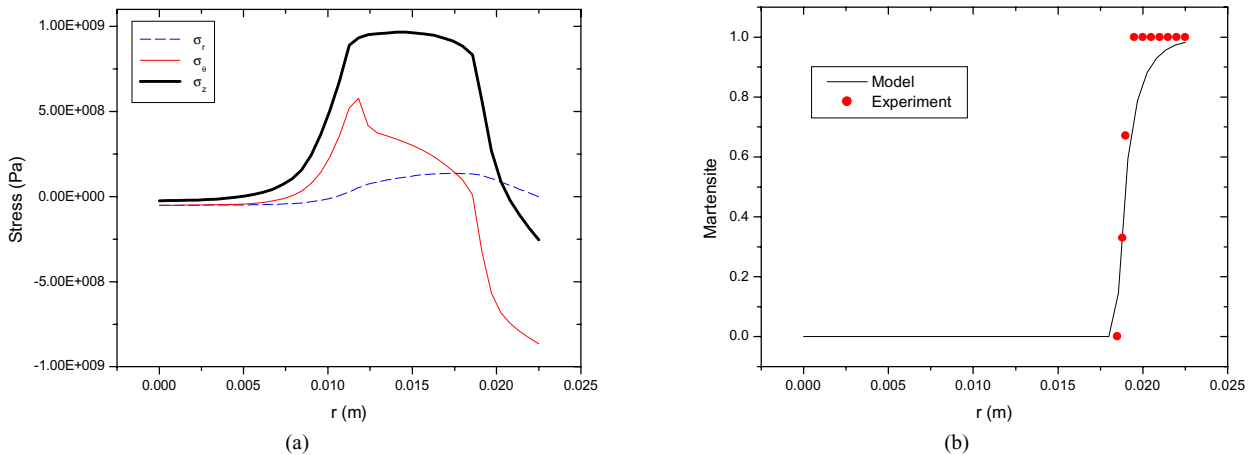


Figure 4. PI hardening: Stress distribution (a) and volume fraction of martensite distribution (b) for final time instant.

At this point, a comparison of stress distribution for the final time instant is contemplated considering four different models. Each model incorporates different effects: all transformations effects are considered (TV&TP), only volumetric transformation is considered (TV), only transformation plasticity is considered (TP) and no transformation effects are considered (without TV&TP). Fig. (5) presents some results also shown in Tab. (1), which shows that the general behaviour is qualitatively similar for the particular case study considered. However, a more detailed analysis, beyond the scope of this contribution, is necessary to elucidate the effect of these coupling terms in other situations.

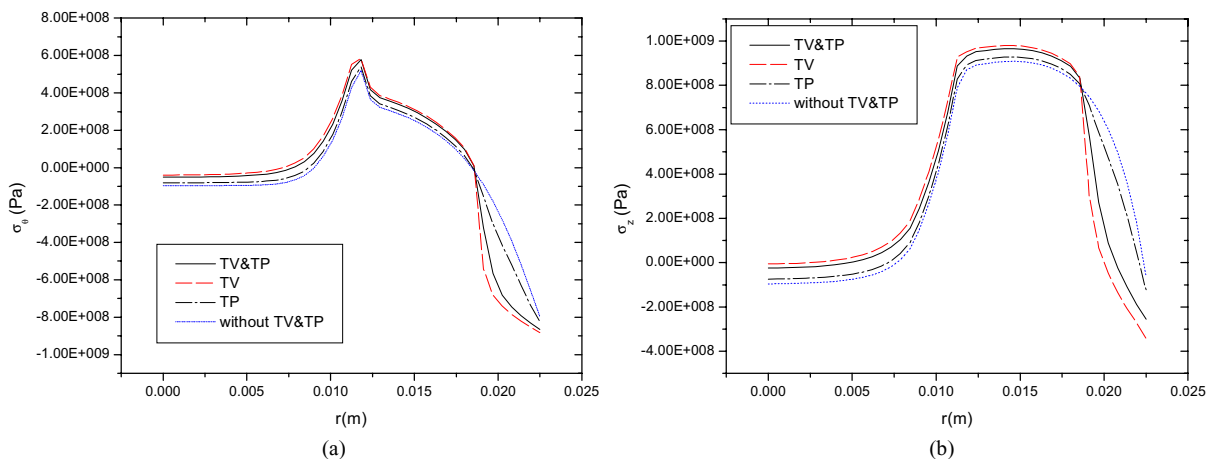


Figure 5. PI hardening: Stress distribution for final time instant considering transformation effects.

Table 1 – PI hardening: Stresses at the cylinder surface.

	TP +TV	TV	TP	Without TV&TP
σ_θ (MPa)	-866	-883	-825	-800
σ_z (MPa)	-255	-342	-123	-62

Finally, a study on the influence of the induced layer thickness is performed. Figure (6) shows the stress distributions and the volume fraction of martensite distribution for five thickness values of induced layers (PI) and for a through hardening (TH). Through hardening consists of heating the steel, usually in a furnace, to a suitable austenitizing temperature, holding at that temperature for a sufficient time to effect the desired change in crystalline structure, and immersing and cooling in a suitable liquid medium. The simulation of through hardening concerns a body with homogeneous temperature 1120K (850°C) which are immersed in a liquid medium with 293K (20°C) until a time instant 150s is reached. The cooling medium is the same that is used on surface hardening. Since longitudinal direction is free, a plane stress state is adopted.

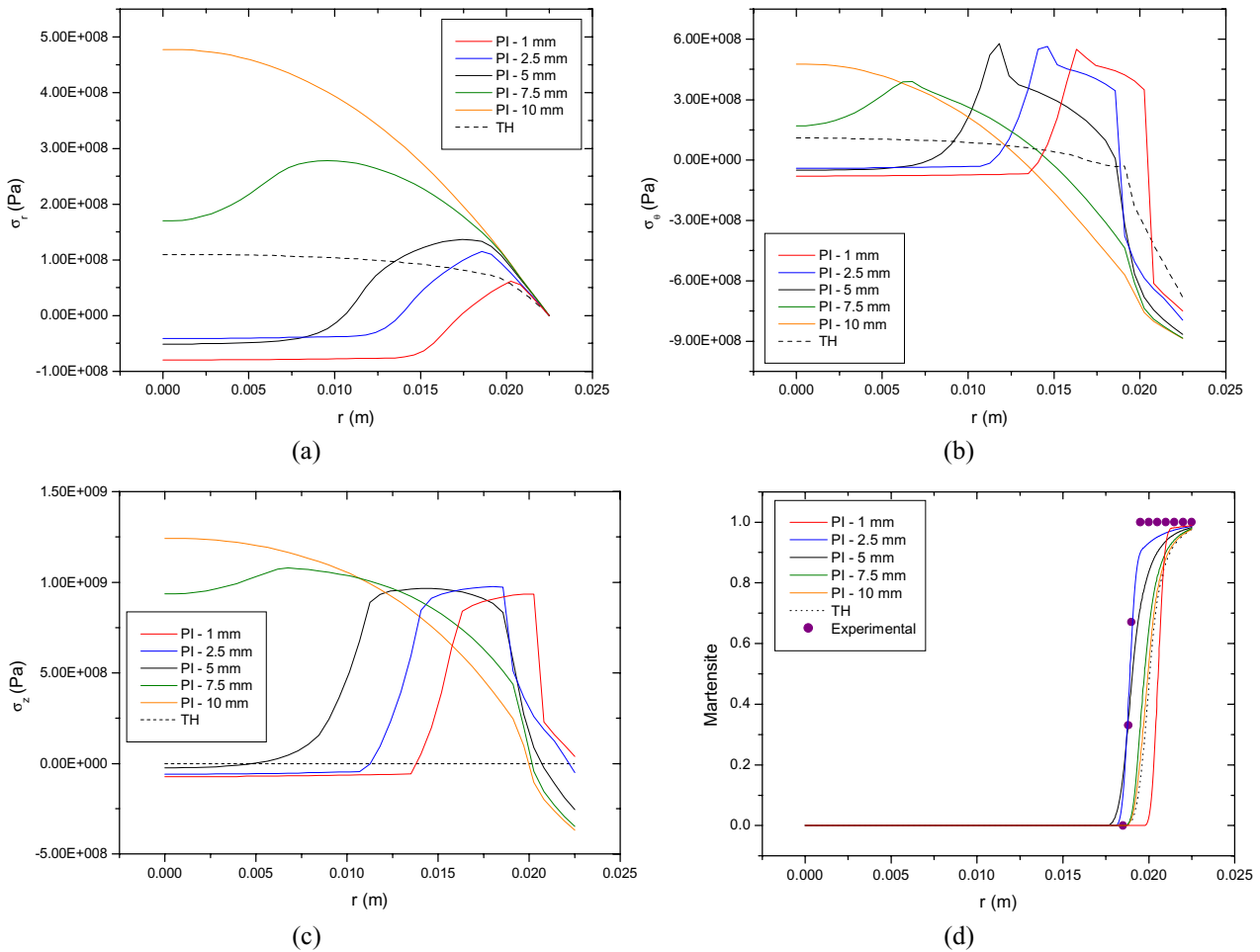


Figure 6. Induced layer thickness. Stress distribution (a-c) and distribution of volume fraction of martensite (d) for final time instant.

Figures (6a)-(6c) shows that the thickness of the induced layer is an important parameter on the residual stress distribution. Higher thickness values promote higher stress at the center and lower stress at the surface. For the thinner induced layer (1mm), a positive value of σ_z (about 40 MPa) is observed at the surface. This is a condition that must be avoided, as a traction stress field on the surface can promote the growth of surface defects.

The presented results show that the proposed model can be used as a powerful tool to predict the thermomechanical behaviour of quenched mechanical components and choose important parameters as the cooling medium and the induced layer thickness. It is important to note that the adopted approach, using an anisothermal model formulated within the formalism of continuum mechanics and thermodynamics of irreversible processes, is a general formulation that allows a direct extension to more complex situations, as the analysis of three-dimensional media and the other phases. Furthermore, the proposed numerical procedure based on the operator split technique, allows the use of traditional numerical methods, like the finite element method.

7. Conclusions

The present contribution regards on modelling and simulation of quenching process, presenting an anisothermal model formulated within the formalism of continuum mechanics and thermodynamics of irreversible processes. A numerical procedure is developed based on the operator split technique associated with an iterative numerical scheme in order to deal with nonlinearities in the formulation. Progressive induction hardening of cylindrical bodies is considered as application of the proposed general formulation. Numerical results show that the proposed model is capable of capturing the general behaviour of experimental data. An analysis of stress distribution for the final time instant shows the influence of each of the transformations effects considered in the model. Results also show that the induced layer thickness has a great influence in the residual stress distribution.

8. Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the support of the Brazilian Research Council (CNPq) and the Research Foundation of Rio de Janeiro (FAPERJ).

9. References

- Ames, W.F. (1992), *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press.
- Boley, B.A. and Weiner, J.H. (1985), *Theory of Thermal Stress*, Kreiger Pub.
- Camarão, A.F. (1998), "A Model to Predict Residual Stresses in the Progressive Induced Quenching of Steel Cylinders", Ph.D. Thesis, Department of Metallurgical and Materials Engineering - USP, in Portuguese.
- Camarão, A.F., da Silva, P.S.C.P. and Pacheco, P.M.C.L. (2000), "Finite Element Modeling of Thermal and Residual Stresses Induced by Steel Quenching", *Seminário de Fratura, Desgaste e Fadiga de Componentes Automotivísticos*, Brazilian Society of Automotive Engineering, in Portuguese.
- Chakrabarty, J. (1987), *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill.
- Denis, S., Gautier, E., Simon, A. and Beck, G. (1985), "Stress-Phase-Transformation Interactions – Basic Principles, Modelling and Calculation of Internal Stresses", *Material Science and Technology*, v.1, October, p.805-814.
- Denis, S., Archambault, S., Aubry, C., Mey, A., Louin, J.C. and Simon, A. (1999), "Modelling of Phase Transformation Kinetics in Steels and Coupling with Heat Treatment Residual Stress Predictions", *Journal de Physique IV*, v.9, September, p.323-332.
- Desalos, Y., Giusti, J. and Gunsberg, F. (1982), "Deformations et Contraintes lors du Traitement Thermique de Pieces de Acier", *RE902, Institut de Recherches de la Sidérurgie Française*.
- Hildenwall, B. (1979), *Prediction of the Residual Stresses Created During Quenching*, Ph.D. Thesis, Linköping University.
- Koistinen, D.P. and Marburger, R.E. (1959), "A General Equation Prescribing the Extent of the Austenite-Martensite Transformation In Pure Iron-Carbon Alloys and Plain Carbon Steels", *Acta Metallurgica*, v.7, pp.59-60.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1990), *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge Press.
- Melander, M. (1985), *A Computational and Experimental Investigation of Induction and Laser Hardening*, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Linköping University.
- Nakamura, S. (1993), *Applied Numerical Methods in C*, Prentice-Hall.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. and Taylor, R.L. (1983), "Operator Split Methods for the Numerical Solution of the Elastoplastic Dynamic Problem", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.39, pp.137-157.
- Pacheco, P.M.C.L. (1994), *Analysis of the Thermomechanical Coupling in Elasto-Viscoplastic Materials*, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, PUC-Rio, in Portuguese.
- Pacheco, P.M.C.L., Oliveira, S.A., Camarão, A.F. and Savi, M.A. (1997), "A Model to Predict Residual Stresses Introduced by the Quenching Process in Steels", *Proceedings of the COBEM 97 - XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, in Portuguese.
- Rockafellar, R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton Press.
- Sen, S., Aksakal, B. and Ozel, A. (2000), "Transient and Residual Thermal Stresses in Quenched Cylindrical Bodies", *International Journal of Mechanical Sciences*, v.42 n.10, p.2013-2029.
- Simo, J.C. and Miehe, C. (1992), "Associative Coupled Thermoelasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.98, pp.41-104.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998), *Computational Inelasticity*, Springer.
- Sjöström, S. (1985), "Interactions and Constitutive Models for Calculating Quench Stresses in Steel", *Material Science and Technology*, v.1, p.823-829.
- Woodard, P.R., Chandrasekar, S., Yang, H.T.Y. (1999), "Analysis of Temperature and Microstructure in the Quenching of Steel Cylinders", *Metallurgical and Materials Transactions B-Process Metallurgy and Materials Processing Science*, v.4, August, p.815-822.

GEOMETRICALLY NON-LINEAR STATIC ANALYSIS OF PLATES AND SHELLS USING HEXAHEDRICAL FINITE ELEMENTS WITH REDUCED INTEGRATION

Rodnny Jesus Mendoza Fakhye, MSc.

e-mail: rmendoza@ppgec.ufrgs.br

Armando Miguel Awruch, DSc.

e-mail: awruch@adufgrs.ufrgs.br

Centro de Mecânica Aplicada e Computacional - CEMACOM

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Av. Osvaldo Aranha 99, 3º andar, Centro

91000-35-190 Porto Alegre – RS

Brasil

Abstract: The geometrically non-linear static analysis of plates and shells using hexahedral isoparametric elements with eight nodes are presented in this work. The main features of this formulation are: (a) element matrices are obtained using reduced integration and hourglass control, (b) non-linear equilibrium solution is obtained using the incremental/iterative Newton Raphson scheme and the generalised displacement control method, (c) the conjugate gradient method is used to solve the algebraic system of equations, (d) the objective Green-Naghdi stress rate tensor is used in the constitutive equation. Numerical examples are presented showing that this element may be used effectively to analyze plate and shells.

Keywords: plate and shells, non-linear analysis, finite elements.

1. Introduction

Plates and shells are particular cases of three-dimensional solids and can be analyzed by the Finite Element Method using different formulations. The analysis of plates can be formulated using the Kirchhoff hypotheses for thin plates or using the Mindlin-Reissner theory that can be applied to thick plates. Although there were finite elements specifically developed to analyze plates, in this work those will be considered a particular case of shells.

In the finite element analysis of shells basically three kinds of elements could be use: (a) flat elements; (b) curved elements based in some shell theory; (c) degenerated elements, obtained from three-dimensional solid elements.

When shells are analyzed using flat elements several problems appear and, sometimes, they can lead to wrong solutions. The main problems are: coupling between bending and membrane behavior, difficulties to handle with inter-element boundaries in coplanar elements and the existence of spurious bending moments in inter-element boundaries. In order to improve shell representation many authors have used curved elements based on some shell theory and employing curvilinear coordinates. However, some difficulties arise in the generalized strain-displacement definition, in selecting a theory in which the strain energy is equal to zero for rigid body displacements and in the correct definition of angular displacements, (Azevedo and Awruch, 1999).

Three-dimensional solid elements have been also used to model shells and for this case, a particular shell theory is not necessary. In order to reduce the number of degrees of freedom and to avoid numerical drawbacks arising when three dimensional solid elements are used, special elements obtained as a degeneration of these three dimensional elements were implemented and applied, see Ahmad *et al.* (1970), Hughes (1987), Bathe (1996), among others.

When normal quadrature rules are used in three-dimensional degenerated elements, they tend to 'lock' in thin shell applications, especially for low order elements. On the other hand, if a selective reduced integration rule is used to prevent shear locking good results can be obtained for thin shells, but in this case rank deficiency (spurious 'mechanisms') may appear and, although sometimes spurious modes can be precluded from globally forming by appropriated boundary conditions, they represent a potentially deficiency. The situation is even more acute when uniform reduced integration rules are used (Hughes, 1987). Another source of problems is the membrane locking. Much research has been undertaken to overcome shear and membrane locking in plane and shells. Many elements have been implemented and behave well for thin analysis.

However in large-scale finite element analysis, with many unknowns involved, the efficiency is of crucial importance to reduce computational costs and speed up the design procedure. The most efficient elements are those with linear interpolation functions and one point quadrature with hourglass control. In this direction, Flanagan and Belytschko (1981), Belytschko (1983), and Belytschko *et al.* (1984) presented a systematic and effective way to hourglass control, but in both formulations a parameter, to be defined by the user, is required. Belytschko and Binderman (1993) implemented the hourglass control of the eight-node hexahedral element, where the stabilization parameter is not required, although the stabilization matrix still depends on the Poisson coefficient; this aspect was eliminated by Liu *et al.* (1994). The geometric non-linear static analysis of plates and shells using underintegrated eight-node hexahedral elements with hourglass control is presented in this work. The non-linear equilibrium equations are

formulated in a corotational coordinate system and the solution is obtained using the incremental/iterative Newton Raphson scheme and the generalized displacement control method. Conjugate gradient method is used to solve the algebraic system of equations and the objective Green-Naghdi stress rate tensor is used in the constitutive equation. Comparative examples show the effectiveness of this 3-D solid element to analyze plates and shells.

2. The underintegrated eight-node hexahedral element with hourglass control

For an eight-node hexahedral isoparametric element, the shape functions are given by:

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta) \quad (a = 1, \dots, 8) \tag{1}$$

where ξ_a, η_a e ζ_a are the natural coordinates ξ, η and ζ of one particular node.

The eight-node hexahedral element is indicated in Fig. (1) with respect to its local system of reference ξ, η and ζ , and with respect to its global system of reference x_1, x_2 and x_3

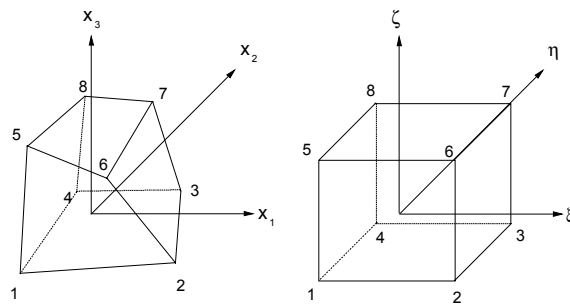


Figure 1. Hexahedral isoparametric element in global and local coordinate systems.

The matrix $\mathbf{B}_a(\mathbf{0})$, which contains the shape functions derivatives for each node ‘n’ at the center of the element is given by:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} N_{a,x}(\mathbf{0}) \\ N_{a,y}(\mathbf{0}) \\ N_{a,z}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1a} \\ b_{2a} \\ b_{3a} \end{bmatrix} \quad (a = 1, \dots, 8). \tag{2}$$

In order to identify the spurious mode patterns (or zero energy modes or ‘hourglass’ modes for hexahedral elements) resulting from the non-constant strain field, due to use of one point quadrature, the following vectors are defined (Flanagan and Belytschko, 1981):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^t &= [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1] & \mathbf{h}_3^t &= [1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1] \\ \mathbf{h}_2^t &= [1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1] & \mathbf{h}_4^t &= [-1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1], \end{aligned} \tag{3}$$

where superscript t designates the transpose. In Figure 2 a sketch of bending torsion and non-physical displacement modes associated to these vectors are shown (Koh and Kikuchi, 1987).

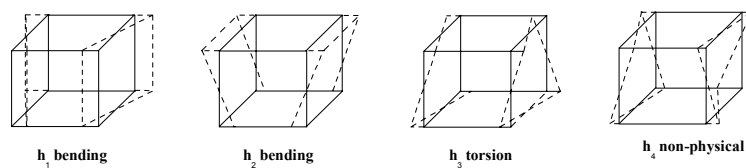


Figure 2. Spurious mode patterns.

The Jacobian matrix at the element center is given by:

$$\mathbf{J}(\mathbf{0}) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \xi^t \mathbf{x}_1 & \xi^t \mathbf{x}_2 & \xi^t \mathbf{x}_3 \\ \eta^t \mathbf{x}_1 & \eta^t \mathbf{x}_2 & \eta^t \mathbf{x}_3 \\ \zeta^t \mathbf{x}_1 & \zeta^t \mathbf{x}_2 & \zeta^t \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

where ξ , η and ζ are vectors containing nodal coordinates with respect to the referential ξ , η and ζ ; and $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 are the nodal coordinates with respect to the global system x_1, x_2 and x_3 .

It can be shown that the determinant of the Jacobian matrix (J_0) is equal to the eighth part of the element volume:

$$J_0 = |\mathbf{J}(\mathbf{0})| = \frac{V_e}{8}. \quad (5)$$

If $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_{ij}] = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{0})$, the following expressions for vectors $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ e \mathbf{b}_3 are obtained:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{8} [D_{11}\xi + D_{12}\eta + D_{13}\zeta] \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{8} [D_{21}\xi + D_{22}\eta + D_{23}\zeta] \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{8} [D_{31}\xi + D_{32}\eta + D_{33}\zeta]. \quad (6)$$

Strain and displacement components are related by the expression:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{a=1}^8 \bar{\mathbf{B}}_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_a \quad (7)$$

where $\bar{\mathbf{B}}_a$ contains the shape functions derivatives for each element node 'a', evaluated at the integration points and \mathbf{u}_a is a vector which contains displacement components of the element node 'a'. Expanding $\boldsymbol{\varepsilon}$ in a Taylor series about the element center up to bilinear terms and taking into account expression (7), it is obtained:

$$\bar{\mathbf{B}}_a(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_a(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{a,\xi}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{a,\eta}(\mathbf{0})\eta + \mathbf{B}_{a,\zeta}(\mathbf{0})\zeta + 2\mathbf{B}_{a,\xi\eta}(\mathbf{0})\xi\eta + 2\mathbf{B}_{a,\eta\zeta}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\mathbf{B}_{a,\xi\zeta}(\mathbf{0})\xi\zeta \quad (8)$$

The strain operator $\bar{\mathbf{B}}_a(\xi, \eta, \zeta)$ may be decomposed in its dilatational and deviatoric part. To avoid volumetric locking the dilatational part of the strain operator is evaluated with a one-point quadrature and consequently all linear and bilinear terms disappear for this part, but remaining for the deviatoric part. Then the expression (8) can be written as follows:

$$\bar{\mathbf{B}}_a(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_a^{dil}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_a^{dev}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{a,\xi}^{dev}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{a,\eta}^{dev}(\mathbf{0})\eta + \mathbf{B}_{a,\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\zeta + 2\mathbf{B}_{a,\xi\eta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\eta + 2\mathbf{B}_{a,\eta\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\mathbf{B}_{a,\xi\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\zeta \quad (9)$$

To eliminate shear locking, the deviatoric strain sub-matrices can be written in an orthogonal corotational system, rotating with the element. Only one linear term is left for shear strain components and thus removing modes causing shear locking. In the corotational coordinate system components of the strain submatrices, after removing volumetric and shear locking, can be written:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{xx}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{xx}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{xx,\xi}^{dev}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{xx,\eta}^{dev}(\mathbf{0})\eta + \mathbf{B}_{xx,\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\zeta + 2\mathbf{B}_{xx,\xi\eta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\eta + \\ &\quad 2\mathbf{B}_{xx,\eta\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\mathbf{B}_{xx,\xi\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\zeta \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{yy}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{yy,\xi}^{dev}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{yy,\eta}^{dev}(\mathbf{0})\eta + \mathbf{B}_{yy,\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\zeta + 2\mathbf{B}_{yy,\xi\eta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\eta + \\ &\quad 2\mathbf{B}_{yy,\eta\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\mathbf{B}_{yy,\xi\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\zeta \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{zz}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{zz,\xi}^{dev}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{zz,\eta}^{dev}(\mathbf{0})\eta + \mathbf{B}_{zz,\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\zeta + 2\mathbf{B}_{zz,\xi\eta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\eta + \\ &\quad 2\mathbf{B}_{zz,\eta\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\mathbf{B}_{zz,\xi\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\xi\zeta \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{xy}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{xy,\zeta}^{dev}(\mathbf{0})\zeta \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{yz}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{yz,\xi}^{dev}(\mathbf{0})\xi \\ \hat{\mathbf{B}}_{zx}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{B}_{zx}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{zx,\eta}^{dev}(\mathbf{0})\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

As was observed by Belytschko and Binderman (1993), in order to get that skewed elements (evaluated with one point quadrature) pass the patch test, it is necessary to substitute b_{1a} , b_{2a} , and b_{3a} in the expression (2) by the uniform gradient matrices \tilde{b}_{1a} , \tilde{b}_{2a} and \tilde{b}_{3a} , defined by Belytschko and Flanagan (1981) and given by:

$$\tilde{b}_{ia} = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} b_{ia}(\xi, \eta, \zeta) d\Omega \quad (i = 1, 2, 3; a = 1, \dots, 8) \quad (11)$$

Gradient vectors satisfy the following relations:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^t \mathbf{x}_j &= \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 3) & \sum_{a=1}^8 \tilde{b}_{ia} &= 0 & \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{h}_4 &= 0 \\ \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{h}_j &= \begin{cases} = 0 & \text{for non distorted elements} \\ \neq 0 & \text{for distorted elements} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta. The final form of the matrix $\bar{\mathbf{B}}$ in the corotational system, taking into account Eqs. (2) to (11) is given by the following expression:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{B}_{yy}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{B}_{zz}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{B}_{xy}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{B}_{yz}(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{B}_{zx}(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^t \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^t & \tilde{\mathbf{b}}_1^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^t & \tilde{\mathbf{b}}_2^t \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^t & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_1^t \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} D_{11} (\eta \gamma_1^t + \zeta \gamma_2^t + 2\eta \zeta \gamma_4^t) & -\frac{1}{3} D_{11} (\xi \gamma_1^t + \zeta \gamma_3^t + 2\xi \zeta \gamma_4^t) & -\frac{1}{3} D_{33} (\xi \gamma_2^t + \eta \gamma_3^t + 2\xi \eta \gamma_4^t) \\ -\frac{1}{3} D_{11} (\eta \gamma_1^t + \zeta \gamma_2^t + 2\eta \zeta \gamma_4^t) & \frac{2}{3} D_{11} (\xi \gamma_1^t + \zeta \gamma_3^t + 2\xi \zeta \gamma_4^t) & \frac{2}{3} D_{11} (\xi \gamma_2^t + \eta \gamma_3^t + 2\xi \eta \gamma_4^t) \\ -\frac{1}{3} D_{11} (\eta \gamma_1^t + \zeta \gamma_2^t + 2\eta \zeta \gamma_4^t) & -\frac{1}{3} D_{11} (\xi \gamma_1^t + \zeta \gamma_3^t + 2\xi \zeta \gamma_4^t) & \frac{2}{3} D_{11} (\xi \gamma_2^t + \eta \gamma_3^t + 2\xi \eta \gamma_4^t) \\ D_{22} \zeta \gamma_3^t & D_{11} \zeta \gamma_2^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{33} \zeta \gamma_2^t & D_{22} \zeta \gamma_1^t \\ D_{33} \zeta \gamma_3^t & \mathbf{0} & D_{11} \zeta \gamma_1^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

where $\boldsymbol{\gamma}$ are the stabilization vectors, defined by Liu *et al.* (1994):

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha - (\mathbf{h}_\alpha^t \mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{b}}_i, \quad \alpha = 1, \dots, 4. \quad (14)$$

These matrices are evaluated using four integration points, showed in Tab. (1), and the weights are 2 in all cases.

Table 1. Integration points for matrix $\bar{\mathbf{B}}$

Point	ξ	η	ζ
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Non-linear finite element equations.

The Hu-Washizu variational principle for non-linear finite element analysis is written as the three-field weak form:

$$\delta\pi(v, \sigma, \varepsilon) = \int_{\Omega} \delta\varepsilon^t \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta[\tau^t (\nabla_s v - \varepsilon)] d\Omega - \delta\pi^{ext} \quad (15)$$

where δ denotes a variation and a superscript t designates the transpose, $\delta\pi^{ext}$ is the virtual work by the external loading and v , ε , and τ are the material velocity field, the assumed strain rate field and the assumed stress field, respectively, $\nabla_s v$ is the symmetric part of the rate of deformation tensor. Using the assumed strain method proposed by Simo and Hughes (1986), where the orthogonality condition on the assumed stress field, $\sigma^t (\nabla_s v - \varepsilon) = 0$, is satisfied, the simplified variational principle becomes:

$$\delta\pi(v, \varepsilon) = \int_{\Omega} \delta\varepsilon^t \sigma d\Omega - \delta\pi^{ext}. \quad (16)$$

If the strain in the element is interpolated as in Eq. (7), the finite element equation corresponding to Eq. (16) can be written as $f_{int} = f_{ext}$, where f_{int} is the internal element nodal force and f_{ext} is the element nodal force due to the external loading. The stiffness matrix resulting from the internal virtual work can be written as

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \quad (17)$$

where the matrix \mathbf{C} is dependent on the geometric and material conditions in the problem under consideration.

4. Finite deformation in a corotational coordinate system.

As described in Section 2, in elements for shell/plate simulations, the elimination of the shear locking depends on the proper treatment of the shear strain. It is necessary to attach a local coordinate system to the element so that the strain tensor in this local system is relevant to prevent shear locking.

4.1 Definition of corotational coordinate system

Assume that x_1 , x_2 and x_3 are the coordinate axes of the global system and \hat{x}_1 , \hat{x}_2 and \hat{x}_3 the corresponding coordinate axes in the corotational system (these axes will be coincident with the local system ξ , η and ζ for undistorted elements). Two vectors r_1 and r_2 , coincident with ξ and η for undistorted elements, are defined as follows:

$$r_{1i} \equiv \xi^t x_i; \quad r_{2i} \equiv \eta^t x_i. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18)$$

A correction term r_c is added to r_2 such that

$$\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c) = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_c = -\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1}. \quad (19)$$

The orthogonal system is completed with

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c). \quad (20)$$

Normalizing these vectors, the elements of the rotation matrix \mathbf{R} are obtained.

$$\mathbf{R}_{1i} = \frac{r_{1i}}{\|\mathbf{r}_1\|}; \quad \mathbf{R}_{2i} = \frac{r_{2i} + r_{ci}}{\|\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c\|}; \quad \mathbf{R}_{3i} = \frac{r_{3i}}{\|\mathbf{r}_3\|}. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

4.2 Strain measures.

Since the corotational coordinate system rotates with the configuration, the stress defined in this corotational system does not change with the rotation or translation of the material body and is thus objective. Therefore, the Cauchy stress in the corotational coordinate system, called the corotational Cauchy stress tensor, is used as a stress measure. The rate of deformation, also defined in the corotational coordinate system is used as the measure of the strain rate

$$\dot{\hat{\epsilon}} = \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right)^t \right], \quad (22)$$

where $\hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}$ is the deformation part of the velocity in the corotational system $\hat{\mathbf{x}}$. If an initial strain $\hat{\epsilon}(\mathbf{X}, 0)$ is given, the strain tensor can be expressed as,

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{X}, t) = \hat{\epsilon}(\mathbf{X}, 0) + \int_0^t \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, \tau) d\tau. \quad (23)$$

The strain increment is then given by the mid-point integration of the velocity strain tensor

$$\Delta \hat{\epsilon} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{d}} d\tau \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} + \left(\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} \right)^t \right], \quad (24)$$

where $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}$ is the deformation part of the displacement increment in the corotational system $\hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}$ referred to the mid point configuration and can be written as (Liu *et al.* 1998):

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}} = \mathbf{R}_{n+1/2} \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (25)$$

Once the strain increment is obtained by Eq. (24), the stress can be calculated using the constitutive relation. The total strain and stress can then be updated as:

$$\hat{\epsilon}_{n+1} = \hat{\epsilon}_n + \Delta \hat{\epsilon}; \quad \hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + \Delta \hat{\sigma} \quad (26)$$

4.3 Tangent stiffness matrix and nodal force vectors

From the Hu-Washizu variational principle, Eq. (16), at iterations v and $(v + 1)$ is given by

$$\int_{\Omega^v} \delta \hat{\mathcal{E}}_{ij}^v \hat{\sigma}_{ij}^v dV = \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^v \quad \text{and} \quad \int_{\Omega^{v+1}} \delta \hat{\mathcal{E}}_{ij}^{v+1} \hat{\sigma}_{ij}^{v+1} dV = \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^{v+1}, \quad (27)$$

where $\delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^v$ is the virtual work done by the external forces. Note that both equations are written in the corotational system defined in the v th iterative configuration given by \mathbf{x}_{n+1}^v . Assuming that all external forces are deformation independent, linearization of Eq. (27) gives (Liu *et al.*, 1998):

$$\int_{\Omega^v} \delta u_{i,j}^v \hat{C}_{ijkl}^v \Delta \hat{u}_{k,l} dV + \int_{\Omega^v} \delta u_{i,j}^v \hat{T}_{ijkl}^v \Delta \hat{u}_{k,l} dV = \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^{v+1} - \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^v \quad (28)$$

where the Green-Naghdi rate of Cauchy stress tensor ($\hat{T}_{ijkl}^v = \delta_{ik} \hat{\sigma}_{jl}^v$) is used. Taking into account the residual of the previous iteration, Eq. (27) can be approximated as:

$$\int_{\Omega^v} \delta u_{i,j}^v \left(\hat{C}_{ijkl}^v + \hat{T}_{ijkl}^v \right) \Delta \hat{u}_{k,l} dV = \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^{v+1} - \int_{\Omega^v} \delta \hat{\mathcal{E}}_{ij}^v \hat{\sigma}_{ij}^v dV. \quad (29)$$

If the strain and stress tensors are defined as:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \omega_{12} \quad \omega_{23} \quad \omega_{31}] \quad (30a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]. \quad (30b)$$

Eq. (29) can be rewritten as

$$\int_{\Omega^v} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^v (\hat{\mathbf{C}}_{ij}^v + \hat{\mathbf{T}}_{ij}^v) \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^v dV = \delta \hat{\pi}_{\text{ext}}^{v+1} - \int_{\Omega^v} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^v \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^v dV \quad (31)$$

where $\hat{\mathbf{C}}_{ij}^v$ is the constitutive matrix and $\hat{\mathbf{T}}_{ij}^v$ is the geometric stiffness matrix, (Azevedo and Awruch, 1999):

$$\hat{\mathbf{T}}^v = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 & -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \\ \hline & & & & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & & & & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{array} \right]. \quad (32)$$

After the usual finite element interpolation, the tangent stiffness matrix and the internal nodal force vector are given by:

$$\hat{\mathbf{K}}^v = \int_{\Omega^v} \hat{\mathbf{B}}^t (\hat{\mathbf{C}}^v + \hat{\mathbf{T}}^v) \hat{\mathbf{B}} dV \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^v = \int_{\Omega^v} \hat{\mathbf{B}}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}}^v dV \quad (34)$$

The tangent stiffness matrix and nodal force vector are transformed into the global coordinate system tensorially using the transformation matrix defined in Eq. (23). Finally, for each iteration, we get a set of linear algebraic equations

$$\mathbf{K}^v \Delta \mathbf{u}^{v+1} = \mathbf{p}^{v+1} \quad (35)$$

4.4 Solution of non-linear equilibrium equations

For the numerical solution of the non-linear equilibrium equations the incremental/iterative Newton Raphson scheme was used together with the Generalised Displacement Control Method (Yang and Shieh, 1990) to follow the equilibrium path. In this method the displacement increment is decomposed in two parts

$$\mathbf{u}^{v+1} = \Delta \lambda^v \mathbf{u}_1^{v+1} + \mathbf{u}_2^v, \quad (36)$$

where the vectors \mathbf{u}_1^v and \mathbf{u}_2^v are given by

$$\mathbf{K}^v \mathbf{u}_1^{v+1} = \mathbf{P}^{ref} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}^v \mathbf{u}_2^v = \mathbf{p}^{v+1}, \quad (38)$$

where \mathbf{P}^{ref} is the reference load vector and \mathbf{p}^{v+1} the unbalanced force vector.

For an incremental step j , the load increment parameter can be computed as:

$$\Delta\lambda_j^v = - \frac{\langle \mathbf{u}_1 \rangle_{j-1}^1 \cdot \{\mathbf{u}_2\}_j^v}{\langle \mathbf{u}_1 \rangle_{j-1}^1 \cdot \{\mathbf{u}_1\}_j^v} \quad v \geq 2 \quad (39)$$

$$\Delta\lambda_j^v = \Delta\lambda_1^1 (\text{GSP})^{1/2} \quad v = 1, \quad (40)$$

where the generalized stiffness parameter (GSP) is given by:

$$\text{GSP} = \frac{\langle \mathbf{u}_1 \rangle_1^1 \cdot \{\mathbf{u}_1\}_1^1}{\langle \mathbf{u}_1 \rangle_{j-1}^1 \cdot \{\mathbf{u}_1\}_j^v} \quad (41)$$

with the load increment $\Delta\lambda_1^1$ prescribed for the first load step.

4.5 Solution of the linear system of equations.

In this work the preconditioned conjugate gradient method was used. This method provides an efficient solution for 3D problems. The solution using a preconditioned gradient conjugate algorithm involves an iterative improvement of an approximate nodal displacement vector, \mathbf{u} , through a sequence of matrix operations that vectorize naturally. The computational procedure was implemented in an element-by-element architecture that eliminates the need to assemble and store the tangent stiffness matrix of the structure. Consequently, the memory requirements were reduced. For details about the algorithm see Hughes and Ferencz (1987).

5. Numerical examples.

To investigate the performance of the proposed formulation, a variety of problems including linear and non-linear are studied and compared with analytical solutions and published data.

5.1 Square plate

A simple supported square plate subjected to a concentrated load at the center is analyzed. The mechanical properties for this problem are $E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $L = 10 \text{ m}$, $t = 0.2 \text{ m}$ and $F = 400 \text{ kN}$. Due to symmetry only one quarter of the plate is modeled. The computed displacement at the center of the plate u_c is compared to the analytical solution, $w_{\max} = 0.1256(FL^2/Et^3)$, Tab. (1).

Table 1. Discretization data and normalized displacement at the center of the plate

Mesh	Elements	Nodes	u_c/w_{\max}
8x8x4	256	405	1.043

5.2 Pinched cylinder

Figure (3) shows a pinched cylinder subjected to a pair of concentrated loads. Both ends of the cylinder are covered with rigid diaphragms. Due to symmetry only one octant of the cylinder is analyzed. The mechanical properties for this problem are $E = 3 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $L = 600 \text{ m}$, $R = 300 \text{ m}$, $t = 3 \text{ m}$ and $F = 1 \text{ kN}$. The computed displacement at the loading point u_c is compared to the analytic solution ($w_{\max} = 1.8248 \times 10^{-5} \text{ m}$) in Tab. (2).

Table 2. Discretization data and normalized displacement at the loading point for pinched cylinder problem.

Mesh	Elements	Nodes	u_c/w_{\max}
20x20x4	1600	2205	0.981

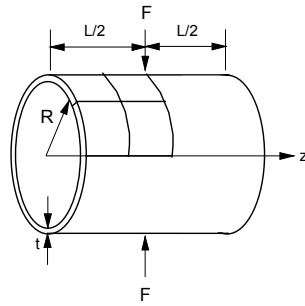


Figure 3. Pinched cylinder.

5.3 Large rotation of a cantilever beam

Figure (4a) shows a cantilever beam subjected to a large transverse shear load. The material parameters are $E = 1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0$, $L = 10 \text{ m}$, $D = 0.1478 \text{ m}$ and $P = 269.3 \text{ kN}$. A mesh of 10×2 elements was used. The result agrees well with the work of Liu *et al.* (1999) in Fig. (4b).

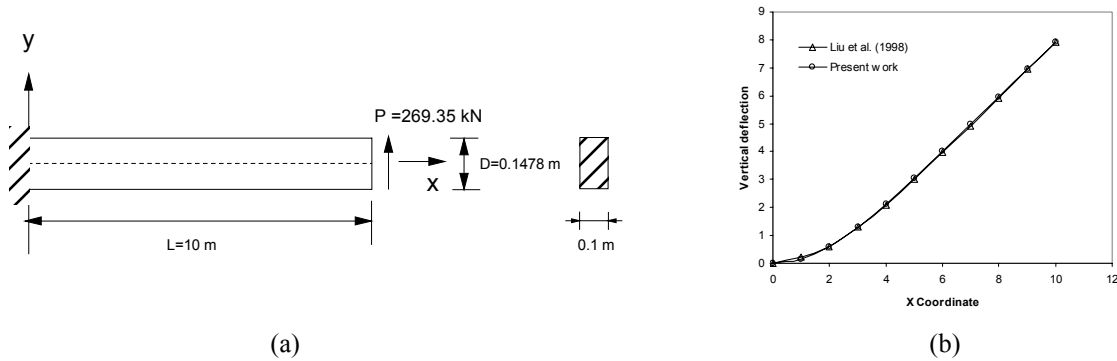


Figure 4. Large rotation of a cantilever beam

5.4 Shallow circular arch under concentrated load

The snap through of a clamped shallow arch subjected to a concentrated load is considered in this example, Fig (5a). The results in this problem were obtained with a $10 \times 3 \times 1$ finite element mesh for one half of the arch. Figure (5b) show the central deflection at the mid point vs. the applied load P . There was good agreement with another finite element model presented by Surana and Sorem (1989).

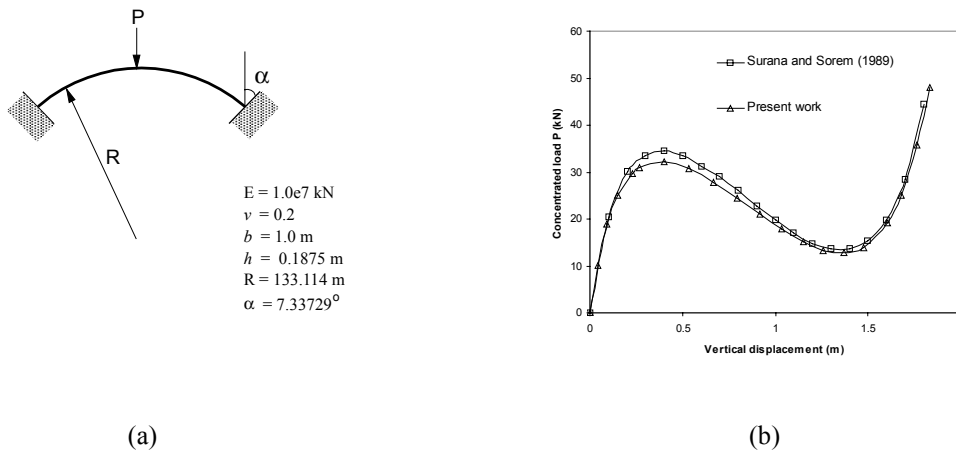


Figure 5. Shallow circular arch

5.5 Hinged cylindrical shell under concentrated load

The behavior of a cylindrical shell with a concentrated central load applied at the top is examined, Fig (6a). Due to the symmetry of its geometry only one quarter of the shell was modeled with a $5 \times 5 \times 2$ finite element mesh. In Fig (6b) the central deflection is showed while concentrated load P is applied. There was good agreement with results reported by other authors using different finite element models.

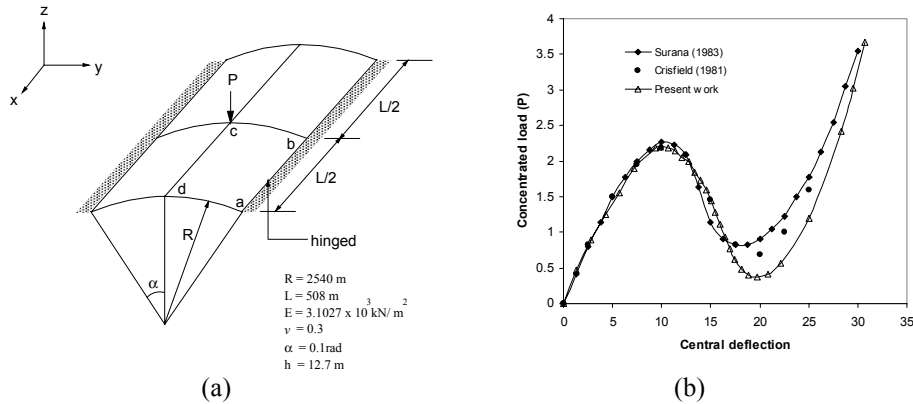


Figure 6. Hinged cylindrical shell under concentrated load

6. Conclusions

The hexahedral finite element with subintegration was successfully implemented for small and large displacement analysis of shells and plates. Formulated in a corotational system it is shown to be effective to solve non-linear problems. The element-by-element architecture optimizes the uses of computer resources. Test problems studied have shown that this element is valid for the geometrically non-linear analysis of plate and shells.

7. Acknowledgements

The authors wish to thank CNPq for the financial support.

8. References

- Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. 1970. Analysis of thick and thin shell structures by curve elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2, 419-451.
- Azevedo, L.A. and Awruch, A.M. 1999. Geometric non-linear dynamic analysis of plates and shells using eight-node hexahedral finite elements with reduced integration. *J. of the Braz. Soc. of Mechanical Sciences*. 21, 3: 446-162.
- Bathe, K.J. 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (USA).
- Belytschko, T. and Binderman L.P. 1993. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 105, 225-260.
- Belytschko, T., Lin, J.I. and Tsay, C.S. 1984. Explicit algorithms for the non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 42, 225-251.
- Belytschko, T. 1983. Correction of the article by D.P. Flanagan and T. Belytschko. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19, 467-468.
- Choi C.K. and Yoo S. W. 1991. Geometrically nonlinear behaviour of an improved degenerated shell element. *Computers & Structures*, 40,3: 785-794.
- Crisfield, M.A. 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers & Structures*, 13,55-62.
- Flanagan, D. P. and Belytschko, T. 1981. A uniform strain hexaedron and quadrilateral element with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, 679-706.
- Hughes, T.J.R. 1987. *The finite element method*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (USA).
- Hughes, T.J.R. and Ferencz, R.M. 1987. Large scale vectorized implicit calculations in solid mechanics on a Cray X-MP/48 utilizing EBE preconditioned conjugate gradients. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng* 61, 215-248.
- Koh, B. C. and Kikuchi, N. 1987. New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 65, 1-46.
- Liu, W.K., Guo Y., Tang S. and Belytschko T. 1998. A multiple quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 154, 69-132.
- Liu, W.K., Hu Y.K. and Belytschko T. 1994. Multiple quadrature underintegrated finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 34, 259-300.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. 1986. On the variational foundation of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics* 53, 51-54.
- Surana, K.S. 1983. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19, 581-615.
- Surana, K.S. and Sore R.M. 1989. Geometrically nonlinear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, 43-73.
- Yang Y.B. and Shieh M.S. 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal* 28, 12: 2110-2116.

EFEITO DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS NAS LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

Alessandro P. Baêta Neves

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
22.290.270 – Rio de Janeiro - RJ
E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Pedro M. C. L. Pacheco

CEFET/RJ

Departamento de Engenharia Mecânica
20.271.110 - Rio de Janeiro – RJ
E-Mail: calas@cefet-rj.br

Resumo. As ligas com memória de forma (SMAs) vêm motivando diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Os efeitos de memória de forma e pseudoelasticidade são fenômenos termoelásticos, associados às transformações de fase martensíticas presentes nessas ligas. A modelagem das SMAs possui duas abordagens distintas. A primeira, microscópica, leva em consideração aspectos metalúrgicos, enquanto a segunda abordagem, macroscópica, descreve os aspectos fenomenológicos. Este trabalho apresenta um modelo constitutivo, em um contexto unidimensional, para descrever o comportamento termomecânico de ligas com memória de forma levando em consideração o efeito das deformações plásticas. As transformações de fase são descritas a partir de um modelo com restrições internas onde consideram-se três variantes de martensita e uma fase austenítica. O modelo de plasticidade utiliza um critério de escoamento linear e formulações lineares para endurecimento cinemático e isotrópico. A hipótese da decomposição aditiva é utilizada na formulação do problema, e considera-se que os fenômenos são desacoplados. Propõe-se um procedimento numérico baseado na partição do operador acoplado aos algoritmos de projeção ortogonal e mapeamento de retorno. Os resultados mostram que o modelo é capaz de descrever, de um ponto de vista qualitativo, o comportamento termomecânico das SMAs.

Palavras chave: Memória de forma, Plasticidade.

1. Introdução

A expressão ligas com memória de forma (SMAs - *Shape Memory Alloys*) é aplicada a uma família de materiais metálicos que, mesmo após serem deformados, demonstram a habilidade de retornar a uma forma previamente definida, desde que submetidos a um processo termomecânico apropriado. Esta habilidade é conhecida como efeito memória de forma.

As SMAs sofrem transformações de fase que podem ser induzidas pela imposição de um campo de tensões, de temperatura ou ainda, através da combinação de ambos. Esta natureza de acoplamento tensão/temperatura proporciona o aparecimento de alguns fenômenos macroscópicos que dependem das quantidades presentes de cada fase e do nível de tensão e/ou temperatura aplicados ao material, são eles: memória de forma, pseudoelasticidade, memória de forma reversível, entre outros.

A descrição destes fenômenos macroscópicos requer a definição de temperaturas que caracterizam as transformações de fase, são elas: M_f - temperatura de fim de formação de martensita, M_s - temperatura de início de formação de martensita, A_s - temperatura de início de formação de austenita e A_f - temperatura de fim de formação de austenita. Quando uma amostra de SMA é submetida a um carregamento, a uma temperatura constante $T > A_f$, ocorrem deformações inelásticas acima de uma determinada tensão crítica. Esta deformação, entretanto, é plenamente recuperada ao cessar-se o carregamento. A mesma amostra quando carregada a uma temperatura $T < M_f$ produz uma deformação residual que pode ser recuperada com o aquecimento. O primeiro caso é denominado de pseudoelasticidade e o segundo de memória de forma. Um outro fenômeno interessante é denominado efeito memória de forma reversível ou em duas vias (*two-way shape memory effect*). Este fenômeno é conseguido após submeter o material a um processo de treinamento que permite associar uma forma para cada fase, em função da variação de temperatura.

O efeito memória de forma reversível tem sido muito estudado ultimamente. A habilidade das ligas associarem formas previamente definidas para baixas e altas temperaturas vem despertando muitas idéias nos projetistas. Algumas das principais aplicações desenvolvidas são os implantes médicos recuperáveis, prendedores reversíveis, atuadores termo-sensíveis, dentre outros.

Alguns estudos consideram que a rotina de treinamento para obtenção do fenômeno do *two-way* admite a existência de deformações plásticas, ou seja, a união entre memória de forma e plasticidade pode permitir a modelagem do fenômeno memória de forma reversível (Bo & Lagoudas, 1999; Dobovsek, 2000; Govindjee & Hall, 2000; Zhang & McCormick, 2000; LExcellent *et al.*, 2000).

Ainda com relação a influência das deformações plásticas no comportamento termomecânico das SMAs, Lagoudas & Miller (2000) comentam que atuadores SMA podem apresentar sensíveis perdas da capacidade de atuação, através do desenvolvimento de deformações plásticas durante sua vida útil. Diferentemente da maioria dos metais dúteis, as SMAs

podem apresentar deformações plásticas induzidas por transformações de fase martensíticas e em baixos níveis de tensão. Consideram-se como principais efeitos das deformações plásticas a redução das temperaturas de transformação, a obtenção de menores deformações reversíveis, o aumento da tensão de escoamento da fase martensítica e o endurecimento.

Neste trabalho, incorpora-se a plasticidade em um modelo constitutivo unidimensional para memória de forma proposto por Paiva *et al.* (2000), na intenção de avaliar os fenômenos associados às deformações plásticas nessas ligas. Propõe-se um procedimento numérico baseado na partição do operador acoplado aos algoritmos de projeção ortogonal e mapeamento de retorno. Os resultados mostram que o modelo é capaz de descrever, de um ponto de vista qualitativo, o comportamento termomecânico das SMAs. Fenômenos como pseudoelasticidade e memória de forma são avaliados em situações de carregamento onde a tensão prescrita ultrapassa os limites de escoamento das fases produto, produzindo deformações que não são recuperáveis com ciclos térmicos subsequentes.

2. Modelo Constitutivo para Memória de Forma e Plasticidade

O comportamento termomecânico das ligas com memória de forma submetidas a deformações plásticas é descrito neste trabalho através da associação de um modelo para memória de forma com um modelo para plasticidade. A modelagem está restrita a um contexto unidimensional. O comportamento das ligas com memória de forma são descritos a partir do modelo proposto por Paiva *et al.* (2000), que considera restrições internas associadas à coexistência de quatro variantes distintas do material: uma associada à fase matriz austenítica (A), duas associadas às fases produtos (M^+ e M^-), que representam as variantes martensíticas não-macladas (*detwinned*) induzidas por tensão, relacionadas à tração e à compressão, respectivamente e uma outra associada à fase martensítica (M) denominada martensita maclada (*twinned*), que representa a fração martensítica induzida por temperatura, obtida através do resfriamento da liga a uma temperatura para a qual a martensita é estável e livre de tensões. Este modelo é baseado no modelo de Fremond (1987, 1996). A plasticidade é descrita a partir do modelo proposto por Simo & Hughes (1998), que apresenta um critério de escoamento linear e formulações lineares para endurecimento cinemático e isotrópico.

As equações constitutivas aqui discutidas são formuladas segundo o formalismo dos *materiais padrão generalizados* (Lemaître & Chaboche, 1990). Desta forma, considere uma energia livre função do seguinte conjunto de variáveis $\psi = \psi(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \varepsilon^p, \gamma, \mu)$ onde ε é a deformação, T a temperatura, β_1 a fração volumétrica associada à fase M^+ , β_2 a fração volumétrica associada à fase M^- , β_3 a fração volumétrica associada à fase A , ε^p a deformação plástica, γ uma variável associada ao endurecimento isotrópico e μ uma variável associada ao endurecimento cinemático. Admitindo-se a decomposição aditiva,

$$\varepsilon = \varepsilon^{SMA} + \varepsilon^p \quad (1)$$

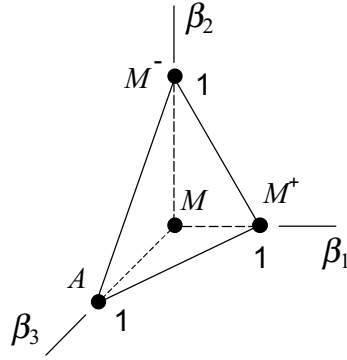
onde ε^{SMA} é a parcela recuperável da deformação. A *energia livre de Helmholtz* para um material com memória de forma e plasticidade é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho \psi = & \beta_1 \left[-\alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) - \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) \right] + \beta_2 \left[\alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) - \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) \right] + \\ & + \beta_3 \left[\frac{1}{2} (E_A - E_M) (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 - \frac{(L_A + L_M)}{T_M} (T - T_M) \right] + \\ & + \frac{1}{2} E_M (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) + J_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \frac{1}{2} K \gamma^2 + \frac{1}{2H} \mu^2 \end{aligned} \quad (2)$$

onde ρ é a massa específica, α é o coeficiente de transformação de fase, E_A e E_M representam os módulos de elasticidade associados às fases austeníticas e martensíticas, respectivamente; T_M é a temperatura abaixo da qual a fase martensítica torna-se estável na ausência de tensões; $L_M = L_M(T)$ e $L_A = L_A(T)$, são parâmetros do material associados às transformações de fase martensíticas e austeníticas, respectivamente, K é o módulo de plasticidade, H é o módulo de endurecimento cinemático e $J_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ representa a função indicatriz do conjunto π (Rockfellar, 1970), cujo domínio é dado pelo tetraedro apresentado na Figura 1.

$$\pi = \left\{ \beta_i \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta_i \leq 1 (i=1, 2, 3), \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq 1; \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ se } \sigma = 0 \text{ e } \beta_1^S = \beta_2^S = 0 \right\} \quad (3)$$

onde β_1^S e β_2^S são os valores de β_1 e β_2 , respectivamente, quando a transformação de fase se inicia.


 Figura 1 – Tetraedro de restrições π .

Os parâmetros $L_M = L_M(T)$ e $L_A = L_A(T)$, são obtidos assumindo as seguintes condições: $\beta_1 = 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_R = \alpha / E_M$, em uma temperatura crítica, T_C , abaixo da qual não existe deformação residual. Assim, usando estas condições nas equações constitutivas, chega-se a:

$$L_M(T) = \begin{cases} L_M = L, & \text{se } T \geq T_C \\ L_M = L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)}, & \text{se } T < T_C \end{cases} \quad (4)$$

$$L_A(T) = \begin{cases} L_A = L, & \text{se } T \geq T_C \\ L_A = 2L - \left[L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)} \right], & \text{se } T < T_C \end{cases} \quad (5)$$

A partir da energia livre obtêm-se as equações de estado:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = [E_M - \beta_3 (E_M - E_A)] (\varepsilon - \varepsilon^p) + \alpha (\beta_2 - \beta_1) \quad (6)$$

$$B_1 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1} = \alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) - \partial_{\beta_1} J_3 \quad (7)$$

$$B_2 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} = -\alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) - \partial_{\beta_2} J_3 \quad (8)$$

$$B_3 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_3} = -\frac{1}{2} (E_A - E_M) (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{(L_A + L_M)}{T_M} (T - T_M) - \partial_{\beta_3} J_3 \quad (9)$$

$$X = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} = [E_M - \beta_3 (E_M - E_A)] (\varepsilon - \varepsilon^p) + \alpha (\beta_2 - \beta_1) = \sigma \quad (10)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = -K \gamma \quad (11)$$

$$Z = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = -\frac{\mu}{H} \quad (12)$$

onde σ representa a tensão uniaxial; B_i , X , Y e Z são as forças termodinâmicas e $\partial_{\beta_i} J_3$ representa a subdiferencial da função indicatriz $J_3 (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ com respeito à variável β_i para $(i = 1, 2, 3)$ (Rockfellar, 1970).

Como os fenômenos são dissipativos, é necessário o uso das equações complementares. Para isso, admite-se um potencial dual de dissipação $\phi^* = \phi^* (B_i, X, Y, Z)$ com a seguinte forma:

$$\phi^* = \frac{1}{2\eta}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) + I_f \quad (13)$$

onde I_f é a função indicatriz associada a função de escoamento, definida a seguir

$$f = |X + HZ| - (\sigma_Y - Y) \quad (14)$$

O parâmetro η está associado à dissipação interna do material e σ_Y é a tensão limite de escoamento da fase produto. A partir desta proposta, não existe acoplamento entre os fenômenos plásticos e da transformação de fase. Definindo-se a entropia específica $s = -\partial\psi/\partial T$, a segunda lei da termodinâmica é automaticamente satisfeita, tendo em vista que o potencial dual de dissipação é convexo, positivo e nulo na origem (Lemaitre & Chaboche, 1990). A partir do potencial dual de dissipação, definem-se os fluxos termodinâmicos:

$$\dot{\beta}_1 \in \partial_{B_1} \phi^* = \frac{B_1}{\eta} \quad (15)$$

$$\dot{\beta}_2 \in \partial_{B_2} \phi^* = \frac{B_2}{\eta} \quad (16)$$

$$\dot{\beta}_3 \in \partial_{B_3} \phi^* = \frac{B_3}{\eta} \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}^P \in \partial_X \phi^* = \lambda \text{sign}(X + HZ) = \lambda \text{sign}(\sigma - \mu) \quad (18)$$

$$\dot{\gamma} \in \partial_Y \phi^* = \lambda = |\dot{\epsilon}^P| \quad (19)$$

$$\dot{\mu} \in \partial_Z \phi^* = \lambda H \text{sign}(X + HZ) = H \dot{\epsilon}^P \quad (20)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange relacionado com a taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}^P$. A variável interna γ modela o endurecimento isotrópico. A variável μ , por sua vez, é denominada *back stress* e define a posição do centro da superfície de escoamento. Além disso, λ e σ estão definidos por certas condições de restrição unilaterais, condições de *Kuhn-Tucker*, que representam a irreversibilidade do fluxo plástico (Simo & Hughes, 1998):

$$\lambda \geq 0; f(\sigma, \gamma, \mu) \leq 0; \lambda f(\sigma, \gamma, \mu) = 0; \lambda \dot{f}(\sigma, \gamma, \mu) = 0 \text{ se } f(\sigma, \gamma, \mu) = 0 \quad (21)$$

3. Procedimento Numérico

O procedimento numérico desenvolvido para a solução do conjunto de equações constitutivas, considera a técnica de partição do operador associada a um novo algoritmo de projeção (preditor-corretor). Em uma etapa preliminar, as subdiferenciais $\partial_{\beta_i} J_3$ para $(i = 1, 2, 3)$ não são consideradas para o cálculo das variáveis internas, que é feito através do método de *Euler* implícito. O algoritmo de projeção funciona como uma garantia para que as variáveis internas obedecem às restrições impostas em (3). Caso os valores calculados em (15), (16) e (17) estejam fora do tetraedro representado pela Figura 1, as projeções representadas pelas subdiferenciais da função indicatriz $J_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ se encarregam de projetar as variáveis para os pontos mais próximos da superfície do tetraedro, garantindo que as variáveis internas obedecem às restrições internas impostas pelo modelo. Quando a tensão ultrapassa o valor limite para a tensão de escoamento o algoritmo de mapeamento de retorno (*return mapping*), proposto por Simo & Taylor (1986), é utilizado. A partir de uma tensão ou deformação conhecida, o algoritmo estabelece um estado tentativo obtido através de uma predição elástica. Caso este passo seja factível, ou seja, a função de escoamento $f \leq 0$, então o estado tentativo é verdadeiro. Do contrário, $f > 0$, deve-se fazer uma projeção para corrigir este passo.

4. Simulações Numéricas

Considere uma amostra de uma liga com memória de forma, cujas propriedades estão listadas na Tabela 1. Inicialmente, esta amostra é submetida a um carregamento de tensão prescrita com temperatura constante de 80°C, dividido em dois ciclos, conforme mostra a Figura 2.

A Figura 3a apresenta a curva tensão-deformação associada a este processo de carga e descarga mostrando que, durante o primeiro ciclo, o fenômeno pseudoelástico está claramente caracterizado através do laço de histerese e da recuperação das deformações com a transformação inversa ao fim do ciclo de carga e descarga. A máxima tensão prescrita não ultrapassa o limite de escoamento do material e, portanto, não existem deformações plásticas. Durante o segundo ciclo, após a transformação de fase ($A \rightarrow M^+$), ultrapassa-se o limite de escoamento do material, entrando na região plástica onde deformações irreversíveis são produzidas. Durante o processo de descarga, ocorre a transformação de fase inversa ($M^+ \rightarrow A$) que é seguida de uma descarga elástica. Contudo, este processo resulta em uma deformação residual. A Figura 3b mostra a evolução das frações volumétricas, destacando-se a transformação da fase austenítica em martensítica induzida por tração durante os ciclos de carga e descarga. A Figura 3c apresenta a evolução da deformação plástica, mostrando o crescimento da deformação plástica próximo de $t = 6$ s, quando a tensão prescrita ultrapassa o limite de escoamento do material. Cessado o carregamento, a deformação residual é a máxima deformação plástica atingida.

Tabela 1 – Propriedades do material.

E_A (GPa)	E_M (GPa)	α (MPa)	L (kPa/°C)	K (GPa)	H (GPa)	σ_Y (GPa)	T_M (°C)
67	26,3	228,8	616,313	0,45	0,1	0,69	18,4

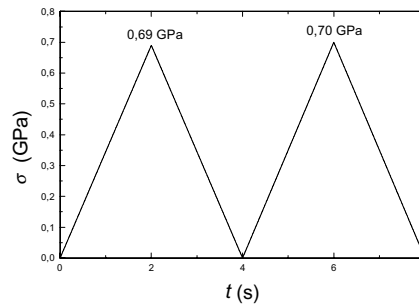


Figura 2. Carregamento de tensão prescrita.

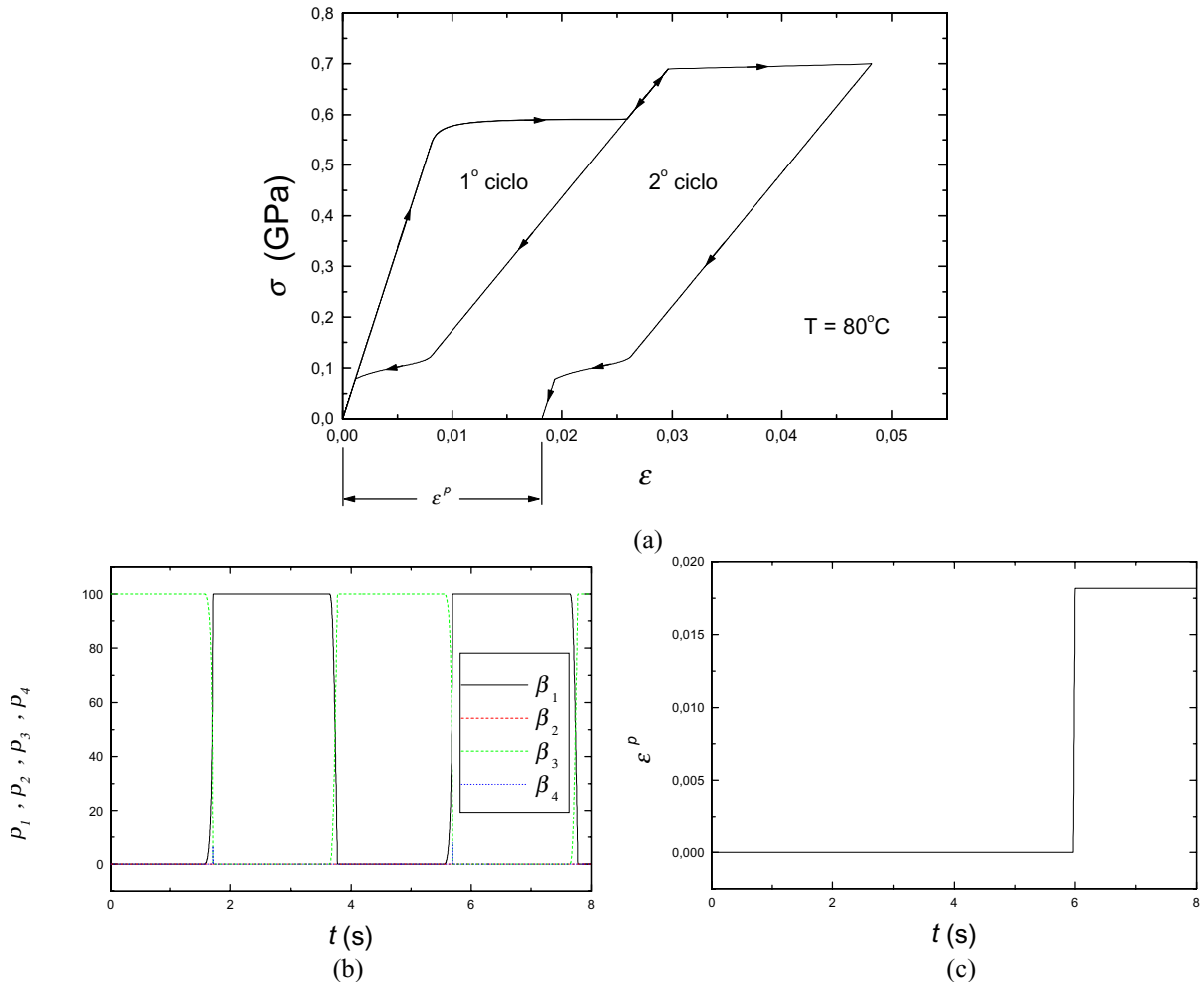


Figura 3. Pseudoelasticidade com deformação plástica; (a) Curva tensão-deformação; (b) Evolução das frações volumétricas; (c) Evolução da deformação plástica.

Considere agora uma amostra com as mesmas propriedades listadas na Tabela 1 e com uma tensão de escoamento $\sigma_Y = 0,08\text{GPa}$. Esta amostra é submetida a um carregamento termomecânico, mostrado na Figura 4, dividido em dois ciclos.

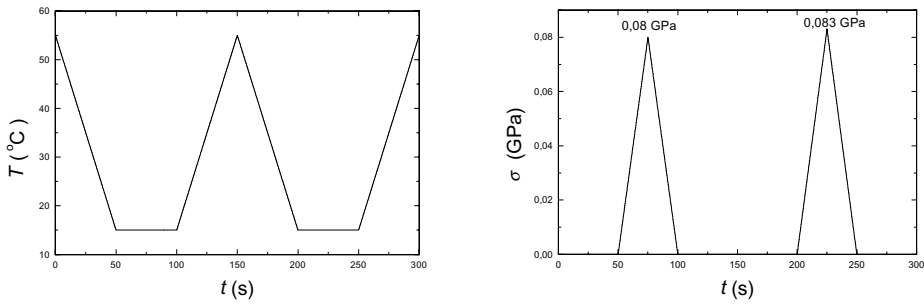


Figura 4. Carregamento termomecânico.

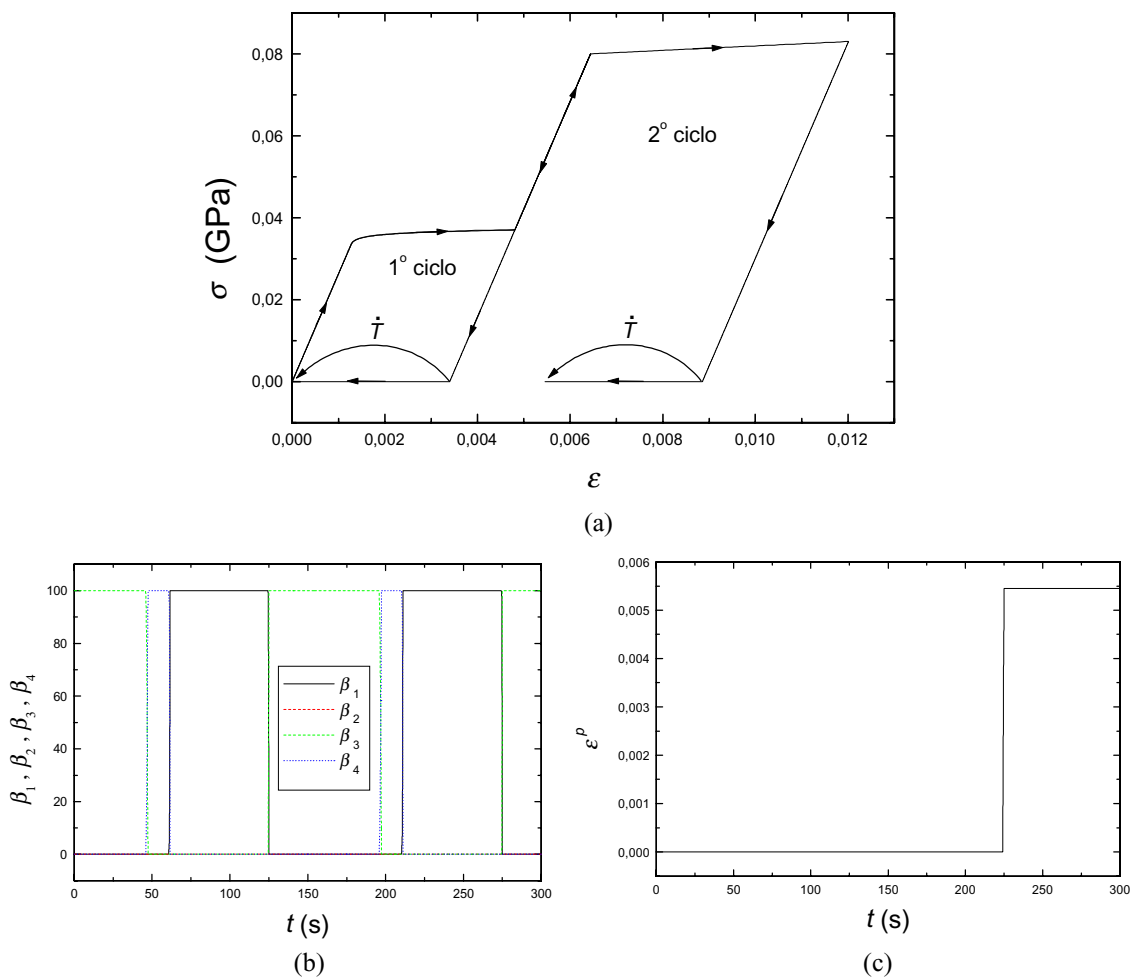


Figura 5. Memória de forma com deformação plástica; (a) Curva tensão-deformação; (b) Evolução das frações volumétricas; (c) Evolução da deformação plástica.

A Figura 5a apresenta a curva tensão-deformação. Durante o carregamento termomecânico do primeiro ciclo, observa-se o fenômeno da memória de forma onde a deformação residual decorrente do processo carga-descarga mecânica é totalmente recuperada com o aquecimento da amostra e conseqüente transformação de fase. Durante o segundo ciclo, após a transformação de fase, inicia-se um processo de plastificação irreversível da amostra. Após a descarga mecânica, a amostra apresenta uma deformação residual composta de uma parcela reversível e outra irreversível. O aquecimento da amostra (\dot{T}) recupera a parcela reversível da deformação, contudo, ainda existe a parcela irreversível que não é eliminada. A Figura 5b mostra a evolução das frações volumétricas, destacando as transformações de fase envolvidas no processo. Inicialmente, a austenita é transformada em uma fase martensítica

termoelástica durante o resfriamento, seguindo a transformação da martensita induzida por temperatura em martensita induzida por tensão de tração e, finalmente, a transformação final em austenita com o aquecimento ao fim de cada ciclo. A Figura 5c representa a evolução da deformação plástica, mostrando o seu crescimento próximo de $t = 225$ s, quando a tensão prescrita ultrapassa o limite de escoamento do material.

5. Conclusões

Este trabalho apresenta um modelo constitutivo para descrever o comportamento termomecânico de *SMA*s submetidas a deformações plásticas. O modelo proposto incorpora a plasticidade em um modelo para memória de forma, baseado em restrições internas, e consegue representar os fenômenos da pseudoelasticidade e da memória de forma quando na presença de deformações plásticas irreversíveis. Por hipótese, considera-se que os fenômenos são desacoplados. Um procedimento numérico é proposto baseado na técnica de partição do operador associada aos algoritmos de projeção ortogonal e de mapeamento de retorno. As simulações numéricas apresentam resultados qualitativamente coerentes, sendo capazes de capturar o comportamento termomecânico das ligas. No fenômeno de pseudoelasticidade-plástica, a transformação da fase martensítica induzida por tensão em fase austenítica não elimina a deformação plástica residual, resultado do carregamento acima do limite de escoamento. No fenômeno de memória de forma - plástica, apenas a parcela recuperável da deformação, que está associada às transformações de fase, consegue ser recuperada com o carregamento térmico.

6. Referências

- ASM Handbook, 1992, Formerly tenth edition, Metals Handbook – Volume 2, Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special – Purpose Materials, January – ACM International.
- Bo, Z.H. & Lagoudas, D.C., 1999, “Thermomechanical Modeling of Polycrystalline SMAs Under Cyclic Loading, Part III: Evolution of Plastic Strains and Two-Way Shape Memory Effect”, *International Journal of Engineering Science*, v.37, pp.1175-1203.
- Dobovsek, I., 2000, “On formal structure of constitutive equations for materials exhibiting shape memory effects”, *Shape Memory Materials*, pp.359-362.
- Fremont, M., 1987, “Matériaux à Mémoire de Forme”, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Tome 34, s.II, n.7, pp. 239-244.
- Fremont, M., 1996, “Shape Memory Alloy: A Thermomechanical Macroscopic Theory”, CISM courses and lectures, Springer Verlag.
- Govindjee, S. & Hall, G. J., 2000, “A Computational Model for Shape Memory Alloys”, *International Journal of Solids and Structures*, v.37, pp.735-760.
- Lagoudas, D. C. & Miller, D. A., 2000, “Thermo-mechanical Characterization of NiTiCu and NiTi SMA Actuators: Influence of Plastic Strains”, *Smart Materials & Structures*, v.5, pp.640-652.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.-L., 1990, “*Mechanics of Solid Materials*”, Cambridge University Press.
- Lexcellent, C., Leclercq, S., Gabry, B. & Bourbon, G., 2000, “The Two-Way Shape Memory Effect of Shape Memory Alloys: An Experimental Study and a Phenomenological Model”, *International Journal of Plasticity*, pp.1155-1168.
- Paiva, A., Savi, M.A. & Pacheco, P.M.C.L., 2000, “A One-Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys”, *CONEM 2000 - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*.
- Rockafellar, R. T., 1970, “*Convex Analysis*”, Princeton Press.
- Simo, J.C. & Hughes, T.J.R., 1998, “*Computational Inelasticity*”, Springer.
- Simo, J.C. & Taylor, R. L., 1986, “A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.22, pp.649-670.
- Zhang, S. & McCormick, P. G., 2000, “Thermodynamic Analysis of Shape Memory Phenomena – I. Effect of Transformation Plasticity on Elastic Strain Energy”, *ACTA Materialia*, pp.3081-3089.
- Zhang, S. & McCormick, P. G., 2000, “Thermodynamic Analysis of Shape Memory Phenomena – II. Modelling”, *ACTA Materialia*, pp.3091-3101.

EFFECT OF PLASTIC STRAINS IN SHAPE MEMORY ALLOYS

Alessandro P. Baêta Neves

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia - Department of Mechanical and Materials Engineering

22.290.270 – Rio de Janeiro - RJ

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Pedro M. C. L. Pacheco

CEFET/RJ - Department of Mechanical Engineering

20.271.110 - Rio de Janeiro – RJ

E-Mail: calas@cefet-rj.br

***Abstract.** Shape memory alloys (SMAs) have been motivating different application in many areas. Shape memory and pseudoelasticity are thermoelastic phenomena, associated with martensitic phase transformations which occur in these alloys. The modeling of SMAs has two approaches. On the first microscopic approach, metallurgical aspects are considered. On the other hand, the second approach, macroscopic, phenomenological aspects are focused. This contribution presents a one-dimensional constitutive model to describe the thermomechanical behavior of SMAs considering plastic strains. Phase transformations are described by a model with internal constraint which considers three variants of martensite and an austenitic phase. The plasticity model employs a linear yield criterion and also linear isotropic and kinematics hardening. An additive decomposition hypothesis is assumed, and the phenomena are considered to be uncoupled. A numerical procedure based on operator split technique coupled with orthogonal projection and return mapping algorithms is developed. Results show that the model is capable to capture the qualitative thermomechanical behavior of SMAs.*

Keywords: Shape memory, Plasticity.

LARGE DEFLECTION BEHAVIOR AND STABILITY OF SLENDER BARS UNDER SELF WEIGHT

Daniel Leonardo B. R. Jurjo

Paulo B. Gonçalves

Djenane Pamplona

Civil Engineering Department

Catholic University, PUC-Rio

22453-900 Rio de Janeiro, RJ, Brazil

paulo@civ.puc-rio.br

Abstract. *In this paper the buckling and post-buckling behavior of slender bars under self-weight are studied. First a linear analysis is conducted to determine the critical loads for different boundary conditions. In order to study the post-buckling behavior of the bar, a geometrically exact formulation for the non-linear analysis of uni-directional structural elements has been derived, considering arbitrary load distribution and boundary conditions. From this formulation one obtains a set of first-order coupled non-linear equations which, together with the boundary conditions at the bar ends, form a two-point boundary value problem. This problem is solved by the simultaneous use of the Runge-Kutta integration scheme and the Newton-Raphson method. By virtue of a continuation algorithm, accurate solutions can be obtained for a variety of stability problems exhibiting either limit point or bifurcational-type buckling. Using this formulation, a detailed parametric analysis is conducted in order to study the buckling and post-buckling behavior of slender bars under self-weight, including the influence of boundary conditions on the stability, internal forces distribution and large deflection behavior of the bar. To verify the quality and accuracy of the results, an experimental analysis was conducted considering a clamped-free thin-walled metal bar. The buckling and post-buckling behavior were obtained and compared favorably with the theoretical and numerical results.*

Key Words: *Instability, post-buckling behavior, large deflections, self-weight, experimental analysis.*

1. Introduction

A survey of recent structures reveals a continuing trend towards longer and taller structures. Also structural elements are becoming lighter and thinner. This increases the importance of self-weight on the non-linear behavior and stability of these structures. In spite of its technical importance, the buckling and post-buckling behavior of columns under self-weight has been rarely studied in the past. The linear stability analysis of clamped-free columns under self-weight was analyzed by Timoshenko and Gere (1961) who obtained the solution of the buckling equation in terms of Bessel functions and arrived at an exact value for the critical load of this particular column. The post-buckling of a uniform column subjected to a uniform axial-load was first analyzed by Rao and Raju (1977), who obtained an approximate solution of the problem using the Galerkin method. More recent studies of the problem include the works of Teng and Yao (2000), Margetic and Atanackovic (2001) and Lee (2001). These studies concentrated on the determination of critical loads and the initial post-buckling behavior of clamped-free columns. None of these previous works has studied the large-deflection post-buckling behavior and the influence of boundary conditions on the load-carrying capacity of these columns.

The geometrically non-linear behavior and stability of uni-dimensional structural elements undergoing large deflections has been a topic of considerable interest in recent years due to its fundamental relevance to non-linear mechanics. This kind of problem finds applications in, for example, off-shore engineering, aerospace industry, suspension bridges, manufacture of robotic manipulators, construction of self erecting structures and manufacturing processes. For a few problems involving simple geometries and loading, mathematical solutions in terms of elliptic integrals are possible (Seide, 1984). For more general problems, however, the use of numerical techniques are usually necessary (Dos Anjos, 1995).

This paper is concerned with a consistent one-dimensional treatment of the plane deformations of an initially straight or curved elastic thin-walled column under self weight that may experience large deflections and rotations along the post-buckling path (Antman, 1977). Within the context of the assumptions of an extensible Bernoulli-Euler beam theory and using the standard methods of continuum mechanics, a geometrically exact set of first order non-linear equations in a Lagrangian framework is derived for a general curved-beam element. In order to obtain the equilibrium configurations, these equations are solved by the shooting method, which has been successfully used in the past for the numerical solution of non-linear boundary value problems (Keller, 1968). Here, the governing set of first-order differential equations is integrated numerically using the fourth-order Runge-Kutta method and the error in the boundary conditions is minimized by the Newton-Raphson algorithm. Equivalent formulations have been used in the past, but they are usually restricted to specific geometries and loading (Wolde-Tinsae and Foadian, 1989; Lee, 1993).

In the analysis of slender one-dimensional structural elements, loss of stability and bifurcation are common phenomena and solution procedures that deal effectively with this class of problem are necessary. In structural mechanics, continuation methods have led to effective algorithms for stability problems. In this paper, based on the seminal ideas of the continuation and homotopy methods, some numerical procedures are derived and implemented to follow arbitrary non-linear equilibrium paths and identify turning and bifurcation points. The advantages of the present methodology are convenience for the designer and highly accurate numerical results. It could also be employed as a benchmark for other numerical methods and mechanical models.

Using these numerical tools a detailed parametric analysis of the behavior of columns under self weight is conducted showing the variation of displacements and internal stress resultants along the pre- and post-buckling paths for different sets of boundary conditions.

In order to verify the accuracy of the results, a column made of a thin-walled sheet of brass was experimentally analyzed and the deformed shapes and post-buckling path were compared with the numerical results.

2. Large Deflection Analysis

Figure 1 shows the adopted co-ordinate systems as well as the undeformed configuration C_0 and the deformed configuration C_n of an initially curved Euler-Bernoulli beam. In Figure 1, the functions $x = x(s)$ and $y = y(s)$ of the curvilinear co-ordinate s represent the Cartesian components of the position of a typical point P along the unreformed centroidal axis and $u(s)$ and $w(s)$ are, respectively, the displacements in the x – and y – directions of point P due to deformation. In addition, θ_0 and θ are the slopes between the tangent to the beam curve and the y -axis and ds and ds^* are the length of an element in the undeformed and deformed configurations, respectively.

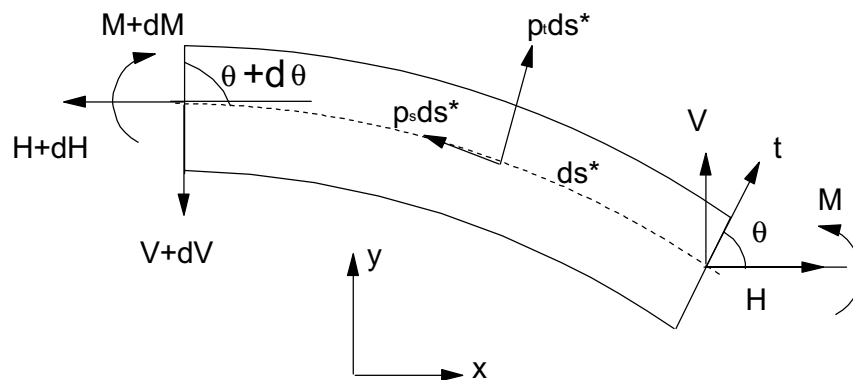


Figure 1. Co-ordinate system and deformation of a typical point on centroidal axis.

From Figure 1, the following basic set of geometric relations describing the undeformed configuration of a beam element can be written

$$dx/ds = -\sin \mathbf{q}_0; \quad dy/ds = \cos \mathbf{q}_0 \quad (1)$$

The deformed configuration can be described by the following kinematic relations

$$du/ds = -[(1+e)\sin \mathbf{q} - \sin \mathbf{q}_0]; \quad dw/ds = [(1+e)\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{q}_0] \quad (2)$$

where $e = (ds^* - ds)/ds$ is the axial strain.

A deformed element of a beam is shown in Figure 2. Here, V and H are the vertical and horizontal forces, M is the bending moment and p_s and p_t are the load intensities per unit of deformed beam curve length in the tangential and normal directions respectively. From the equilibrium of forces and moments, the following relations are derived.

$$dH/ds = (1+e)[p_t \cos \mathbf{q} - p_s \sin \mathbf{q}] \quad (3)$$

$$dV/ds = (1+e)[p_t \sin \mathbf{q} + p_s \cos \mathbf{q}]$$

$$dM/ds = H(1+e)\cos \mathbf{q} + V(1+e)\sin \mathbf{q}$$

The normal and shear forces on any cross section are given by

$$N = H \sin \mathbf{q} - V \cos \mathbf{q}; \quad Q = H \cos \mathbf{q} + V \sin \mathbf{q} \quad (4)$$

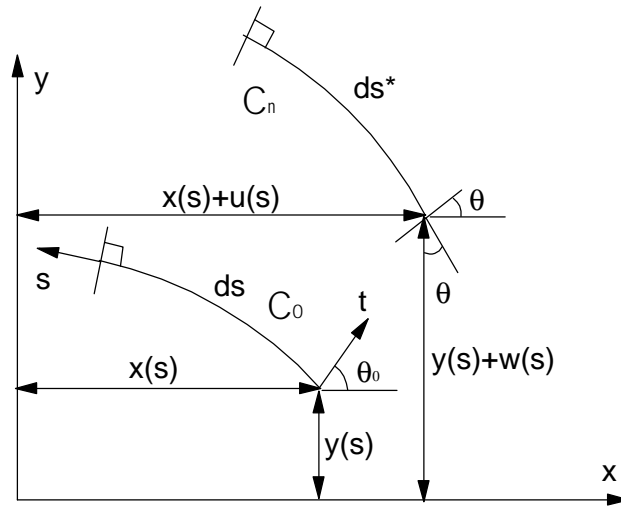


Figure 2. Equilibrium of a beam element.

If the forces q_x and q_y per unit length of the undeformed centerline in the x and y directions are specified, then the forces p_s and p_t can be computed from

$$p_t = q_x \cos \mathbf{q} + q_y \sin \mathbf{q}; \quad p_s = q_y \cos \mathbf{q} - q_x \sin \mathbf{q} \quad (5)$$

The derivatives of the loads, $dp_i/ds = \bar{p}(s)$, can be used as extra equations in the analysis.

The membrane stress resultant N and the bending stress resultant M are obtained in the usual way by integrating the stress over the cross section of the beam. Upon considering the quantities $e, d\mathbf{q}_0/ds, d\mathbf{q}/ds$ to be small relative to unity, one can write for a linearly elastic material that

$$N = \int_A \frac{R(s)_0}{R(s)_0 - t} E e dA = E e A^*; \quad M = \int_A t^2 \frac{R(s)_0}{R(s)_0 - t} E \mathbf{k} dA = E \mathbf{k} I^* \quad (6)$$

where E is the Young's modulus, A^* and I^* are the effective sectional properties of area and moment of inertia for the initially curved beam, $R(s)_0$ is the initial radius of curvature and \mathbf{k} is the bending curvature that is defined as

$$\mathbf{k} = -(d\mathbf{q}/ds - d\mathbf{q}_0/ds) \quad (7)$$

If $R(s)_0 \gg t$, the approximations $A^* \cong A$; $I^* \cong I$ can be used to simplify the analysis.

From equations (6) and (7), one obtains the differential equation

$$d\mathbf{q}/ds = \left[(1/R(s)_0) - (M/EI^*) \right] \quad (8)$$

Equations (2), (3) and (8) form a set of six coupled non-linear ordinary differential equations having as independent variable the axial co-ordinate. These equations can be used to study non-linear in-plane deformation (including axial strain), buckling and post-buckling behavior of any straight or curved beam under in-plane loading conditions in the elastic range.

Solutions of the foregoing system must satisfy the following boundary conditions at the two boundaries ($s = s_1$; $s = s_2$)

$$N = \bar{N} \quad \text{or} \quad u = \bar{u} \quad (9)$$

$$V = \bar{V} \quad \text{or} \quad w = \bar{w}$$

$$M = \bar{M} \quad \text{or} \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$$

where $(\bar{X}) = \text{prescribed value}$.

For curved beams of any shape it is usually more convenient to describe the undeformed centroidal arch as a function of the co-ordinate x . Using the differential relationship for the arc length $\left((ds)^2 = (dx)^2 + (df(x))^2\right)$, and the following relations

$$ds = -dx \left[1 + (df(x)/dx)^2\right]^{1/2}; \quad \mathbf{q}(s)_0 = \text{arctg} \left\{ [df(x)/dx]^{-1} \right\} \quad (10)$$

$$1/R(s)_0 = -d \left[d^2 f(x)/dx^2 \right] / \left[1 + (df(x)/dx)^2 \right]^{1/2}$$

equations (2), (3) and (8) can be easily written in terms of x .

2.1. Numerical Method for the Two-Point Boundary Value Problem

Due to lack of space, only the basic ideas of the numerical methodology will be outlined. The problem described by equations (2), (3) and (8) and boundary conditions (9) is a non-linear two-point boundary value problem with three specified boundary conditions at each boundary. The shooting method reduces the solution of a boundary value problem (BVP) to the iterative solution of an initial value problem (IVP) (Keller, 1968). This approach involves a trial-and-error procedure. At the starting point values are assumed for all variables and then the ODEs are solved by numerical integration, arriving at the other boundary. Unless the computed solution agrees with the known boundary conditions at this boundary, the initial conditions are adjusted and the process is repeated until the assumed initial conditions yield, within specified tolerances, a solution that agrees with the known boundary conditions.

So at $s = s_1$ only three variables among those shown in (9) are known. For the selection of the remaining three initial values the shooting procedure will be used in combination with a root-finding technique. The procedure is as follows.

Equations (2), (3) and (8) can be written for integration purposes as

$$dY/ds = AY(s) + P \quad (11)$$

where $Y^T(s) = \{y_1, \dots, y_6\} = \{u, w, \mathbf{q}, H, V, M\}$.

Assume that three of the functions y_i are prescribed at $s = s_1$ and that three are prescribed at $s = s_2$. Therefore there are three freely specifiable starting values. Assume that these values are components of a vector \bar{S} . The set of functions prescribed at s_1 will be denoted U_1 and those prescribed at s_2 by U_2 . Given a particular trial vector \bar{S} and U_1 the ODEs can be integrated from s_1 to s_2 as an IVP. Now, at $s = s_2$ a vector $F = \bar{U}_2 - U_2$, which measures the discrepancy between the prescribed values U_2 and the values obtained at the end point \bar{U}_2 , is calculated. The components of F vanish if and only if all boundary conditions at s_2 are satisfied.

Now the Newton-Raphson method will be used to find the starting values s_i that zeros the discrepancies f_i at the other boundary. A correction vector \mathbf{DS} can be found by solving the system of linear equations

$$J\Delta S = F \quad (12)$$

and an improved approximation is found by adding the correction back

$$\bar{S}_{i+1} = \bar{S}_i + \Delta S \quad (13)$$

It is not possible to compute the components $j_{ik} = \partial F_i / \partial s_k$ of the Jacobian matrix J analytically. Rather, each column of J requires a separate integration of the six ODEs, followed by the evaluation of the derivatives

$$\partial F_i / \partial s_k \cong F_i(s_1, \dots, s_k + \mathbf{D}s_k, \dots) - F_i(s_1, \dots, s_k, \dots) / \mathbf{D}s_k; \quad k = 1, 3 \quad (14)$$

Unless one starts quite far from the true values of \bar{S} , it has been observed during the calculations that only two or three iterative cycles are usually required for convergence.

The procedure summarized above enables one to obtain a particular equilibrium configuration. In order to study the non-linear behavior and possible loss of stability of slender bars, the non-linear equilibrium paths should be obtained. For this continuation algorithms must be used in the analysis. A continuation algorithm for stability analysis must include the capability of changing the control variables whenever necessary., here in addition to the load parameter, the non-homogeneous prescribed values and the free values at s_1 as well as the non-homogeneous prescribed values at s_2 which vary along the path with the load can be used as control variables. To follow a given equilibrium path a control variable is chosen and when convergence fails a new variable is selected and this process is repeated until the desired path is obtained.

3. Results and Discussion

The linearized buckling problem of a heavy column is described by the following differential equation

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -q(l-x) \frac{dy}{dx} \tag{15}$$

which can be solved in terms of Bessel functions (Timoshenko and Gere, 1961). The values of the critical load for selected sets of boundary conditions are shown in Table 1. Considering that the load q is constant, the problem is to find the critical length, l_{cr} , of the column and the influence of an increasing length on the post-buckling behavior of the column.

Table 1. Buckling loads for selected sets of boundary conditions.

Clamped-free column	$(ql)_{cr} = 7.83EI / l^2$
Simply supported	$(ql)_{cr2} = 18.57EI / l^2$
Clamped-simply supported	$(ql)_{cr1} = 33.03EI / l^2$
Clamped-clamped	$(ql)_{cr1} = 49.44EI / l^2$

A clamped-free brass column with width $b=9,0$ cm; thickness $h=0,44$ mm; load per unit length (self weight) $q = 3,43$ N/m, Young modulus $E = 123257$ MPa and variable length and a galvanized iron column with width $b=9,0$ cm; thickness $h=0,45$ mm; load per unit length (self-weight) $q = 3,05$ N/m, Young modulus $E = 126333$ MPa were analyzed both experimentally and numerically. The deflected shape of a beam for increasing length is shown in Figure 3. These images were digitized to obtain the deformed shape of the beam for each length. The comparison of the experimentally obtained deformed shapes with the numerical results is shown in Figure 4, for selected bar lengths. The maximum deflection as a function of the beam length is plotted in Figure 5, were the experimental results are compared with the post-buckling path obtained numerically. As observed, there is a remarkable agreement between the experimental and numerical results. The small difference near the critical load is typical of columns and is due to small geometric imperfections. Also, the critical load obtained numerically agrees with the theoretical result in Table 1.



Figure 3. Buckled column. Deformed shapes for increasing length.

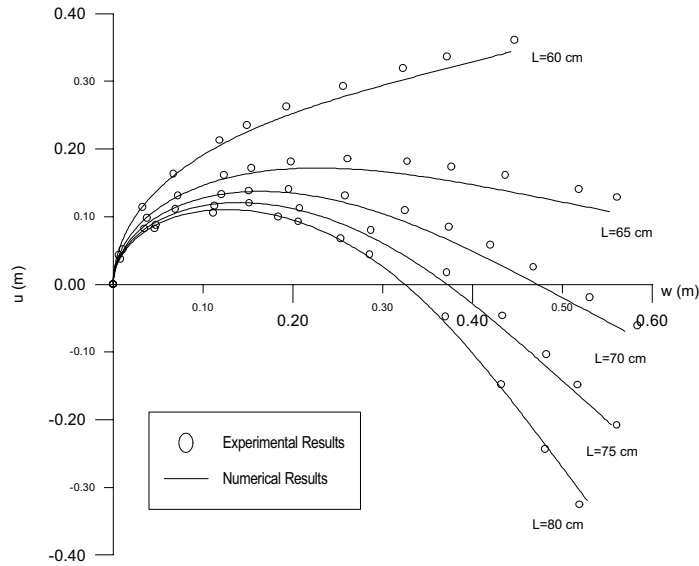


Figure 4. Clamped-free brass column. Comparison of numerical and experimental results.

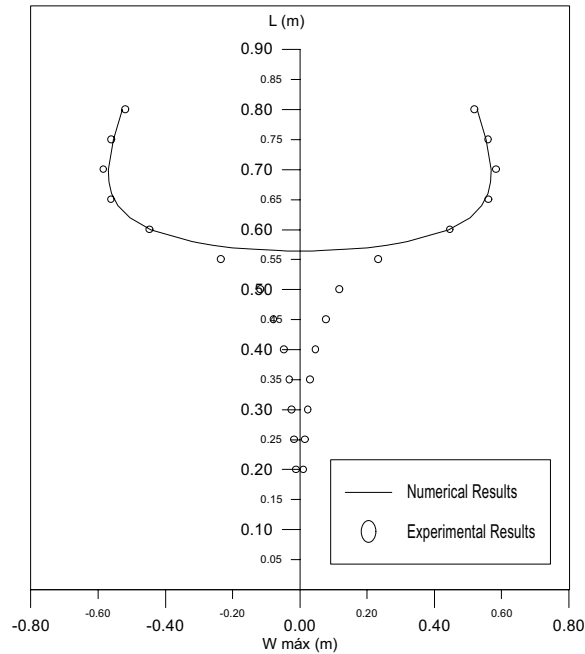


Figure 5 – Post-buckling path of a clamped-free column. Comparison of numerical and experimental results. Brass column.

Figures 6 to 8 illustrate the variation of the stress resultants (normal and shear forces and bending moment) along the bar axis for increasing column length. As observed in Figure 6, for $l \leq l_{cr}$, the normal force varies linearly. After buckling, as the length increases, the beam deforms and the compressive force decreases along the upper part of the beam and increases slightly near the support. After a certain critical length (here $l = 0.65cm$) an increasing portion of the column is under tension while the compression still increases near the support. As the column deforms, shear forces and bending moments, which are zero before buckling, increases steadily in a non-linear manner, as shown in Figures 7 and 8. While shear is always zero at both ends, reaching a maximum value along the lower half of the bar, the bending moment increases exponentially reaching the maximum value at the support. In general the internal forces are so nonlinear that any linear approximation is meaningless. The complex variation of stress resultants along the beam emphasizes the importance of a detailed non-linear large deflection analysis of long slender bars under self-weight. The variation of the rotation θ is shown in Figure 9. These results are obtained directly from the integration procedure. This is one of advantages of the present formulation over more traditional displacement formulations were stresses are derived from an approximate displacement field and have consequently a lower degree of accuracy.

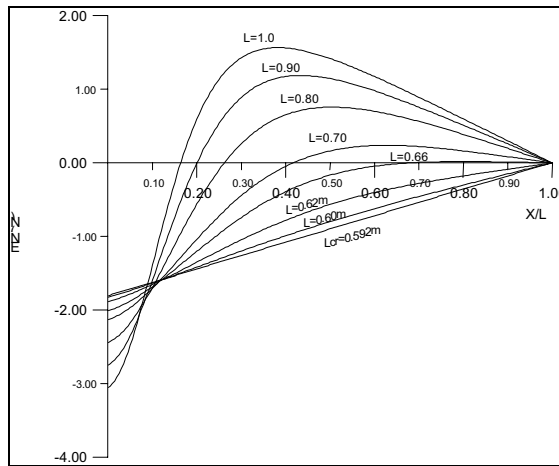


Figure 6. Clamped-free column. Diagram of normal forces for increasing bar length.

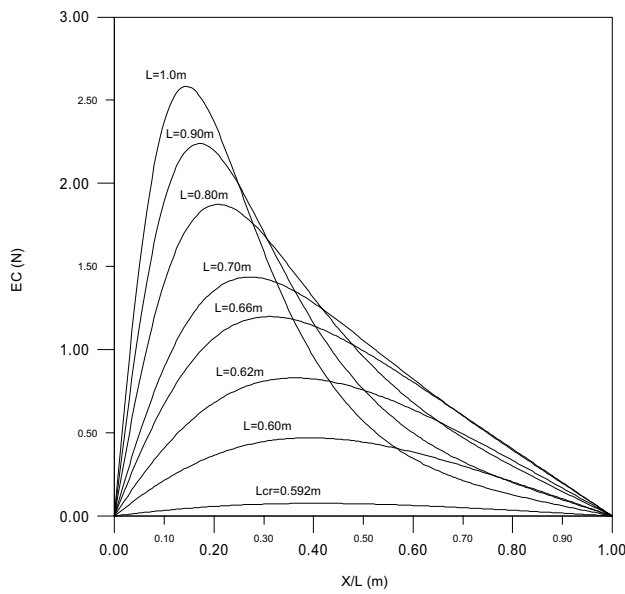


Figure 10. Clamped-free column. Diagram of shear forces for increasing bar length.

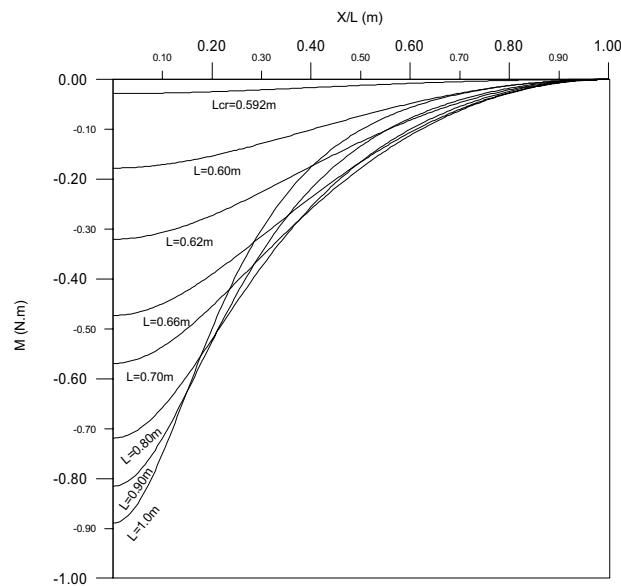


Figure 8. Clamped-free column. Diagram of bending moments for increasing bar length.

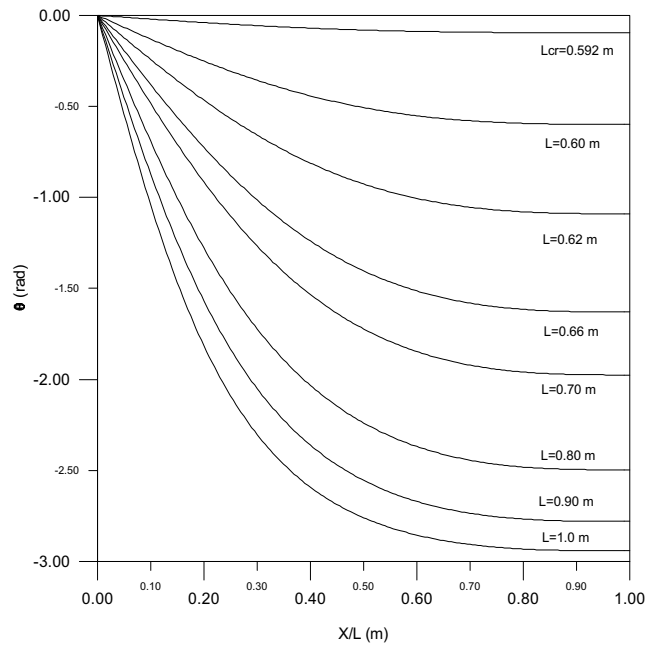


Figure 9. Clamped-free column. Variation of the rotation for increasing bar length.

In Figures 9 to 10 it is shown (a) the deformed shapes and (b) the post-buckling path of a column with different boundary conditions. In all cases analyzed in this paper, the column exhibits a supercritical bifurcation and a symmetric stable post-buckling path with a high degree of effective stiffness, much higher than the classical Euler column under end point load. Although the boundary conditions have a noticeable influence on the critical load and on the stress distribution, its influence on the shape of the post-buckling solution is small.

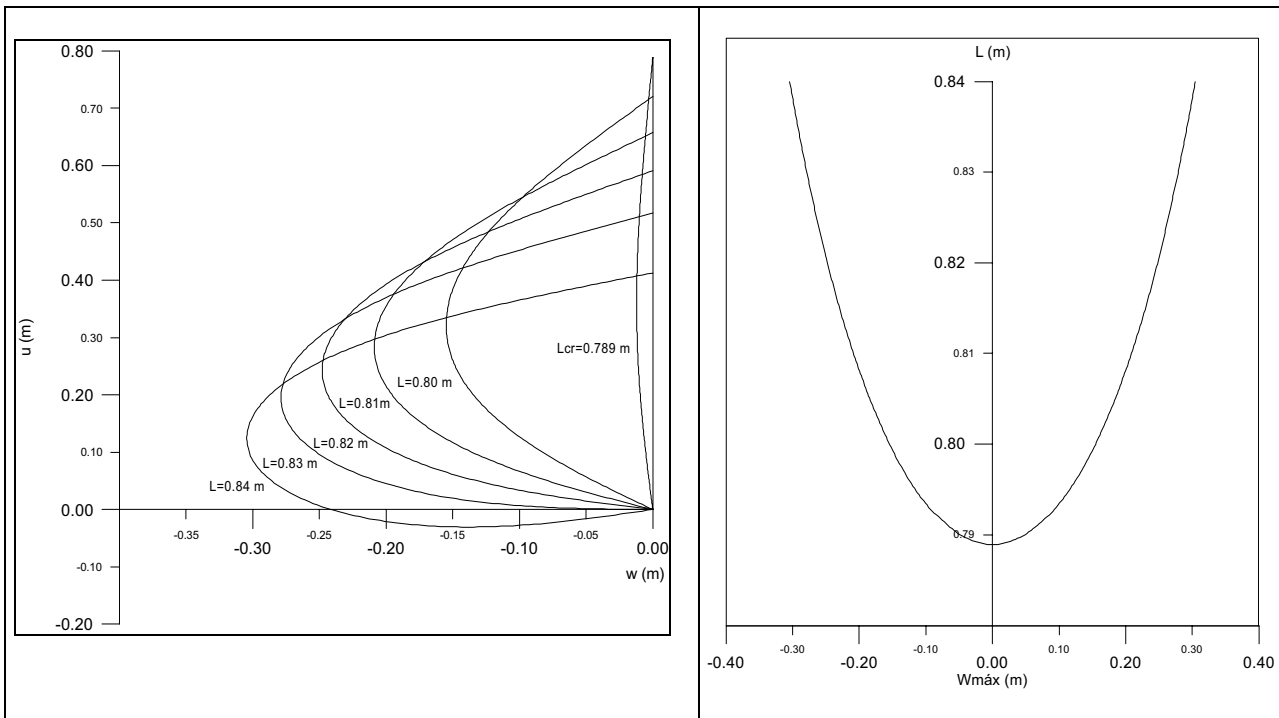


Figure 10. Simply supported column. Deformed column and post-buckling path.

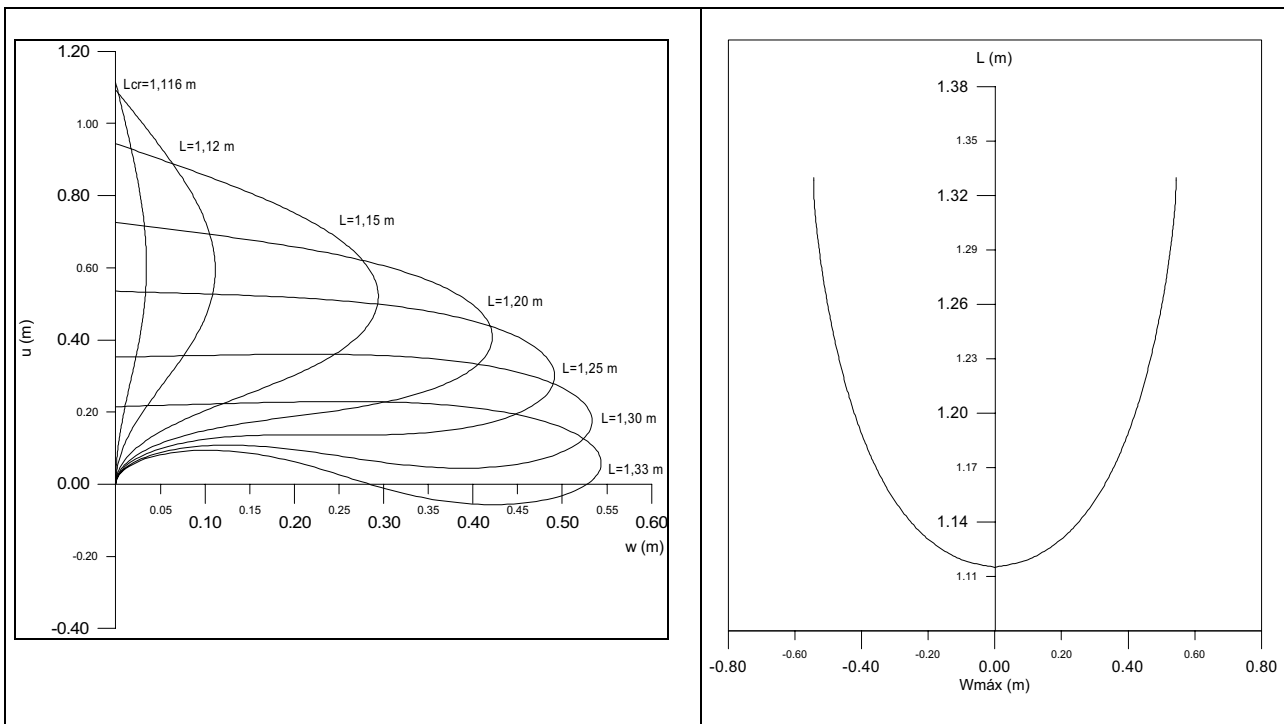


Figure 11. Clamped-simply supported column. Deformed column and post-buckling path.

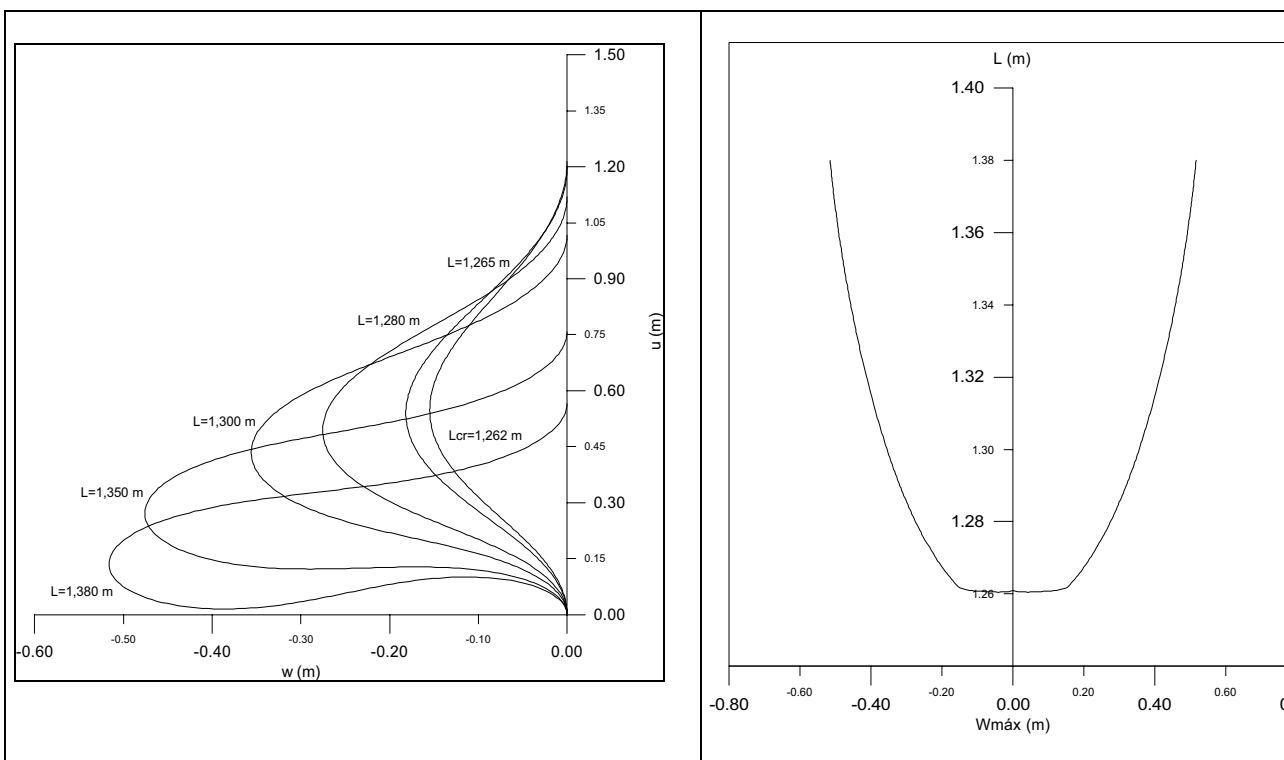


Figure 12. Clamped-clamped column. Deformed column and post-buckling path.

4. Conclusions

In this paper a detailed numerical analysis of the non-linear behavior and instability of columns under self weight was analyzed in detail. Particular attention was given to the large deflection post-buckling behavior of the bar. In order to study this problem, general non-linear differential equations governing the behavior of thin prismatic bars of arbitrary initial shape and subjected to arbitrary loading and boundary conditions have been derived. A numerical methodology

based on the underlying ideas of the shooting and continuation method is proposed, in which the boundary conditions and control variables can be changed whenever desired. This enables one to obtain complex equilibrium paths exhibiting bifurcation and limit points and, consequently, study the equilibrium and stability characteristics of a variety of important engineering problems. To verify the numerical results an experimental analysis of a thin clamped-free bar under self-weight was conducted at PUC-Rio. It is shown that the numerical and experimental results are in good agreement. This testifies the accuracy and versatility of the present methodology. The results also show the influence of self-weight and large deflections on the load carrying capacity and internal forces distribution of columns with different sets of boundary conditions.

5. References

- Antman, S. S., 1977, "Bifurcation Problems for Nonlinearly Elastic Structures", In: "Applications of Bifurcation Theory", P. H. Rabinowitz Ed., Academic Press Inc., New York, USA. pp. 74-125
- Dos Anjos, A. M. G., 1995, Análise do Comportamento Não-Linear e da Instabilidade de Elementos Estruturais Esbeltos, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- Keller, H. B., 1968, "Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems". Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass., USA
- Lee, B. K., Wilson, J. F. and Bolle, N. A., 1993, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Sections", Int. J. Non-Linear Mechanics. Vol. 28, pp. 579-589
- Lee, K., 2001, "Post-buckling of uniform cantilever column under combined load", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 36, pp. 813-816
- Maretic, R. B. and Atanackovic, T. M., 2001, "Buckling of Column with Base Attached to Elastic Half-Space", Journal of Engineering Mechanics, ASCE. Vol. 127(3), pp 242-247.
- Rao, G. V. and Raju, P. C., 1977, "Post-buckling of uniform cantilever column – Galerkin finite element solution", Engng. Fract. Mech. Vol. 1, pp. 1-4
- Seide, P., 1984, "Large Deflection of a Simply Supported Beam Subjected to Moment at One End", Journal of Applied Mechanics, ASME. Vol. 51, 519-525
- Teng, J.G. and Yao, J., 2000, "Self-weight buckling of FRP tubes filled with wet concrete", Thin-Walled Structures, Vol. 38, pp. 337-353
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1961, "Theory of Elastic Stability", Mc Graw-Hill, New York, USA
- Wolde-Tinsae, A. M. and Foadian, H., 1989, Asymmetrical Buckling of Prestressed Tapered Arches", Journal of Engineering Mechanics, ASCE. Vol. 115, pp. 2020-2034.

EQUACIONAMENTO BÁSICO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO EM EXPERIMENTOS VISCOPLÁSTICOS

Luiz Claudio Oliveira

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-Minas, Deptº Engª Mecânica, R. Dom José Gaspar nº 500, Belo Horizonte, MG, CEP 30.535-610
lco@pucminas.br

Henner Alberto Gomide

Universidade de Uberaba – UNIUBE, Fac. Engª Civil, Av. Nenê Sabino 180, Bairro Universitário Uberaba - MG CEP 38.055-500
henner.gomide@uniube.br

Raquel Santini Leandro Rade

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Fac. Física, Av. Universitários s/n, Uberlândia, MG.
rslr@ufu.br

Resumo. Um equacionamento básico dos resultados de ensaios sistemáticos amplos, sobre o comportamento em regime viscoplástico de misturas de resinas de poliéster, é apresentado e discutido. Ensaios foram realizados em corpos de prova de misturas de resinas rígida e flexível, a várias temperaturas e taxas de deformação, variando-se ainda a proporção resina rígida/resina flexível. Através de um equacionamento numérico são identificados parâmetros caracterizadores dos gráficos típicos dos ensaios de tração, compressão, solitação cíclica, relaxação, e retração em descarregamento (após ruptura), para estudo do comportamento mecânico. O equacionamento formula a variação da tensão \times tempo e tensão \times deformação ao se variarem os parâmetros temperatura, taxa de deformação e proporção de resinas. São utilizadas regressões exponenciais e polinomiais formando uma série de expressões com variáveis "imbricadas", onde as variáveis de formulações sucessivas dependem das formulações posteriores. A formulação desenvolvida visa obter-se a temperatura de ensaio na qual um modelo fotoviscoplástico simulará o comportamento viscoplástico de um protótipo, sendo conhecidos os parâmetros K e M (ligados a resistência e encruamento respectivamente) do material do protótipo e a taxa de deformação a ser aplicada, bem como os demais parâmetros do material de modelagem levantados experimentalmente. Este trabalho é a conclusão da modelagem básica do comportamento mecânico destas resinas, que deverá ser utilizada em futuros trabalhos de simulação numérico-experimental.

Palavras chave: resinas de poliéster, fotoviscoplasticidade, viscoplasticidade, modelagem, comportamento mecânico

1. Introdução

O ensaio de tração com relaxações múltiplas (Lemaitre e Chaboche 1985, Oliveira et alii 1998a e 1998b) permite obter, através de um único ensaio, dados para caracterização de um material em comportamento viscoplástico com relação à tração, relaxação e fluência, sendo esta última obtida através de um procedimento numérico sobre as diversas curvas de relaxação múltipla. Neste ensaio, são realizados ensaios de tração com relaxações múltiplas a várias taxas de deformação, e a várias temperaturas em cada taxa, de onde se obtêm curvas experimentais $\sigma \times \epsilon$ e $\sigma \times t$. Sobre as curvas iniciais $\sigma \times \epsilon$ e $\sigma \times t$ são feitas regressões, cujos coeficientes são posteriormente utilizados, em equações sucessivas, como parâmetros numéricos caracterizadores do comportamento mecânico à tração e à relaxação. A fluência é obtida por um procedimento numérico sobre as demais curvas $\sigma \times t$. Este ensaio e os procedimentos/metodologia correlatos são detalhados por Oliveira (2000) e Oliveira et alii (1999a) e (1999b). Da forma como foram idealizados os ensaios específicos descritos neste artigo, tema de uma dissertação de doutorado (Oliveira 2000), o equacionamento final se torna intimamente ligado ao esquema de variação das quantidades físicas nos ensaios. Nestes ensaios, foram definidos quatro valores fixos de taxa de deformação e realizados ensaios em quatro ou cinco temperaturas para cada taxa. Segundo este esquema deve-se, inicialmente, estudar/equacionar a variação do comportamento com a temperatura, numa taxa de deformação fixa, para depois estudar/equacionar a variação deste comportamento agora com a taxa de deformação. As formulações são ditas "interligadas" (também "imbricadas" ou "acopladas"), pois utilizam-se os parâmetros numéricos de uma equação para estudar a variação do comportamento nos equacionamentos seguintes (Oliveira 2000). Os materiais específicos ao qual o equacionamento foi aplicado são misturas de proporções em peso de resinas fotomecânicas rígidas e flexíveis (Oliveira et alii 1997a e 1997b), onde proporções diferentes de resina rígida/resina flexível resultam materiais com características viscoplásticas diversas.

Na metodologia de formulação do comportamento à tração, as curvas iniciais $\sigma \times \epsilon$, em várias temperaturas θ e sob uma dada taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, Fig. 2a, são inicialmente caracterizadas pelos parâmetros K e M de uma regressão com os dados (σ, ϵ) . Em seguida, para quantificar o efeito da temperatura, os diversos parâmetros K e M são equacionados juntamente com suas respectivas temperaturas de ensaio, desta vez como uma regressão sobre os dados (K, M, θ) . Isto produz uma nova série de parâmetros \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} , que caracterizam a variação dos parâmetros K e M com a temperatura, para uma dada taxa de deformação. Relacionando-se, finalmente, estes últimos parâmetros numéricos \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} com a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, obtém-se uma série final de parâmetros k_i , m_i e n_i que caracterizam a

variação de \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} com $\dot{\epsilon}$. Procedimento análogo é utilizado para o equacionamento da relaxação, onde, relacionando-se as variáveis de ensaio tensão e tempo, das curvas iniciais $\sigma \times t$, Fig. 2b, resultam os parâmetros A, D e G. Estes parâmetros, equacionados com a temperatura θ , resultam novos parâmetros α_i , δ_i e γ_i que, por sua vez, relacionados com a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ resultam, finalmente, os parâmetros a_i , b_i , c_i , d_i , e_i , f_i , g_i , h_i e l_i .

As curvas de fluência não foram submetidas a tal processo de variáveis interligadas. A caracterização do comportamento fica determinada a partir das curvas de relaxação, sendo a fluência um processo derivado desta, obtida indiretamente através de um procedimento numérico sobre curvas de relaxações sucessivas. Neste caso, a relação entre as variáveis ϵ e t fornece os parâmetros numéricos A_f , D_f e G_f , que descrevem a fluência para um determinado nível de tensão σ^* arbitrado, a uma dada temperatura e uma dada taxa de deformação. Esta relação não é obtida diretamente dos resultados de ensaio, mas de um procedimento numérico sobre uma porção das curvas experimentais $\sigma \times t$ nas vizinhanças do ponto σ^* . (Lemaitre e Chaboche, 1985)

Com relação às formas algébricas utilizadas, todas as relações poderiam tomar qualquer forma, seja de uma expressão exponencial, seja de um polinômio, ou ainda “splines”, utilizando-se como critério de definição o melhor ajuste dos dados. As relações iniciais entre tensão e deformação foram mantidas como regressões logarítmicas lineares para uma correspondência direta com as equações mais utilizadas na literatura, que são do tipo logarítmico. Isto facilita a utilização do equacionamento desenvolvido em relações modelo-protótipo, quando o material estudado será utilizado em simulações experimentais onde relações modelo-protótipo definirão os parâmetros K, M e $\dot{\epsilon}$ de um ensaio num modelo. As demais relações foram escolhidos segundo o critério referido acima.

Além destes ensaios, o comportamento cíclico foi caracterizado como isotrópico, em ensaios separados, variando-se sistematicamente a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ e a temperatura θ . Nestes ensaios, observou-se uma estabilização dos ciclos sobre uma mesma trajetória, tratando-se, assim, de encruamento isotrópico.

Os processos de formulação e obtenção dos parâmetros de tração, relaxação e fluência são o objeto de interesse deste trabalho. A metodologia utilizada é, em resumo, a seguinte:

- definição de equacionamentos algébricos para a descrição dos comportamentos à tração (item 2), relaxação (item 3) e fluência (item 4), levando-se em consideração a variação da taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ aplicada bem como da temperatura θ de ensaio em cada taxa. Estes equacionamentos, com relação ao seu tipo algébrico, são “interligados” (“imbricados”, “acoplados”), onde os coeficientes numéricos de uma equação são utilizados como parâmetros em equações subsequentes (juntamente com os parâmetros experimentais);

- realização de ensaios de tração com relaxações múltiplas, de onde se obtêm diagramas $\sigma \times \epsilon$ e $\sigma \times t$ variados, para diversas temperaturas θ sob diversas taxas de deformação $\dot{\epsilon}$;

- dos diagramas $\sigma \times \epsilon$ iniciais obtêm-se os dados para caracterização e formulação da tração, item 5.1 a seguir;

- dos diagramas $\sigma \times t$ iniciais obtêm-se os dados para caracterização e formulação da relaxação, item 5.2 a seguir;

- da seqüência de diagramas $\sigma \times t$ obtêm-se, através de um procedimento numérico, mostrado na Fig. 1, os dados para caracterização e formulação da fluência.

2. Formulação para Caracterização da Tração

Para a descrição das características de endurecimento (ou encruamento) de um material viscoso, utilizam-se na literatura (Adams and Beese 1974, Dieter 1988) várias versões de uma equação exponencial do tipo:

$$\sigma = K \epsilon^{1/M} \dot{\epsilon}^{1/N} \quad (1)$$

onde K, M e N são parâmetros numéricos resultantes de uma regressão linear sobre os resultados experimentais, no espaço das variáveis ($\ln \sigma$, $\ln \epsilon$, $\ln \dot{\epsilon}$). Pode-se relacionar: - o parâmetro K com a resistência, - o parâmetro M com o endurecimento, - o parâmetro N com a viscosidade. Através da Eq. (1) especificam-se estes três parâmetros, K, M e N, que caracterizarão o comportamento mecânico da resina a uma dada temperatura.

Alternativamente, ao invés dos três parâmetros K, M e N, podem-se utilizar somente os dois primeiros (K e M) e diretamente a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ para formular o comportamento, numa situação em que N ou $\dot{\epsilon}$ são utilizados somente para definir curvas $\sigma \times \epsilon$. Na formulação aqui desenvolvida, quer-se explicitar a temperatura θ que define uma curva específica $\sigma \times \epsilon$, numa taxa $\dot{\epsilon}$ dada. Neste caso, após relacionarem-se as variáveis σ e ϵ , relacionam-se os parâmetros K e M com θ já explicitando-se a temperatura θ . Esta é a temperatura em que o material tem propriedades descritas pelos parâmetros K e M, para uma dada taxa $\dot{\epsilon}$. Finalmente, relacionam-se os parâmetros \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} , provenientes da relação entre K, M e θ , à taxa $\dot{\epsilon}$. Nas equações finais, a taxa $\dot{\epsilon}$ é um dado a ser fornecido. Procedendo-se dessa forma, a equação fundamental para a tração é uma relação entre a temperatura θ e os parâmetros K e M do material de modelagem, para uma taxa $\dot{\epsilon}$ dada.

Indicando explicitamente as formulações, a partir de diagramas $\sigma \times \epsilon$ de resultados experimentais, em diversas temperaturas, sob determinadas taxas de deformação, são obtidas as constantes K_i e M_i , para várias temperaturas θ_i sob uma mesma taxa $\dot{\epsilon}_i$, através de regressões lineares logarítmicas:

$$\sigma = K_i \dot{\epsilon}^{1/M_i} \tag{2}$$

onde K_i e M_i são os coeficientes que definem a plasticidade do material nas temperaturas θ_i sob uma determinada taxa $\dot{\epsilon}_i$. De fato, estas equações não são escritas, pois o que interessa são os coeficientes K_i , M_i e sua respectiva temperatura θ_i . Sobre as séries de valores de θ , K e M , para cada taxa $\dot{\epsilon}_i$, através de interpolações polinomiais obtêm-se as relações:

$$\theta = \mathcal{K}_1 + \mathcal{M}_1 K + \mathcal{N}_1 M \tag{3}$$

A Eq. (3) fornece a temperatura θ para quaisquer K e M , numa dada taxa $\dot{\epsilon}_i$. \mathcal{K}_1 , \mathcal{M}_1 e \mathcal{N}_1 são os coeficientes do polinômio que caracterizam a variação de K e M com θ na taxa $\dot{\epsilon}_i$ dada. Considerando-se, agora, as diversas taxas de deformação $\dot{\epsilon}$, tem-se uma série final de valores $\dot{\epsilon}$, \mathcal{K} , \mathcal{M} , \mathcal{N} . Equacionando-se, desta vez, cada parâmetro \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} separadamente com $\dot{\epsilon}$, obtêm-se a variação de cada parâmetro \mathcal{K} , \mathcal{M} ou \mathcal{N} com a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, através de relações do tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(k_i, \dot{\epsilon}) &= k_1 + k_2 \dot{\epsilon} + k_3 \dot{\epsilon}^2 + \dots + k_{n+1} \dot{\epsilon}^n \\ \mathcal{M}(m_i, \dot{\epsilon}) &= m_1 + m_2 \dot{\epsilon} + m_3 \dot{\epsilon}^2 + \dots + m_{n+1} \dot{\epsilon}^n \\ \mathcal{N}(n_i, \dot{\epsilon}) &= n_1 + n_2 \dot{\epsilon} + n_3 \dot{\epsilon}^2 + \dots + n_{n+1} \dot{\epsilon}^n \end{aligned} \tag{4}$$

Na Equação (4), o número $n+1$ de parâmetros de uma equação depende do grau do polinômio que melhor se ajusta aos dados, em cada conjunto.

O processo de obtenção destes parâmetros, a partir dos resultados experimentais de tração para o material 60/40-C (Oliveira 2000), é indicado na seqüência, mostrando os valores numéricos obtidos. Utilizando-se os dados $\sigma \times \epsilon$ da primeira tração, referentes aos ensaios relacionados na Tabela 1, foram obtidos inicialmente uma série de valores de K e M , para diferentes valores de θ e $\dot{\epsilon}$. Estes valores estão mostrados na Tabela 2. Com os valores de θ , K e M da Tabela 2, obtêm-se os parâmetros da Eq. (3) para diversos valores de $\dot{\epsilon}$. Os valores de \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} para os respectivos $\dot{\epsilon}$ assim obtidos são mostrados na Tabela 3. Finalmente, com os dados da Tabela 3, que são os valores dos parâmetros \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} para diversos valores de $\dot{\epsilon}$, são determinados os parâmetros k_i , m_i e n_i caracterizadores da variação de cada parâmetro \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} com a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, relativos às Eqs. (4) e mostrados na Tabela 4.

Deve ser observado que estas tabelas resumem, numericamente, o comportamento à tração dos materiais estudados, que são descritos fundamentalmente pelas Eqs. (3) e (4). Os coeficientes de correlação e estimativas de erros para todos os equacionamentos e todos os materiais estão dados em (Oliveira 2000), com comentários sobre a significância destas equações relacionada aos coeficientes de correlação linear.

3. Formulação para Caracterização da Relaxação

Tabela 1 - Relações de ensaios de encruamento-relaxações múltiplas

Material 60/40-C					Material 70/30-C				
θ [°C]	$\dot{\epsilon}$ [% s ⁻¹]				θ [°C]	$\dot{\epsilon}$ [% s ⁻¹]			
	0,060	0,240	0,420	0,600		0,048	0,078	0,108	0,138
38	c.p. fi	c.p. fe	c.p. hk	c.p. hj	38	c.p. fn			
40					40				
42	c.p. fj ₀₉	c.p. ff	c.p. fm	c.p. hl	42	c.p. fo	c.p. gs	c.p. gt	c.p. gu
44					44			c.p. gv	c.p. gw
46	c.p. fg	c.p. fb	c.p. go	c.p. gp	46	c.p. fq	c.p. fs		
48					48			c.p. gy	c.p. gx
50	c.p. fh	c.p. fc	c.p. gq	c.p. gr	50	c.p. fr	c.p. ft		
52					52			c.p. gz	c.p. ha
54	c.p. fj ₁₄	c.p. fd	c.p. gi	c.p. gk	54				
56	c.p. fk				56		c.p. ga	c.p. gb	c.p. gc
58									

Obs.: 1) c.p.: corpo de prova; 2) as indicações sobre as linhas se referem a temperaturas intermediárias, por ex. os ensaios com os corpos de prova “fi”, “hk” e “hj” foram realizados a 39°C.

Tabela 2 - Parâmetros K e M

Material 60/40-C				
$\dot{\epsilon}$ [s ⁻¹]	θ	K	M	r ² †
0,0006	39	0,1730777	0,6329494	0,990
0,0006	43	0,1046264	0,5519194	0,992
0,0006	46	0,1178489	0,7127961	0,991
0,0006	50	0,0307471	0,421229	0,997
0,0006	54,5	0,0346255	0,716438	0,976
0,0006	57	0,0129801	0,3440971	0,996
0,0024	38	0,6353029	0,8480009	0,997
0,0024	42	0,2105113	0,6348622	0,987
0,0024	46	0,2388991	0,6709398	0,984
0,0024	50	0,0909883	0,6724491	0,989
0,0024	54	0,0275562	0,4694368	0,997
0,0042	39	0,2423772	0,6333727	0,985
0,0042	43	0,1660868	0,6062152	0,990
0,0042	46	0,1035485	0,6964127	0,979
0,0042	47	0,081695	0,6001803	0,991
0,0042	49	0,0421624	0,5129506	0,995
0,0042	50	0,047524	0,5223268	0,994
0,0042	53,5	0,0280687	0,4864666	0,998
0,0060	39	0,2673223	0,6488529	0,991
0,0060	43	0,1841193	0,615833	0,987
0,0060	46	0,1428658	0,6160124	0,989
0,0060	49	0,0874268	0,6724079	0,990
0,0060	50	0,055087	0,5515	0,971
0,0060	54	0,0306423	0,5095888	0,997

†: coeficiente de correlação linear de $\sigma \times \epsilon$, indicando a representatividade dos parâmetros K e M nas condições de temperatura θ e taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ mostradas.

Tabela 3 - Parâmetros \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N}

Material 60/40-C				
$\dot{\epsilon} \times 10^4$ [s ⁻¹]	\mathcal{K}	\mathcal{M}	\mathcal{N}	r ² †
6	53,02	-113,31	7,425	0,905
24	57,95	-17,92	-11,593	0,807
42	58,14	-52,61	-10,370	0,949
60	56,02	-54,14	-4,555	0,904

†: coeficiente de correlação linear de $K \times M \times \theta$, indicando a representatividade dos parâmetros \mathcal{K} , \mathcal{M} e \mathcal{N} , para o valor de $\dot{\epsilon}$ mostrado.

Tabela 4 - Parâmetros k_i , m_i e n_i

Material 60/40-C				
parâmetro	i			r ² †
	1	2	3	
k_i	50,870	0,41080	-0,0054512	0,983
m_i	-136,84	5,7297	-0,074792	0,717
n_i	14,698	-1,4575	0,019161	0,946

†: coeficiente de correlação linear de $\mathcal{K} \times \dot{\epsilon}$, $\mathcal{M} \times \dot{\epsilon}$ e $\mathcal{N} \times \dot{\epsilon}$, indicando a representatividade dos parâmetros k_i , m_i e n_i .

Na relaxação, deve-se equacionar inicialmente a variação da tensão com o tempo. Neste trabalho, para descrição desta relação entre a tensão e o tempo, utilizou-se uma expressão polinomial de segundo grau:

$$(\sigma/\sigma_{\text{máx}}) = A + D t + G t^2 \tag{5}$$

onde $(\sigma/\sigma_{\text{máx}})$ é uma tensão “normalizada” com relação ao valor máximo de tensão $\sigma_{\text{máx}}$, existente no início da relaxação.

O processo de formulação segue de maneira análoga à tração. Assim, os parâmetros A, D e G são relacionados à temperatura, através de um conjunto de expressões dadas por:

$$\begin{aligned} A(\alpha_i, \theta) &= \alpha_1 + \alpha_2 \theta + \alpha_3 \theta^2 \\ D(\delta_i, \theta) &= \delta_1 + \delta_2 \theta + \delta_3 \theta^2 \\ G(\gamma_i, \theta) &= \gamma_1 + \gamma_2 \theta + \gamma_3 \theta^2 \end{aligned} \tag{6}$$

A seguir, cada coeficiente α_i , δ_i , γ_i é relacionado à taxa de deformação, resultando expressões da forma:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_i + b_i \dot{\epsilon} + c_i \dot{\epsilon}^2 \\ \delta_i &= d_i + e_i \dot{\epsilon} + f_i \dot{\epsilon}^2 \\ \gamma_i &= g_i + h_i \dot{\epsilon} + l_i \dot{\epsilon}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Para a relaxação, as relações com melhor coeficiente de correlação foram todas polinômios de segunda ordem, utilizando-se expressões separadas para cada parâmetro A, D ou G, α_i , δ_i ou γ_i , como nas Eqs. (6) e (7).

Vai-se indicar, agora, o processo de obtenção destes parâmetros para o material 60/40-C, a partir dos resultados experimentais de tensão×tempo da primeira relaxação de ensaios de encruamento-relaxações múltiplas, referentes aos ensaios relacionados na Tabela 1. Inicialmente, das curvas de relaxação obtêm-se dados de tensão×tempo para várias

Tabela 5 - Parâmetros A, D e G

Material 60/40-C					
$\dot{\epsilon}$ [s ⁻¹]	θ [°C]	A	D	Gx10 ⁻⁵	r ² †
0,0006	46	0,9204412	0,008596	4,737	0,987
0,0006	50	0,8962537	0,007956	3,996	0,981
0,0006	39	0,9301662	0,007275	3,961	0,984
0,0006	43	0,9301662	0,007275	3,961	0,984
0,0006	55	0,872726	0,009078	5,219	0,973
0,0006	57	0,8893038	0,009294	5,222	0,981
0,0024	38	0,90577608	0,0059845048	2,5267503	0,971
0,0024	42	0,83451103	0,0091745952	5,5197128	0,953
0,0024	46	0,79407627	0,0094298020	5,4630372	0,943
0,0024	50	0,78117407	0,0098799216	5,8091889	0,942
0,0024	54	0,74556493	0,010190955	6,1470346	0,926
0,0042	39	0,79328735	0,011002122	8,2764574	0,931
0,0042	43	0,76354901	0,0099350587	6,4734323	0,924
0,0042	46	0,75573530	0,015311733	13,833899	0,927
0,0042	47	0,71328896	0,010847525	7,0658576	0,915
0,0042	49	0,69478216	0,010924398	7,3749768	0,905
0,0042	50	0,70260471	0,010855030	7,0132773	0,908
0,0042	54	0,67527873	0,010692343	7,0010715	0,898
0,0060	39	0,73517439	0,0089473458	5,5874264	0,905
0,0060	43	0,71911731	0,0092669463	5,8426449	0,901
0,0060	46	0,70244266	0,0097978808	6,2814885	0,899
0,0060	49	0,69704276	0,010431633	6,5446195	0,906
0,0060	50	0,65739618	0,010930413	7,416214	0,889
0,0060	54	0,62558387	0,010543850	7,0435625	0,866

†: coeficiente de correlação linear de $\sigma/\sigma_{\text{máx}} \times t$, indicando a representatividade dos parâmetros A, D e G nas condições de temperatura θ e taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ mostradas.

temperaturas, sob determinadas taxas de deformação. Uma regressão polinomial no espaço $(\sigma/\sigma_{\text{máx}}, t)$ fornece os parâmetros A, D e G de polinômios de regressão, mostrados na Tabela 5. Inicialmente, os parâmetros A, D e G da Tabela 5 são formulados com relação à variação de θ , conforme as Eqs. (6), para uma taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ constante. Obtêm-se, assim, os parâmetros α_i , γ_i e δ_i , mostrados na Tabela 6. A partir da Tabela 6, nova formulação é realizada, equacionando a variação de cada parâmetro α_1 , α_2 , α_3 , δ_1 , ..., γ_3 com a taxa temporal de deformação $\dot{\epsilon}$, segundo a Eq. (7). Os parâmetros a_i a l_i resultantes estão dados na Tabela 7.

4 Determinação da Fluência

A determinação de uma curva de fluência depende do nível de tensão desejado, chamado σ^* , σ^{**} , etc. Para obter-se uma curva de fluência, segue-se o procedimento numérico esquematizado na Figura 1. Após obtidos numericamente os valores de ϵ e t , vai-se caracterizar esta curva através da equação:

$$\epsilon_p = A_f + D_f t + G_f t^2 \tag{8}$$

onde os parâmetros A_f , D_f e G_f caracterizam uma curva para um determinado valor σ^* arbitrado, sob condições de taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ e temperatura θ dadas.

A fluência, de acordo com o enfoque utilizado, é obtida de curvas de relaxação, e assim não é utilizada para caracterizar o comportamento, já caracterizado pelos parâmetros da relaxação. A fluência é, aqui, um processo derivado da relaxação.

Parâmetros A_f , D_f e G_f foram obtidos para o material 60/40-C, a partir dos resultados deformação×tempo provenientes de procedimentos numéricos, referentes aos ensaios de relaxações múltiplas relacionados na Tabela 1. Das várias curvas de relaxação múltiplas de um mesmo ensaio obtêm-se dados de tensão×tempo, para uma dada temperaturas e taxa de deformação. Após o procedimento numérico da Figura 1 sobre estes dados $\sigma \times t$, obtêm-se uma série discreta de valores (ϵ, t) . Uma regressão de segundo grau sobre esta série (ϵ, t) fornece os parâmetros a , d e g de polinômios de regressão. Coeficientes relativos aos níveis de tensão indicados estão mostrados na Tabela 8.

Com relação a este equacionamento, pode-se estabelecer uma relação entre os parâmetros A_f , D_f e G_f e diversos

Tabela 6 - Parâmetros α_i , δ_i e γ_i

Material 60/40-C					
$\dot{\epsilon}$ [s ⁻¹]	parâmetro	i			$r^2 \ddagger$
		1	2	3	
0,0006	α_i	1,0559	-0,0030072	-1,8257E-	0,840
0,0006	δ_i	-0,0053432	-3,6513E-6	-1,1515E-6	0,804
0,0006	γ_i	68,5472E-5	-2,4555E-6	3,3016E-8	0,683
0,0024	α_i	2,1616	-0,049941	4,4127E-4	0,979
0,0024	δ_i	0,053312	-0,0025128	2,4836E-5	0,917
0,0024	γ_i	-4,9223E-4	2,2038E-5	-2,1908E-7	0,867
0,0042	α_i	1,1830	-0,010829	2,3521E-5	0,923
0,0042	δ_i	0,04175	-0,0023411	2,5547E-5	0,833
0,0042	γ_i	-5,1800E-4	2,7197E-5	-3,0473E-7	0,914
0,0060	α_i	0,55717	0,012949	-2,1555E-4	0,864
0,0060	δ_i	0,013833	-9,0536E-4	8,3502E-6	0,808
0,0060	γ_i	-1,0928E-4	6,4214E-6	-5,6885E-8	0,718

†: coeficiente de correlação linear de $A \times \theta$, $D \times \theta$, $G \times \theta$, indicando respectivamente a representatividade dos parâmetros α_i , δ_i e γ_i para o valor de $\dot{\epsilon}$ mostrado.

Tabela 7 - Parâmetros a_i , b_i , c_i , d_i , e_i , f_i , g_i , h_i e l_i

Material 60/40C				
i	parâmetros			$r^2 \ddagger$
	a_i	b_i	c_i	
1	0,77928	744,34	-133611	0,780
2	0,0086665	-31,178	5456,1	0,760
3	-1,0404E-4	0,28857	-52,636	0,761

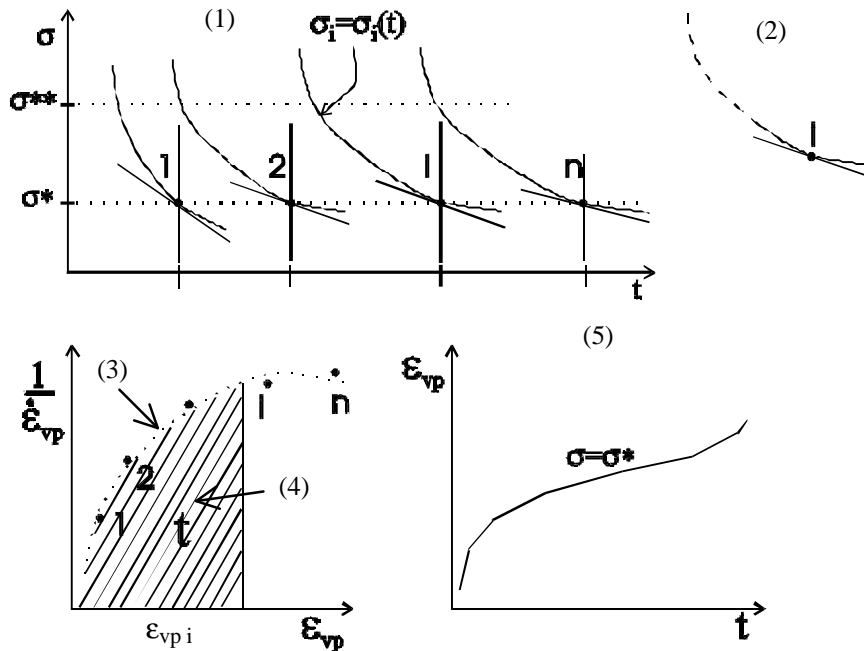
i	parâmetros			$r^2 \ddagger$
	d_i	e_i	f_i	
1	-0,028230	46,641	-6679,9	0,932
2	0,0011058	-2,1498	304,40	0,977
3	-1,3752E-5	0,023615	-3,3321	0,995

i	parâmetros			$r^2 \ddagger$
	g_i	h_i	l_i	
1	3,7394E-4	-0,53624	76,113	0,997
2	-1,6420E-5	0,024820	-3,4930	0,996
3	1,9209E-7	-2,7434E-4	0,038576	0,980

†: coeficiente de correlação linear de $\alpha_i \times \dot{\epsilon}$, $\delta_i \times \dot{\epsilon}$ e $\gamma_i \times \dot{\epsilon}$, indicando respectivamente a representatividade dos parâmetros a_i , b_i e c_i , d_i , e_i , e f_i , g_i , h_i e l_i .

valores de tensão σ^* , σ^{**} , etc. Isto não foi efetivado, pois o objetivo do equacionamento aqui desenvolvido é o planejamento de um experimento fotoviscoplastico, onde os parâmetros necessários são K, M, $\dot{\epsilon}$, sendo a fluência posteriormente calculada a partir de um ensaio de encruamento com relaxações múltiplas.

5 Esquema Geral de Experimentação-Formulação



-Roteiro:

- 1) determinação experimental das curvas $\sigma_i = \sigma_i(t)$;
- 2) determinação da inclinação da reta nas vizinhanças do ponto $\sigma = \sigma^*$;
- 3) interpolação sobre os dados do gráfico $1/\dot{\epsilon}_{vp} \times \epsilon_{vp}$;
- 4) determinação do tempo t em vários pontos $\epsilon_{vp i}$, onde $t_i = \text{área}$ sob a curva até o ponto $\epsilon_{vp i}$;
- 5) interpolação da curva $\epsilon_{vp} \times t$. (Lemaitre e Chaboche, 1985)

-Valores característicos:

$$\epsilon_{vp} = \epsilon_i - \epsilon_e \approx \epsilon_i \quad (\epsilon_e \approx 0)$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{1}{E} \frac{d(\sigma_i)}{dt} = \dot{\sigma} \quad E$$

$\dot{\sigma} \approx$ inclinação da reta tangente à curva

Figura 1 - Procedimento numérico para cálculo de uma curva de fluência a partir de curvas de relaxações múltiplas

A formulação desenvolvida para tração e relaxação pode ser resumida nos procedimentos descritos a seguir.

5.1 Comportamento à tração

Os ensaios são realizados de acordo com o esquema de diagramas mostrado na Fig. 2a, onde, para cada taxa temporal de deformação $\dot{\epsilon}_i$ fixada, obtêm-se vários diagramas (σ , ϵ) para as temperaturas $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{n,1}$. Dessa forma, obtém-se um conjunto de dados (σ , ϵ) para as diversas temperaturas $\theta_{i,1}$ para cada taxa $\dot{\epsilon}_i$.

A formulação interdependente (acoplada, “imbricada”) é desenvolvida seguindo-se o seguinte procedimento:

- *Início* — com ($\ln s$, $\ln \epsilon$) dos ensaios, faz-se uma regressão linear:

$$s = K e^M$$

de onde se tiram os parâmetros $K_{i,1}$, $M_{i,1}$ (p/a $q_{i,1}$ e $\dot{\epsilon}_i$).

Reorganizando-se, obtém-se o conjunto de dados (q_i , K_i , M_i) p/a cada $\dot{\epsilon}_i$.

- 2º nível — com (θ_i , K_i , M_i) do 1º nível, faz-se uma regressão polinomial:

$$q = \mathcal{K} + \mathcal{M} K + \mathcal{N} M$$

de onde se tiram os parâmetros \mathcal{K}_i , \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i (p/a $\dot{\epsilon}_i$).

Reorganizando-se, obtém-se o conjunto de dados ($\dot{\epsilon}_i$, \mathcal{K}_i , \mathcal{M}_i , \mathcal{N}_i).

- 3º nível — com ($\dot{\epsilon}_i$, \mathcal{K}_i), ($\dot{\epsilon}_i$, \mathcal{M}_i), ($\dot{\epsilon}_i$, \mathcal{N}_i) do 2º nível, são feitas regressões polinomiais:

$$\mathcal{K} = k_1 + k_2 \dot{\epsilon} + k_3 \dot{\epsilon}^2$$

$$\mathcal{M} = m_1 + m_2 \dot{\epsilon} + m_3 \dot{\epsilon}^2$$

$$\mathcal{N} = n_1 + n_2 \dot{\epsilon} + n_3 \dot{\epsilon}^2$$

de onde se tiram os parâmetros finais (k_i , m_i , n_i).

5.2 Comportamento à Relaxação

Os ensaios são realizados de acordo com o esquema de diagramas mostrado na Fig. 2b, onde, para cada taxa temporal de deformação $\dot{\epsilon}_i$ fixada, aplicada na tração, vários diagramas (σ , t) para as temperaturas $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{n,1}$. Observe que cada curva (σ , t) depende da tensão máxima atingida, $\sigma_{máx}$, após uma tração a $\dot{\epsilon}$. Neste caso, utiliza-se um conjunto de dados ($\sigma/\sigma_{máx}$, t), para as diversas temperaturas $\theta_{i,1}$ para cada taxa $\dot{\epsilon}_i$.

A formulação interdependente é desenvolvida seguindo-se o seguinte procedimento:

- *Início* — com ($s/\sigma_{máx}$, t) dos ensaios, faz-se uma regressão polinomial:

$$s/\sigma_{máx} = A + D t + G t^2$$

de onde se tiram os parâmetros $A_{i,1}$, $D_{i,1}$, $G_{i,1}$ (p/a $q_{i,1}$ e $\dot{\epsilon}_i$).

Reorganizando-se, obtém-se o conjunto de dados (q_i , A_i , D_i , G_i) p/a cada $\dot{\epsilon}_i$.

- 2º nível — com (q_i , A_i), (q_{ii} , D_i) e (q_{ii} , G_i) do 1º nível, são feitas regressões polinomiais:

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 q + \alpha_3 q^2$$

$$D = \delta_1 + \delta_2 q + \delta_3 q^2$$

$$G = \gamma_1 + \gamma_2 q + \gamma_3 q^2$$

de onde se tiram os parâmetros α_{1i} , α_{2i} , α_{3i} , δ_{1i} , δ_{2i} , δ_{3i} e γ_{1i} , γ_{2i} , γ_{3i} (p/a $\dot{\epsilon}_i$).

Reorganizando-se, obtém-se o conjunto de dados ($\dot{\epsilon}_i$, $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{3i}, \delta_{1i}, \dots, \delta_{3i}, \gamma_{1i}, \dots, \gamma_{3i}$).

- 3º nível — com ($\dot{\epsilon}_i$, α_{1i}), ..., ($\dot{\epsilon}_i$, γ_{3i}) do 2º nível, são feitas regressões polinomiais:

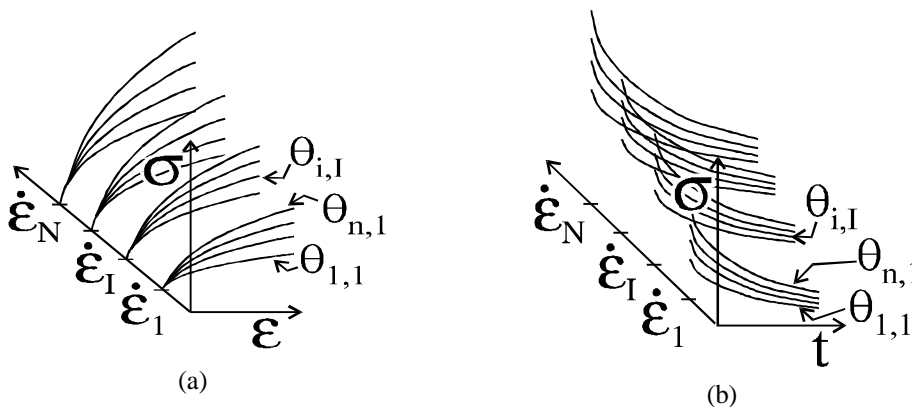


Figura 2 - Esquemas de ensaio: (a) primeira tração, (b) primeira relaxação.

Tabela 8 - Exemplo de parâmetros A_f , D_f , e G_f

Material 60/40-C						
θ (°C)	$\dot{\epsilon}$ (s ⁻¹)	σ^* (kN/mm ²)	A_f	D_f	G_f	$r^2 \ddagger$
39	0,0006	0,011	0,046299993	0,42637790	-5,041439E-5	0,999
43	0,0006	0,0085	0,046900020	0,55177824	-4,5252539E-5	0,963
46	0,0006	0,00055	0,046905108	0,85233438	0,0067660886	0,912
50	0,0006	0,003	0,046683774	1,5661148	-0,099550947	0,976
55	0,0006	0,0017	0,046400010	2,7588440	-4,0388452E-4	0,885
38	0,0024	0,0131	0,048000007	0,35802400	-1,4427159E-5	0,883
42	0,0024	0,0094	0,046900005	0,49894951	-3,7934466E-5	0,841
46	0,0024	0,006	0,045100043	0,78169511	-2,4114347E-4	0,804
50	0,0024	0,037	0,046383672	1,2695377	-0,049059200	0,966
54	0,0024	0,00175	0,046199982	1,0000127	-1,7994851E-4	0,887
39	0,0042	0,0105	0,048700002	0,44668151	-4,1148218E-5	0,900
43	0,0042	0,0075	0,045272108	13,283678	-501,39357	1
46	0,0042	0,0030	0,045699997	1,5633576	-2,4254639E-4	0,898
50	0,0042	0,0021	0,046000053	2,2333448	-6,3649908E-5	0,987
54	0,0042	0,00138	0,044800034	2,6800083	1,6564985E-4	0,967
39	0,0060	0,0115	0,048399965	0,40789751	-2,0765746E-4	0,603
43	0,0060	0,0075	0,046000009	0,62534963	-7,5964086E-5	0,954
46	0,0060	0,00325	0,048299962	1,4431090	-5,8561977E-4	0,630
50	0,0060	0,00225	0,046361328	6,6395813	-175,87188	1
54	0,0060	0,00125	0,045600003	3,7520209	-6,081728E-4	0,922

‡: coeficiente de correlação linear da interpolação sobre os dados experimentais $1/\dot{\epsilon}_p \times \epsilon_p$, passo (3) do roteiro da Figura 1, indicando a representatividade experimental dos parâmetros A_f , D_f e G_f nas condições de temperatura θ e taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ mostradas (os coeficientes de correlação linear de $\epsilon_{vp} \times t$ são aproximadamente iguais a 1).

$$\alpha_i = \alpha_i (a_i, b_i, c_i, \dot{\epsilon}_I)$$

$$\delta_i = \delta_i (d_i, e_i, f_i, \dot{\epsilon}_I)$$

$$\gamma_i = \gamma_i (g_i, h_i, l_i, \dot{\epsilon}_I)$$

de onde se tiram os parâmetros finais ($a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, l_i$).

6. Conclusão

O equacionamento apresentado é uma solução encontrada para a formulação básica de ensaios viscoplásticos sistemáticos. Estes ensaios apresentam a característica de serem um conjunto de diagramas tensão-deformação, onde cada taxa temporal de deformação aplicada e cada temperatura de ensaio determina variações no diagrama. Outras formulações são possíveis para os diversos estágios de ensaio mostrados, segundo o mesmo esquema de variáveis “imbricadas” porém utilizando-se de outras expressões algébricas (“splines”, expressões compostas por polinômios, e outras). A sistematização de ensaios, mantendo-se algumas taxas de deformação e variando-se a temperatura de forma independente dentro de uma taxa, foi a forma encontrada para realizar-se a formulação do comportamento, tendo-se em vista que a realização de ensaios e o estudo dos resultados obtidos pode levar meses, devido aos cuidados na realização dos testes e à extensão do volume de dados gerados.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem às instituições de fomento CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro durante a realização deste trabalho, fator decisivo na realização de pesquisas para o desenvolvimento tecnológico nacional.

8. Referências

- Adams, C. and Beese, J. G., 1974, “Empirical Equations for Describing the Strain-Hardening Characteristics of Metals Subjected to Moderate Strains”, Trans. ASME, series H, vol. 96, pp. 123-126.
- Adams, M. J., Briscoe, B. J., Corfield, G. M., Lawrence, C. J. and Papanthasiou, T. D., 1997, “An analysis of the plane-strain compression of viscoplastic materials”, J. Appl. Mech., vol. 64, pp. 420-424.
- Belhedi, B., 1988, “Étude Préliminaire pour la Compréhension d’une Certaine Classe de Lois de Comportement”, Tese grau ‘DEA-Science des Matériaux’, Univ. de Besançon, França.

- Dieter, G. E., 1988, "Mechanical Behavior of Materials under Tension", in Metals Handbook.
- Freire, J. L. F., Lage, J. D. and Vieira, R. D., 1983, "Loaded and Unloaded optical Response of Polyester Model Materials", *Experim. Mech.*, vol. 23, n. 12, pp. 450-456.
- Lemaitre, J. et Chaboche, J.-L., 1985, "Mécanique des Matériaux Solides", Bordas, Paris.
- Oliveira, L. C., 2000, "Estudo da Caracterização e Modelagem do Comportamento Mecânico no Regime Inelástico-Anelástico de Misturas de Resina de Poliéster", Tese de Doutorado, Univ. Federal de Uberlândia, Brasil.
- Oliveira, L. C., Gomide, H. A., Rade, R. S. L., 1997a, "Determination of the Viscoplastic Characteristics of a Polyester Resin Mixture", XIV COBEM, Bauru, Brasil. (em CD)
- Oliveira, L. C., Gomide, H. A., Rade, R. S. L., 1997b, "Estudo das Características Viscoplasticas de uma Mistura de Resinas de Poliéster", I Sem. Curso Pós-grad. Eng. Mec., Univ. Fed. Uberlândia, Uberlândia, Brasil.
- Oliveira, L. C., Gomide, H. A. & Rade, R. S. L., 1998a, "Modelização Básica das Características Viscoplasticas de uma Mistura de Resinas", V CEM-NNE, Fortaleza, Brasil. (em CD)
- Oliveira, L. C., Gomide, H. A., Rade, R. S. L., 1998b, "Caracterização e Modelagem do Comportamento Mecânico e Ótico no Regime Inelástico-Anelástico de Misturas de Resina de Poliéster", II Sem. Curso Pós-grad. Eng. Mec., Univ. Fed. Uberlândia, Uberlândia, Brasil.
- Oliveira, L.C., Gomide, H.A. & Rade, R.S.L., 1999a, "Viscoplastic Modeling of the Strengthening and Relaxation of a Polyester Resin", III Sem. Curso Pós-grad. Eng. Mec., Univ. Fed. Uberlândia, Uberlândia, Brasil.
- Oliveira, L.C., Gomide, H.A. & Rade, R.S.L., 1999b, "Fenomenologia Típica de Misturas de Resinas Fotoviscoplasticas", VI PACAM, Rio de Janeiro.
- Rade, R. S. L., 1994, "Une Étude Comparative de Deux Modèles de Comportement Viscoplastique Endommagé pour les Matériaux Composites Stratifiés", Tese, grau 'Docteur en Sciences pour l'Ingénieur', Univ. de Franche-Comté, França.
- Rojas, F. R. V., Oliveira, L. C., Gomide, H. A., Rade, R. S. L., 1998, "Ensaio Caracterizadores das Propriedades Mecânicas em Resinas de Poliéster", V CREEM.
- Siqueira, R. C. e Gomide, H. A., 1994, "Identificação das Propriedades Elastoplasticas de Materiais Fotoplasticos", III CEM-NNE, pp. 504-512.

BASIC EQUATIONING FOR THE MECHANICAL BEHAVIOR IN VISCOPLASTIC EXPERIMENTS

Luiz Claudio Oliveira

Pontifical Catholic University of Minas Gerais - PUC-MG, Dept. of Mechanical Eng., R. Dom José Gaspar n° 500, Belo Horizonte, MG, CEP 30.535-610
lco@pucminas.br

Henner Alberto Gomide

Universidade de Uberaba – UNIUBE, Fac. Eng^a Civil, Fac. of Civil Eng., Av. Nenê Sabino 180, Bairro Universitário Uberaba - MG CEP 38.055-500
henner.gomide@uniube.br

Raquel Santini Leandro Rade

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Fac. of Physics, Av. Universitários s/n, Uberlândia, MG
rslr@ufu.br

. A basic equationing for the results of broad systematic tests on the behavior of mixtures of polyester resins in the viscoplastic domain is presented and discussed. Tests were performed on samples made of mixtures of rigid and flexible polyester resins, on several temperatures and several strain rates, also varying the proportion rigid resin/flexible resin. The characterizing parameters of the typical plots are identified through a numerical equationing, which plots refer to tension, cyclic solicitation, relaxation, and deformation return after unloading (after rupture), aiming the study of the mechanical behavior. The equationing involves the variation of stress x time and stress x deformation as it's varied the parameters temperature, deformation rate and proportion of resins. polynomial and exponential regressions are used, composing a series of expressions with interdependent variables, where the variables from successive formulations depend on the previous formulations. The equations developed aim the obtention of the test temperature in which a photoviscoplastic model will simulate the behavior of a prototype, known the parameters K and M (related to strength and hardening, respectively) of the prototype material and the rate of deformation to be applied, as well as the other parameters of the modeling material obtained experimentally. This equationing is the conclusion of the basic modeling of the mechanical behavior of those resins, which will be used in future numerical-experimental.

. *polyester resins, photoviscoplasticity, viscoplasticity, modeling, mechanical behavior.*

USING SUBDOMAINS FOR THE FORMULATION OF STRESS-STRAIN DIAGRAMS

Luiz Claudio Oliveira

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-Minas, Dept^o Eng^a Mecânica/Mecatrônica, Mestrado em Eng^a Automotiva (www.mea.pucminas.br), R. Dom José Gaspar n^o 500, Belo Horizonte, MG, CEP 30.535-610
lco@pucminas.br

Sonia A Goulart Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Fac. Eng. Mecânica – FEMEC
sgoulart@mecanica.ufu.br

Abstract. Through a sole general formulation, which encompasses classical formulations (Ramberg-Osgood, Swift, Holomon) and other ones not yet explored, experimental stress-strain diagrams are quantified. In this kind of formulation, the stress-strain diagram is split into subdomains, defining one specific formulation for each subdomain. Eventually, through an “assemblage” or sum of subdomains, it’s obtained a numerical model for the diagram. Linear regressions on planes $\log \sigma \log \epsilon$ are chosen as the specific algebraic expressions. This type of formulation allows the systematic analysis of several possible formulations, using simple linear regressions, and the choice of the type which better fits the given data. In a general view, the formulations obtained are at the basis of any further description of mechanical behavior based on stress-strain diagrams. This methodology is used in results coming from experiments on three different materials. Some diagrams also refer to different rates of deformation, which may sensibly influence its final format.

Key words: mechanical behavior, stress-strain curves, numerical model

1. Introduction

The tension/compression stress-strain diagram is of fundamental importance as a starting point for a phenomenological macroscopic characterization of mechanical properties. When this diagram describes the behavior of a strain-hardening material, it shows an initial elastic part, linear or non-linear, and further on a *non-linear elastoplastic part*. In the case of a *linear elastic part*, an *exclusively non-linear curve* in the plastic domain is obtained by taking away some simple fixed/variable quantity from the total ones, namely $\sigma - \sigma_Y$, $\epsilon - \epsilon_Y$, $\epsilon - (\sigma/E)$. Quantification of the latter exclusively non-linear curve is usually sought through the simplest means for linearization. All of that aiming simple but accurate basic formulations for describing total stress, total strain and plastic strain. Such formulations and the diagram typical quantities (e.g. E , σ_Y , $\sigma_{FAILURE}$) make up a phenomenological description of the most basic mechanical behavior of a given material.

1.1 Decomposition of the total quantities ϵ and σ .

In order to retain just an *exclusively non-linear* behavior curve in the plastic domain, let’s adopt the following procedure: from the *total quantities*, ϵ and σ , it will be taken away either a variable quantity, the (*linear*) *elastic component quantity* ϵ_e , or some fixed quantities, the parameters ϵ_{EIP} and σ_{EIP} . Then there will be left either a *nonlinear, plastic component quantity*, ϵ_p , or *nonlinear, elastoplastic component quantities*, ϵ_{ep} and σ_{ep} . Then, through a linear regression by the least squares method, experimental data worked out into planes ($\ln(\sigma - \sigma_{taken})$, $\ln(\epsilon - \epsilon_{taken})$) will be described by the relation:

$$\ln(\sigma - \sigma_{taken}) = \ln K + (1/M) \ln(\epsilon - \epsilon_{taken}), \quad \sigma > \sigma_{taken}, \quad \epsilon > \epsilon_{taken}, \quad (1)$$

where:

- σ and ϵ are approximate values, given by the linearization;
- ϵ_{taken} is one of the component quantities ϵ_e or ϵ_{EIP} and σ_{taken} is σ_{EIP} , quantities “taken away”;
- K and M are constants obtained from the linear regression, *resulting different values when using one or the other deformation component quantity* ϵ_e or ϵ_{EIP} for ϵ_{taken} (indexes for K and M have not been used to avoid overburden of notation). These constants are specific parameters for a given material, at a given temperature.

The equation above can be rearranged to obtain the *general forms of the plastic relation* $\epsilon_p(\sigma)$ and of its “inverse” $\sigma(\epsilon_p)$:

$$\epsilon_{\text{reduc}} = (\sigma_{\text{reduc}} / K)^M, \quad \sigma_{\text{reduc}} = K \epsilon_{\text{reduc}}^{1/M}, \quad (2)$$

where: $\sigma_{\text{reduc}} = \sigma - \sigma_{\text{taken}}, \sigma_{\text{taken}} = \sigma_{\text{EIP}}$ and $\epsilon_{\text{reduc}} = \epsilon - \epsilon_{\text{taken}}, \epsilon_{\text{taken}} = \epsilon_c$ or $\epsilon_{\text{EIP}}; \sigma \geq \sigma_{\text{EIP}}, \epsilon \geq \epsilon_{\text{EIP}}$.

The relations above result two sets of linear relations, on the coordinate planes: (i) $(\ln(\sigma_{\text{ep}}), \ln(\epsilon_{\text{ep}}))$, (ii) $(\ln(\sigma_{\text{ep}}), \ln(\epsilon_{\text{p}}))$. Other sets of relations are still possible. The variables a nd planes defined can be enhanced to include also total quantities, necessarily in combination with one of the reduced component quantities in order to maintain the exclusively non-linear character of the curve. In this way, the previously defined quantities can be enhanced into a so-called set of “constitutive” quantities, which other than the “reduced” components will also include the total stress and total strain. Altogether those constitutive quantities are: $\sigma, \sigma_{\text{ep}}, \epsilon, \epsilon_{\text{ep}}$ and ϵ_{p} . These constitutive quantities will be used to form planes (σ_c, ϵ_c) , where either σ_c or ϵ_c at least must be a “reduced” component (to get an exclusively non-linear curve). The exclusively non-linear curves in those planes are then linearized, using the most suitable means (logarithmic linearization, polynomials, etc.).

Planes with constitutive quantities can be linearized just like above. The resulting equations are then of the same form of those just obtained, substituting σ_c and ϵ_c for σ_{reduc} and ϵ_{reduc} :

$$\epsilon_c = (\sigma_c / K)^M \quad \text{or} \quad \sigma_c = K \epsilon_c^{1/M}. \quad (3)$$

The limits of validity shall be $\forall \sigma, \epsilon \geq \epsilon_{\text{EIP}}$ when using σ and ϵ_{ep} or ϵ_{p} , and $\forall \epsilon, \sigma \geq \sigma_{\text{EIP}}$ when using ϵ and σ_{ep} . For the other cases, $\sigma \geq \sigma_{\text{EIP}}$ and $\epsilon \geq \epsilon_{\text{EIP}}$. With this reinsertion of total quantities, three new sets of equations are possible in addition to the previous two ones, which sets are to be defined on the following coordinate planes: (iii) $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_{\text{ep}}))$, (iv) $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_{\text{p}}))$ and (v) $(\ln(\sigma_{\text{ep}}), \ln(\epsilon))$.

2 STRESS/STRAIN PLASTIC BEHAVIOR MODELS

Having defined component quantities and chosen specific equations for the plastic domain, they will be now used together with the elastic domain relation (Hooke’s law) to model the stress-strain diagram. Initially, let’s introduce the *plastic limit* σ_s . While σ_{EIP} is the limiting stress value beyond which plastic deformation *first develops in the initial loading* of a given specimen (which exact stage of previous plastic deformations is not considered or unknown), the plastic limit σ_s is a “hardening” (or “strengthening”) limiting value, which changes (here just increases) with the advance of plastic deformation. Since any value of $\sigma = \sigma_{\text{EIP}}$ produces a plastic deformation, any value of $\sigma = \sigma_{\text{EIP}}$ is already intrinsically a plastic limit σ_s itself: if a loading is released at any value of say $\sigma_A, \sigma_A = \sigma_{\text{EIP}}$, a posterior reloading will be elastic until it attains this same value of σ_A , and so, for this reloading, the plastic limit σ_s is quantitatively the value of σ_A (neglecting many peculiarities of the real behavior, see Dieter (1981)). σ_{EIP} is then exactly the first value taken by σ_s , at the onset of plastic deformation. In this way, the relations expliciting σ themselves in sets (i) to (v) above can be used to foresee the plastic limit σ_s , algebraic difficulties further to consider. In order to get a comprehensive readied description, right from the start eqns. (3) are developed into two lines of modeling, in the form of an “a priori” separation of variables in the plastic domain: one line expliciting the relation $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ and the other one the relation $\sigma = \sigma(\epsilon)$.

2.1 Modeling Strain. The quantities and relations presented so far are now used to build a model for the description of a very basic deformation behavior. In this model:

- σ is a *given* unidimensional monotonic tensile or compressive stress, uniform on a given transversal section;
- ϵ is the total uniform deformation to result in the dimension parallel to the axis of tension/compression;
- σ_{EIP} is a previously identified quantity, always taken as positive;
- $\epsilon_{\text{EIP}} \equiv \sigma_{\text{EIP}} / E$ is a previously defined quantity, always taken as positive (E previously identified);
- P_1 and A_1 are algebraic expressions given in Table 1;
- the values of K and M depend on the specific pair of constitutive quantities used in the linearization (indexes have not been used to avoid overburden of notation);

$$\cdot Sgl(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Model 1 (Strain Model): the total axial uniform deformation ϵ and its elastic and plastic components ϵ_e and ϵ_p to be found in an elastic-elastoplastic solid with isotropic hardening, initially isotropic, under a given unidimensional monotonic uniform tensile/compressive loading σ :

$$\text{for } |\sigma| \leq \sigma_{E|P}, \quad \epsilon = \epsilon_c = (|\sigma| / E) \text{ Sgl}(\sigma), \epsilon_p = 0; \quad (4)(a)$$

$$\text{for } |\sigma| \geq \sigma_{E|P}, \quad \epsilon = \epsilon_c + \epsilon_p = \left(\frac{P_1}{K}\right)^M \text{ Sgl}(\sigma) + A_1 \text{ Sgl}(\sigma). \quad (4)(b)$$

Separately, the elastic and plastic components in eqn. (5)(b) are given by:

$$\epsilon_c = (|\sigma| / E) \text{ Sgl}(\sigma), \quad \epsilon_p = \left(\frac{P_1}{K}\right)^M \text{ Sgl}(\sigma) + A_1 \text{ Sgl}(\sigma) - (|\sigma| / E) \text{ Sgl}(\sigma). \quad (4)(c)$$

Furthermore: for $|\sigma| \geq \sigma_{E|P}$, $\sigma = \sigma_s$,
that is, σ is the plastic limit σ_s itself for $|\sigma| \geq \sigma_{E|P}$ (σ and σ_s are readily explicitly given in Model 2).

2.2 Modeling Stress. There follows a more efficient way of obtaining σ , i.e. a readied direct formulation of the problem inverse to that of the previous model. This time the total uniform deformation ϵ in one dimension is given, and σ is the resulting unidimensional uniform tensile/compressive stress. In this model:

- ϵ is a *given* total axial monotonic tensile or compressive deformation uniform in one dimension;
- σ is the unidimensional stress to result in the direction parallel to the axis of deformation, uniform on a given transversal section;
- P_2 and A_2 are given in Table 1;
- for $\epsilon_{E|P}$, K , M and $\text{Sgl}(x)$ see Model 1.

Model 2 (Stress Model): the resultant total unidimensional uniform stress σ and plastic limit σ_s to be obtained in an elastic-elastoplastic solid with isotropic hardening, initially isotropic, under a given axial monotonic uniform deformation ϵ :

Table 1: Algebraic expressions for P_i and A_i in eqns. (4)(b) and (5)(b).

ALGEBRAIC EXPRESSIONS FOR P_i AND A_i IN THE STRAIN AND STRESS BEHAVIOR MODELS						
set #	σ_c, ϵ_c QUANTITIES USED†	STRAIN MODEL $\epsilon = \epsilon(\sigma)$, eqn. (4)(b)		STRESS MODEL $\sigma = \sigma(\epsilon)$, eqn. (5)(b)		some similar formulations (developed basically as a relation of the type:)
		P_1 $(\sigma - \sigma_{\text{taken}})$	A_1 $(\epsilon_{\text{taken}})$	P_2 $(\epsilon - \epsilon_{\text{taken}})$	A_2 (σ_{taken})	
i	$\sigma - \sigma_{E P}, \epsilon - \epsilon_{E P}$	$ \sigma - \sigma_{E P}$	$\epsilon_{E P}$	$ \epsilon - \epsilon_{E P}$	$\sigma_{E P}$	
ii	$\sigma - \sigma_{E P}, \epsilon - \sigma/E$	$ \sigma - \sigma_{E P}$	$ \sigma / E$	$ \epsilon - \sigma /E$	$\sigma_{E P}$	Ramberg-Osgood* ($\epsilon = \epsilon(\sigma)$); Ludwick* ($\sigma = \sigma(\epsilon)$)
iii	$\sigma, \epsilon - \epsilon_{E P}$	$ \sigma $	$\epsilon_{E P}$	$ \epsilon - \epsilon_{E P}$	0	
iv	$\sigma, \epsilon - \sigma/E$	$ \sigma $	$ \sigma / E$	$ \epsilon - \sigma /E$	0	Hollomon or simple power curve** ($\sigma = \sigma(\epsilon)$)
v	$\sigma - \sigma_{E P}, \epsilon$	$ \sigma - \sigma_{E P}$	0	$ \epsilon $	$\sigma_{E P}$	

Remarks: $(\sigma_{E|P}, \epsilon_{E|P}) \equiv (\sigma_Y, \epsilon_Y)$, where σ_Y is the common notation for the onset of plastic deformation (i.e., the ‘yield limit’); $\sigma_{E|P}$ and $\epsilon_{E|P}$ are always taken as positive (same value for tension and compression).

Notes: †: in order to form planes $(\ln(\sigma_c), \ln(\epsilon_c))$; *: exactly the same equations, just changing nomenclature; **: with ϵ for ϵ_p ($\epsilon_p = \epsilon - \sigma/E$).

$$\text{for } |\epsilon| \leq \epsilon_{EIP}, \quad \sigma = (E |\epsilon|) \text{ Sgl}(\epsilon); \quad (5)(a)$$

$$\text{for } |\epsilon| = \epsilon_{EIP}, \quad \sigma = K (P_2)^{1/M} \text{ Sgl}(\epsilon) + A_2 \text{ Sgl}(\epsilon). \quad (5)(b)$$

Furthermore: $\text{for } |\epsilon| \geq \epsilon_{EIP}, \quad \sigma = \sigma_s,$ (5)(c)
 that is, σ is the plastic limit σ_s itself for $|\epsilon| \geq \epsilon_{EIP}$. (σ_s is not defined for $|\epsilon| \leq \epsilon_{EIP}$)

3 Practical use in laboratory practice

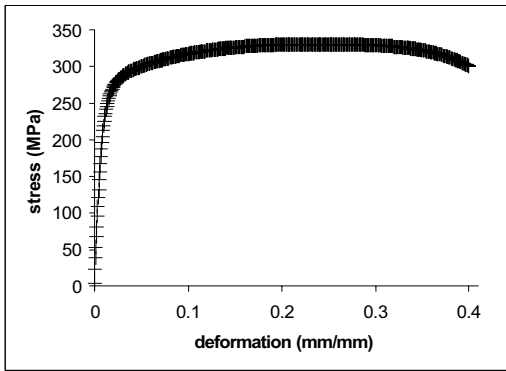
Experimental data from tension tests on cylindrical specimens, from three different materials, namely steel, aluminum and niobium, have been worked out so as to use the formulation developed. The experimental data for stress and strain can be read into a spreadsheet, for example, which is a means of data analysis provided with most testing machines. Then, the needed values of $\ln(\sigma)$, $\ln(\epsilon)$, $\ln(\sigma_{ep})$, $\ln(\epsilon_{ep})$ and $\ln(\epsilon_p)$ are obtained. Following, regressions on the sets $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon_{ep}))$, $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon_p))$, $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_{ep}))$, $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_p))$ and $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon))$ furnish the values of $\ln K$ and $1/M$, with their respective regressions coefficients (r^2). Choosing the best regression, and using eqs. (5) and (6), it's finally obtained the logarithmic model which best fits the data. For the data referred to in Table 2, Figure 2 shows the $\sigma \times \epsilon$ diagrams and best fit curves. The intervals of stress-strain used in each case refers to the beginning of the plastic curve, and have been chosen only to use the formulation. Larger intervals, up to necking, can be used, with consequently changes in the regression parameters and coefficients. For niobium, the best fit is obtained using set (ii), of Table 1, that is, a Ramberg-Osgood equation for $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ and a Ludwick equation for $\sigma = \sigma(\epsilon)$. For aluminum, set (iv), that is, a Hollomon or simple power curve is best. For steel, set (iii) gave the best fit, that is, none of the classical formulations shown.

4 Discussion

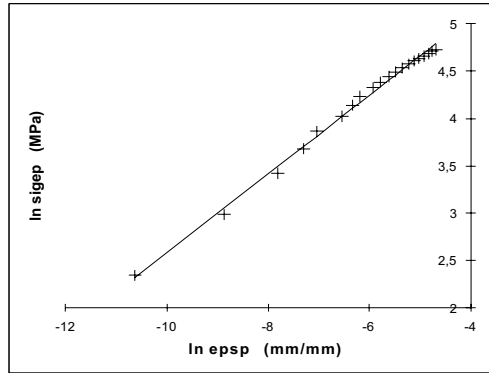
In the literature, stress is handled just in two forms: that of the total stress σ and that of the limiting value σ_Y . It is never singled out into an explicit autonomous composed quantity as the component $\sigma_{ep} = \sigma - \sigma_Y$ defined here, although the linearization in a Ramberg-Osgood or Ludwick equationing is obtained de facto "resolving"

Table 2: Parameters from regression curves on the planes: (i) $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon_{ep}))$, (ii) $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon_p))$, (iii) $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_{ep}))$, (iv) $(\ln(\sigma), \ln(\epsilon_p))$ and (v) $(\ln(\sigma_{ep}), \ln(\epsilon))$.

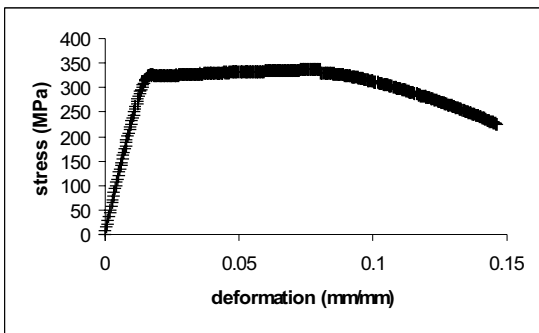
Niobium, from ($\sigma=156,8\text{MPa}$, $\epsilon=0,00536\text{mm/mm}$) to ($\sigma=269,4\text{MPa}$, $\epsilon=0,01868\text{mm/mm}$)			Aluminum, from ($\sigma=325,7\text{MPa}$, $\epsilon=0,01701\text{mm/mm}$) to ($\sigma=332,3\text{MPa}$, $\epsilon=0,052705\text{mm/mm}$)			Steel, from ($\sigma=580,5\text{MPa}$, $\epsilon=0,01656\text{mm/mm}$) to ($\sigma=634,9\text{MPa}$, $\epsilon=0,04801\text{mm/mm}$)		
set #	parameter	numeric value	set #	parameter	numeric value	set #	parameter	numeric value
i	$\ln K$	7,89252671	i	$\ln K$	4,680764133	i	$\ln K$	5,442156752
	$1/M$	0,701236616		$1/M$	0,978596616		$1/M$	0,355636232
	r^2	0,975667609		r^2	0,48898419		r^2	0,809370482
ii	$\ln K$	6,734928689	ii	$\ln K$	5,283529109	ii	$\ln K$	5,474319304
	$1/M$	0,415151875		$1/M$	1,143900415		$1/M$	0,361379136
	r^2	0,995157652		r^2	0,5191377		r^2	0,670296636
iii	$\ln K$	6,286599362	iii	$\ln K$	5,82807669	iii	$\ln K$	6,522329409
	$1/M$	0,160438871		$1/M$	0,008297058		$1/M$	0,017107329
	r^2	0,989150198		r^2	0,772151101		r^2	0,886054207
iv	$\ln K$	6,003097908	iv	$\ln K$	5,832988402	iv	$\ln K$	6,52851967
	$1/M$	0,09196341		$1/M$	0,009650582		$1/M$	0,018422991
	r^2	0,945754349		r^2	0,811670628		r^2	0,824179317
v	$\ln K$	7,210981764	v	$\ln K$	10,38678222	v	$\ln K$	6,853490946
	$1/M$	0,395758241		$1/M$	2,908700038		$1/M$	0,861942429
	r^2	0,967132247		r^2	0,629815045		r^2	0,443452175



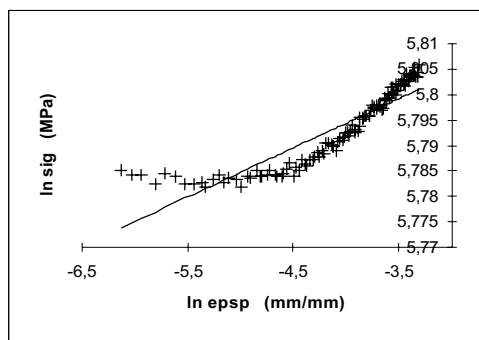
(a) Niobium, comprehensive curve



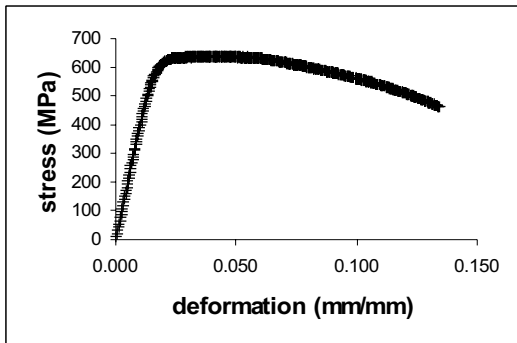
(b) Niobium, from ($\sigma=156,8\text{MPa}$, $\epsilon=0,00536\text{mm/mm}$) to ($\sigma=269,4\text{MPa}$, $\epsilon=0,01868\text{mm/mm}$)



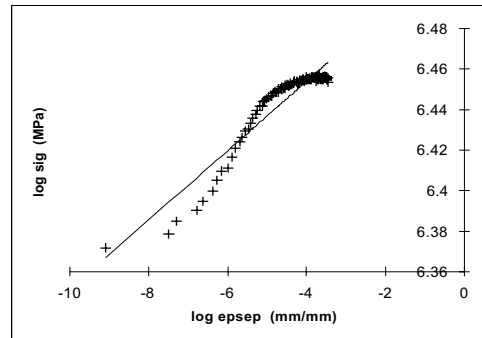
(c) Aluminum, comprehensive curve



(d) Aluminum, from ($\sigma=325,7\text{MPa}$, $\epsilon=0,01701\text{mm/mm}$) to ($\sigma=332,3\text{MPa}$, $\epsilon=0,052705\text{mm/mm}$)



(e) Steel, comprehensive curve



(f) Steel, from ($\sigma=580,5\text{MPa}$, $\epsilon=0,01656\text{mm/mm}$) to ($\sigma=634,9\text{MPa}$, $\epsilon=0,04801\text{mm/mm}$)

Fig. 1: Comprehensive curves and best fits for the beginning of the plastic domain.

the total stress into a component quantity $\sigma_{\text{component}} = \sigma - \sigma_Y$. The component σ_{ep} and also ϵ_{ep} have been termed “elastoplastic”. This reminds the elastic and plastic character of the resulting component variable, but *only in the case of deformations*. This is due to the fact that the “elastoplastic” component of deformation is an algebraic device to split the diagram into subdomains which lends itself to the consideration that it is describing elastic and plastic components of deformation together. Nevertheless, no connotation of an elastic, plastic or elastoplastic nature can be attributed to stress, since it does not have a similar physical correspondence. So “elastoplastic stress component” is just a name aligned with “elastoplastic strain component”, a weak point in the attempts here made to clarify variables and domains, specially when dealing with the plastic domain. All in all, the roll of quantities $\sigma_e, \sigma_{ep}, \sigma_{EIP}, \epsilon_e, \epsilon_p, \epsilon_{ep}, \epsilon_{EIP}$ make it clearer the characterization of the very basic phenomenology in stress-strain diagrams.

Differences among eqns. (5)(a) to (6)(b), obtained using the parameters P_i and A_i specific to each of the sets (i) to (v), lie basically in the parameters K and M , which are obtained using different $\ln(x) - \ln(y)$ planes and thus will result different numeric values for K and M in each of those sets. Indexes for K and M have not been used to avoid overburden in notation.

The equationing explicitly developed uses solely a logarithmic linearization (explicited as a neperian logarithm, $\ln(x)$). This is a simple and straightforward way to attach the non-linearity present. Remark that, beyond those logarithmic formulations, once the division of the whole curve into characteristic subdomains is performed, the singled out exclusive type of curve of this domain allows many different mathematical expressions to be tried out and used for its description. Other types of linearization more suitable to specific cases are used in the literature, many times polynomials, which can be developed through the constitutive component quantities and subdomains, with a wider roll of variables and domains to work with. Remark that separate formulas for $\sigma = \sigma(\epsilon)$ and $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ are readied so that no “inversion” of equations becomes necessary, if that inversion is feasible, at the (very low) cost of performing separate regressions for each case.

Although mathematically very simple, the equationing shown here allows a wider view on the very common formulation of stress-strain diagrams, allowing a comparison among the classical formulations and providing a useful practical method for use in the laboratory when modeling the very basic behavior of materials through stress-strain curves.

5 Conclusion

The essence of this work is the systematic gathering and study of stress-strain diagram variables and their components inside an environment of worked out composed, component quantities and related characteristic subdomains. The resulting models are made of juxtaposed or adjoined expressions, in the form of algebraic or numeric, independent equations. The key point is the environment, which is itself quite simple and straightforward, defined in a couple of lines (relations (1) to (3)). Almost all the formulas that follow are the application of this environment to use logarithmic linearizations. Those formulas show that the environment is able of consistently setting forth the classical logarithmic formulations, and further ones not so famous nor tried out, all of that from a single source (models 1 and 2). The logarithm linearization-based application equationing developed explores comprehensively the use of the component quantities. Variables and relations are recast and expanded into a broader context. It is specifically used one algebraic relation, namely logarithmic linearizations. The equations comprise in fact five sets of elastic plus plastic stress-strain relations, using the parameters in Table 1. The environment itself has been accomplished starting with the use of the parameter σ_{EIP} to define a new variable, σ_{ep} , in terms of σ and σ_{EIP} ($\sigma_{ep} = \sigma - \sigma_{EIP}$). The next step is the identification and definition of the deformation variable ϵ_{ep} , similar to σ_{ep} . The elastoplastic components σ_{ep} and ϵ_{ep} together are to be identified and visualized as a subdomain in the stress-strain diagram comprising solely the nonlinear portion of the stress-strain curve. All sets of constitutive quantities basically follow this scheme: they form planes where just an exclusively type of curve appears, in this case exclusively non-linear curves. Those expedients are not new taken separately. They can be found one of a type at each one of several places in the literature. Also the nomenclature and symbology are for the most borrowings from here and there. Nevertheless, the use of these expedients all at once, that is, the explicit reference and use of separate variables for the component quantities systematically and the comprehensive identification of the roles of those variables and of their respective subdomains, that is not easily found in the literature.

References

- Adams, C., Beese, J.G. (1974). Empirical Equations for Describing the Strain-Hardening Characteristics of Metals Subjected to Moderate Strains. Trans. ASME: Journ. of Eng. Materials and Technology 96, 123-126.

- American Society for Testing and Materials (ASTM) (1993), Method number A370-93: Mechanical Testing of Steel Products, ASTM.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) (1992), NBR 6152-out/1992: Materiais Metálicos: Determinação das Propriedades Mecânicas à Tração, ABNT.
- Datsko, J. (1966), Material Properties and Manufacturing Processes, John Wiley, New York.
- Dieter, G.E. (1981), Metalurgia Mecânica, 2nd ed., Guanabara-Dois, Rio de Janeiro.
- Dieter, G.E. (1988), Mechanical Behavior of Materials under Tension, in Metals Handbook: Volume 8: Mechanical Testing, 9th ed., American Society for Metals (ASM).
- Hayden, H.W., Moffatt, W.G., Wulff, J. (1965), The Structure and Properties of Materials: Volume III: Mechanical Behavior, John Wiley, New York.
- Helman, H., Cetlin, P.R. (1983), Fundamentos da Conformação Mecânica dos Metais, Guanabara-Dois, Rio de Janeiro.
- Hertzberg, R.W. (1983), Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials, John Wiley, New York.
- Hollomon, J. H. (1945). Tensile Deformation. Transactions of the AIME 162, 268-290.
- Kleemola, H.J., Nieminen, M.A. (1974). On the Strain-Hardening Parameters of Metals. Metallurgical Transactions 5, 1863-1866.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L. (1985), Mécanique des Matériaux Solides, Bordas, Paris.
- Lopes, L. V., Al-Qureshi, H.A. (1990). Método para Caracterização do Comportamento Plástico de Material Metálico Segundo a Expressão de Swift. IV Simpósio de Conformação Plástica de Metais.
- Massonet, C., Save, M. (1965), Plastic Analysis and Design: Vol. I: Beams and Frames, Blaisdell Publishing, New York.
- Neal, B. G. (1977), The Plastic Methods of Structural Analysis, 3rd ed., Chapman and Hall, London.
- Ramberg, W., Osgood, W.R. (1943). Description of Stress-strain Curves by Three Parameters. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) Technical Note no 902.

METODOLOGIA, SISTEMATIZAÇÃO E SELEÇÃO DE PROJETOS DE TRANSMISSÕES EPICICLOIDAIS COM DOIS TEPs LIGADOS

Danilo Amaral

Universidade Federal de Minas Gerais – Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos 6627, CEP 31970-001, Belo Horizonte, MG, Brasil
e-mail: danilo@demec.ufmg.br

Marcelo Becker

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - Instituto Politécnico, Av. Dom José Gaspar, 500, CEP 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brasil
e-mail: marcelo.becker@pucminas.br

Franco Giuseppe Dedini

Universidade estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, Caixa Postal 6051, CEP 13089-970, Campinas, SP, Brasil
e-mail: dedini@fem.unicamp.br

Resumo. Os trens de engrenagens epicicloidais ou trens de engrenagens planetárias (TEPs) são sistemas de transmissão de alta complexidade cinemática e de difícil visualização. Entretanto, são grandes as suas vantagens: compactos, leves, permitem altas reduções de velocidade, possuem alta confiabilidade pois tem engrenamento permanente, possuem capacidade de bifurcação e adição de potência e permitem múltiplas relações de transmissão. Uma de suas principais aplicações são as caixas de transmissão automática de veículos modernos. Como existe uma grande variedade de possibilidades de configurações na união de vários TEPs, foi desenvolvido um software TEPciclo para o auxílio no desenvolvimento de projetos para transmissões automáticas de veículos leves com dois TEPs simples ligados. Este software auxilia o projetista na seleção da montagem, do posicionamento e do número de dentes das engrenagens, fornecendo as relações de transmissão possíveis e o fluxo de torque no sistema selecionado.

Palavras chave: trens de engrenagens planetárias, trens de engrenagens epicicloidais, transmissão automática, fluxo de torque, projeto mecânico.

1. Introdução

Trem de engrenagem é uma cadeia cinemática destinada a transmitir rotações. Segundo Pires e Albuquerque (1980), três montagens são possíveis: trem simples, trem composto e trem epicicloidal. Trem simples é um sistema de engrenagens onde, em cada eixo, só existe uma engrenagem (Fig. 1a). O trem de engrenagem é chamado de composto, quando existe um ou mais eixos com duas engrenagens ou mais (Fig. 1b). Nestes dois casos, o suporte dos eixos das engrenagens é fixo. Quando existe um suporte, de pelo menos um eixo, dotado de movimento de rotação, o trem é chamado de epicicloidal (Fig. 1c). Observa-se que os eixos que suportam as engrenagens intermediárias entre a engrenagem central e a externa (esta última com dentes internos), estão montados em um suporte que gira em torno do eixo central do conjunto. Essa possibilidade do eixo de uma engrenagem também poder girar ao redor de outro eixo, além de girar em torno de si mesmo é que caracteriza um trem epicicloidal. Essa nomenclatura se deve ao fato de um ponto, pertencente à engrenagem que possui eixo móvel, descrever uma curva epicicloidal.

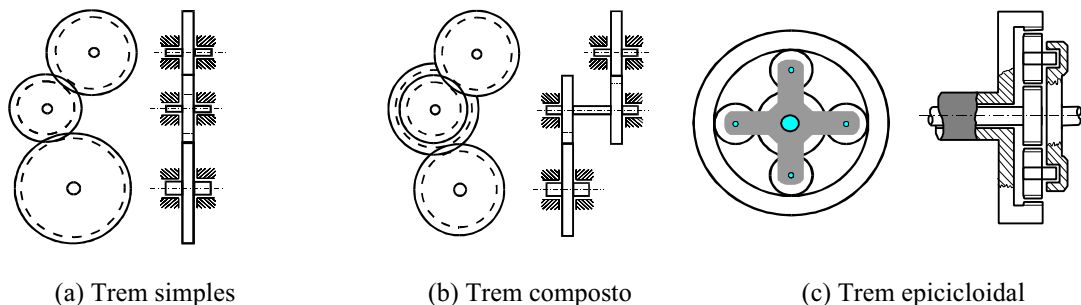


Figura 1. Tipos de trens de engrenagens.

2. Trens de Engrenagens Planetárias

Devido à analogia com nosso sistema solar, este tipo de trem epicicloidal é freqüentemente chamado de trem planetário ou trem de engrenagens planetárias ou simplesmente TEP. Em virtude disso, a engrenagem central é chamada de solar e a, ou as engrenagens que giram em torno dela, são chamadas de planetárias ou satélites ou simplesmente planetas. Quase sempre se utiliza, também, uma engrenagem de dentes internos em torno do TEP, onde

os planetários também se engrenam. Esta é chamada de anular, semelhante a um anel. O elemento que suporta o eixo móvel dos planetas e que pivota em torno do eixo principal do TEP é chamado de suporte ou braço. A Fig. 2 identifica estes elementos.

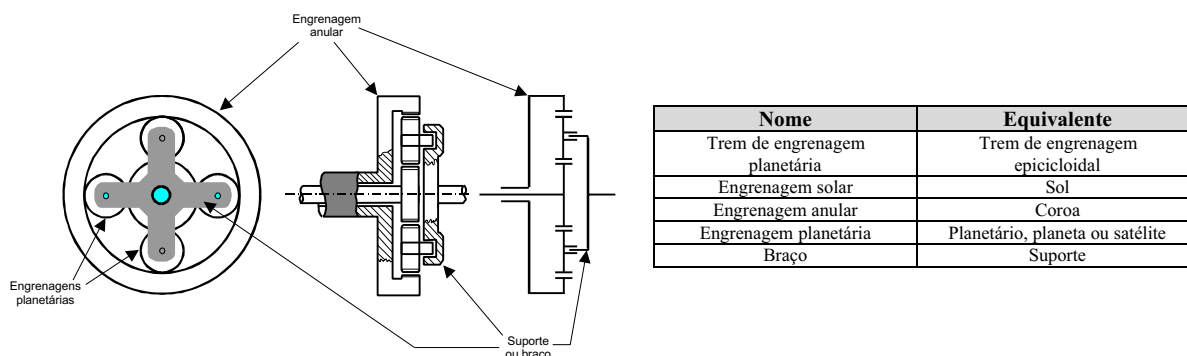


Figura 2. Nomenclatura dos elementos de um TEP.

Diversos autores definiram o que é um trem de engrenagens planetários. Dubbel (1944) escreveu que engrenagens planetárias simples se caracterizam porque, nelas, existe uma roda fixa e outra móvel que gira ao redor da fixa e se engrena com ela. Lima (1980) salientou que alguns sistemas de engrenagens se diferenciam dos comuns, pelo fato de possuírem uma ou mais engrenagens com possibilidade de girar ao redor do próprio eixo e, simultaneamente, em torno de um outro eixo. Shigley (1984) escreveu que, em um tipo de trem de engrenagens, pode-se obter efeitos surpreendentes, fazendo-se com que algum dos eixos gire em relação aos demais. Tais trens chamam-se trens planetários ou epicicloidais. Olson *et al* (1987) definiram que os trens de engrenagens planetários consistem de uma ou mais engrenagens centrais com engrenagens planetas engrenadas e que giram em torno delas, de tal forma que os pontos dos planetas descrevam curvas epicíclicas. Brasil (1988) definiu os TEPs, como trens de engrenagens em que alguns eixos são móveis, girando não só em torno de si mesmos, mas também em torno de outro eixo do trem. As engrenagens planetas estão ligadas por um braço de tal forma que a distância entre os centros das engrenagens permaneça constante.

Os TEPs são sistemas de transmissão de alta complexidade cinemática e de difícil visualização. Por isto, vários autores se dedicaram ao estudo de suas formas de representação para facilitar sua compreensão (Amaral e Dedini, 2000; Olson, 1987; e Buchsbaum e Freudstein, 1970). Entretanto, suas vantagens são grandes: compactos, leves, alta redução de velocidade, alta confiabilidade, alta densidade de potência, capacidade de bifurcação e adição de potência, capacidade diferencial, sistemas de múltiplas relações de transmissão e engrenamento permanente, permitindo ainda a minimização dos esforços nos mancais e alinhamento dos eixos. Estas são algumas das características que tornam os TEPs sistemas de grande potencial de aplicações, embora ainda não tanto estudado e pesquisado, de tal forma a permitir cada vez mais sua utilização em massa (Dedini, 1985).

Suas vantagens os tornaram preferíveis para o uso militar, onde múltiplos engrenamentos reduzem o risco de parada. O funcionamento suave também os tornam adequados para uso em submarinos e a grande capacidade de redução torna possível sua aplicação em turbinas. Os TEPs também são utilizados em aplicações aeroespaciais e em helicópteros, além do uso automotivo como diferencial e caixa de transmissão automática. Os TEPs são mecanismos interessantes porque tem dois graus de liberdade. Pode-se aumentar a complexidade do TEP, alterando-se o arranjo da configuração das engrenagens planetárias. Um TEP pode também possuir mais de um planeta entre as duas engrenagens centrais. Isso não muda o caráter cinemático do TEP. Um aumento do número de engrenagens planetárias resulta em uma maior divisão da carga transmitida entre os planetas. Essa é uma das grandes vantagens dos TEPs, onde o esforço nos mancais é bastante aliviado devido à simetria da aplicação da força pelos planetas, nos dentes da engrenagem solar. Portanto, deve-se sempre evitar a utilização de um único planetário porque, neste caso, não seria possível a compensação dos esforços. Na prática, normalmente se utilizam dois ou três planetas.

3. Tipos de Trens de Engrenagens Planetárias

Lévai (1968), identificou em seu trabalho, quatro tipos de TEPs: TEP Elementar; TEP Simples; TEP Ligado (TEP Incorporado) e TEP Satélite e Planeta. Os tipos Simples e Ligado são os mais importantes na prática por serem mais comercialmente aplicados. TEPs ligados se caracterizam pelo fato de que possuem mais de duas engrenagens centrais e podem ser separados em dois ou mais planetários simples. A principal aplicação dos TEPs Ligados são as caixas de transmissão automáticas utilizadas em veículos automotivos.

3.1 Exemplos de Caixas de Transmissão Automática

A vantagem de se usar somente dois TEPs ligados em caixas de transmissão automáticas, é que o sistema tem menos peças móveis e conseqüentemente possui um menor custo e maior confiabilidade. Neste caso, utiliza-se um sistema de embreagens que permite alterar o eixo de entrada, fornecendo assim mais alternativas de relações de

transmissão. Como exemplo, tem-se a caixa GM 440 PGT e a caixa Simpson, citadas por Charterjee (1995) e Hsieh (1997), mostradas nas Fig. 3a e 3b sob a forma de representação funcional (Amaral, 2000) e os números de dentes das respectivas engrenagens estão na Tab. 1.

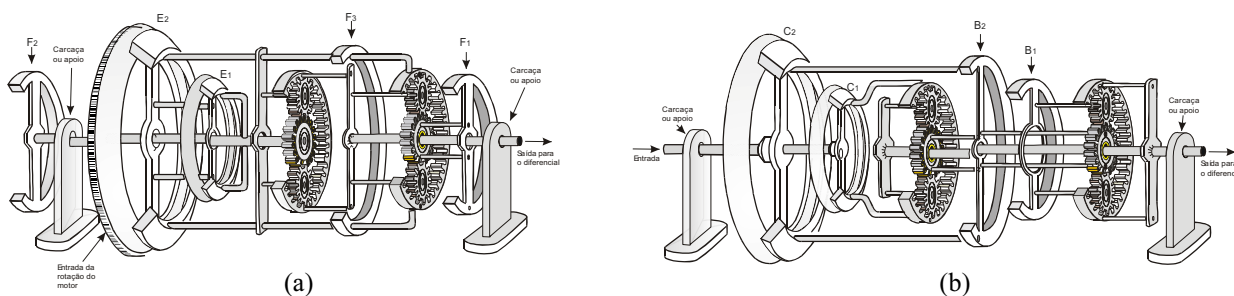


Figura 3. Representação funcional para as transmissões automáticas (a) GM 440PGT e (b) Simpson.

Tabela 1. Número de dentes e razão básica dos TEPs para as transmissões automáticas Simpson e GM 440 PGT.

	Simpson		GM Hydra Matic 440 PGT	
	TEP 1	TEP 2	TEP 1	TEP 2
Z_s	36	32	26	42
Z_p	16	22	18	16
Z_A	68	76	62	74
b	-0,529	-0,421	-0,419	-0,567

Observe que: b na Tab. 1 representa a razão básica, definida como sendo a relação $-Z_s/Z_A$ e equivale à relação de transmissão de um TEP quando seu braço está parado, transformando-se em um trem simples ou composto de engrenagens; Z_A , Z_s e Z_p correspondem respectivamente ao número de dentes da engrenagem anular, solar e planeta.

4. Ligações Possíveis entre dois TEPs

Como o TEP é um sistema de dois graus de liberdade, torna-se possível uma grande variedade de montagens. Pode-se alterar a posição dos elementos e determinar qual delas será adotada como saída, entrada e controle. Em função dessas escolhas no caso de um único TEP, pode-se ter como resultado uma redução ou multiplicação, invertendo ou não a rotação. O grau de redução ou multiplicação é em função do número de dentes das engrenagens.

O TEP simples pode ter 34 formas possíveis de construção (Lévai, 1968), sendo que o modelo adotado neste trabalho, será o TEP simples, com engrenagens cilíndricas e dois, três ou quatro planetas engrenados na engrenagem solar e na anular. Não serão enfocados planetas compostos ou emparelhados. O objetivo desta parte do trabalho é fazer uma sistematização das possíveis formas de ligações de um e de dois TEPs com vista ao desenvolvimento de um software no ambiente Windows em Visual Basic 5.0, de tal forma a se constituir em uma ferramenta que auxilie o projetista a encontrar a alternativa mais adequada às condições de projeto.


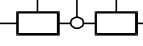
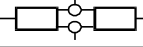
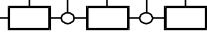

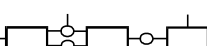
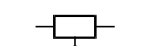
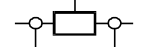
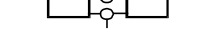
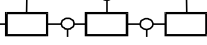
Uma aplicação muito utilizada para este tipo de montagem é no uso de transmissões automotivas automáticas. Para estes casos, o grau de liberdade do conjunto tem de ser $GL = 1$. Para utilização como diferencial, o grau de liberdade GL deve ser igual a 2 porque o torque tem de ser distribuído para as duas rodas de tração. Segundo Molian (1970), o grau de liberdade GL do sistema resultante depende do número de TEPs (N), do número de conexões entre os TEPs (c) e do número de eixos eventualmente freiados e imobilizados (l). A união por embreagem de dois eixos de saída de um mesmo TEP é considerado pelo autor como sendo apenas uma imobilização. A relação entre estes parâmetros é:

$$GL = 2N - c - l \tag{1}$$

A partir desta fórmula, Lévai (1973) elaborou o quadro da Tab. 2 que contém todas as combinações de c , l e GL obtidas da Eq. (1), para $N = 1, 2$ e 3 TEPs. Pela Tab. 2, pode ser visto que, para a obtenção de apenas um grau de liberdade, foi necessário imobilizar um eixo no caso das famílias 1, 3, 8, 9 e 10, dois eixos para as famílias números 2, 5, 6 e 7 e três eixos para a família número 4. Nestes sistemas é preciso considerar a existência de um eixo de entrada e outro como saída. O ou os demais eixos de acesso externo são considerados como membros de controle.

Pode-se instalar um freio em qualquer dos eixos de controle de um TEP. Na prática, vários freios podem ser instalados em uma seqüência de TEPs ligados afim de se obter novas relações de transmissão. Outro artifício é a instalação de embreagens unindo dois elementos de um mesmo TEP, o que resulta na neutralização deste TEP (ou seja, uma razão de redução igual a um para este TEP). As modernas transmissões automáticas de veículos leves adotam um sistema de somente dois TEPs ligados, mantendo o eixo de saída fixo e alternando-se o eixo de entrada através de um sistema de embreagens, possibilitando mais alternativas de relações de transmissão, para um mesmo conjunto.

Tabela 2. Graus de liberdade das possíveis ligações de TEPs.

N	Família	c	I	GL	Grupo
1	nº. 1 	0	0	2	3
			1	1	
2	nº. 2 	1	0	3	41
			1	2	
	nº. 3 	2	0	2	22
3	nº. 4 	2	0	4	520
			1	3	
			2	2	
	nº. 5 	3	0	3	330A
	nº. 6 		1	2	330B
	nº. 7 		2	1	411
	nº. 8 	4	0	2	140
	nº. 9 				221
	nº. 10 				1

Como o enfoque deste trabalho é voltado para transmissões automáticas de veículos leves, é preciso definir os limites e restrições de todas as variáveis envolvidas. Os intervalos adotados para o número de dentes das engrenagens solar, anular e planeta que possibilitam a montagem de um TEP, consideraram a viabilidade de construção das engrenagens e o número de dentes das engrenagens normalmente utilizadas nos modernos sistemas de transmissão automática em uso, de modo a evitar soluções de grande volume e peso. Baseado nisso, foram escolhidos os intervalos de 36 até 250 dentes para a anular, de 12 até 226 dentes para a solar e de 12 a 119 dentes para o planeta. Com estes limites, é possível obter 11.664 diferentes trinças para montagens de TEPs.

A cada trinca de número de dentes (solar, anular e planeta), corresponde a um valor de razão básica b para este conjunto. Mantendo-se constante o valor do número de dentes da anular, pode-se alterar simultaneamente o número de dentes das engrenagens solar e dos planetas, obedecendo a relação $Z_A - Z_S = 2Z_P$. O gráfico apresentado na Fig. 4 mostra a variação de b em função de Z_S e Z_P , sem considerar o limite adotado para a engrenagem anular. Os valores máximo e mínimo de b são $-0,904$ e $-0,048$ em função dos limites adotados para o número de dentes do planeta.

Foi adotado o uso de engrenagens cilíndricas (dentes retos ou helicoidais) e os TEPs não possuem planetas emparelhados ou compostos. Para se construir uma transmissão automática epicicloidial, fixou-se o eixo de saída, normalmente acoplado ao diferencial que por sua vez é acoplado às rodas. O eixo de entrada pode ser

alternado, através de sistemas de embreagens, o que amplia a possibilidade de novas relações de transmissão. Também em linha com os modernos projetos de transmissão automática para veículos leves, são utilizados apenas dois TEPs ligados (o que permite um menor número de peças móveis) da família número 3 da Tab. 2 e, apenas um eixo ou elemento de saída é freiado de cada vez, para se obter uma nova relação de transmissão. A Relação de Transmissão "direct drive" ou 1:1, é obtida, em todos os casos, acionando duas entradas ao mesmo tempo, ambas com a mesma rotação.

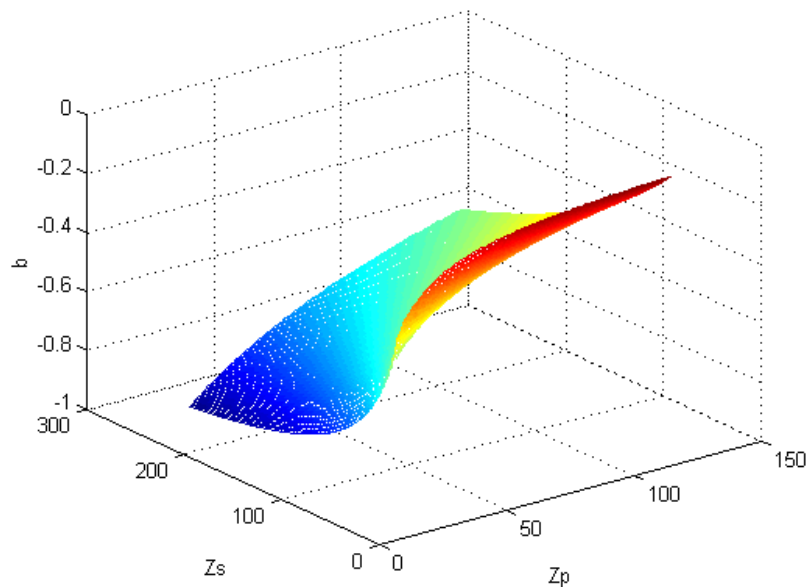


Figura 4. Variação do valor de b em função de Z_S e Z_P , sem limitar Z_A .

5. O Software TEPciclo

Para a aplicação desenvolvida neste trabalho, objetivando auxiliar o projeto de transmissões epicicloidalis com dois TEPs ligados, foi desenvolvido o *software* TEPciclo, versão Alpha 1.0. No menu do programa, encontram-se as opções para estudo de 1 TEP e 2 TEPs.

Tanto na utilização de um ou dois TEPs, pode-se fazer a síntese fornecendo o número de dentes das engrenagens ou a relação básica b e obter como resposta as Relações de Transmissão resultantes ou, fornecendo as Relações de Transmissões desejadas, obter-se as famílias de número de dentes, para a montagem escolhida ou selecionada, que resultam nas transmissões especificadas, com uma dada tolerância. Em seguida, após definido o número de dentes das engrenagens, pode-se fazer a análise de torque do conjunto estudado. Para a análise de torque, utiliza-se a metodologia aplicando-se o método de Gauss com pivoteamento total para a solução das matrizes (Ruggiero *et. al*, 1988).

5.1 Exemplo com dois TEPs ligados

Para verificação da aplicação de 2 TEPs ligados, utiliza-se um exemplo, onde $b_I = b_{II} = -0,5$ e $w_{motor} = 1.000$ rpm e o eixo de saída é fixado na solar do segundo TEP. Utilizando o *software* TEPciclo e introduzindo os dados dos valores de b e as conexões entre os dois TEPs obtêm-se, o resultado mostrado na Fig. 5.

Observa-se que a montagem em estudo é a alternativa “D” (eixo de saída fixado na solar do segundo TEP). As 6 relações de transmissão possíveis com o eixo de saída assim definido, podem ser visualizadas. Identifica-se por um “Mapa” de montagens possíveis do próprio software que a relação de transmissão do exemplo estudado é a primeira das 6 disponíveis. Trata-se portanto de um multiplicador, com Relação de Transmissão de 0,4286:1. Consequentemente a rotação do eixo de saída é 2333 rpm. Molian (1971) e Sanger (1972) contribuíram significativamente para a síntese de transmissões planetárias.

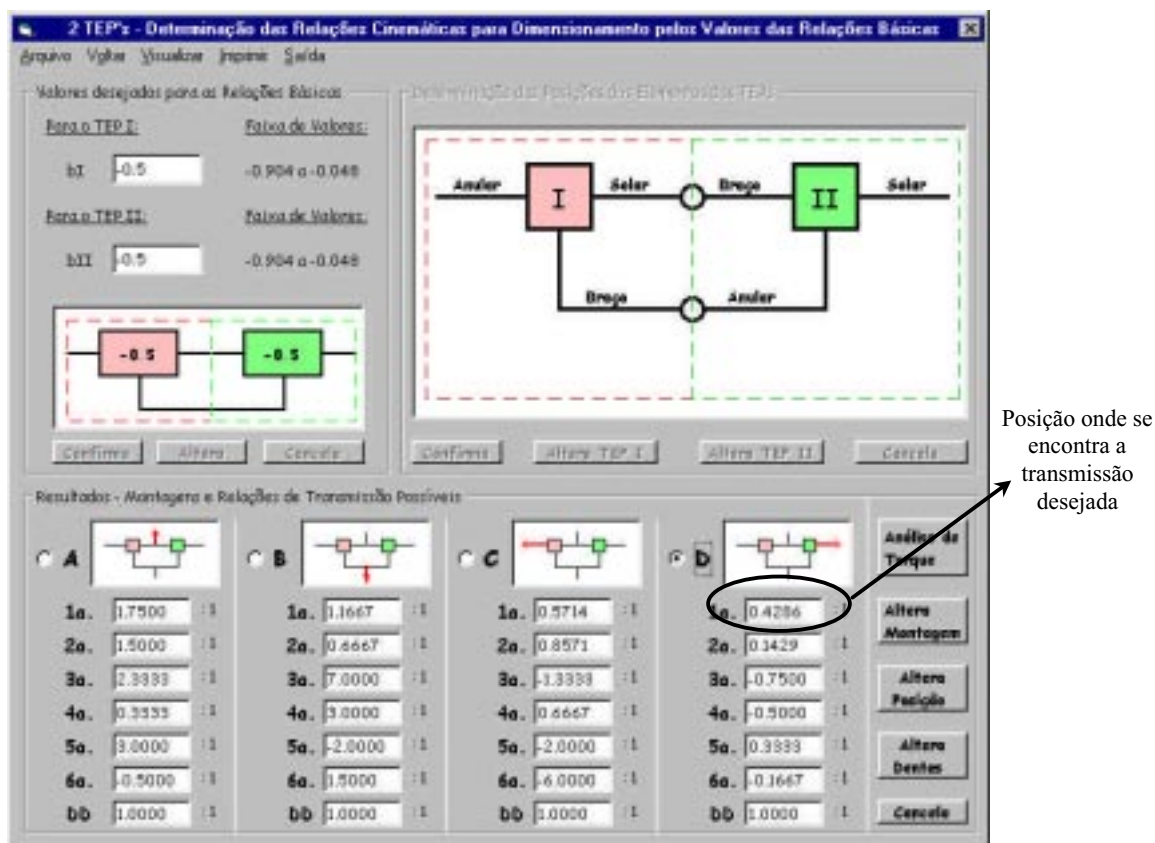


Figura 5. Tela do software TEPciclo mostrando as possíveis relações de transmissão na montagem selecionada

5.2 Exemplo de um Projeto de Transmissão Automática

Seja o exemplo de se encontrar o projeto de uma transmissão automática com as seguintes relações de transmissão (RTs): 3:1; 1,5:1; 1:1; 0,7:1 e -2,5:1 (valores próximos aos utilizados em transmissões automáticas) com uma tolerância inicial de 1%. Seja ainda colocado como restrição, que a engrenagem solar seja maior que a engrenagem planetária ($b > 0,333$) estabelecendo o valor máximo de b como 0,7 e o TEP I menor que o TEP II. Após os dados serem inseridos no programa, nenhuma solução foi encontrada para estes valores.

O passo seguinte, foi aumentar o valor da tolerância. Ao se ampliar o valor da tolerância para, por exemplo 3%, valores de relações de transmissão em uma faixa mais ampla são aceitos, aumentando-se a possibilidade de ser encontrada uma solução. O valor da tolerância para uma procura inicial não pode ser muito pequeno, pois pode não haver uma solução que comporte exatamente todas as relações de transmissão desejadas. Além disso, há o recurso, na tela de visualização do “Mapa”, de se alterar a tolerância através de uma barra de rolagem e verificar, de imediato, as soluções possíveis dentro do novo valor.

Utilizando o TEPciclo e fazendo a síntese pelos valores das relações de transmissão para 2 TEPs (com tolerância de 3%), encontrou-se o resultado mostrado na Fig. 6. Seleciona-se uma das 1249 soluções apresentadas pela posição e montagem desejada, sendo que os critérios de escolha devem partir das condições de projeto (aplicação, fabricação, montagem, transporte, custo e manutenção). As posições e montagens podem ser selecionadas em telas distintas acionadas pela barra de tarefas do software. Nestas telas, pode-se alterar tanto b_I quanto b_{II} através de barras de rolagem, identificando o comportamento, para as RTs definidas. A definição da proporção de tamanho entre os TEPs determinam a escolha de b_I e b_{II} . Para a engrenagem solar do TEP I ser maior, menor ou igual à solar do TEP II, os valores de b_I e b_{II} devem seguir a mesma proporção, em função do valor adotado para Z_A . Uma vez selecionado um valor para b_I e b_{II} , a tela apresentada na Fig. 7 permite a escolha das trincas de engrenagens. Para $b_I = -0,507$ e $b_{II} = -0,630$, obteve-se 11 opções de número de dentes para o TEP I e 12 opções para o TEP II, sendo apresentadas em ordem crescente. Assim, para se obter o conjunto mais compacto, deve-se escolher o menor número de dentes para os dois TEPs. No caso do presente exemplo, o menor número de dentes é mostrado em destaque com uma faixa azul na tela da Fig. 7 e são: $Z_{A1}=65$; $Z_{S1}=33$; $Z_{P1}=16$; $Z_{A2}=78$; $Z_{S2}=48$ e $Z_{P2}=15$. Os valores obtidos estão na Tab. 3, comparando-se com os dados iniciais do exemplo. Com os números de dentes das engrenagens assim definidos é feita, em seguida, a análise de torque, baseada no trabalho de MacMillan (1961) e Hsieh (1997).

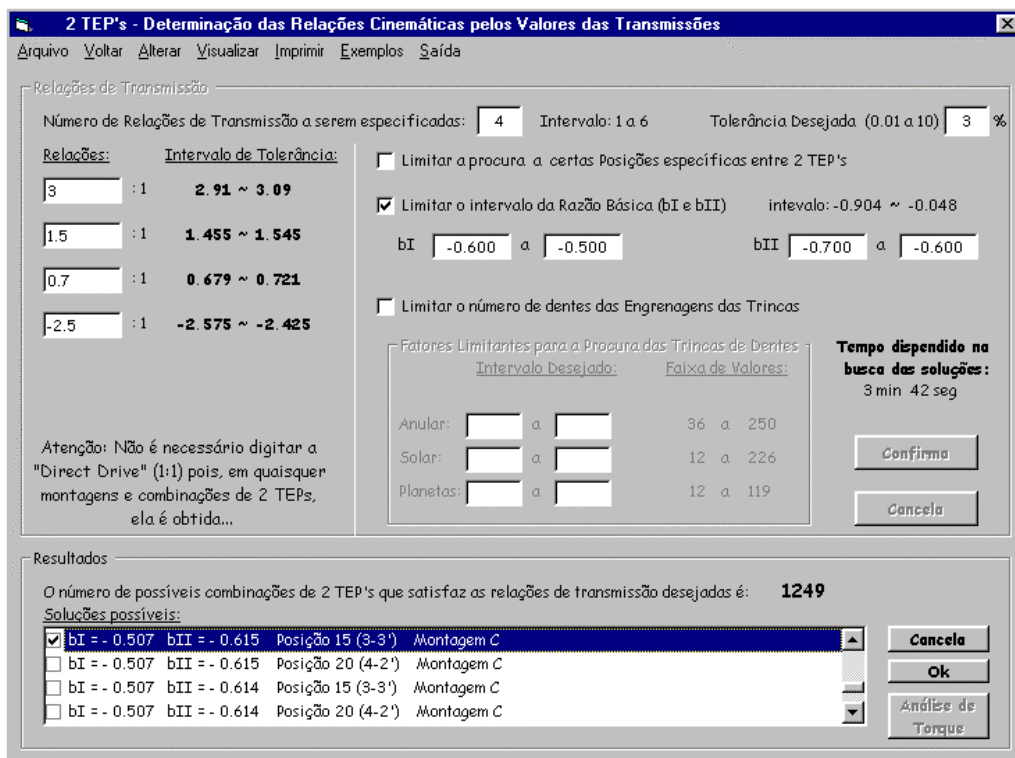


Figura 6. Resultado da busca de soluções para o exemplo do item 5.2.

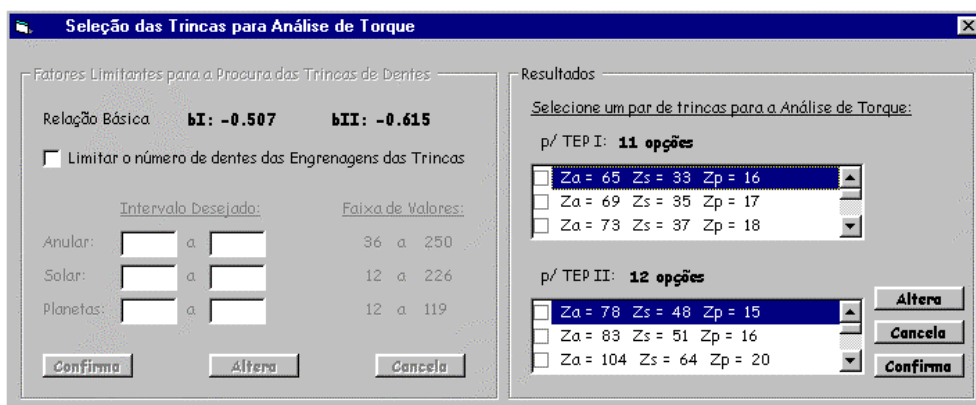


Figura 7. Seleção das trincas de dentes.

Tabela 3 – Resultados obtidos para as Relações de Transmissão (RT).

RTs procuradas	RTs encontradas	Diferença
3,000:1	2,972:1	0,93%
1,500:1	1,507:1	0,46%
0,700:1	0,710:1	1,42%
-2,500:1	-2,450:1	2,00%

Pela Tab. 3, verifica-se que duas das relações de transmissão tiveram os valores encontrados com tolerância superior a 1% do previsto inicialmente. Daí porque não houve solução quando esta tolerância foi definida. Pelo resultado, poder-se-ia restringir a tolerância em 2 % e esta solução seria encontrada. Para proceder a análise de torque, basta clicar no botão correspondente, surgindo a tela mostrada na Fig. 8, onde estão apresentados os números de dentes das engrenagens e suas respectivas relações de transmissão, para que uma delas seja selecionada.

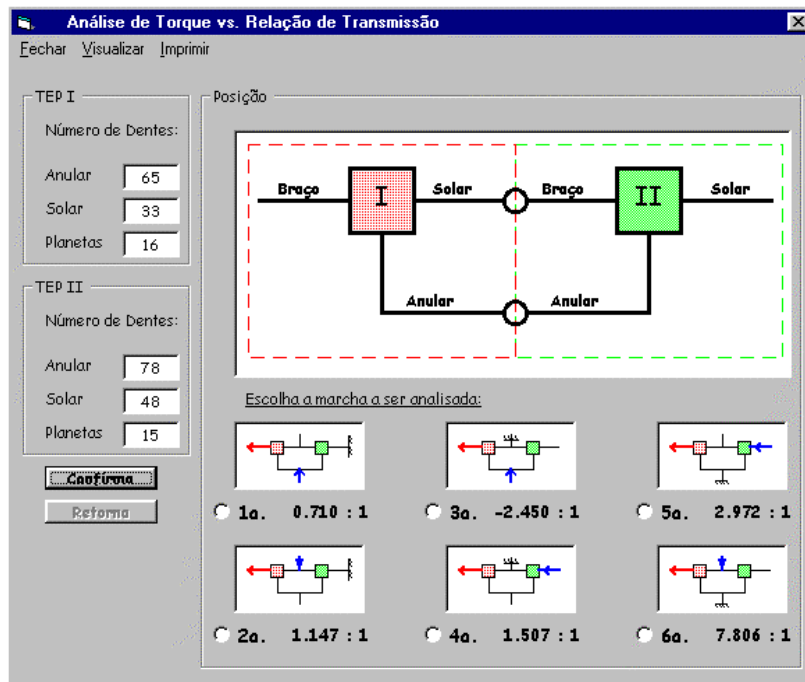


Figura 8. Tela para a análise de torque.

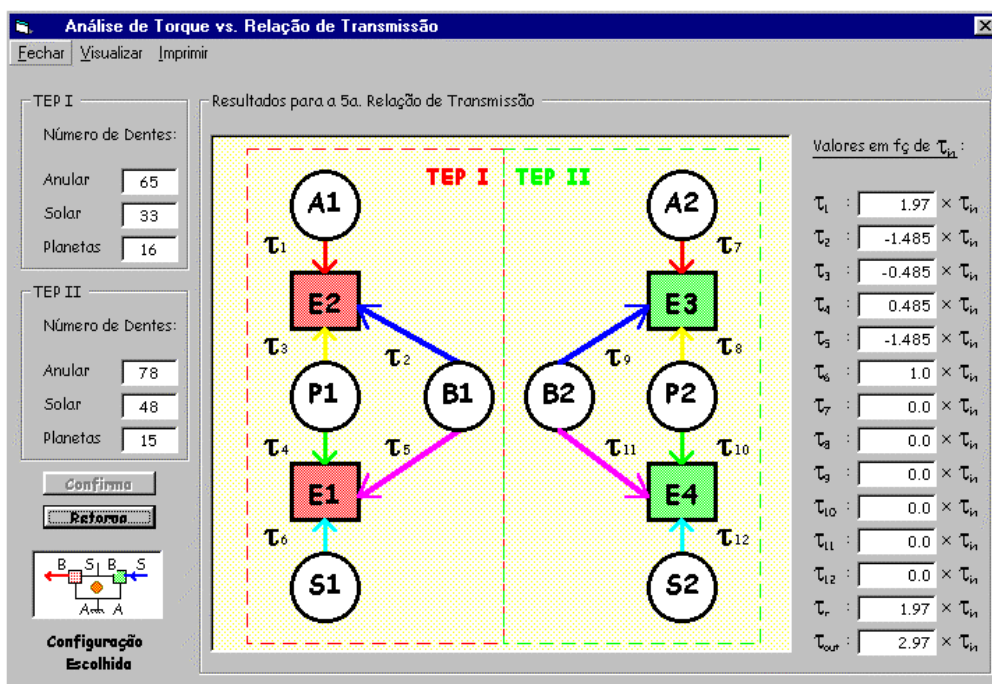


Figura 9. Análise de torque para a 5ª relação de transmissão visualizando o respectivo diagrama de torque.

Após a seleção e confirmação, o resultado pode ser visto, tanto sob a perspectiva do diagrama de torque (mostrado na Fig. 9 para 5ª RT) quanto pela visualização em forma de gráfico (mostrado na Fig. 10 para a 3ª RT). Em ambos os casos, pode-se visualizar os resultados de maneira global, onde se observam todos os valores absolutos de todos os torques atuantes para todas as relações de transmissão (Fig. 11). As relações de transmissão descartadas (das 6 RTs, utiliza-se 4, além da “direct drive”) são a 2ª e 6ª, onde ambas atuam usando como eixo de entrada, a união da solar do primeiro TEP com o braço do segundo TEP. Isso simplifica o projeto, pois elimina-se a elaboração de mais um sistema de embreagens para acionar esta entrada.

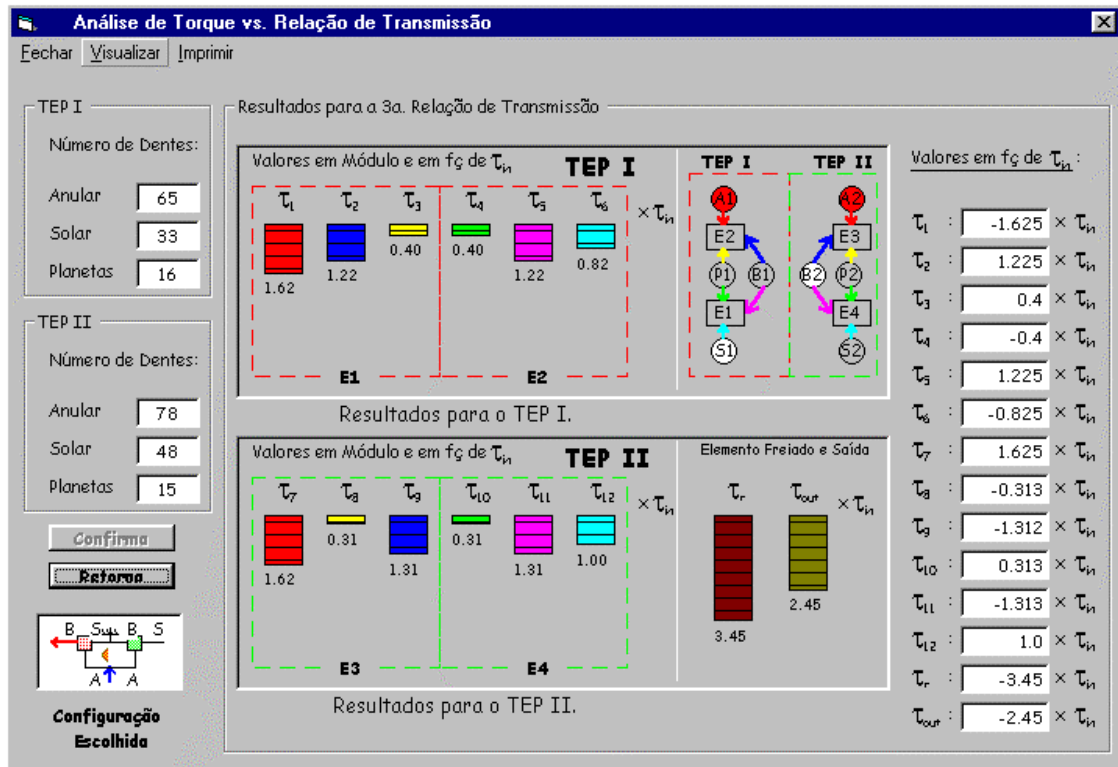


Figura 10. Análise de torque para a 3ª relação de transmissão visualizando sob forma de gráfico.

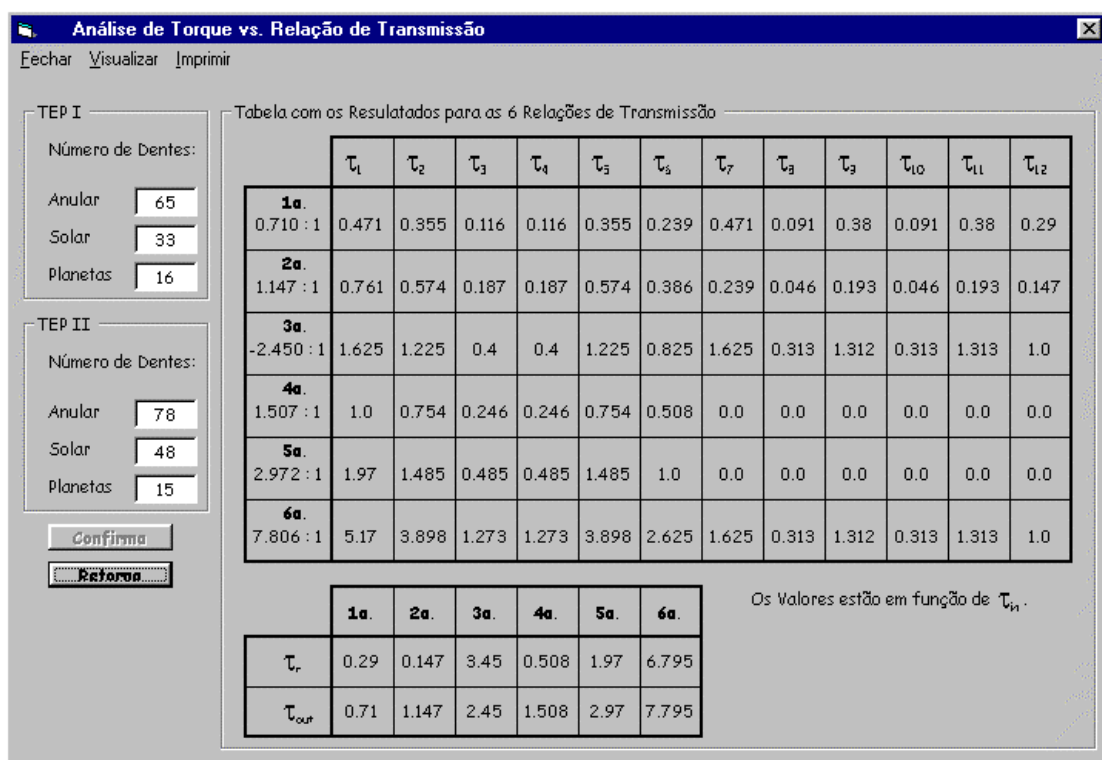


Figura 11. Valores absolutos de torque para todas as RTs, em função de τ_{in} .

6. Conclusões

Pelos resultados das aplicações de utilização do *software* TEPcicl, descritos no exemplo do item 5.2, é possível verificar que a elaboração de sistemas de transmissão de trens epicicloidais foi sistematizada e automatizada, não só para obtenção das possíveis montagens e posicionamento dos eixos como das respectivas relações cinemáticas, número de dentes e análise de torque. Com estes resultados pode-se facilmente proceder o dimensionamento do sistema estudado, em função das condições de uso e aplicações específicas a que se destina.

Os recursos disponíveis no *software* TEPcicl, permitem fornecer, não só a solução do problema colocado, mas também indicam as demais alternativas que irão satisfazer as condições iniciais. Em qualquer momento, o usuário pode recorrer à consulta dos “Mapas” de montagem e posição para avaliar as opções possíveis. Assim, o projetista pode dispor de alternativas que antes ele poderia desconhecer, ainda na fase inicial do projeto.

Há a possibilidade também de se restringir o número de dentes das engrenagens disponíveis em uma determinada planta, criando-se um banco de dados facilmente incorporado no programa. A limitação do número de dentes das engrenagens é um recurso que garante também a redução significativa do tempo de execução do *software* e permite projetos em que estas variáveis possam ser controladas. O *software* adota um amplo intervalo de número de dentes para englobar as restrições e delimitações de quaisquer aplicações.

Como forma de critério de decisão entre posições e montagens disponíveis como solução, o recurso da análise de torque contribui para a escolha mais adequada à aplicação desejada. Também o fato de se poder alterar a tolerância para se encontrar a relação ou as relações de transmissão desejadas, permite ao projetista uma gama maior de alternativas.

O *software* TEPcicl desenvolvido neste trabalho, tem características abrangentes e pode ser facilmente incorporado com bancos de dados e *softwares* de dimensionamento, utilizando o resultado final apresentado, ou utilizando seus resultados como entrada de outros programas de dimensionamento, específico para cada aplicação ou usuário. Isto segue uma tendência na área de projetos, onde os programas em ambiente *windows* estão adquirindo uma importância cada vez maior (Brito *et al.*, 1999; Charttejee e Tsai, 1995 e Amaral, 2000).

O *software* ainda dispõe de recursos adicionais para análise do comportamento de cada RT possível em cada montagem, onde verifica-se que é grande a variedade de comportamento das RTs. Pequenas alterações de b_1 e b_{11} podem resultar em significativas alterações na transmissão final. Durante o desenvolvimento do *software* foi aprimorada a forma de representação de diagrama de torque a fim de facilitar a implementação das rotinas de cálculo.

7. Perspectivas Futuras

Estando em sua primeira versão, o *software* pode evoluir em novas versões para incorporar estudos sobre os sistemas de transmissão epicicloidais onde, por exemplo, se relacionem o torque e o número de dentes com o rendimento de cada engrenamento, podendo-se comparar dentre posições e montagens previamente definidas, em quais relações de transmissão se obtém a menor perda. Este critério pode ser implementado como um método de otimização.

Também estudos sobre banco de dados para aplicações específicas, onde as soluções ficariam limitadas a disponibilidade de ferramentaria, estoque e processos de fabricação, podem ser incorporados em versões distintas do programa.

A automatização completa pode ser incorporada, com a inclusão de *softwares* específicos para se completar o dimensionamento, que pode variar de acordo com a aplicação pretendida e estabelecimento de *links* com outros *softwares* que podem simular o funcionamento do modelo obtido, em tempo real. Pode-se dar continuidade, estendendo-se o estudo para três TEPs ligados, unindo um único TEP com outros dois TEPs ligados (famílias 6 e 7 da Tab. 2).

Como o TEPcicl tem características abrangentes, novos estudos podem ser feitos nas montagens possíveis, analisando os aspectos de interferência, acessibilidade, manufatura, momento de inércia dos elementos (principalmente os ligados), compactação do conjunto, peso, carga nos mancais, materiais, etc. Um campo de estudos importante é a utilização de sistemas de transmissão epicicloidais como somador e divisor de potência, pois podem incorporar duas fontes motoras com diferentes combustíveis, (o que vem de encontro com a tendência mundial de se procurar alternativas energéticas não poluentes, associado com a autonomia do veículo) ou a incorporação de *CVTs* - *Continuously Variable Transmission* na montagem do conjunto (permitindo variações contínuas de transmissão).

8. Agradecimentos

Os autores desejam agradecer à CAPES, CNPq e à FAPEMIG.

9. Referências

- Amaral, D. e Dedini, F. G., 2000, Trenos de engrenagens epicicloidais: tipos e representação, *Anais do CONEM 2000 – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, CD-ROM.
- Amaral, D., 2000, Metodologia, sistematização e seleção de projetos de transmissões epicicloidais com um e dois TEPs ligados, *Tese de Doutorado*, Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, 180p.
- Brasil, H. V., 1988, *Máquinas de Levantamento*, Editora Guanabara S.A, Rio de Janeiro, 230 p.

- Brito, J. N., Becker, M. *et al.*, 1999, Engrena – Interface computacional aplicada al proyecto de sistemas engrenados, *Anais do Congresso de Engenharia Mecânica*, Chile.
- Buchsbaum, F., Freudenstein, F., 1970, Synthesis of kinematic structure of geared kinematic chains and other mechanisms, *Journal of Mechanisms*, vol. 5, pp. 357-392.
- Charterjee, G., Tsai, L. W., 1995, Computer - aided sketching of epicyclic-type automatic transmission gear trains, *Technical Research Report of ISR*, paper TR 95-92, 7 p.
- Dedini, F. G., 1985, Projeto e otimização de uma transmissão planetária por rolos de tração, *Dissertação de Mestrado*, UNICAMP, 150 p.
- Dubbel, H., 1944, *Manual Del Constructor de Maquinas*, 2ª Edição, Editorial Labor S.^a, Barcelona, Madri, 1951 p.
- Hsieh, H-I., 1997, Enumeration and selection of clutching sequences associate with epicyclic-type transmission mechanisms, *Tese de Doutorado*, 212 p.
- Lévai, Z., 1968, Structure and analysis of planetary gear trains, *Journal of Mechanism*, vol. 3, pp. 131-148.
- Lévai, Z., 1973, Contribution to the systematics of change speed gear boxes of planetary type, *Acta Technica Academiae Hungaricae*, tomus 75 (1-4), pp. 291-299.
- Lima, C. S., 1980, Trem de engrenagens planetários: Análise, síntese e aplicação em veículo híbrido, *Dissertação de Mestrado*, Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.
- Macmillan, R. H., 1961, Power flow and loss in differential mechanisms, *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 3, n. 37, pp. 45-53.
- Molian, S., 1971, Kinematics of compound differential mechanisms, *The Institution of Mechanical Engineers*, Proceedings 185, pp. 733-739.
- Olson, D. J., Riley, D. R., 1987, A new graph theory representation for the topological analysis of planetary gear trains, *Proceedings of the 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, vol. 3, pp. 1421-1425.
- Pires e Albuquerque, O. A. L., 1980, *Elementos de Máquinas*, Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 440 p.
- Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R., 1988, *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*, Editora McGraw Hill, São Paulo, 193 p.
- Sanger, D. J., 1972, Synthesis of multiple-speed transmissions of the planetary – gear type, *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 14, pp. 93-101.
- Shigley, J. E., 1984, *Elementos de Máquinas*, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, Rio de Janeiro, 700 p.

METHODOLOGY, SYSTEMATIZATION, AND SELECTION OF EPICYCLIC GEAR TRAINS DESIGN WITH TWO LINKED EGTs

Danilo Amaral

Federal University of Minas Gerais – School of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Av. Antônio Carlos 6627, CEP 31970-001, Belo Horizonte, MG, Brazil
e-mail: danilo@demec.ufmg.br

Marcelo Becker

Pontifical Catholic University of Minas Gerais – Polytechnic Institute, Av. Dom José Gaspar, 500, CEP 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brazil
e-mail: marcelo.becker@pucminas.br

Franco Giuseppe Dedini

State University of Campinas, School of Mechanical Engineering, Department of Mechanical Design, PO. Box 6051, CEP 13089-970, Campinas, SP, Brazil
e-mail: dedini@fem.unicamp.br

Abstract. The Epicyclic Gear Trains - EGTs (or Planetary Gear Trains - PGTs) are complex kinematic transmission systems and difficult to be understood. Therefore, they have much advantages: they are compact and light, they allow the use of high reduction/multiplication ratios, they have high reliability (due to the permanent geared), they allow division or sum of power and they have multi transmission ratios. One of their main applications is Automatic Transmission gearboxes for modern vehicles. There are a large number of possible configurations when many PGTs are linked. Due to this, the software TEPciclôwas developed to help the design of Automatic Transmissions gearboxes for light vehicles with two simple linked PGTs. The software automates the selection of assembly, position, tooth number of gears, calculates the possible transmission rates and the torque flow.

Keywords. Planetary Gear Train, Epicyclic Gear Train, Automatic Transmission, Torque Flow, Mechanical Design.

FORMULAÇÕES MISTAS PARA ELASTOPLASTICIDADE

Cyntia Gonçalves da Costa

Lavinia Alves Borges

Nestor Zouain

Laboratório de Mecânica dos Sólidos Computacional
Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEM/COPPE
Caixa Postal 68503, CEP: 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
e-mail: cyntia@ufrj.br, lavinia@ufrj.br, nestor@serv.com.ufrj.br

Resumo. O objetivo deste trabalho é propor formulações variacionais mistas para problemas de termo-elasticidade e análise limite. Estas formulações mistas são descritas em função dos campos de tensões e deslocamentos, ou velocidades. Os elementos finitos propostos são baseados na interpolação descontínua dos campos de tensões e interpolação contínua dos campos de deslocamentos e velocidades. Os elementos mistos são apropriados para enfrentar o fenômeno de “locking” que ocorre em alguns modelos para análise elastoplástica de corpos constituídos de materiais que obedecem ao critério de Von Mises ou Tresca e em elasticidade de materiais incompressíveis. Para mostrar a viabilidade do método duas aplicações numéricas são apresentadas.

Palavras chaves: formulações mistas, termo-elasticidade, análise limite, elementos finitos.

1. Introdução

O principal objetivo deste trabalho é propor formulações variacionais mistas e elementos finitos mistos para problemas de termo-elasticidade e análise limite. A contribuição para as formulações contínuas não reside na proposição dos princípios, mas sim na forma como são deduzidos. A mesma estratégia de dedução dos princípios mistos de análise limite, apresentada por Borges L. *et al* (1989), será aplicada para a dedução dos princípios mistos para termo-elasticidade. Esta unicidade de tratamento dos modelos permite uma análise mais sistemática das aproximações e das diferenças envolvidas nos diversos problemas estudados.

As formulações mistas aparecem como uma alternativa ao método de integração reduzida para enfrentar o fenômeno de “locking” que ocorre em alguns modelos na análise elastoplástica em corpos constituídos de materiais que obedecem ao critério de Von Mises ou Tresca e em elasticidade de materiais incompressíveis. Nas aplicações onde há presença da incompressibilidade, seja na plasticidade ou na elasticidade, uma escolha inadequada das funções de interpolação pode levar a falência do método de elementos finitos, devido as características de “locking” do modelo. Muitos autores (Zienkiewicz, 1991) discutem a importância do “locking” em plasticidade. Neste trabalho não será discutido este aspecto em detalhe, mas é válido comentar que esta é a maior motivação para escolher a formulação mista e para a utilização dos elementos finitos propostos.

Tanto para termo-elasticidade como para análise limite, serão utilizados elementos triangulares com seis nós para interpolação quadrática com continuidade C^0 para aproximação da geometria e do campo de velocidades ou de deslocamentos. Quanto a interpolação das tensões, dois tipos de interpolações são adotadas. Para estado plano de tensão são adotadas interpolações lineares e descontínuas para as componentes totais de tensão. Para modelos de estado plano de deformação as componentes desviadoras do tensor de tensões são aproximadas por funções lineares e descontínuas, entretanto a tensão média é interpolada constante em cada elemento. Estes elementos, aqui propostos para aplicação na termo-elasticidade, vêm sendo utilizados com frequência em análise limite (Huespe A., 1990, Silveira, J.L., 1991, Santiago F., 1993 e Guerhard J.O., 1996). Destaca-se que independente da formulação contínua primitiva, cinemática ou mista, a estrutura matemática final dos modelos discretos mistos e cinemáticos é exatamente a mesma.

A primeira parte do trabalho consiste na definição dos conceitos físicos e mecânicos necessários para a caracterização matemática dos fenômenos a serem descritos. A partir desta caracterização são deduzidos os princípios variacionais que descrevem os fenômenos, propostos na forma de problemas de otimização do tipo *min-max*. Ao final são apresentados os modelos discretos e duas aplicações numéricas.

2. Princípios gerais

Nesta seção serão apresentados os conceitos e hipóteses utilizados na definição dos princípios gerais que governam o comportamento de corpos, constituídos de material elástico idealmente plástico, quando submetidos a programas de carregamento quasi-estático.

O princípios gerais fundamentam o modelo utilizado na descrição do comportamento mecânico e físico dos corpos que sofrem processos de deformação. Por comportamento mecânico se entende a definição das hipóteses

cinemáticas e de esforços atuantes no corpo. O comportamento físico é caracterizado pelas relações constitutivas entre as variáveis pertinentes para a descrição do fenômeno. Na termo-elasticidade define-se a relação entre o campo de deformações \mathbf{E} e o campo de tensões \mathbf{T} . Para descrever a situação de colapso incipiente, característica do modelo de análise limite, a relação constitutiva de interesse descreve a relação entre o campo de taxas de deformações plásticas \mathbf{D}^p e o campo de tensões de colapso \mathbf{T} .

2.1. Cinemática e equilíbrio

Considere um corpo ocupando, no instante t , a região \mathcal{B} do espaço Euclidiano \mathcal{E}^3 limitada pelo contorno regular Γ . Seja V o espaço de funções de todos os campos de deslocamento cinematicamente admissíveis, suficientemente regulares, satisfazendo na parte Γ_u do contorno prescrições de deslocamento não necessariamente homogêneas. O campo de velocidades virtuais cinematicamente admissíveis é denominado V^0 e satisfaz em Γ_u condições de contorno homogêneas, com regularidade compatível com a definição do modelo.

As deformações \mathbf{E} , são elementos do espaço funcional das deformações suficientemente regulares W , sendo ditas compatíveis se estão associadas, através do operador de deformação \mathcal{D} , a um campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis. Da mesma forma, as taxas de deformações compatíveis \mathbf{D} , estão associadas a um campo de velocidades cinematicamente admissíveis através do operador tangente de deformação, ou seja

$$\mathbf{E} = \mathcal{D} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \mathcal{D}_t \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V^0 \quad (1)$$

Para modelos de deformações infinitesimais o operador de deformações \mathcal{D} coincide com operador tangente de deformações \mathcal{D}_t . O espaço dos campos de tensões \mathbf{T} é dual a W , sendo denominado W' . O produto de dualidade entre W' e W é definido como

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, d\mathcal{B} \quad (2)$$

O carregamento externo, elemento do espaço dual de V , é caracterizado pela forma linear

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{B} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (3)$$

onde \mathbf{b} e \mathbf{a} são os carregamentos de corpo e de superfície, respectivamente. A superfície Γ_τ é a região de Γ onde as trações são prescritas ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_\tau$ é vazio). Um campo de tensões está em equilíbrio com o carregamento externo se o princípio das potências virtuais é verificado, ou seja

$$\langle \mathbf{T}, \mathcal{D}\mathbf{v} \rangle = \langle \eta \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V^0 \quad (4)$$

Esta condição de equilíbrio pode ser expressa compactamente pela forma $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\eta \mathbf{F})$, onde o parâmetro $\eta \in \mathbb{R}^+$ caracteriza uma família de carregamentos proporcionais a \mathbf{F} . O caso particular $\eta = 1$ representa o carregamento de referência.

2.2. Relações constitutivas

Seja θ_0 a distribuição de temperatura em um corpo livre de tensões e θ a distribuição de temperatura em um instante subsequente. Se a diferença $\Theta = \theta - \theta_0$ for pequena se comparada com θ_0 , as propriedades elásticas e a densidade do material podem ser consideradas constantes ao longo do processo de aquecimento.

Nestas condições, as leis de estado para um material termo-elástico podem ser derivadas a partir da definição de um potencial termodinâmico Ψ , quadrático e positivo definido, dependente apenas da deformação \mathbf{E} e da diferença de temperatura Θ . Da mesma forma, a lei de estado inversa pode ser obtida a partir do potencial complementar Ψ^c , dependente das tensões \mathbf{T} e da diferença de temperatura Θ e obtido pela transformação de Legendre-Fenchel de Ψ (Panagiotopoulos, 1985). Para um material linear e isotrópico, Ψ e Ψ^c são dados por (Lemaitre, J. e Chaboche, J., 1994):

$$\Psi(\mathbf{E}, \Theta) = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{ID} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{E}{(1-2\nu)} \text{tr}(\mathbf{E}) \alpha \Theta - \frac{C_\epsilon}{2\theta_0} \Theta^2 \right\} d\mathcal{B} \quad (5)$$

$$\Psi^c(\mathbf{T}, \Theta) = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{ID}^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \alpha \Theta \text{tr}(\mathbf{T}) + \left(\frac{3E}{(1-2\nu)} \alpha^2 + \frac{C_\epsilon}{\theta_0} \right) \frac{\Theta^2}{2} \right\} d\mathcal{B} \quad (6)$$

onde

$$\mathbf{ID} = \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{II} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad \text{e} \quad \mathbf{ID}^{-1} = \frac{(1+\nu)}{E} \mathbf{II} - \frac{\nu}{E} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (7)$$

sendo \mathbf{II} e \mathbf{I} os tensores identidade de quarta e segunda ordem, respectivamente. As propriedades elásticas utilizadas são o módulo de elasticidade de Young E , o coeficiente de Poisson ν , o coeficiente de dilatação térmica α e o calor específico a deformação constante C_ϵ . Estes parâmetros elásticos são considerados constantes para pequenas variações de temperatura ($\Theta/\theta_0 \ll 1$).

As leis de estado, derivadas a partir destes potenciais, permitem escrever as relações constitutivas para a termo-elasticidade linear na forma

$$\mathbf{T} \in \nabla_{\mathbf{E}}\Psi(\mathbf{E}, \Theta) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} \in \nabla_{\mathbf{T}}\Psi^c(\mathbf{T}, \Theta) \quad (8)$$

onde $\nabla_{\mathbf{E}}$ e $\nabla_{\mathbf{T}}$ representam os gradientes em relação a \mathbf{E} e \mathbf{T} , respectivamente. Baseados em (5), (6) e (8), podemos escrever as relações constitutivas para a termo-elasticidade na forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{ID} \mathbf{E} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha \Theta \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{ID}^{-1} \mathbf{T} + \alpha \Theta \mathbf{I} \quad (9)$$

A termo-elasticidade, assim como foi formulada, permite o cálculo de tensões e deformações devido ao efeito das variações de temperatura, apenas nos casos em que o campo de temperaturas é conhecido. Para um tratamento completo do problema, em casos onde o fluxo é dado, e não a temperatura, é necessário se utilizar preliminarmente a lei de Fourier e as equações de balanço de energia para determinação do campo de temperatura. Este desacoplamento do modelo de termo-elasticidade é válido para processos lentos com pequenas variações de temperatura (Lemaitre, J. e Chaboche, J., 1994).

Para modelar processos irreversíveis, além das variáveis de estado, é necessário definir variáveis internas que determinem a modificação no estado interno devido ao desenvolvimento de processos dissipativos, ou seja, definem a evolução do processo.

Nos materiais elásticos idealmente plásticos, em processos de deformação quasi-estáticos, a variável interna que representa a evolução do processo é o tensor de deformação plástica \mathbf{D}^P . Da mesma forma que anteriormente o potencial Ψ define as relações entre as variáveis de estado e suas duais. Para definir as relações entre as taxas de variáveis internas e suas duais é necessário definir uma lei de evolução para a variável interna.

Para estabelecer a lei de evolução supõe-se que o material é estável e, portanto, obedece ao princípio de dissipação máxima. Logo, existe um potencial dissipação $\mathcal{X}(\mathbf{D}^P)$, expresso como uma função positiva de valor escalar, semi-contínua inferiormente e convexa com respeito à taxa de deformação plástica \mathbf{D}^P .

Nos modelos de plasticidade instantânea, onde o tempo intervém apenas para definir a seqüência de eventos, existe um conjunto P que define o espaço das tensões plasticamente admissíveis. Somente na fronteira de P estão associadas taxas de deformação plástica não nulas. Nas aplicações práticas, este conjunto é definido como

$$P = \{\mathbf{T} \in W' \mid \mathbf{f}(\mathbf{T}) \leq \mathbf{0}\} \quad (10)$$

onde \mathbf{f} é uma função m -vetorial, sendo cada componente \mathbf{f}_j uma função regular e convexa com respeito a \mathbf{T} . A função dissipação $\mathcal{X}(\mathbf{D}^P)$ é a função suporte deste conjunto P , ou seja

$$\mathcal{X}(\mathbf{D}^P) = \sup_{\mathbf{T}^* \in P} \langle \mathbf{T}, \mathbf{D}^P \rangle \quad (11)$$

O potencial conjugado de $\mathcal{X}(\mathbf{D}^P)$, obtido pela transformação de Legendre-Fenchel, coincide com a função indicatriz de P , $Ind_P(\mathbf{T})$, que vale zero para $\mathbf{T} \in P$ e ∞ para $\mathbf{T} \notin P$ (Panagiotopoulos, 1985).

A lei de evolução é expressa através de uma condição de normalidade, o que significa dizer que, no processo plástico real, as tensões plasticamente admissíveis e as taxas de deformações plástica admissíveis estão associadas pela relação constitutiva (Christiansen, 1996; Kamenjarzh, 1996 e Borges *et al*, 1989)

$$\mathbf{T} \in \partial\mathcal{X}(\mathbf{D}^P) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{D}^P \in \partial Ind_P(\mathbf{T}) \quad (12)$$

onde $\partial\mathcal{X}(\mathbf{D}^P)$ significa o conjunto subdiferencial de $\mathcal{X}(\mathbf{D}^P)$ (Panagiotopoulos, 1985). A lei de escoamento enunciada pela segunda parte de (12) só tem interesse para $\mathbf{T} \in P$, conseqüentemente o conjunto do subdiferencial $\partial Ind_P(\mathbf{T})$ coincide com o cone das normais a P em \mathbf{T} , denominado $\mathcal{C}_P(\mathbf{T})$, e definido por

$$\mathcal{C}_P(\mathbf{T}) = \{\mathbf{D}^P \in W \mid \langle (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}), \mathbf{D}^P \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{T}^* \in P\} \quad (13)$$

3. Princípios variacionais cinemático e mistos

O objetivo desta seção é a proposição de princípios variacionais para descrever problemas em termo-elasticidade e análise limite. As condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática experimentadas pelos corpos durante um processo de deformação, aliadas às relações constitutivas, permitem descrever os problemas através de um sistema de equações e inequações. Será mostrado que os campos solução deste sistema são também solução de princípios variacionais que enunciam os problemas primitivos através de princípios de ótimo.

3.1. Termo-elasticidade

O problema de termo-elasticidade consiste na determinação dos campos de tensões e deformações que ocorrem em um corpo quando submetido ao sistema de cargas \mathbf{F} , um gradiente de temperatura Θ e prescrições de deslocamento não necessariamente homogêneas. Do ponto de vista matemático este problema consiste na obtenção de um campo de tensões $\mathbf{T} \in W'$, um campo de deformações $\mathbf{E} \in W$ e um campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in V$, tal que o seguinte sistema de equações seja satisfeito

$$\mathbf{E} = \mathcal{D} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (14)$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathcal{D}_t \mathbf{v}^* \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle \quad \forall \mathbf{v}^* \in V^0 \quad (15)$$

$$\mathbf{T} \in \nabla_{\mathbf{E}} \Psi(\mathbf{E}, \Theta) \iff \mathbf{E} \in \nabla_{\mathbf{T}} \Psi^c(\mathbf{T}, \Theta) \quad (16)$$

Lembrando que, para um contínuo tridimensional, com a hipótese de deformações infinitesimais, os operadores \mathcal{D} e \mathcal{D}_t coincidem com a parte simétrica do gradiente e os potenciais Ψ e Ψ^c são dados por (5) e (6), respectivamente.

Mostra-se a seguir que a solução deste sistema é equivalente a solução de dois princípios variacionais duais. O princípio cinemático, denominado princípio da mínima energia potencial, definido em função dos campos de deslocamentos e temperatura e o princípio misto de Hellinger-Reissner, definido em função dos campos de deslocamentos, tensões e temperatura.

Formulação cinemática

Um campo \mathbf{T} solução deste sistema está associado ao campo de deformações através da relação constitutiva (16). Assim pela definição de gradiente (Panagiotopoulos, 1985) tem-se

$$\Psi(\mathbf{E}^*, \Theta) - \Psi(\mathbf{E}, \Theta) \geq \langle \mathbf{T}, \mathbf{E}^* - \mathbf{E} \rangle \quad \forall \mathbf{E}^* \in W \quad (17)$$

Considerando em (17) a condição cinemática (14) e a condição de equilíbrio (15), com Ψ definido em (5), obtém-se o clássico **Princípio da Mínima Energia Potencial** (Zienkiewicz, O. *et al.*, 1991 e Lemaitre, J. *et al.*, 1994).

Encontrar $\mathbf{u} \in V$, tal que

$$\hat{\Pi}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}^* \in V^0} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{ID} \nabla^s \mathbf{u}^*, \nabla^s \mathbf{u}^* \rangle - \left\langle \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} \text{div}(\mathbf{u}^*), \Theta \right\rangle - \left\langle \left[\mathbf{ID} \nabla^s \mathbf{u}^* - \frac{E\alpha\Theta}{(1-2\nu)} \mathbf{I} \right] \mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} \right\rangle_{\Gamma_u} - \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}^* \rangle \right] \quad (18)$$

onde a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_u}$ representa a integral na parte do contorno Γ_u onde o deslocamento é prescrito e $\text{div}(\cdot)$ é o operador divergente.

Formulação Mista

Para estabelecer o princípio misto, considera-se a energia de deformação complementar, lembrando que pela definição de potencial conjugado (Panagiotopoulos, 1985)

$$\Psi(\mathbf{E}, \Theta) = \sup_{\mathbf{T}^* \in W'} [\langle \mathbf{T}^*, \mathbf{E} \rangle - \Psi^c(\mathbf{T}^*, \Theta)] \quad (19)$$

Pela substituição de (5) e (6) em (19) e posteriormente, substituindo (19) em (28), deduz-se o princípio misto em dois campos denominado classicamente como **Princípio de Hellinger-Reissner** e que propõe

Encontrar $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{T} \in W'$ tais que

$$\hat{\Pi}^{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = \inf_{\mathbf{u}^* \in V^0} \sup_{\mathbf{T}^{**} \in W'} \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{T}^{**}, \mathbf{ID}^{-1} \mathbf{T}^{**} \rangle + \langle \mathbf{T}^{**}, \nabla^s \mathbf{u}^* \rangle - \langle \alpha \Theta, \text{tr}(\mathbf{T}^{**}) \rangle - \langle \mathbf{T}^{**} \mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_u} - \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}^* \rangle \right] \quad (20)$$

Os princípios mistos são particularmente importantes para aplicações em problemas onde o fenômeno de trancamento ("locking") é passível de ocorrer. Por exemplo, em elasticidade este fenômeno pode se manifestar quando se utiliza materiais incompressíveis, quando se trabalha problemas com simetria de revolução ou estado plano de deformação (Belytschko, 2000). Para estes problemas os princípios variacionais mais convenientes são os descritos em função das componentes de tensão desviadora e média.

Decompondo o tensor de tensões na sua parte média e desviadora, com $\mathbf{T} = \mathbf{T}^d + \sigma_m \mathbf{I}$, a partir de (20), obtém-se o princípio misto em função do deslocamento, da tensão desviadora \mathbf{T}^d e da tensão média $\sigma_m = \text{tr} \mathbf{T} / 3$

$$\hat{\Pi}^{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{T}^d, \sigma_m) = \inf_{\mathbf{u}^* \in V^0} \sup_{\substack{\mathbf{T}^{d**} \in W' \\ \sigma_m^{**} \in \mathbf{R}}} \left[-\frac{1}{2} \left\langle \frac{(1+\nu)}{E} \mathbf{T}^{d**}, \mathbf{T}^{d**} \right\rangle - \left\langle \frac{3(1-2\nu)}{2E} (\sigma_m^{**})^2 \right\rangle + \langle \mathbf{T}^{d**}, (\nabla^s \mathbf{u}^*)^d \rangle \right. \\ \left. + \langle \sigma_m^{**}, \text{div}(\mathbf{u}^*) \rangle - \langle 3\alpha \Theta, \sigma_m^{**} \rangle - \langle \mathbf{T}^{d**} \mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_u} - \langle \sigma_m^{**} \mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Gamma_u} - \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}^* \rangle \right] \quad (21)$$

3.2. Análise limite

Quando se considera um programa de carga proporcional a uma configuração de referência, a análise limite consiste em determinar o fator de carga $\eta \in \mathbb{R}$ que, amplificando uniformemente a carga de referência \mathbf{F} atuante em um corpo, provoca neste corpo, o início do fenômeno de colapso plástico. Um sistema de forças produz colapso plástico se existe um campo de tensões plasticamente admissível em equilíbrio com este sistema de cargas e está relacionado, através das relações constitutivas, com um campo de taxas de deformação cinematicamente admissíveis (Christiansen, 1996; Kamenjarzh, 1996; Borges *et al.*, 1995; Zouain *et al.*, 1993 e Borges *et al.*, 1989). Portanto o problema de análise limite consiste em determinar $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{T} \in W'$, $\mathbf{D}^p \in W$ e $\mathbf{v} \in V^0$ tal que

$$\mathbf{D}^p = \mathcal{D}_t \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \in V^0 \quad (22)$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathcal{D}_t \mathbf{v}^* \rangle = \langle \eta \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle \quad \forall \mathbf{v}^* \in V^0 \quad (23)$$

$$\mathbf{T} \in P \quad (24)$$

$$\mathbf{T} \in \partial \mathcal{X}(\mathbf{D}^p) \iff \mathbf{D}^p \in C_p(\mathbf{T}) \quad (25)$$

Da mesma forma que na termo-elasticidade, a partir da caracterização matemática do problema, definida pelo sistema de equações (22-25), pode-se estabelecer os princípios de ótimo da análise limite (Borges *et al.*, 1989)

Formulação Cinemática

O modelo cinemático da análise limite consiste em encontrar um campo de taxas de deformação cinematicamente admissível e compatível, relacionado pela lei de fluxo (25) a uma campo de tensões plasticamente admissíveis, ou seja

$$\mathbf{T} \in \partial \mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}) \iff \mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}^*) - \mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}) \geq \langle \mathbf{T}, (\mathcal{D}_t \mathbf{v}^* - \mathcal{D}_t \mathbf{v}) \rangle \quad (26)$$

mas, de acordo com (11), as tensões de colapso e taxas de deformação plástica estão associadas por $\langle \mathbf{T}, \mathbf{D}^p \rangle = \mathcal{X}(\mathbf{D}^p)$. Conseqüentemente, $\mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}^*) \geq \langle \mathbf{T}, \mathcal{D}_t \mathbf{v}^* \rangle$. Por outro lado, por (23), considerando que as tensões de colapso são equilibradas, temos que

$$\mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}^*) \geq \eta \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle \quad \forall \mathbf{v}^* \in V^0 \quad (27)$$

Como a potência externa é positiva e a função dissipação é homogênea de primeiro grau, obtém-se a partir de (27) a formulação cinemática da análise limite

$$\eta = \inf_{\mathbf{v}^* \in V^0} \mathcal{X}(\mathcal{D}_t \mathbf{v}^*) \quad \Bigg| \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle = 1 \quad (28)$$

Formulação Mista

Na formulação mista da análise limite o problema é formulado como um problema de otimização onde o cálculo exato da dissipação plástica é relaxado. Esta formulação é obtida pela substituição da função dissipação (11) na formulação cinemática (28), resultando em

$$\eta^M = \inf_{\mathbf{v}^* \in V^0} \sup_{\mathbf{T}^{**} \in W'} \langle \mathbf{T}^{**}, \mathcal{D}_t \mathbf{v}^* \rangle \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle = 1 \\ \mathbf{T}^{**} \in P \end{array} \quad (29)$$

Na análise limite a decomposição do tensor de tensões na suas componentes média e desviadora tem interesse para os casos em que o conjunto P é ilimitado, como acontece quando se adota o critério de plasticidade de Mises ou Tresca em problemas tridimensionais, para estado plano de deformação ou com simetria de revolução. Nestes casos a plastificação do material independe da componente média da tensão, assim o princípio misto (29) só terá valor finito se for imposta a condição adicional que $div(\mathbf{v}) = 0$.

$$\eta^M = \inf_{\mathbf{v}^* \in V^0} \sup_{\mathbf{T}^{d**} \in W'} \langle \mathbf{T}^{d**}, (\mathcal{D}_t \mathbf{v}^*)_d \rangle \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}^* \rangle = 1 \\ \mathbf{T}^{d**} \in P \\ div(\mathbf{v}^*) = 0 \end{array} \quad (30)$$

4. Modelos discretos para as formulações mistas

Nesta seção serão apresentados os modelos discretos para os princípios mistos descritos na seção anterior, baseados em discretizações espaciais geradas pelo método do elementos finitos.

Por simplicidade, para o modelo discreto serão considerados apenas condições de contorno homogêneas para os deslocamentos e, daqui por diante, será utilizado o acento circunflexo acima das variáveis para distinguir os parâmetros do modelo contínuo dos parâmetros discretos equivalentes.

4.1. Princípio de Hellinger-Reissner em dois campos para estado plano de tensão

Para o modelo de estado plano de tensão os campos envolvidos no modelo discreto são definidos por

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y]^T, \quad \mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_{xy}]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = [E_x \quad E_y \quad E_{xy}]^T \quad (31)$$

Nesta base de representação a identidade é definida como $\mathbf{I} = [1 \ 1 \ 0]^T$ e o operador de deformação por

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (32)$$

As interpolações dos deslocamentos e tensões são definidas para cada elemento e como

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e, \quad \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_T(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \quad \text{e} \quad \hat{\Theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\theta(\mathbf{x}) \Theta^e \quad (33)$$

onde $\mathbf{N}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_T(\mathbf{x})$ são, respectivamente, as matrizes das funções de forma Lagrangeana quadrática e linear. Para a interpolação do campo de temperaturas também são utilizadas em $\mathbf{N}_\theta(\mathbf{x})$ as funções de forma quadráticas e contínuas. Os vetores \mathbf{u}^e , \mathbf{T}^e e Θ^e são os parâmetros de interpolação para o elemento e . Substituindo estas aproximações no princípio misto (20) obtém-se a forma discreta deste princípio.

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^q$ tal que

$$\Pi^{HR}(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}^* \in \mathbf{R}^n} \max_{\mathbf{T}^{**} \in \mathbf{R}^q} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{ID}^{-1} \mathbf{T}^{**} \cdot \mathbf{T}^{**} + \mathbf{T}^{**} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}^* - \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* - \mathbf{T}^{**} \cdot \mathbf{\Omega} \right] \quad (34)$$

onde n é o número de graus de liberdades de deslocamentos, supondo que já foram impostos as restrições cinemáticas necessárias para eliminação dos movimentos de corpo rígido. A variável q representa o número total de parâmetros de tensão, que para estado plano de tensão é igual a nove vezes o número de elementos, pois considera-se as tensões interpoladas descontínuas entre elementos. Os vetores \mathbf{T} e \mathbf{u} contêm, respectivamente, os parâmetros globais de tensão e deslocamentos convenientemente montados. As matrizes \mathbf{ID}^{-1} , \mathbf{B} e os vetores \mathbf{F} e $\mathbf{\Omega}$ são montagens adequadas das contribuições elementares de

$$\mathbf{ID}^{-1e} = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_T^T \widehat{\mathbf{ID}}^{-1} \mathbf{N}_T d\mathcal{B} \quad \mathbf{B}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_T^T \mathcal{D} \mathbf{N}_u d\mathcal{B} \quad (35)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\mathcal{B} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{N}_u^T \mathbf{a} d\Gamma_\tau \quad \mathbf{\Omega}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \alpha \mathbf{N}_T^T \mathbf{I} \mathbf{N}_\theta \Theta^e d\mathcal{B} \quad (36)$$

com $\widehat{\mathbf{ID}}^{-1}$ dada por (7). Na montagem é imposta a continuidade adequada à cada um dos campos discretos, isto é, impõe-se continuidade para os deslocamentos e temperaturas e para as tensões permite-se a descontinuidade entre elementos.

Calculando as primeira variação em (34), conclui-se que a solução deste problema de *min-max* é equivalente à solução do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \mathbf{ID}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{\Omega} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{T} - \mathbf{F} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

4.2. Princípio de Hellinger-Reissner em três campos para estado plano de deformação

Para discretizar o modelo de estado plano de deformação os campos utilizados são

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y]^T, \quad \mathbf{T}^d = [T_x^d \quad T_y^d \quad T_z^d \quad \sqrt{2} T_{xy}^d]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{E}^d = [E_x^d \quad E_y^d \quad E_z^d \quad E_{xy}^d / \sqrt{2}]^T \quad (38)$$

Para o estado plano de deformação, os operadores de deformação desviador e o divergente podem ser escritos como

$$\mathcal{D}^d = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{div} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathcal{D}_m \mathbf{u} \quad (39)$$

e o operador identidade é definido como $\mathbf{I} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$. Em cada elemento e , as interpolações dos campos de deslocamentos, tensão média, tensão desviadora e temperatura são feitas independentemente e definidas como

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e \quad , \quad \hat{\mathbf{T}}^d(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_T(\mathbf{x}) \mathbf{T}^{d^e} \quad , \quad \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}) = \sigma_m^e \quad \text{e} \quad \hat{\Theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\theta(\mathbf{x}) \Theta^e \quad (40)$$

onde $\mathbf{N}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{N}_\theta(\mathbf{x})$ são definidos como no modelo em dois campos. Deve-se observar que a componente média das tensões é interpolada constante por elemento. Substituindo estas aproximações na formulação contínua (21) o problema pode ser enunciado como

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}^d \in \mathbb{R}^q$ e $\mathbf{T}_m \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \Pi^{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{T}^d, \mathbf{T}_m) = \min_{\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n} \max_{\substack{\mathbf{T}^{d^{**}} \in \mathbb{R}^q \\ \mathbf{T}_m^{**} \in \mathbb{R}^m}} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{ID}_d^{-1} \mathbf{T}^{d^{**}} \cdot \mathbf{T}^{d^{**}} - \frac{1}{2} \mathbf{ID}_m^{-1} \mathbf{T}_m^{**} \cdot \mathbf{T}_m^{**} + \mathbf{T}^{d^{**}} \cdot \mathbf{B}_d \mathbf{u}^* \right. \\ \left. + \mathbf{T}_m^{**} \cdot \mathbf{B}_m \mathbf{u}^* - \bar{\Omega} \cdot \mathbf{T}_m^{**} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Aqui, o parâmetro q é igual a quatro vezes o número de elementos, pois considera-se as tensões desviadoras interpoladas descontínuas entre elementos. O vetor \mathbf{T}_m contém as tensões médias dos elementos, consecutivamente a dimensão m coincide com o número de elementos utilizados na discretização do domínio. As matrizes \mathbf{ID}_d^{-1} , \mathbf{B}_d , \mathbf{B}_m e os vetores \mathbf{ID}_m^{-1} , \mathbf{F} e $\bar{\Omega}$ são montagens adequadas das contribuições elementares de

$$\mathbf{ID}_d^{-1^e} = \int_{\mathcal{B}^e} \frac{1+\nu}{E} \mathbf{N}_T^T \mathbf{N}_T d\mathcal{B} \quad \mathbf{ID}_m^{-1^e} = \int_{\mathcal{B}^e} \frac{3(1-2\nu)}{E} d\mathcal{B} \quad \mathbf{B}_d^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_T^T \mathcal{D}^d \mathbf{N}_u d\mathcal{B} \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_m^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathcal{D}_m \mathbf{N}_u d\mathcal{B} \quad \bar{\Omega}^e = \int_{\mathcal{B}^e} 3\alpha \mathbf{N}_\theta \Theta^e d\mathcal{B} \quad \mathbf{F}^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\mathcal{B} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{N}_u^T \mathbf{a} d\Gamma_\tau \quad (43)$$

Calculando as primeira variação em (41), conclui-se que a solução deste problema de *min-max* é equivalente à solução do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \mathbf{ID}_d^{-1} \mathbf{T}^d - \mathbf{B}_d \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{ID}_m^{-1} \mathbf{T}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{u} + \bar{\Omega} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_d^T \mathbf{T}^d + \mathbf{B}_m^T \mathbf{T}_m - \mathbf{F} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (44)$$

4.3. Solução do modelos mistos discretos

Os sistemas (37) e (44) não possuem a estrutura matemática clássica dos modelos de análise linear elástica em elementos finitos, ou seja

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}} \quad (45)$$

Se os graus de liberdades em tensões forem condensados pode-se recuperar esta estrutura. Como consequência da descontinuidade imposta à interpolação dos campos de tensões, a condensação é processada no âmbito do cálculo elementar, resultando que a matriz \mathbf{K} e o vetor $\bar{\mathbf{F}}$ são obtidos pela montagem adequada das contribuições elementares de

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{ID}^e \mathbf{B}^e \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{B}^{eT} \mathbf{ID}^e \bar{\Omega}^e \quad (46)$$

para o sistema (37). E para o sistema (44)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}_d^{eT} \mathbf{ID}_d^e \mathbf{B}_d^e + \mathbf{B}_m^{eT} \mathbf{ID}_m^e \mathbf{B}_m^e \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{B}_m^{eT} \mathbf{ID}_m^e \bar{\Omega}^e \quad (47)$$

O fato da condensação não se processar a partir das matrizes globais é fundamental para a viabilidade computacional do elemento, pois na operação de condensação é necessária a inversão das matrizes \mathbf{ID}^{-1} , \mathbf{ID}_d^{-1} e \mathbf{ID}_m^{-1} , que é feito para a matriz elementar e não para a global. Vale ressaltar que a matriz \mathbf{ID}^{-1^e} é formada por três blocos disjuntos e idênticos de uma matriz 3×3 , assim a sua inversão envolve apenas a inversão desta matriz 3×3 . O mesmo ocorre com a matriz matriz $\mathbf{ID}_d^{-1^e}$ que é formada por quatro blocos disjuntos de uma matriz 3×3 . Por outro lado, em cada elemento, a matriz $\mathbf{ID}_m^{-1^e}$ é simplesmente um escalar.

4.4. Discretização da formulação mista de análise limite

Uma breve descrição da discretização mista é apresentada para caracterizar a estrutura do problema discreto de análise limite e mostrar a discretização de elementos finitos que é usada na aplicação incluída neste trabalho.

Assim como nos modelos de elasticidade, as funções de aproximação para a tensão e velocidades, definidas em (33) e (40) são substituídas nas formulações mistas da análise limite (29) e (30), respectivamente. Além disto, os campos aproximados de tensões devem ser plasticamente admissíveis. Devido a convexidade do conjunto P , que define as tensões plasticamente admissíveis, esta condição pode ser exatamente imposta quando a interpolação da tensão for constante ou linear em cada elemento. Assim, um conjunto de n_p pontos x^k são escolhidos em cada elemento, onde as máximas tensões equivalentes de Von Mises podem ocorrer, e o valor de cada função plástica $\hat{f}(\hat{\mathbf{T}}(x^k))$ é restrita a ser não positiva para $k = 1, \dots, n_p$. Conseqüentemente, define-se as funções plásticas globais $f_j(\mathbf{T})$, dependendo do vetor global dos parâmetros de tensão, sendo os limites da formulação discreta, tal que

$$f_j(\mathbf{T}) = \hat{f}(\mathbf{N}_T(x^k) \mathbf{T}^e) \quad (48)$$

onde j varia de 1 a $m_p = n_p n_e$ e n_e é o número de elementos finitos.

Por causa da descontinuidade entre elementos da tensão, o vetor global \mathbf{T} de parâmetros da tensão é feito de conjuntos disjuntos \mathbf{T}^e correspondentes a cada elemento. Então, o conjunto de n_p restrições plasticamente admissíveis de cada elemento e é somente dependente do conjunto \mathbf{T}^e das componentes de \mathbf{T} . Este desacoplamento tem importantes conseqüências para a viabilidade computacional do algoritmo discreto (Borges, 1995).

Após essas aproximações, os modelos discretos de análise limite podem ser escritos como

$$\eta_d = \min_{\mathbf{v}^* \in \mathbf{R}^n} \max_{\mathbf{T}^{**} \in \mathbf{R}^q} \mathbf{T}^{**} \cdot \mathbf{B} \mathbf{v}^* \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^* = 1 \\ f(\mathbf{T}^{**}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

onde a matriz \mathbf{B} e o vetor \mathbf{F} são montados pelas contribuições elementares de \mathbf{B}^e e \mathbf{F}^e , definidos em (35) e (36), respectivamente. No caso da formulação mista (30), o problema discreto pode ser escrito como

$$\eta_d = \min_{\mathbf{v}^* \in \mathbf{R}^n} \max_{\mathbf{T}^{d**} \in \mathbf{R}^q} \mathbf{T}^{d**} \cdot \mathbf{B}_d \mathbf{v}^* \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^* = 1 \\ f(\mathbf{T}^{d**}) \leq 0 \\ \mathbf{B}_m \mathbf{v}^* = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

com as matrizes \mathbf{B}_d , \mathbf{B}_m e o vetor \mathbf{F} montados a partir das matrizes elementares \mathbf{B}_d^e , \mathbf{B}_m^e e \mathbf{F}^e , definidas em (42) e (43).

O algoritmo adotado para a solução destes problemas, toma por base as condições de ótimo de (49) e (50) (Borges *et al.*, 1995 e Zouain *et al.*, 1993). Por esta ótica, por exemplo para (49), o problema discreto de análise limite pode ser colocado da seguinte forma: achar um fator de carregamento $\eta_c \in \mathbb{R}$, um vetor de tensão $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^q$, um vetor de velocidade $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e um vetor dos multiplicadores plásticos $\dot{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_p}$ tal que o sistema representado pela matriz de deformação $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e uma função convexa $f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}^{m_p}$ esteja sujeito a um colapso plástico para algum carregamento proporcional a um vetor de força $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$. Estes parâmetros podem ser obtidos pela solução do sistema

$$\mathbf{B} \mathbf{v} - \nabla f(\mathbf{T}) \dot{\lambda} = 0 \quad (51)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{T} - \eta_c \mathbf{F} = 0 \quad (52)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 1 \quad (53)$$

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{T}) \dot{\lambda}_j = 0, \quad \mathbf{f}(\mathbf{T}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (54)$$

O algoritmo utilizado consiste basicamente em usar o método de quasi-newton para solução do sistema definido pelas igualdades contidas nas condições de ótimo (51– 54), seguido de um passo de relaxação e escalonamento das tensões a fim de preservar a restrição de admissibilidade plástica. Cabe observar que independente da formulação de análise limite utilizada como primitiva, cinemática, estática ou mista, o algoritmo utilizado é sempre o mesmo. Os detalhes do algoritmo usado em análise limite podem ser encontrado em Borges *et al.* (1995).

5. Aplicações numéricas

Como aplicação, apresenta-se um problema de termo-elasticidade e outro de análise limite. Os resultados são comparados com a literatura existente.

5.1. Cilindro espesso sob variação de temperatura

Seja um cilindro espesso submetido à variação de temperatura, tendo na configuração indeformada raio externo R_e e raio interno R_i . A temperatura na parede interna do cilindro é Θ_i e na parede externa é Θ_e . Este gradiente de temperatura nas paredes produz um campo de temperatura ao longo da parede como mostrado na Figura 1. Para análise do modelo foi considerado um modelo de estado plano de deformação em um material com $E = 207\text{GPa}$, $\nu = 0.27$ e $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

Na figura 1, as soluções para o campo de deslocamentos obtidas com os modelos discretos, cinemático e mistos, são comparadas com a solução analítica, obtendo-se uma boa aproximação para ambos os casos.

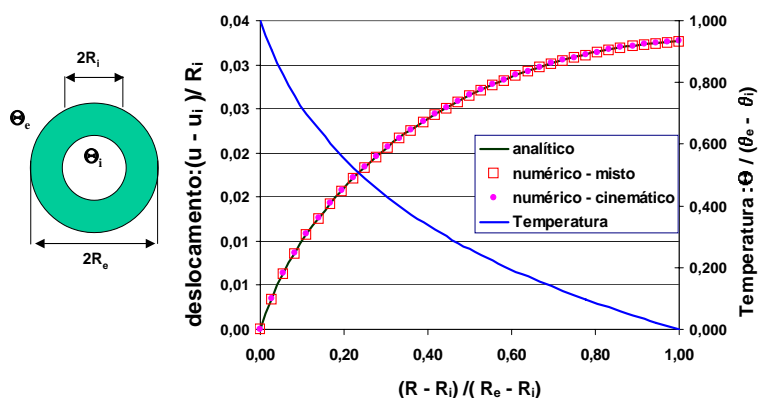


Figure 1: Distribuição de temperatura e deslocamento na parede do cilindro.

5.2. Análise limite em corpos com imperfeições submetidos à compressão

Foi analisado um corpo com duas imperfeições geométricas submetido à compressão. Estas imperfeições são modeladas por dois orifícios circulares como mostrado na Fig.2. O modelo de deformação plana foi proposto por Díez *et all* (1998) para estudar a influência de imperfeições e localização de deformações em sólidos viscoelásticos quando sofrem processos de grandes deformações. Aqui o objetivo é o cálculo da carga de colapso, considerando um material que obedece o critério de Von Mises, com tensão de escoamento igual a σ_Y .

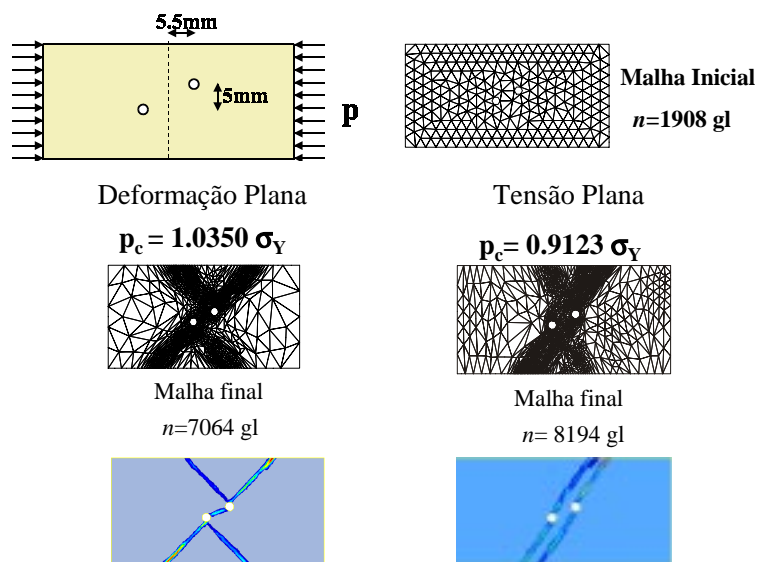


Figure 2: Colapso plástico em corpos com imperfeições submetidos à compressão

Na análise foram utilizados os elementos mistos propostos neste trabalho, sendo que para deformação plana utilizou-se o elemento que interpola tensão desviadora e tensão média, e para tensão plana o que interpola tensão total. Foi também utilizada uma estratégia adaptativa para o refinamento da malha, considerando um indicador de erro *a posteriori*, baseado no cálculo das derivadas segundas da solução de elementos finitos (Borges *et all*, 2001). As cargas de colapso calculadas, as malhas utilizadas, iniciais e finais, e os isovalores dos módulos das

taxas de deformação plástica na situação de colapso, são mostrados na Fig.2. Pode-se observar que os elementos propostos, aliados à uma estratégia adaptativa, são efetivos para capturar as deformações plásticas localizadas. Os pontos nodais da malha crescem somente na vizinhança da região onde as descontinuidades acontecem, além disso, na malha final os elementos se tornam alinhados e estirados na direção das linhas de deslizamento.

6. Conclusões

Foram propostos modelos de elementos finitos mistos, baseados na interpolação dos campos de tensão e deslocamentos, ou velocidades, para análise termo-elástica e análise limite. Os elementos mostraram-se adequados para as análises pretendidas.

Neste estudo preliminar procura-se avaliar a viabilidade de se utilizar estes elementos em modelos de plasticidade com grandes deformações. Apesar dos resultados promissores, principalmente em análise limite, outros testes ainda são necessários para garantir a eficiência destes elementos em modelos de grandes deformações.

7. Referências

- Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran B.; 2000, “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures”, John Wiley.
- Borges L., Zouain N., Costa, C. e Feijóo R.; 2001, “An adaptive approach for limit analysis”, International Journal of Solids and Structures, vol. 38, 10-13, pp. 1707–1720.
- Borges L., Zouain N. e Huespe A., 1995, “A Nonlinear Optimization Procedure for Limit Analysis”, European Journal of Mechanics A/Solids, vol.15, pp. 487-512.
- Borges L., Zouain N. e Feijóo R., 1989, “Formulações Variacionais para Análise Limite”, Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, vol.I, pp.57-60.
- Christiansen, E.,1996, “Limit analysis of collapse states”, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lioan Eds, vol. 4, 193–312, North-Holland, Amsterdam.
- Díez, P., Arroyo, M., Huerta, A., 1998, “Adaptive analysis of softening solids using a residual-type error estimator”, Computational Mechanics–New Trends and Applications – IV WCCM. Eds S. Idelson, E. Oñate and E. Dvorkin, ©CIMNE, Barcelona, Spain.
- Guerhard J.O., 1996, “Um Elemento Finito Misto para Análise Limite com Simetria de Revolução”, com Interpolação da Tensão Média, Tese de Mestrado, COPPE/PEM-UFRJ.
- Huespe A., 1990, “Um Elemento Finito Misto para Análise Limite com Simetria de Revolução”, Tese de Mestrado, COPPE/PEM-UFRJ.
- Kamenjarzh, J., 1996, “Limit Analysis of Solids and Structures”, CRC PR.
- Lemaitre J., Chaboche, J., 1994, “Mechanics of Solids materials”, Cambridge University Press.
- Lubliner, J., 1990, “Plasticity Theory”, McMillan Publishing Company.
- Panagiotopoulos, P., 1985, “Inequality Problems in Mechanics and Application”, Birka.
- Santiago J., 1993, “Elemento Finito Misto para Análise Limite com Interpolação da Tensão Desviadora”, Tese de Mestrado, COPPE/PEM-UFRJ.
- Silveira J.L.L., 1991, “Elementos Finitos Triangulares Mistos para Análise Limite em Estado Plano”, Tese de Mestrado, COPPE/PEM-UFRJ.
- Telega, J.J., 1985, “Limit Theorems in the case of Signorini’s boundary conditions and friction”, Arch. Mech., vol. 37, 549-562.
- Zienkiewicz O. e Taylor R., 1991, “The Finite Element Method”, McGraw-Hill.
- Zouain N., Herskovits J., Borges L. e Feijóo R., 1993, “An Iterative Algorithm for Limit Analysis with Nonlinear Yield Functions”, International Journal of Solids Structures, vol. 30, pp. 1397-1417.

A Mixed Formulation for Elastoplasticity

Cyntia Gonçalves da Costa

Lavinia Alves Borges

Nestor Zouain

Computational Solid Mechanics Laboratory – Federal University of Rio de Janeiro, PEM/COPPE.

P.O. Box 68503, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil. e-mail: cyntia@ufrj.br

Abstract. *The main objective of this paper is to propose mixed formulations and an algorithm to deal with thermoelastic and limit analysis problems. Based on the mixed formulation proposed we present some finite elements where we impose continuity for velocities and allow inter-element discontinuity for stresses. Those mixed elements are suitable to face on the locking phenomenon frequently found in plasticity and elasticity with incompressible materials. To show the viability of the method, some numerical applications are presented.*

Keywords: *mixed variational formulations, thermoelasticity, limit analysis, finite elements.*

UM AMBIENTE GRÁFICO INTERATIVO PARA MODELAMENTO E ANÁLISE ESTRUTURAL

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Horizonte-MG
roque@dees.ufmg.br

Elizabeth Vieira Maia

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Horizonte-MG
bethmaia@dees.ufmg.br

Ramon Pereira da Silva

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Horizonte-MG
ramon@dees.ufmg.br

José Marcio Fonseca Calixto

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Horizonte-MG
calixto@dees.ufmg.br

Krishna Caldas, Frederico Mol Álvares da Silva, Daniel Teixeira Chaves, Fabrício Vivas Andrade, Virgínia Monteiro e Pablo Gontijo

Escola de Engenharia da UFMG, Av. do Contorno 842, Centro, 30110-060, Belo Horizonte-MG
idea@dees.ufmg.br

Resumo. Este artigo apresenta o *Modelling Environment*, uma das vertentes de um simulador de comportamento estrutural que está sendo desenvolvido pelo grupo IDEA (*Interactive Distance Education Aid*) da Universidade Federal de Minas Gerais. Tratando-se de um ambiente de rede para modelamento e análise estrutural, são discutidos os detalhes da implementação da interface com o usuário, da interface de rede, do servidor de análise estrutural e do tráfego de dados através da Internet. Adotando-se a linguagem de programação Java para todos os elementos e o paradigma de programação orientada a objetos, são apresentados os projetos de classes para cada um destes quatro elementos. Para a interface com o usuário, as classes que controlam a interação, os desenhos, os modelos geométrico e discreto e a análise estrutural remota são discutidas. No que se refere ao tráfego de dados através da Internet e à interface de rede, são apresentadas a tecnologia Java utilizada e a organização de classes adotada para os serviços remotos. Quanto ao servidor de análise estrutural, detalha-se o objeto Java que trafega através da rede, contendo a estrutura de dados do modelo estrutural. Esta estrutura de dados é preenchida ora pela interface com o usuário ora pelo servidor de modo a permitir que os resultados da análise sejam graficamente visualizados. Espera-se que o ambiente em desenvolvimento possa propiciar a alta interatividade requerida pelos simuladores.

Palavras chave: Computação Gráfica, Programação Orientada a Objetos, Java, Método de Elementos Finitos, Internet

1. Introdução

O grupo IDEA (*Interactive Distance Education Aid*) é formado por professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. A pesquisa que os envolve diz respeito às questões relacionadas à integração das novas tecnologias de informação e comunicação à educação.

O grupo adotou a confecção de um portal de ensino de Engenharia de Estruturas, o *IdeaGateway*, como objeto de estudo. Visando diminuir as complexidades inerentes a uma pesquisa desta natureza, escolheu-se a análise estrutural como o primeiro tema a ser focado e a técnica da simulação como recurso didático. Concebeu-se então, o *IdeaSimulator*, um sistema gráfico de alta interatividade que permite ao aprendiz construir seu conhecimento a partir de experimentações. Como uma aplicação de rede, o *IdeaSimulator* possui três elementos fundamentais: interfaces com o usuário, uma interface de rede e servidores específicos. A Fig. (1) mostra o modelo de implementação do *IdeaSimulator* (Maia et al, 2000).

A implementação do *IdeaSimulator* apresenta duas vertentes complementares. A primeira consiste no desenvolvimento, no formato de hipermídia, da apresentação dos conceitos teóricos com exemplos ilustrativos promovendo a motivação para o estudo do comportamento estrutural através da experimentação (*Hypermedia Environment*). Os detalhes do desenvolvimento deste ambiente fogem do escopo deste artigo e podem ser encontrados em outro trabalho a ser apresentado no COBEM-2001 (Maia et al, 2001).

A segunda vertente (*Modelling Environment*) implementa uma aplicação que analisa os modelos criados pelo aluno e devolve os resultados tanto na forma numérica quanto na forma gráfica. Este artigo trata dos detalhes da implementação desta aplicação. Neste contexto, os três elementos acima citados foram implementados utilizando a metodologia de programação orientada a objetos e a linguagem Java. Além da interface com o usuário, o servidor específico para análise estrutural, a interface de rede e o tráfego de dados através da Internet (Fig. (1)) foram implementados utilizando estas tecnologias.

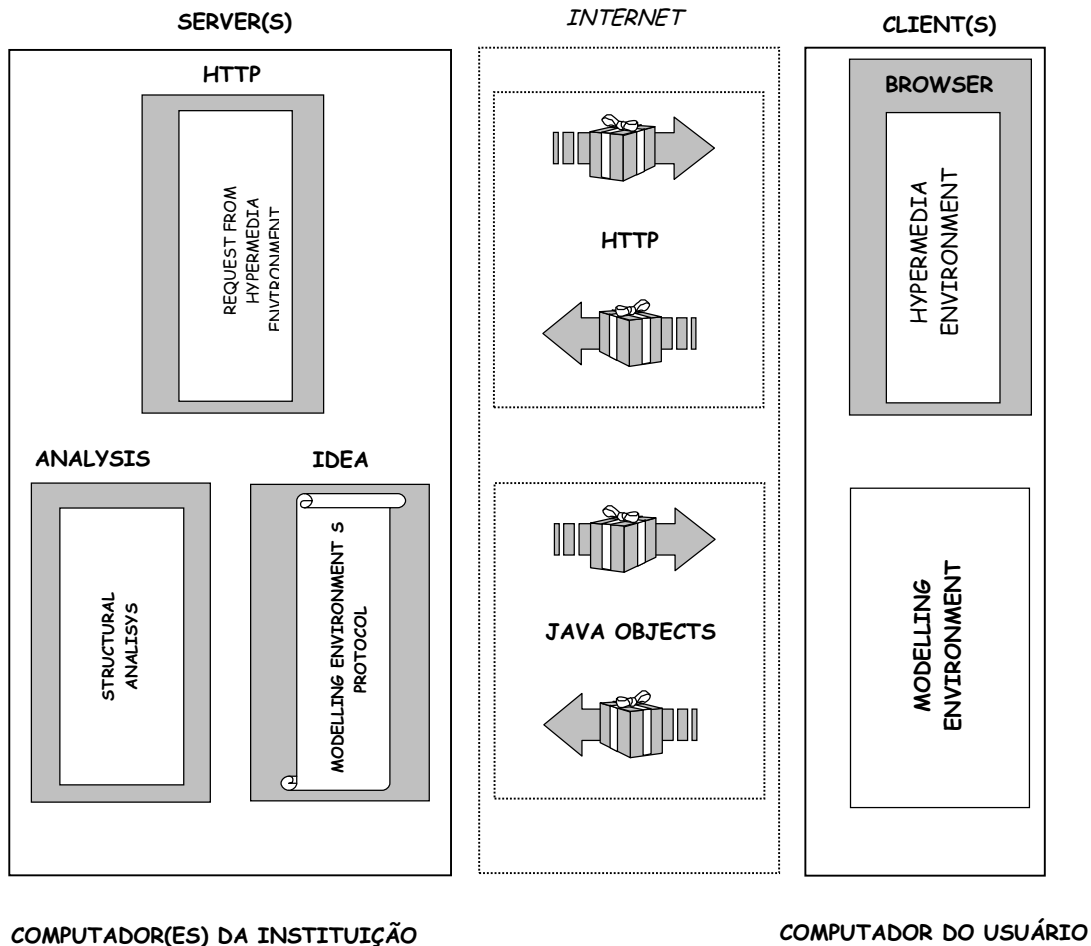


Figura 1. Modelo de implementação do *IdeaSimulator*.

2. Interface com o Usuário

A Fig. (2) mostra uma visualização da tela principal e a Fig. (3) as instâncias de classes do projeto orientado a objetos da interface com o usuário do *Modelling Environment*.

Como pode ser observado nestas figuras, as classes do projeto orientado a objetos podem ser agrupadas em quatro subgrupos. As classes *MenuBar*, *ControlPanel*, *ToolBar* e *StatusBar* formam o grupo de elementos que controlam a interação com o usuário. Estes elementos oferecem ao usuário a alta interatividade requerida para os simuladores. Foram implementados utilizando-se a classe *Swing* de Java (Horstmann e Cornell, 1999).

Um segundo conjunto de classes controlam os desenhos (Fig. (3)). A alteração dos dados dos modelos a partir do processo interativo é graficamente representada na área de desenho da interface (ver Fig. (2)). Tal área é de responsabilidade da classe *DrawingArea*. Um objeto do tipo *DrawingArea* representa o estado corrente do modelo segundo uma grandeza escolhida pelo usuário. Em outras palavras, a classe *DrawingArea* é instanciada pela classe *Interface* de modo a representar na área de desenho o estado indeformado ou deformado da estrutura, diagramas de esforços internos, diagramas de corpo livre ou qualquer outra imagem representativa dos modelos da simulação corrente. Para realização dos desenhos em coordenadas do modelo, a classe *DrawingArea* se auxilia do pacote gráfico *IdeaGP*. Este pacote sobrecarrega a classe disponível em Java, *Graphics2D* (<http://java.sun.com>). Utilizando conceitos de mapeamentos bidimensionais (Foley et al, 1997), a classe *IdeaGP* instancia um objeto do tipo *Transform* que implementa a transformação de coordenadas do modelo para coordenadas do dispositivo e sua inversa. Além disto o pacote gráfico sobrecarrega métodos de desenho disponíveis em Java de modo a personalizar a representação dos elementos do modelo (Fig. (2)). Este pacote também possui métodos para desenhos de entidades gráficas particulares e inerentes a um modelo estrutural (ver, por exemplo, os desenhos das cargas e apoios mostrados na Fig. (2)).

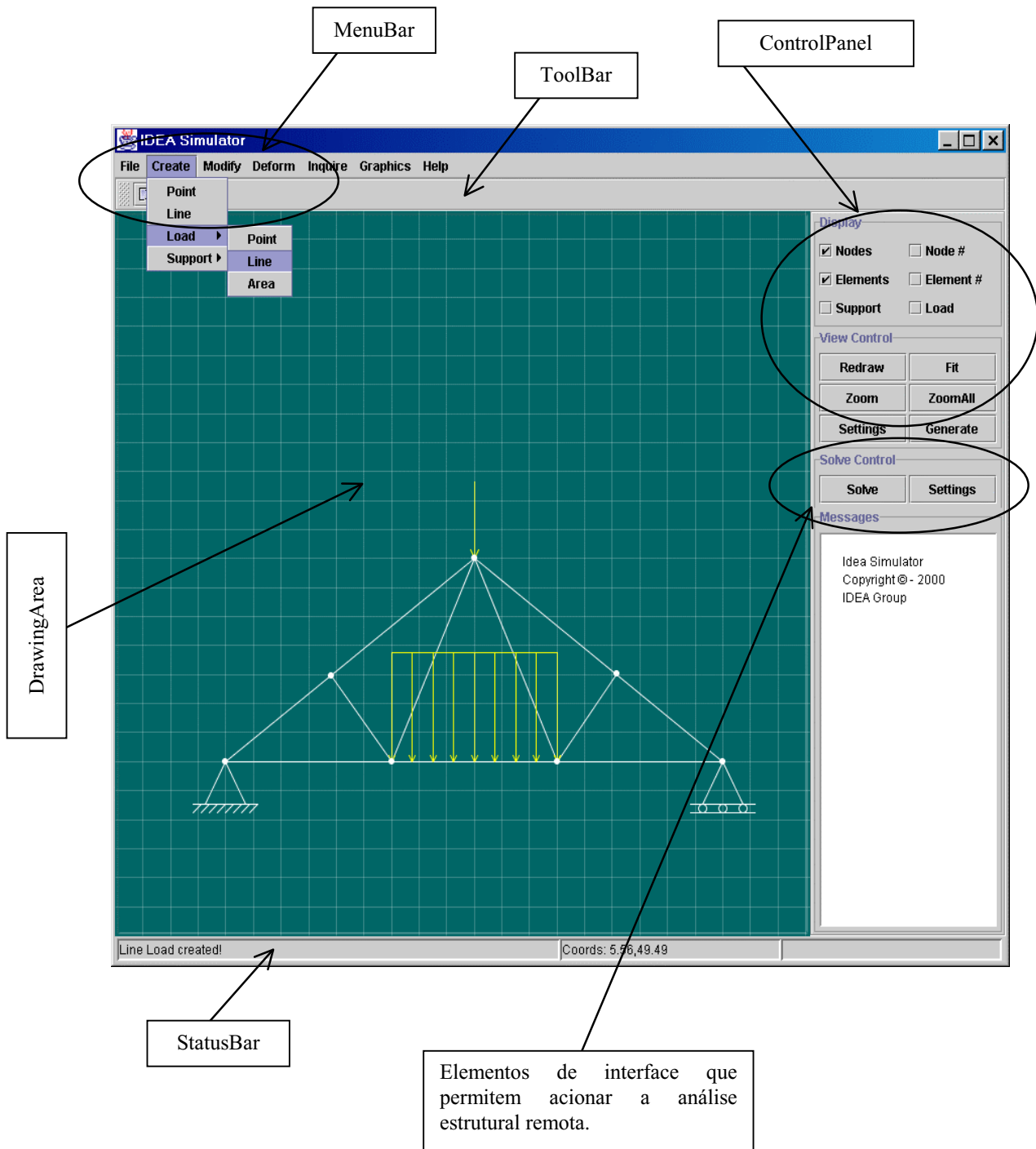


Figura 2. Visualização da tela principal da interface gráfica do *Modelling Environment*.

Ainda no lado do programa cliente, um terceiro conjunto de classes armazena os dados dos modelos envolvidos nas simulações (Fig. (3)). A classe *Model* possui um objeto do tipo *GeometricModel*, um do tipo *Generator* e um objeto do tipo *DiscreteModel*. Para guiar os aprendizes de análise estrutural o processo se inicia com o modelamento geométrico que é um conceito mais intuitivo. A partir do modelo geométrico, e utilizando recursos de interação amigável, gera-se o modelo discreto desejado. Estes recursos permitem guiar o aprendizado de conceitos específicos do modelamento numérico como elemento discreto, ponto nodal, graus de liberdade, condições de contorno, refinamento do modelo, erro de aproximação, entre outros. A Fig. (4) ilustra o procedimento para o caso de modelos discretos de Elementos Finitos. No atual estágio da implementação, as classes que controlam os modelos contemplam o caso de elementos unidimensionais (Fig. (2)). Para o caso bidimensional a subdivisão planar necessária (Fig. (4)) está sendo implementada utilizando o algoritmo de arestas aladas (Foley et all, 1997).

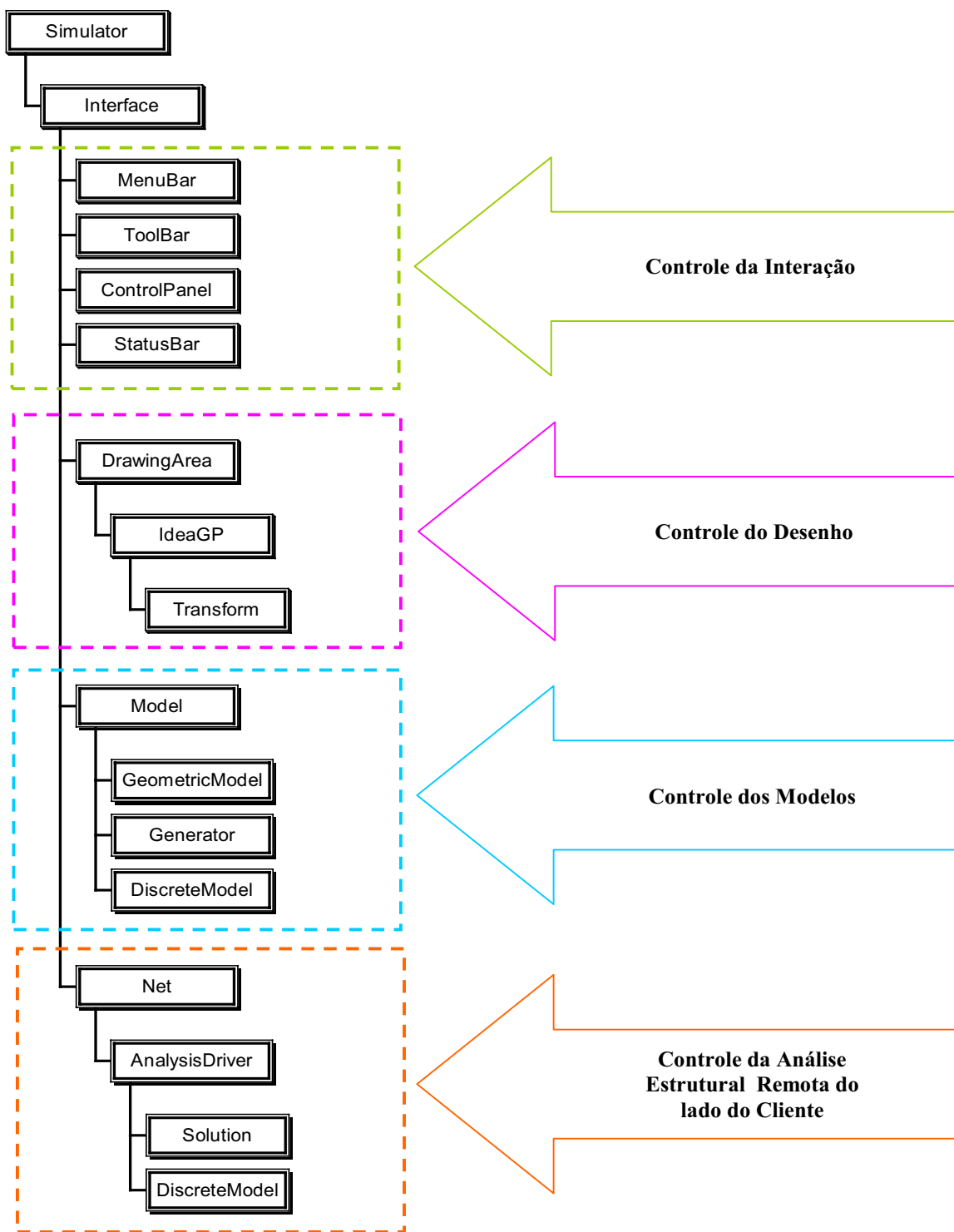


Figura 3. Instâncias de classes do projeto orientado a objetos da interface gráfica do *Modelling Environment*.

Um último conjunto de classes controlam a análise estrutural remota (Fig. (3)). A classe *Net* é responsável por obter referências aos serviços remotos. Esta classe possui uma instância da classe *AnalysisDriver* que é passada como parâmetro do serviço remoto. Além dos parâmetros da solução (armazenadas na classe *Solution*) o objeto *AnalysisDriver*, que trafega na Internet, tem uma referência ao objeto *DiscreteModel*, que é parcialmente preenchido ora pelo programa cliente, quando o modelo discreto é gerado pela classe *Generator*, ora pelo servidor quando o serviço remoto de Análise Estrutural é executado.

Estando o objeto *DiscreteModel* totalmente preenchido, os resultados da análise estrutural podem ser visualizados na Interface Gráfica na forma de diagramas de esforços internos, diagramas de corpo livre, desenhos das deformadas, contornos de tensões, dentre outras imagens, que são sempre apresentadas ao aluno com recursos interativos que o guia a absorver novos conceitos.

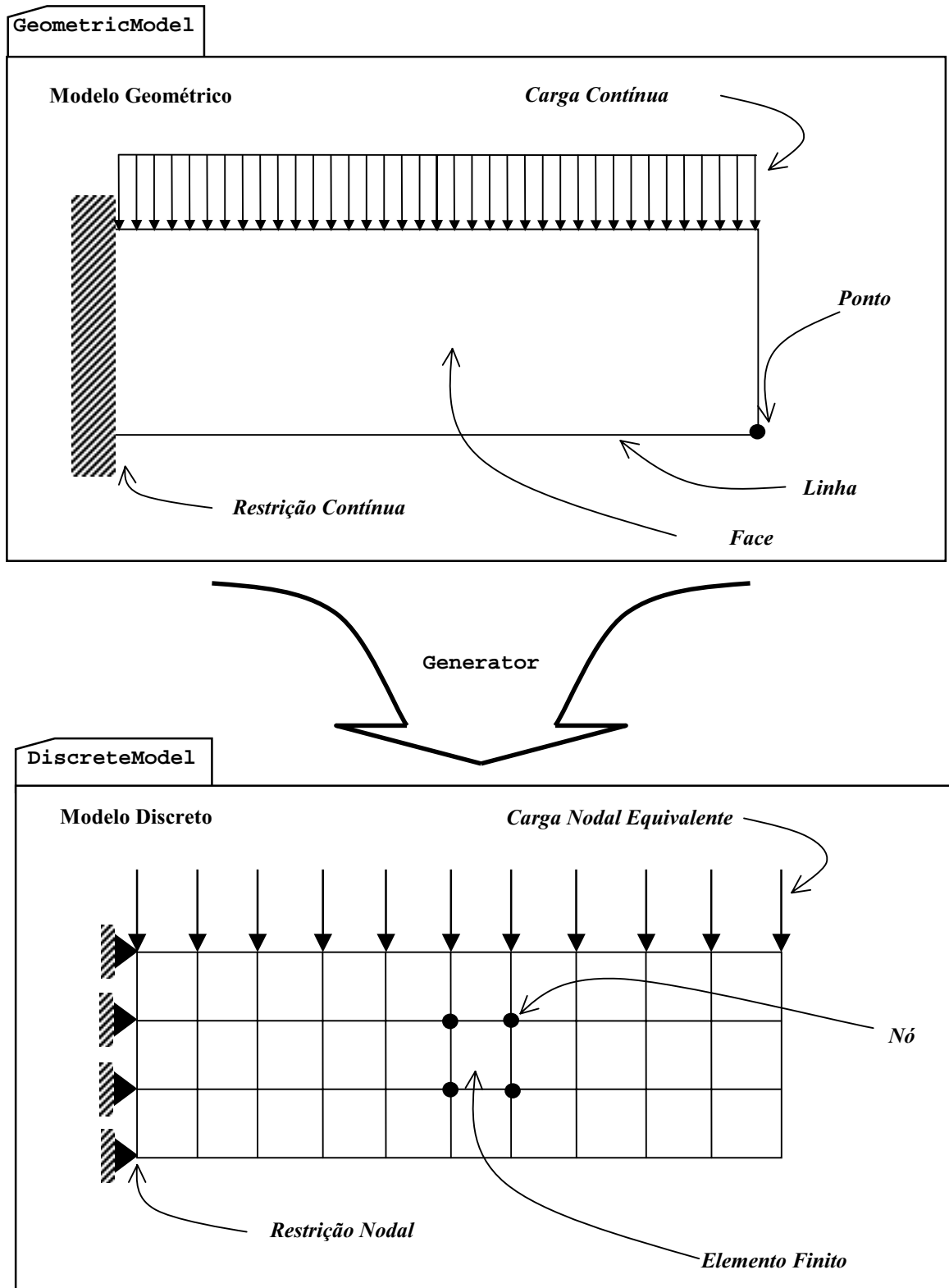


Figura 4. Modelos Geométrico e Discreto para o *Modelling Environment*.

3. Tráfego de Objetos Java através da Internet

No início da pesquisa, o tráfego de dados através da Internet foi implementado com um protocolo de comunicação CGI escrito em linguagem C, quando tentou-se a execução remota de um programa de análise estrutural escrito em Fortran (Pitangueira et al, 1999). Após problemas de performance e compatibilidade de linguagens de programação, optou-se por implementar a arquitetura de objetos distribuídos (Fig. (1)) em linguagem Java, utilizando tecnologia RMI (Remote Method Invocation).

RMI foi projetada para permitir o desenvolvimento de programas distribuídos em Java exatamente da mesma maneira como se faz em computação não-distribuída. Tudo se baseia no uso de Interfaces Java ou seja, os serviços a serem disponibilizados remotamente são declarados em uma Interface e são implementados em módulos de software que podem ser distribuídos em diferentes máquinas. A Fig. (5) ilustra esta tecnologia.

A comunicação entre cliente(s) e servidor(es) é suportada pelo registrador de serviços RMI. A implementação, por parte do servidor, registra o serviço utilizando o método Bind de RMI. O programa cliente, por sua vez, obtém uma referência ao objeto remoto, que lhe permitirá utilizar as funcionalidades disponibilizadas, através do método Lookup. Uma vez obtida esta referência, tudo se passa como na programação com objetos locais. Como pode ser visto na Fig. (5) a comunicação cliente-servidor do *IdeaSimulator* é suportada por um único serviço (*ServerManager*) graças à possibilidade, dada pela RMI, de um objeto remoto possuir métodos que produzem referências a outros objetos remotos (Eckel, 2000).



Figura 5. Utilização da tecnologia RMI para distribuição de objetos na Internet.

Devido a necessidade de equipamentos de maior capacidade de armazenamento e processamento os equipamentos da instituição (Fig. (1)) serão os do CENAPAD-MG/CO Centro Nacional de Processamento de Alto desempenho para Minas Gerais e Centro-Oeste. Seu núcleo central está localizado no campus da UFMG, em Belo Horizonte, onde se encontram os equipamentos de maior potência de computação: um IBM RS-6000/SP com 41 nós e 48 processadores e um Starfire da Sun com 32 processadores (<http://www.cenapad.ufmg.br>). O posicionamento correto dos arquivos de classes Java nas diferentes máquinas garante o estabelecimento da comunicação através da Internet. Além dos arquivos correspondentes às implementações do cliente e do servidor, os arquivos gerados via RMI devem estar adequadamente distribuídos (Horstmann e Cornell, 1999).

O projeto de classes Java do servidor *IdeaServer* (Fig. (1)) está mostrado na Fig. (6). A superclasse *IdeaServer* possui métodos que implementam funcionalidades para o programa cliente. Estas funcionalidades são disponibilizadas através do registro RMI do serviço *ServerManager*.

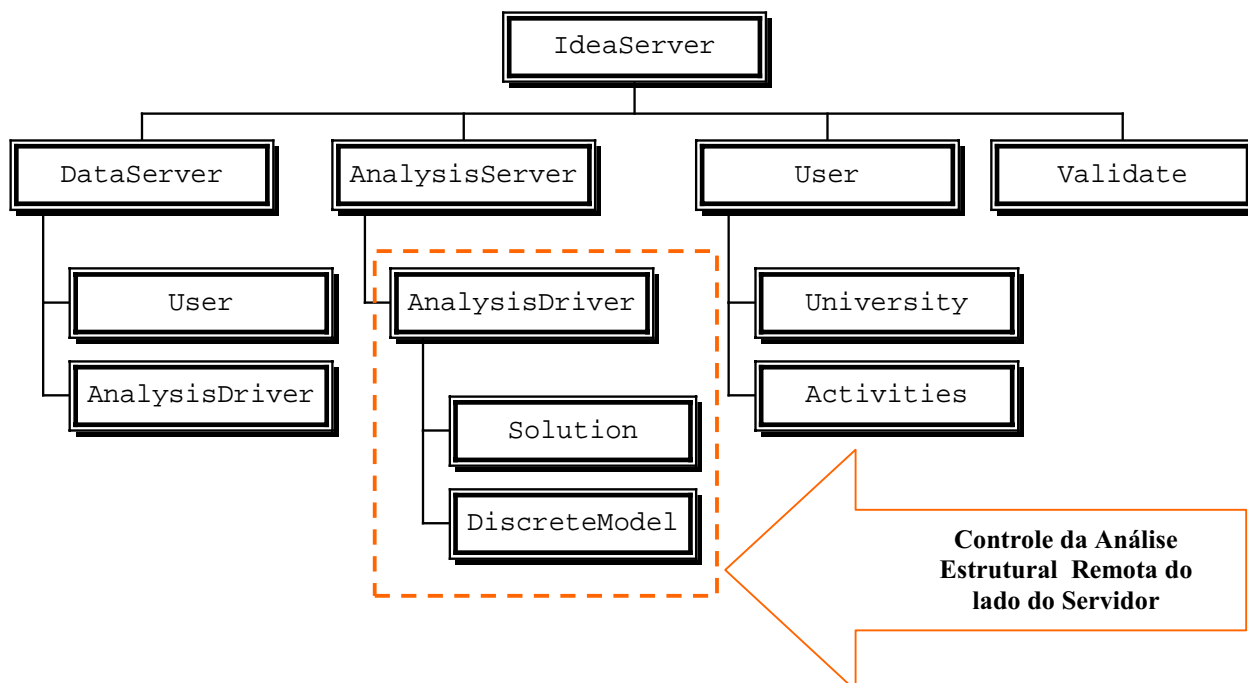


Figura 6. Instâncias de classes do projeto orientado a objetos do *IdeaServer*.

As requisições de cadastro, validação, armazenamento de dados e análise estrutural são implementadas, respectivamente, através das classes `User`, `Validate`, `DataServer` e `AnalysisServer`. A classe `User` contém o cadastro do usuário do sistema. Além de dados pessoais, tal cadastro guarda informações relacionadas com a vida acadêmica do usuário (ver classe `University` na Fig. (6)) e estatísticas de uso do sistema (ver classe `Activities` na Fig. (6)). A tarefa de validação dos usuários fica a cargo da classe `Validate`. A classe responsável pelo armazenamento de informações é a `DataServer`. Utilizando os recursos Java de serialização de objetos, esta classe armazena e recupera modelos estruturais do usuário, guardados na forma de objetos do tipo `AnalysisDriver`. Também armazena e recupera as informações de cadastro do usuário na forma de objetos do tipo `User`. A classe `AnalysisServer` gerencia o processamento remoto da análise estrutural. Esta classe recebe um objeto do tipo `AnalysisDriver`, que é alterado pelo cliente e pelo servidor e trafega através da Internet.

4. Análise Estrutural

Como anteriormente comentado, a tecnologia RMI permite que o objeto `AnalysisDriver` trafegue através da Internet de modo que é alterado, ora pelo cliente, quando encaminha dados, ora pelo servidor, quando executa a análise.

A classe `AnalysisDriver` é a responsável pela definição do tipo de problema a ser solucionado (mecânico, calor, etc.), possui uma instância da classe `Solution` e uma instância da classe `DiscreteModel`. A classe `Solution` define o tipo de solução que se deseja para o modelo (obtenção de configurações de equilíbrio, análise de autovalores, etc.). A classe `DiscreteModel` contém o modelo discreto associado a um método numérico (método de elementos finitos, método de elementos de contorno, etc.). Para o caso do método dos elementos finitos, a organização da classe derivada `FEMModel` está mostrada na Fig. (7). Tal organização é semelhante à do programa FEMOOP - Finite Element Method, Object Oriented Program (Martha et al, 1996; Pitangueira, 1998).

A classe `FEMModel` contém métodos para montagem de matrizes e vetores globais bem como para organização dos resultados. As informações relativas aos nós (coordenadas, condições de suporte, carregamento, etc.) são de responsabilidade da classe `Node` que possui métodos para numeração dos graus de liberdade do modelo bem como para consulta e atribuição de valores, como deslocamentos. A classe `Section` armazena as propriedades geométricas das seções transversais dos elementos. A classe `Material` descreve os materiais que compõem a discretização através de métodos para consulta de todos os parâmetros. A classe `EqvLoad` tem métodos para cálculo de forças equivalentes nodais. A classe responsável pelos dados e métodos que dependem unicamente do tipo de análise escolhido (Estado Unidimensional, Estado Plano de Tensões e de Deformações, Sólido, Axissimétrico, etc.) é a classe `AnalysisModel`. Como se pode observar na Fig. (7), o objeto `AnalysisModel` instanciado pela classe `FEMModel` guarda informações relativas ao tipo de análise global, enquanto os objetos `AnalysisModel` instanciados por cada um dos objetos `Element`, guardam informações relativas ao tipo de análise de cada elemento.

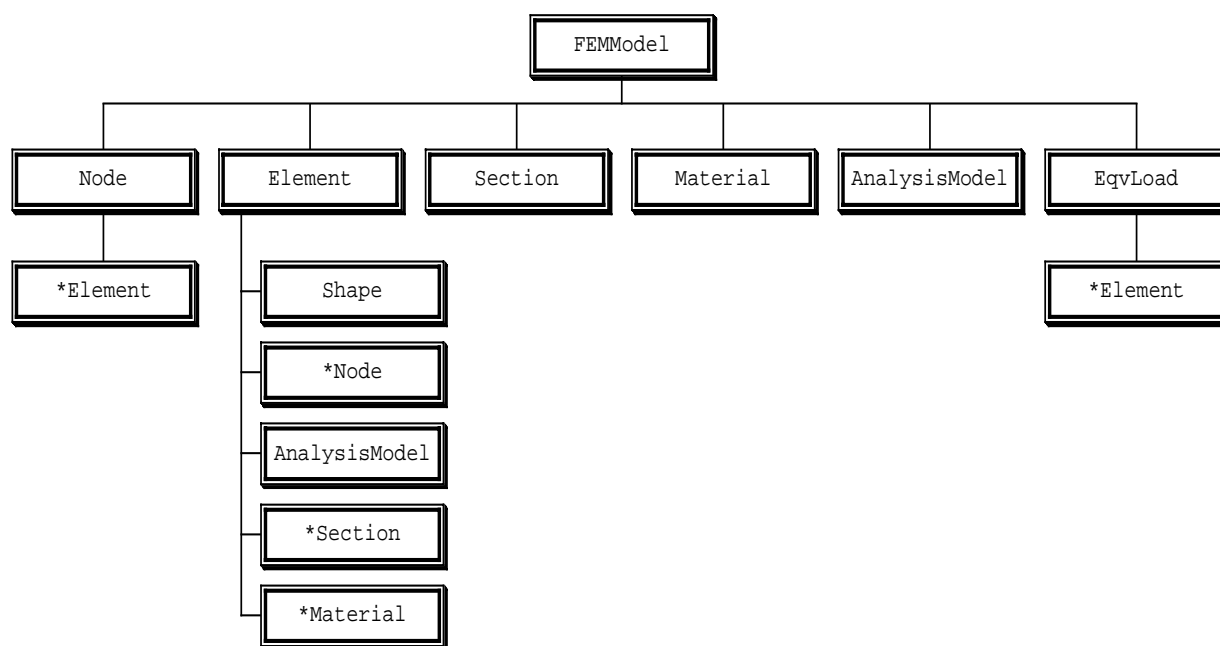


Figura 7. Instâncias de classes do projeto orientado objetos da classe `FEMModel`

A classe `Element`, possui referências à objetos do tipo `Node`, `Section` e `Material`, além de instanciar um objeto do tipo `Shape` e outro do tipo `AnalysisModel` (Fig. (7)). Os objetos `Shape` e `AnalysisModel` são os

responsáveis pela montagem da rigidez de cada elemento. A classe *Shape* responde pelas funções de interpolação dos elementos e a classe *AnalysisModel* pelo tipo de análise de cada um deles. A hierarquia da classe *AnalysisModel* está mostrada na Fig. (8).

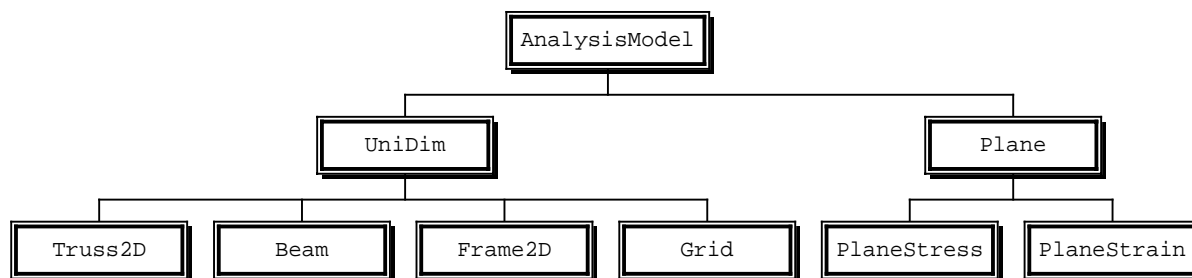


Figura 8. Hierarquia da classe *AnalysisModel*

5. Considerações Finais

Apresentou-se os detalhes da implementação Java de um ambiente de modelamento e análise estrutural que é parte de um Simulador de Comportamento Estrutural em desenvolvimento pelo grupo *IDEA* (Interactive Distance Education Aid) da Universidade Federal de Minas Gerais.

A determinação da performance do ambiente somente será possível quando do seu uso em testes formais com alunos. Neste sentido dois aspectos devem ser investigados: a performance Java como linguagem científica para execução da análise estrutural e o tráfego de dados através da rede.

Apesar das inúmeras vantagens da linguagem Java, independência de plataforma, suporte ao paradigma de programação orientada a objetos, suporte a programação para a Internet, segurança, entre outras, é sabido que existe uma grande deficiência da mesma no que tange ao processamento numérico intensivo (Flanagan, 1997). Neste sentido deve-se comparar o desempenho computacional dos métodos escritos tanto em Java quanto em C++. Tal implementação em linguagem nativa, i.e., compilada para uma determinada plataforma, como p. ex. C++ ou Fortran, faz uso da tecnologia JNI (<http://java.sun.com/docs/books/tutorial/native1.1/>) que permite a utilização de código nativo a partir de módulos Java.

Em relação ao tráfego de dados através da rede, ressalta-se aqui a participação do grupo de pesquisa no projeto BH2 (Rede Internet Metropolitana de Alta Velocidade de Belo Horizonte - Internet 2), que permitirá o uso do ambiente em rede de banda larga (<http://www.ufmg.br/ati/bh2>).

Espera-se que o uso do ambiente aqui apresentado, como auxílio ao ensino baseado na Web, possa propiciar a mudança qualitativa necessária ao ensino de análise estrutural dos cursos de graduação em engenharia.

Também espera-se que a pesquisa que envolve o grupo *IDEA* possa caminhar no sentido de elucidar valores do uso das tecnologias de informação e comunicação como ferramentas de ensino, permitindo-se determinar metodologias de implementação de modelos pedagógicos baseados na Web.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e a UFMG (projeto Fundo Fundep de Apoio Acadêmico/UFMG Virtual), pelo apoio financeiro e ao CENAPAD-MG/CO pelo uso de seus computadores.

7. Referências

- Eckel, B., 2000, *Thinking in Java*, Prentice Hall.
- Flanagan, D., 1997, *Java in a Nutshell - A Desktop Quick Reference*, 2nd Edition, O'Reilly, CA, USA.
- Foley, G. L., Van Dam, A., Feiner, S. K., e Hughes, J. F., 1997, *Computer Graphics: Principles and Practice*, 2nd Edition, Addison Wesley Publishing Company, 1175 p.
- Horstmann, C. S. e Cornell, G., 1999, *Core Java 2*, Prentice Hall, Vol. 2, 742p.
- <http://java.sun.com>
- <http://java.sun.com/docs/books/tutorial/native1.1/>
- <http://www.cenapad.ufmg.br>
- Maia, E. V., Calixto, J. M., Silva, R. P., Pitangueira, R. L. S., Rachid, E., Caldas, K., 2000, *Sobre uma Metodologia de Ensino de Engenharia de Estruturas através da WEB*, CONEM-Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Natal, Brasil, (CD-Rom), pp. 1-8.
- Maia, E. V., Pitangueira, R. L. S., Silva, R. P., Calixto, J. M., Chaves, D. T., Andrade, F. V., Silva, F. M. A., Caldas, K., Gontijo, P., e Monteiro, V., 2001, *Idea Gateway - Usando as Tecnologias da Web no Ensino de Engenharia*, 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, November 26-30, 2001, Uberlândia, Brazil, (trabalho em avaliação).

- Martha, L. F., Menezes, I. F., Lages, E. N., Parente Jr., E. e Pitangueira, R. L. S., 1996, An OOP Class Organization for Materialy Nonlinear Finite Element Analysis , XVI CILAMCE, Padova, Italy, Vol. 1, pp. 229-232.
- Pitangueira, R. L. S., 1998, Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade , Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 258p.
- Pitangueira, R. L. S., Maia, E. V., Vasconcelos Filho, A., Silva, R. P., Calixto, J. M., e Caldas, K., 1999, Sistema Computacional para Simulações de Comportamento Estrutural , XX CILAMCE, São Paulo, Brasil, (CD-Rom), pp. 1-10.

A GRAPHICAL INTERACTIVE ENVIRONMENT FOR STRUCTURAL MODELLING AND ANALYSIS

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Hozizonte-MG
roque@dees.ufmg.br

Elizabeth Vieira Maia

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Hozizonte-MG
bethmaia@dees.ufmg.br

Ramon Pereira da Silva

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Hozizonte-MG
ramon@dees.ufmg.br

José Marcio Fonseca Calixto

Departamento de Engenharia de Estruturas da EE.UFMG, Av. do Contorno 842, 2º. Andar, Centro, 30110-060, Belo Hozizonte-MG
calixto@dees.ufmg.br

Krishna Caldas, Frederico Mol Álvares da Silva, Daniel Teixeira Chaves, Fabrício Vivas Andrade, Virgínia Monteiro e Pablo Gontijo

Escola de Engenharia da UFMG, Av. do Contorno 842, Centro, 30110-060, Belo Hozizonte-MG
idea@dees.ufmg.br

Abstract. This paper presents the Modelling Environment, one of the structural behavior simulator's modules being developed by the IDEA Group (Interactive Distance Education Aid) at the Federal University of Minas Gerais. Being a network environment for structural modelling and analysis, the implementation details of the user interface, network interface, structural analysis server and data transfer through the Internet are discussed. Adopting the Java programming language and the object oriented programming paradigm, the classes organization of each one of these four elements are presented. For the user interface, the classes that control interaction, drawings, geometric and discrete models and the remote structural analysis are discussed. Regarding the data transfer through the Internet and the network interface, the Java technology used and the class organization adopted for remote services are presented. Regarding the structural analysis server, the Java object travelling through the network, containing the data structure, is detailed. This data structure is loaded either by the user interface or by the analysis server in an such way which allows the results from the analysis to be obtained and visualized graphically. It is expected that the environment under development can offer high interactivity required by simulators.

Keywords. *Computer Graphics, Object Oriented Program, Java, Finite Element Method, Internet*

BUCKLING ANALYSIS OF RIBBED PLATES FOR USE IN PIPES

Marcelo Augusto Leal Alves

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - CEP 05508-900 - São Paulo - SP
malaves@usp.br

Paulo Carlos Kaminski

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - CEP 05508-900 - São Paulo - SP
pckamins@usp.br

Abstract. Pipes made of PVC with ribbed walls are used in underground pipeworks. The process to obtain these pipes is the winding of a plate with ribs as reinforcements. Previous studies show that the buckling resistance is a critical design parameter for the pipes. The buckling occurs during winding. In this paper it is presented a theoretical study of the buckling problem during the winding as well as a finite elements simulation of the studied problem. It is shown that the buckling mode changes from local to global as the various dimensions of the ribs and the plate are changed. This mode change has a great influence on the modeling of the structure as well as in the winding process to obtain the pipe, being critical to pipe design.

The most common model for this problem is the bending and torsional buckling of a monosymmetric beam. This model is not appropriate when the structure has some proportions and a local buckling behavior develops as is shown on the paper.

Keywords: Buckling, plates, ribs

1. Introduction

Thin walled pipes reinforced with ribs, as the ones studied on this paper, are produced by winding an extruded profile, resulting in a helix. To close this helix a “Snap-On” fit is provided and chemical bonding is also used. This kind of pipe is used in underground pipeworks. It has low weight and high stiffness, both characteristics are important for their use.

The high stiffness is important since the external loads (soil weight) are high and large deformations of the pipe can lead to leaking. Large deformations can also play an important role if one considers creeping of the material. This kind of pipe is generally made of PVC, then creeping can be an important factor.

The same profile can be wound in many diameters and it will be under different values of stress. As a first approximation, it can be considered that the profile is under pure bending and the bending moment, M , applied during winding is given by the Eq. (1):

$$M = \frac{2EI}{d_i} \quad (1)$$

In Eq. (1), E stands for the Young's module, I is the inertia moment of the cross section and d_i is the winding diameter. From this expression it can be easily seen that for smaller diameters larger moments will develop.

Normally the study of the buckling of the ribs is made considering just one rib as a beam and a flexural-torsional buckling model is applied to the problem (Kaminski & Laterza, 1999), and that the cross sections behaves like a combination of as many monosymmetric I-beams as there are ribs on the profile. In some cases, as it will be shown, this model can not be applied because another buckling behavior develops, such as local buckling.

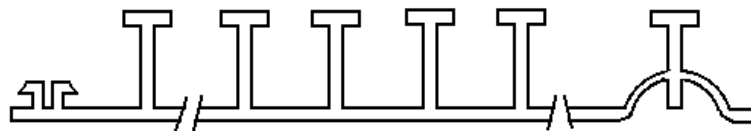


Figure 1. Ribbed profile

2. Flexural – Torsional Buckling

It is known from classical textbooks (Timoshenko & Gere, 1961), (Den Hartog, 1952), (Bleich, 1952) that beams, with open cross sections and small thickness, under bending can buckle in the flexural-torsional mode. This is explained by the fact that the torsional stiffness is small compared to the bending stiffness.

Thin walled structures also present the warping of the cross sections. In this case the hypothesis of the cross sections remaining plane under stress can not be adopted and the warping stiffness must be taken into account in order to calculate the buckling loads. Wagner (1936) and Goodier (1942) first studied this problem and the equations for a general cross section are given as follows (Eqs. 2, 3, and 4). The displacements (u , and the angle of twist ϕ) of the cross section under buckling and the coordinates system are presented on Fig. (2). E is the Young's module and G is the shear module. M_x , M_y , are the bending moments and M_z , is the torsion moment. I_y is the inertia moment about the y -axis, I_t is the torsion inertia and I_w is the warping constant for the cross section.

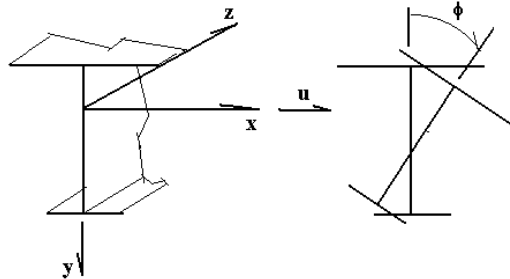


Figure 2. Displacements and co-ordinates system

$$EI_y \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_x \phi + M_y \tag{2}$$

$$(GI_t + M_x \beta_x) \cdot \frac{d\phi}{dz} - EI_w \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3} = M_x \cdot \frac{du}{dz} + M_z \tag{3}$$

The parameter β_x is a cross section property that takes into account that the shear and geometric centers of the cross section are not coincident. The expression for this parameter (Trahair & Anderson, 1972) is given below:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \cdot \left(\int_A x^2 y dA + \int_A y^3 dA \right) - 2y_o \tag{4}$$

In the Eq. (4), y_o is the shear center co-ordinate, taken from the geometric center of the cross section. If the cross section is symmetrical according to the x -axis β_x is null.

From the loading and constraints is possible to obtain the boundary conditions and a solution for the Eq. (2) and Eq. (3). The conditions for a simply supported beam (Fig. 3), with length equal to L , with the ends prevented from twisting but not to the warping, being under action of bending moments, the boundary conditions are:

$$p/z = 0, \quad u = \phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \tag{5a}$$

$$p/z = L/2, \quad \frac{du}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = 0 \tag{5b}$$

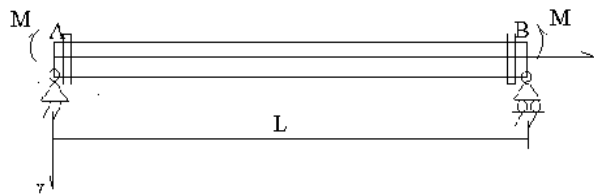


Figure 3. Simply supported beam with ends prevented from twisting and free to warp.

It is also known about the loading that:

$$M_x = M \tag{6a}$$

$$M_y = M_z = 0 \tag{6b}$$

With the boundary conditions given by Eq. (5) and the loads by Eq. (6) the solution of the Eq. (3) and Eq.(4), for the critical bending moment, M_c , is:

$$M_c = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{(EI_y GJ)} \cdot \left[\frac{\pi\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJL^2}\right)} \right] \quad (7)$$

Where the parameter, δ , is given by:

$$\delta = \frac{\beta_x}{L} \sqrt{\frac{EI_y}{GJ}} \quad (8)$$

Other boundary conditions lead to different solutions, either analytical or numerical, to the Eq. (3) and Eq. (4) (Trahair & Anderson, 1972). The solution previously presented was also adopted, as a validation tool for the finite elements models developed to study the buckling problem of the stiffeners.

3. Models testing

Two models were proposed to simulate the profile buckling behavior. In the first model only one reinforcing rib was considered. In this case the main hypothesis is that the whole profile works as a set of individual monosymmetrical I-beams. This first model will be referred as the single rib model.

The other model considered more than one reinforcing rib. The main objective of this model is to detect some of the buckled shapes for the profile that can not be obtained with the single rib model. The second model is referred as the two ribs model.

3.1 Single rib model – Description and results

In order to obtain results for the critical bending moments corresponding to the various winding diameters, a finite element model was made. In this model only one rib was considered (Fig. 4).

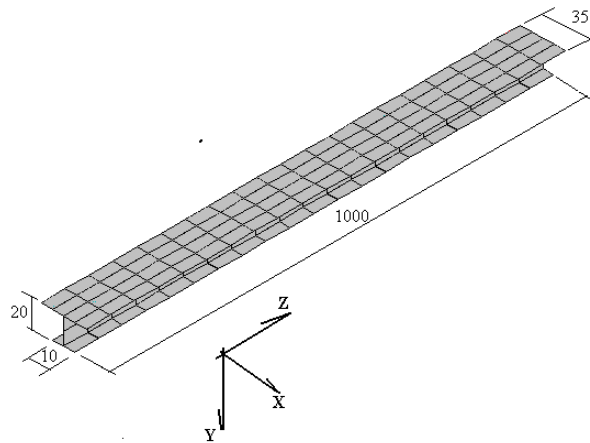


Figure 4. Finite element model for part of the plate with just one rib (Dimensions in mm).

The model employed 160 3D shell type elements and the ANSYS finite elements method (FEM) program was used. The web wall thickness was varied from 0.1mm to 0.8mm in intervals of 0.1mm. The flange thickness was kept equal to 0.8mm. To obtain the critical moments, the buckling analysis was performed using the eigensolution option available on the program. The loading is a couple of unitary bending moments applied at the beam ends (See Fig. 3). The moments bend the beam in such way the wider flange is in compression. The critical moment is the lowest obtained eigenvalue from the buckling analysis (SAS IP – Inc., 1996).

The material properties used were the ones of the PVC. Young's module, $E = 2800\text{N/mm}^2$, Poisson's ratio $\nu = 0.3$ and shear module, $G = 1077\text{N/mm}^2$.

The application of the FEM to this problem must be carried out with care. The existing non-linearities from the large deformations and displacements are one of the reasons for such caution. Chin and Al. (1994) propose the development of new kinds of finite elements to be used in this class of problem. It was decided to use a common finite element (3d shell) to keep this approach the most general as possible.

The first test was done in order to verify how is the variation of the critical bending moment for different values of the web thickness. A comparison was also made with the analytical expressions for the critical bending moment.

The results for this model are shown in the following table.

Table 1. Critical bending moment results

Web thickness (mm)	Critical Moment - FEM (N.mm)	Critical Moment Eq. (7) (N.mm)
0.1	193	1590
0.2	1134	1573
0.3	1516	1563
0.4	1557	1561
0.5	1575	1568
0.6	1598	1584
0.7	1629	1611
0.8	1661	1649

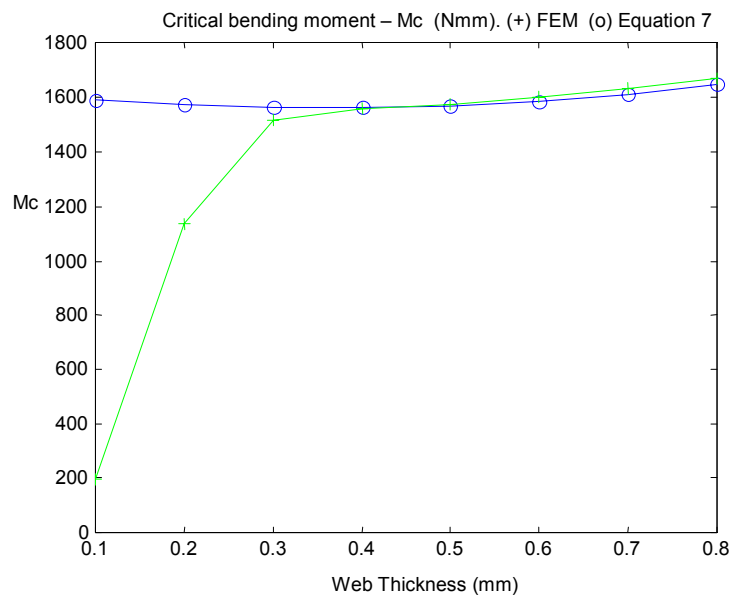


Figure 5. Critical bending moment X web thickness

From Fig. (5) it can be seen that the finite element model does not agree with the analytical one for all values of the web thickness. This happens not only to the value of the critical moment but also to the buckling mode shape. For a web thickness smaller than 0.3 mm the buckling mode obtained from the FEM was not the torsional-flexural. Instead, a local mode developed with only the web distorted as shown on Fig. (6).

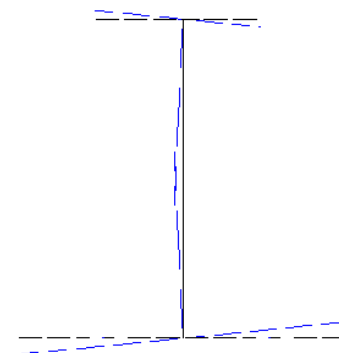


Figure 6. Buckled shape for the mid-span cross section

If other dimensions of the cross sections are changed and the web thickness is kept constant the same behavior does not shows up. For instance, for a web thickness equal to 0.8mm, the bottom flange width, a, was varied from 0 to 35 mm (Fig. 7) and the results are presented on Tab. (2).

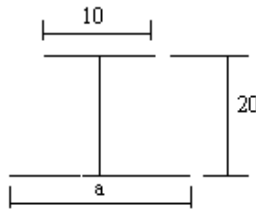


Figure 7. Cross section with varying bottom flange width (Dimensions in mm)

Table 2. Critical bending moment varying the bottom flange width

a (mm)	Critical Moment FEM (N.mm)	Critical Moment Eq. (7) (N.mm)
0	75	86
5	100	102
10	165	168
15	304	308
20	524	529
25	827	832
30	1.212	1.211
35	1.661	1.649

For all cases shown on Tab. (2) the buckling mode was the torsional-flexural. For other web thickness values the same behavior of the Tab. (2) was displayed. The buckling mode did not change and for small web thickness (less than 0.3 mm) the local buckling mode was present.

Figure (8) presents the results from Tab. (2). Instead of the flange width the monosymmetry index (Kaminski & Laterza, 1999), MI, was used on the figure x-axis. This parameter shows how a cross section is far from being symmetrical to a given axis. The expression for this parameter is given below:

$$MI = \frac{I_{ly}}{I_{uy} + I_{ly}} \tag{9}$$

Where I_{uy} is the inertia moment of the upper flange about the y-axis with this one passing on the geometrical center of the whole section (see Fig. 2). I_{ly} is the inertia moment of the lower flange about the y-axis. With two equal flanges the section is symmetrical and MI is equal to 0.5.

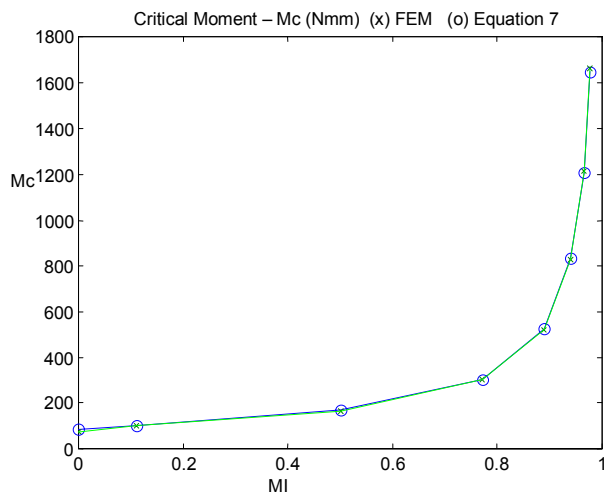


Figure 8 Critical bending moment varying the bottom flange width

From Fig. (8) it can be seen that even with the restrictions to the use of 3D shell elements the obtained results were close the analytical values obtained from Eq. (7).

3.2 Two ribs model – Description and results


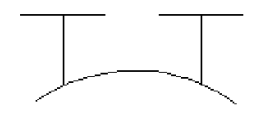


The next step was to model a profile with more than two reinforcing ribs. The strip with just a single rib was not enough to explain both quantitatively and qualitatively the observed behavior while winding the sections. For instance, some of the ribs buckle while others do not. The observed buckling mode also was a local one with only the ribs being distorted with small deformation in other parts of the section.

The model for the profile with two ribs is simply composed by two like the one presented on Fig. (4) joined together on the bottom flange. The dimensions were the same presented on Fig. (4) and 320 3D-shell elements were used. The same material properties values employed on the previous models were also used as well as the same analysis procedure on the FEM program.

Equation (7) was also used to perform the determination of the critical bending moment considering the torsional-flexural buckling behavior is the one presented by the structure.

The following table shows the obtained results considering that the web thickness was modified for both ribs.

Table 3. Results for the two ribs model

Web Thickness (mm)	Critical Moment FEM (N.mm)	Critical Moment Eq. (7) (N.mm)	Buckled shape (mid-span cross section)
0.80	5.840	31456	
0.40	4.507	22297	
0.10	149,95	16563	
0.25	2.046	19243	

As can be seen on Tab. (3) the flexural-torsional buckling mode is not the most critical case in the buckling of the two ribs section. Local modes of smaller order and critical load are prevailing. The presented modes are not a combination of the buckling modes (flexural-torsional or local) of the single rib case and the same applies for the critical moment.

4. Conclusions

From the results previously presented it is possible to conclude that the proposed flexural-torsional buckling model can not be adopted in every situation to represent the phenomena observed while bending the ribbed profiles as proposed on Kaminski & Laterza (1999).

Even if just a single rib is considered for some combinations of the cross section dimensions local buckling modes are more critical than the torsional-flexural mode. So, this mode can not be assumed at first hand to be the most critical on the design of the winded profiles. In order to determine if for a given winding diameter will happen buckling of the reinforcements a complete analysis of the possible buckling modes must be performed.

The behavior of the complete profile can not be assumed to be a combination of the response of part of this profile taken separately for an analysis. As it was shown from the model for the two ribs profile, the response of this structure in buckling can not be considered as a combination of the responses of parts of the profile whatever is the buckling mode considered.

It can be noticed that some of the displacements associated with the flexural-torsional buckling mode are under a more severe restriction when the profile is taken as a whole, since the stiffness was largely increased considering a wider bottom flange.

5. References

- Bleich, F., 1952, "The Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Co., New York, USA
- Chin, C.K., Al-Bermani, G.A., Kitipornchai, S., 1994, "Non-Linear Analysis of Thin-Walled Structures Using Plate Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp.1697-1711.
- Den Hartog, J.P., 1952, "Advanced Strength of Materials", 1st Ed., McGraw-Hill book Co., New York, USA.
- Goodier, J.N., 1942, "Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin-Walled Open Section Under Compressive and Bending Loads", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, ASME, pp. A103-A107.
- Kaminski, P.C., Laterza, L.B.M, 1999, "Análise de Flambagem de Lâminas Nervuradas em PVC", *Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Águas de Lindóia, SP.
- SAS IP – Inc., 1996, "ANSYS Structural Analysis Guide – Buckling Analysis, 2nd Edition, USA. (Program's manual ANSYS – Ver. 5.3)
- Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1961, "Theory of elastic stability", 2nd Ed., McGraw-Hill book Co., New York, USA.
- Trahair, N. S., Anderson, J. M., 1972, "Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers" *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, No. ST1, pp. 269-286.
- Wagner, H., 1936, "Torsion and Buckling of Open Sections", *Translated Technical Memorandum No. 807, NACA – National Advisory Committee for Aeronautics*

A Hybrid Method of Modal Synthesis with Branch Modes

Alberto C.G.C. DINIZ

University of Brasilia
Department of Mechanical Engineering
70910-900 Brasilia. DF. Brazil
E-mail: adiniz@unb.br

Fabrice THOUVEREZ

Ecole Centrale de Lyon
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes
BP 163, 69131 Ecully Cedex - France
E-mail: Fabrice.Thouverez@ec-lyon.fr

Abstract: *This paper considers the problem of modal synthesis of substructures with large interfaces. The modal synthesis methods are recognized for their ability to reduce the problem size, by using a reduced modal base to represent the motion equations of the analyzed substructures. In the case of structures with large interface between the substructures, the classical methods preserve the link coordinates, which are then in very great number in the condensed final system. Therefore, although the reduction of coordinates number brought by the classical method, the order of condensed model remains high. A modal synthesis method, based on hybrid technique of component mode synthesis using branch modes, is presented to simplify the dynamic analysis of the substructures with large interfaces. By substituting the branch modes to the modal components associated to the interface coordinates, this proposed method reduces considerably the total number of components used in the modal synthesis. These branch modes, very representative of the link interface dynamics, lead to equivalent results of those obtained by traditional methods, but with an important time computation reduction. We will emphasize the efficiency of this procedure, by comparison to traditional approaches by means of numerical tests.*

Keywords: *Component Mode Synthesis; Branch Modes; Substructuring*

1. Introduction

Component Mode Synthesis methods are techniques for the dynamic analysis of large structures that involve division into substructures or components. A given structure is subdivided into components or substructures which are analysed independently for natural and modes shapes. An approximate reduced model of each substructure is obtained by means of certain modal techniques. Finally the dynamic synthesis is performed, by coupling all substructures reduced equation of motion, and the global structure eigenproblem of reduced order is solved. The main advantage of the Component Mode Synthesis methods is the reduced computer time and memory required especially for large and complex structures. In addition, the vibration modes and natural frequencies of the substructures can be obtained by either numerical or experimental techniques. In the case of large projects, the structure is divided into several parts and the analysis is performed by distinct teams.

The 1960s and 1970s saw the development of several techniques for substructuring in structural dynamics. These classic methods are grouped in free-interface component mode methods (see e.g. Goldman, 1969; Hou, 1969; Rubin, 1975) and fixed-interface component mode methods (see e.g. Hurty, 1965; Craig & Bampton, 1968). A third group of methods use the hybrids conditions of coupling the substructures (see e.g. Gladwell, 1964; MacNeal, 1971; Hale & Meirovitch, 1982 and Jézéquel, 1985).

The methods with fixed-boundary modes uses the vibration modes put forward by fixing the substructure on its boundary with the neighboring substructures and the static modes resulting from unit forces on the boundary degrees of freedom. The methods with free-boundary modes uses the vibration modes of the substructures put free on its interfaces with the neighboring substructures. The hybrid methods use a combination of vibration modes with free and fixed interface and other special modes as the branch modes, the loaded modes or residual flexibility.

The Component Mode Synthesis methods are the variations of the Rayleigh-Ritz method where the basic idea is that the substructures are projected from the physical space onto the reduced modal subspace, spanned by a set of a few lower mode shapes and other complementary modes. These techniques improve the reduction of the structures governing equations.

Moreover, in the case of structures with great interfaces between their substructures, the traditional methods of modal synthesis lose their effectiveness because they need the conservation of the interfaces DOF, which are then in very great number.

In order to avoid these difficulties, we propose a new method of component mode synthesis, based on the Double Component Mode Synthesis suggested by Jézéquel and H. Setio (1994) combined with an special definition of branch modes. The branch modes, introduced by Gladwell (1964), utilise the fictitious boundary conditions to take into account the influence of the adjacent substructures.

In the proposed method the modal synthesis is made in two stages. The first modal synthesis is classical and consists on representing the displacements of interior points of the structure by free or fixed-interface modes. The second modal synthesis consists on describing the interface dynamic by the branch modes defined by using the simplified model of the assembled structure statically condensed on the interfaces. The quality of the modes thus defined, makes possible to use a reduced number of branch modes. The proposed method permits to treat structures with large interfaces between the substructures.

2. Modal Synthesis equations

All the Component Mode Synthesis methods have three steps: substructuring, modal analysis of substructures and modal synthesis, employing a reduced system of equations. In this section we present the general equations of each one of these step.

The equations of motion of a structure, which have been discretized by finite elements, can be written in the matrix form:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

Where $[M]$, $[C]$ and $[K]$ are mass, damping and stiffness matrices, $\{u(t)\}$ and $\{f(t)\}$ are dynamic displacement and load vectors respectively.

2.1 Substructuring

Applying the substructuring technique, the structural matrices can be obtained from assembling the matrices of the substructures:

$$[K] = \sum_{s=1}^m [\alpha_s]^T [K_s] [\alpha_s] \quad (2)$$

$$[M] = \sum_{s=1}^m [\alpha_s]^T [M_s] [\alpha_s] \quad (3)$$

$$[C] = \sum_{s=1}^m [\alpha_s]^T [C_s] [\alpha_s] \quad (4)$$

$$\{f(t)\} = \sum_{s=1}^m [\alpha_s]^T \{f_s(t)\} \quad (5)$$

Where the index "s" indicates the structural matrices of the s-th substructure. $[\alpha_s]$ is the Boolean transformation matrix of size $(N_s \times N)$ associate at the s-th substructure, which permits to assembly the substructures. N_s is the number of degrees of freedom of the s-th substructure and N is the total number of degrees of freedom of the structure. All elements in $[\alpha_s]$ are zero except if the i-th local degree of freedom of the s-th substructure is the j-th global degree of freedom of the structure. In this case, the element α_{ij} is unity. "m" is the total number of substructures.

2.2 Modal Analysis of substructures

Applying the Rayleigh-Ritz method we utilize a few mode shapes with the lowest frequencies of each substructure as the basic vectors for the generalized modal space. The mode shapes of the substructure are defined as the solution of the eigenproblem of the undamped substructure. To the s-th substructure we have the following eigenvalue equations:

$$([K] - \lambda_i [M])\{\phi_i\} = \{0\} \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (6)$$

The displacement of the s-th substructure is expressed in terms of the modal matrix $[\Phi]$ formed by the first lower mode shapes:

$$\{u_s(t)\} = [\Phi_s]\{\eta_s\} \quad \text{with} \quad [T_s] = [\Phi_s] \quad (7)$$

each matrix $[T_s]$ is formed by few modes and its size is given by: $\dim[T_s] = N_s \times R_s, R_s < N_s$. Where R_s is the number of retained modes to the s-th substructure and $\{\eta_s\}$ is the generalized coordinates vector of the s-th substructure.

Thus, the displacement vector of the assembled structure is given by:

$$\{u\} = [T]\{\eta\} \quad \text{with} \quad [T] = \sum_{s=1}^m [\alpha_s^*]^T [\Phi_s] [\alpha_s^*] \quad (8)$$

where $\{\eta\}$ is the generalized coordinates vector of the total structure ($\dim\{\eta\} = R = \sum R_s$). The matrices $[\alpha_s^*]$ has analogous form and function to $[\alpha]$ matrix: to represent the relationship between the global generalized coordinates and the local generalized coordinates to the s-th substructure. $[T]$ ($\dim[T] = R \times N$, $R < N$) is the transformation matrix of the structure from the physical coordinates $\{u(t)\}$ to the generalized coordinates $\{\eta\}$.

2.3 Reduced equation system

The substitution of Eq. (8) into Eq. (1) and premultiplying by $[T^T]$ yields the governing dynamic equations for the whole structure:

$$[M^*]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C^*]\{\dot{\eta}(t)\} + [K^*]\{\eta(t)\} = \{f^*(t)\} \quad (9)$$

where $[M^*] = [T^T][M][T]$, $[C^*] = [T^T][C][T]$, $[K^*] = [T^T][K][T]$ and $\{f^*(t)\} = [T^T]\{f(t)\}$. The transformation matrix $[T]$ yields to a reduction of the problem equations number. The reduced matrices $[M^*]$, $[C^*]$ and $[K^*]$ have dimensions ($R \times R$).

From Eq. (2) to Eq. (5), the reduced generalized matrices can be calculated for the substructures matrices:

$$[K^*] = \sum_{s=1}^m [T^T][\alpha_s]^T [K_s] [\alpha_s][T] \quad (10)$$

$$[M^*] = \sum_{s=1}^m [T^T][\alpha_s]^T [M_s] [\alpha_s][T] \quad (11)$$

$$[C^*] = \sum_{s=1}^m [T^T][\alpha_s]^T [C_s] [\alpha_s][T] \quad (12)$$

$$\{f^*(t)\} = \sum_{s=1}^m [\alpha_s]^T \{f(t)\} \quad (13)$$

The transformation matrix $[T]$, in the Component Mode Synthesis methods, contains a selected set of few lower mode shapes and other supplementary modes. The several methods of modal synthesis differ in the form as the transformation matrix $[T]$ is defined. The Craig & Bampton method utilizes a transformation matrix formed by the fixed-interface modes and the constraint modes (Craig & Bampton, 1968). The MacNeal method utilizes the free-interface modes and the residual flexibility of modes (MacNeal, 1971). In the next section we present a new method, where a new transformation matrix will be defined.

3. The proposed method

The application of the classic methods, as Craig & Bampton, MacNeal and other, in dynamic analysis of structures with long connection interfaces requires a great number of compatibility equations to the interface DOFs for right description of the dynamics of the assembled structure. The Craig & Bampton method uses the static modes resulting from unit forces on the interface DOFs. The MacNeal method uses the residual flexibility associated to the interface DOFs. Thus the reduced system of dynamic equations, in the classical methods, preserves the equations associated to the link coordinates.

In the Double Component Mode Synthesis method proposed by Jézéquel and Setio (1994) were used the branch modes to complete the dynamic description of the substructures. The branch modes of a substructure are the normal modes obtained by using the fictitious boundary conditions which take account of the influence of the adjacent substructures (Gladwell, 1964). Jézéquel and Setio (1994) use the branch modes obtained by attaching known mass or elastic members along its link interface with adjacent substructure.

Moreover, like the classical methods, the method using the branch modes requires the taking into account of all the static functions of interfaces, are they displacements or contraites. They have thus, the same limitations as the classical methods to treat structures with great interfaces of connection between substructures.

In this paper we propose a new method which makes possible to reduce the number of used branch modes and the size of the condensed problem. To keep a good representation of the dynamics of the problem, the branch modes are defined by using the simplified model of the assembled structure statically condensed on the interfaces. In this case the branch modes can be defined as the displacement modes of the assembled structure, with perfect coupling of the substructures, statically condensed on the interfaces.

Likewise the Jézéquel and Setio method, the proposed method corresponds to a double modal synthesis method, where the reduced equations are obtained in two stages. The first stage is characterized by the calculation of the free or clamped

modes of the substructures. In the second stage we determine the branch modes by calculating the displacement modes of the structure condensed on the interface.

Since we are interested in presenting a component modal synthesis method to calculate the modes and frequencies of structures, only the equations of undamped vibrations will be considered.

In order to explicit the interiors and interface DOFs and better to present the method, the dynamic displacement vector can be partitioned as follows:

$$\{u\} = \{u_F \ u_I\}^T \quad (14)$$

Thus, the partitioned undamped dynamic equations are:

$$\begin{bmatrix} M_{FF} & M_{FI} \\ M_{IF} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_F(t) \\ \ddot{u}_I(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI} \\ K_{IF} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F(t) \\ u_I(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

where the index F indicates the set of interface coordinates and the index I the set of interior coordinates of the substructure. Following we present the proposed method to fixed and free-interface cases.

3.1 The fixed-interface method

In this case we propose to use a transformation matrix defined by the fixed-interface modes of substructures and the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interfaces. Thus, the transformation equation (8) is done by:

$$\{u_s\} = \begin{Bmatrix} u_{Fs} \\ u_{Is} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_F \\ \Theta & \Psi_I \end{bmatrix} \{\eta_s\} \quad \text{with} \quad [\Theta] = \sum_{s=1}^m [\alpha_s^*]^T [\Theta_s] [\alpha_s^*] \quad (16)$$

where $[\Theta]$ is the matrix of fixed-interface modes of substructures and $[\Psi]$ is the matrix formed by the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interfaces. The matrix $[\Psi]$ is partitioned according to interface and interiors structure DOFs.

3.2 The free-interface method

The free-interface substructure methods have difficulty in representing local flexibility at interface points. In order to avoid this problem, MacNeal proposes to substitute the truncated higher modes to the residual flexibility. The MacNeal method assures the very good coupling conditions between the substructures. Thus in the application of the proposed method in the case of free-interface modes, the modal synthesis is performed in two stages: in the first reduction we apply the MacNeal method and in the second reduction we use the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interface.

Let $[\Phi]$ be total modal shape matrix of a substructure (see Eq. (7)). It can be divided in two parts:

$$[\Phi] = [\Phi_r \ \Phi_t] \quad (17)$$

where $[\Phi_r]$ are the retained mode shapes with lower frequencies, which are used to define the reduced generalized space in the Rayleigh-Ritz method, and $[\Phi_t]$ are the truncated higher modes shapes. In this case the whole transformation equation is write:

$$\{u\} = [\Phi_r] \{\eta_r\} + [\Phi_t] \{\eta_t\} \quad (18)$$

Applying the MacNeal method, the second term of the Eq. (18) is approximate by the flexibility associated to the truncated higher modes shapes (Craig & Chang, 1976):

$$[\Phi_t] \{\eta_t\} \approx [G_t] \{f\} \quad (19)$$

where $[G_t]$ is the flexibility matrix associated to the truncated higher modes shapes and $\{f\}$ are the interface loads vector.

Substituting Eq. (19) into Eq. (18) and expliciting the interior and interface DOFs (see Eq. (15)), the transformation equation is done by:

$$\begin{Bmatrix} u_F \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{FL} \\ \Phi_{IL} \end{bmatrix} \{\eta_L\} + \begin{bmatrix} G_{tFF} & G_{tFI} \\ G_{tIF} & G_{tII} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

where the index L indicates the retained free-interface modes number and the $\{\eta_L\}$ are the generalized coordinates associated to the free-interface modes.

From the second row of Eq. (20), the interface force $\{f\}$ can be written as:

$$\{f\} = [G_{t_{FF}}]^{-1} \{u_F\} - [G_{t_{FF}}]^{-1} [\Phi_{FL}] \{\eta_L\} \quad (21)$$

Thus, the transformation equation (8) in the MacNeal method is done by:

$$\begin{Bmatrix} u_F \\ u_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{FF} & 0_{FL} \\ B_{IF} & C_{IL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_F \\ \eta_L \end{Bmatrix} \quad \text{with: } [B_{IF}] = [G_{t_{IF}}][G_{t_{FF}}]^{-1} \text{ and } [C_{IL}] = [\Phi_{IL}] - [G_{t_{IF}}][G_{t_{FF}}]^{-1}[\Phi_{FL}] \quad (22)$$

Equation (22) show that the reduced system obtained by the MacNeal method retain the interface DOFs ($\{u_F\}$). In the proposed method a second reduction is performed by using the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interface:

$$\begin{Bmatrix} u_F \\ \eta_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{FC} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_C \\ \eta_L \end{Bmatrix} \quad (23)$$

and the final transformation matrix in the free-interface case to the proposed method is given by:

$$\begin{Bmatrix} u_F \\ \eta_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_F & 0 \\ B_{IF}\Psi_{FC} & C_{IL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_C \\ \eta_L \end{Bmatrix} \quad (24)$$

where the index "C" indicates the condensed branch modes number and $\{\eta_C\}$ are the generalized coordinates associated to the branch modes.

In this case the reduced equations system is function of the free-interface modes and the branch modes which are in least number that the interface DOFs.

In the following section, this proposed method is applied on two different double plate structures.

4. The double plate structures examples

The proposed method is tested on two simple examples : two plates assembled, to the first case, in coplanar position and, to the second case, in perpendicular position (see figure 1). In the coplanar case the plates are uniforme-discretized by using shell elements with 3 DOF to nodes. The assembled plate comprises 546 DOF, of which 24 are on the link interface. To ensure the conditions of assembly, the perpendicular case uses 6 DOF per node, therefore the assembled plate has 1092 DOF, including 48 on the link interface. In the two cases we calculate the frequency and the deformed shape mode by using the proposed method with free and fixed modes.

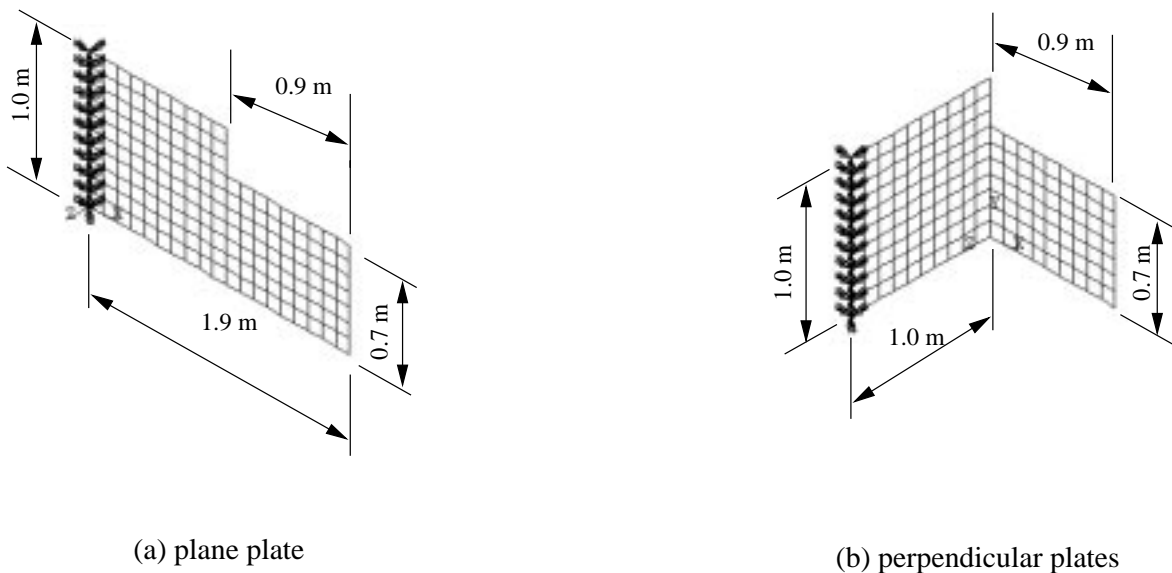


Figure 1. The double plate structures exemples

The results are compared to the classical methods. The presented results are limited to the 5th and 15th modes of vibrations. In the 5th mode the link interface has no deformations, while the 15th mode is characterized by large deformation of the link interface (see figure 2).

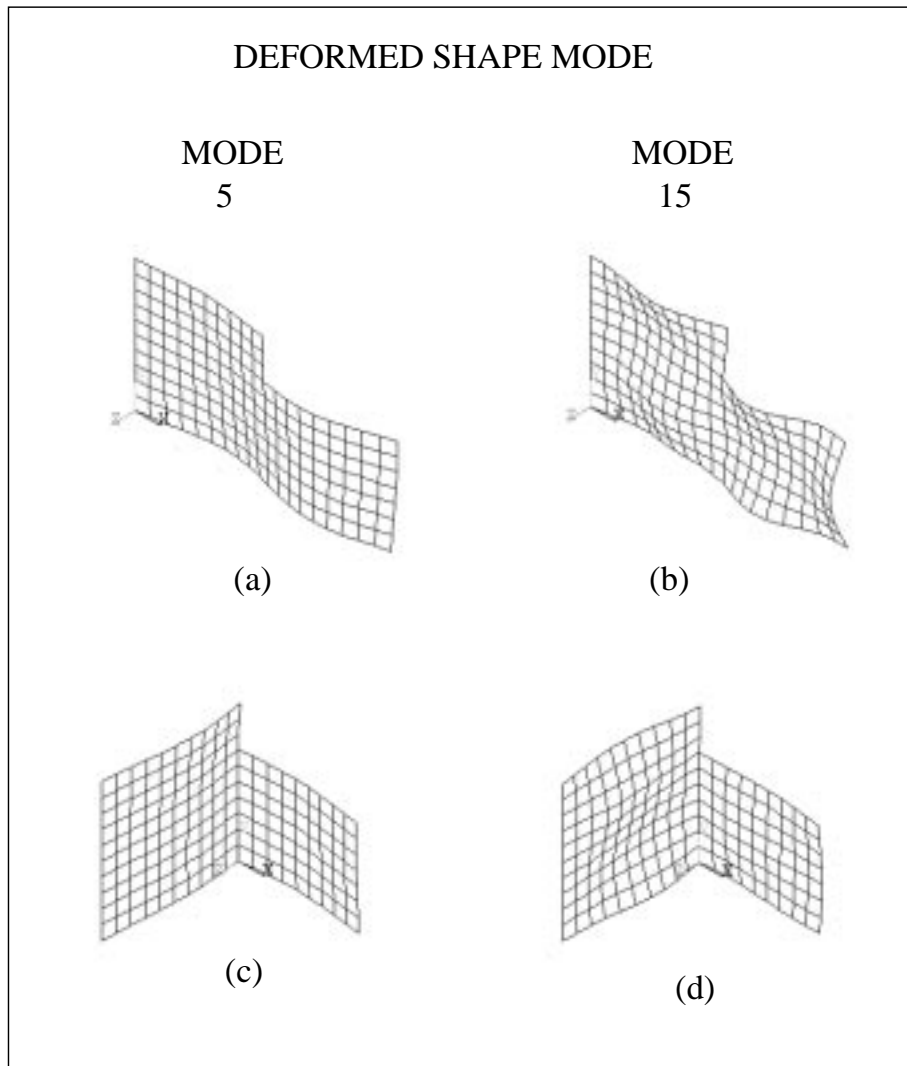
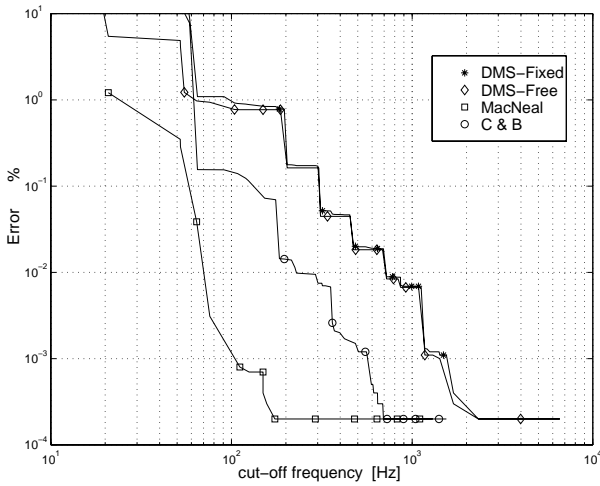
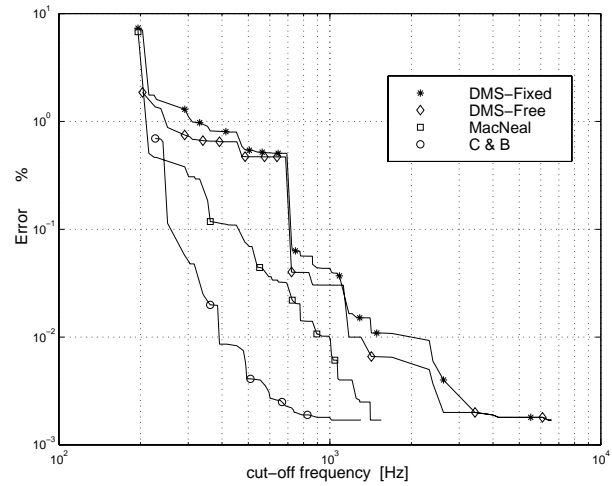


Figure 2: Deformed shape for the 5th and 15th modes to the two plaques exemple

We compare on one hand, the evolution of the errors on the calculated frequencies by modal synthesis and those obtained by finite element method; in addition, the cost of calculation of the various methods. In the following figures, " ε " corresponds to the error between the solutions by modal synthesis and that by finite elements. The finite elements solution was obtained by using all structures DOFs. The cut-off frequency " f_c " corresponds to the limiting frequency for the modal analysis of the substructures and the determination of the branch modes. In other words, to each modal synthesis calculation, we use all the modes whose frequencies are lower to the frequency " f_c ". The figure 3 presents results for the coplanar case and the figure 4 for the perpendicular case.

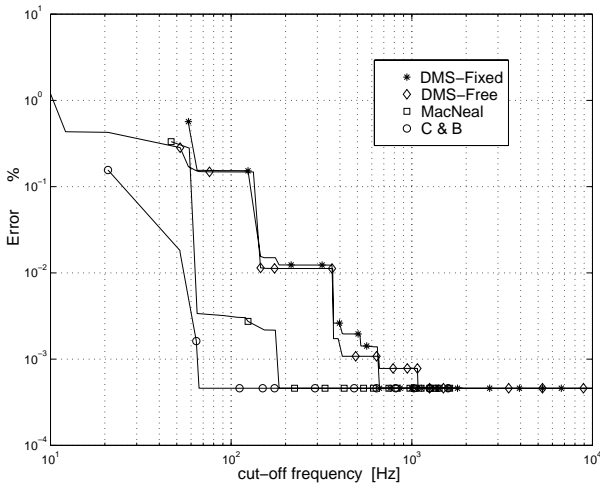


(a) 5th frequency

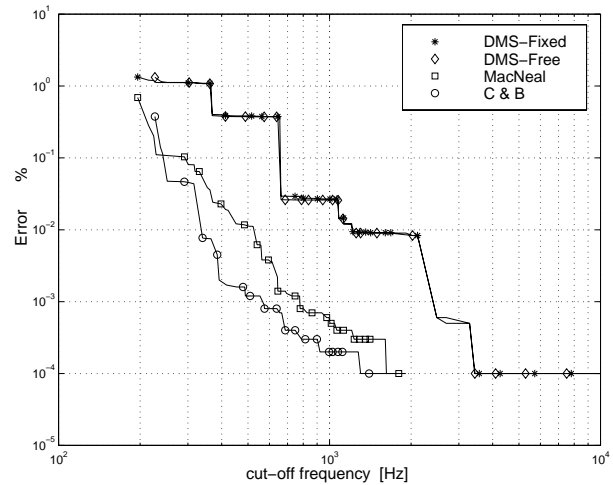


(b) 15th frequency

Figure 3: Error evolution to the plane plate; $\varepsilon = \frac{f_{MS} - f_{FE}}{f_{FE}} \cdot 100\%$



(a) 5th frequency



(b) 15th frequency

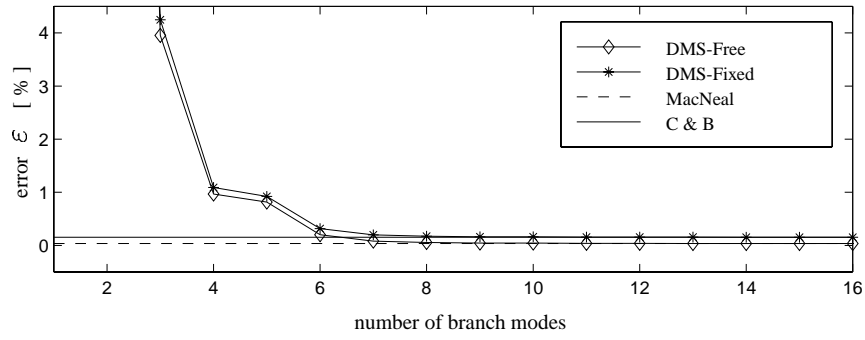
Figure 4: Error evolution to the perpendicular plates; $\varepsilon = \frac{f_{MS} - f_{FE}}{f_{FE}} \cdot 100\%$

The method of Craig and Bampton leads to better results in the perpendicular case; method of MacNeal, in the coplanar case. On the other hand, the results by double modal synthesis are equivalent that one uses the fixed or free modes of interface. We also see that, for the whole of the methods, the solutions converge towards the solution by finite elements with the increase of the used modes number.

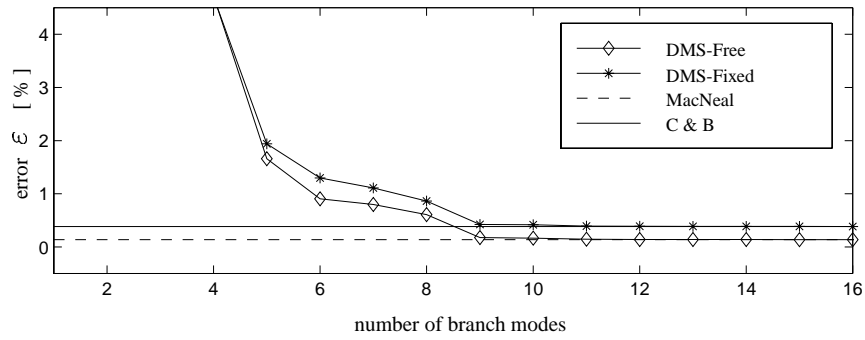
If the figures show that the level of error in the double modal synthesis is always superior to those of the traditional methods, they also show that the modes of branch, corresponding to the condensation of the structure assembled into link interfaces, are modes of high frequency. For small values of f_c , we use then, a low number of modes of branch, which explains the levels of error of the proposed method.

On the other hand, if we fix a number of modes for the description of the substructures (of free modes, for the plane case; or of fixed modes, for the perpendicular case), the results obtained by the proposed method, with a low number of branch modes, are equivalent to those of the traditional methods. This property of the proposed method is showed in the figures 5 and 6.

Figure 5 shows the results for the plane structure. In all methods, we have used the same number of modes (free or fixed) to describe the dynamic behavior of the substructures; namely: 3 modes for each substructure, for the 5th eigenvector, and 9 modes for each substructure, for the 15th eigenvector. Figure 6 shows the results for the perpendicular case. We have preserved the same number of modes for the description of the substructures as those of the plane case.

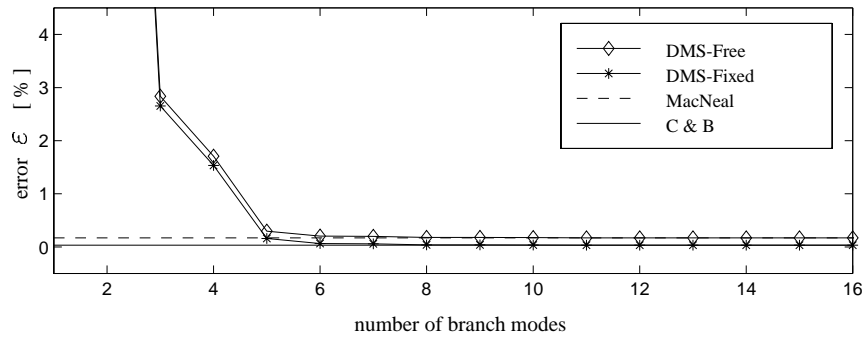


(a) 5th frequency

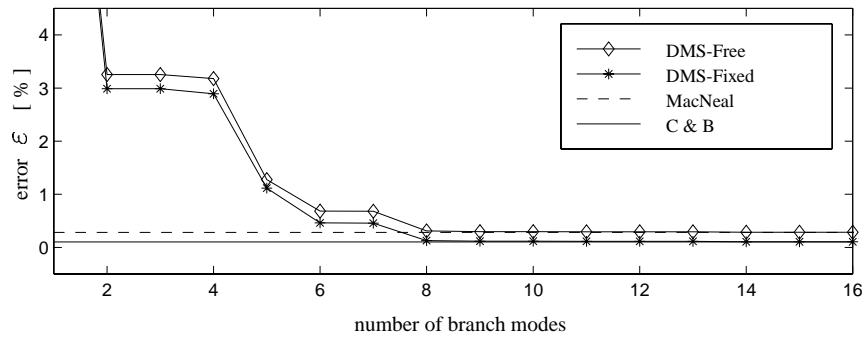


(b) 15th frequency

Figure 5: Convergence of the proposed method to the plane plate



(a) 5th frequency



(b) 15th frequency

Figure 6: Convergence of the proposed method to the perpendicular plates

In the two figures, we notice that with a low number of branch modes we arrive to an equivalent level of error to that of the traditional methods.

The Craig and Bampton method always uses static modes of connection in an identical number to that of interface DOF. Same way, MacNeal method introduces, in the reduced system, terms corresponding to the residual flexibility in an identical number to that of interface DOF. The proposed method utilizes the modes of the assembled structure condensed to the interface instead of the static or flexibility modes. This substitution, makes possible to reduce the components number of the condensed system.

Considering an error " ϵ " inferior to 0.2% for the 5th frequency calculation, the total number of the utilized components to each method is given in table 1.

Table 1: components number for the 5th frequency calculation.

	components number of the reduced system		
	MacNeal	Craig & Bampton	proposed method
coplanar case	33	30	15
perpendicular case	72	66	27

The reduced calculation cost of the proposed method is showed in figure 7. In this figure, the reduced system size " R " is the total number of all the utilized components: substructure modes (free or fixed), rigid-body modes, static modes and components of flexibility, according to whether they are used in the method in question.

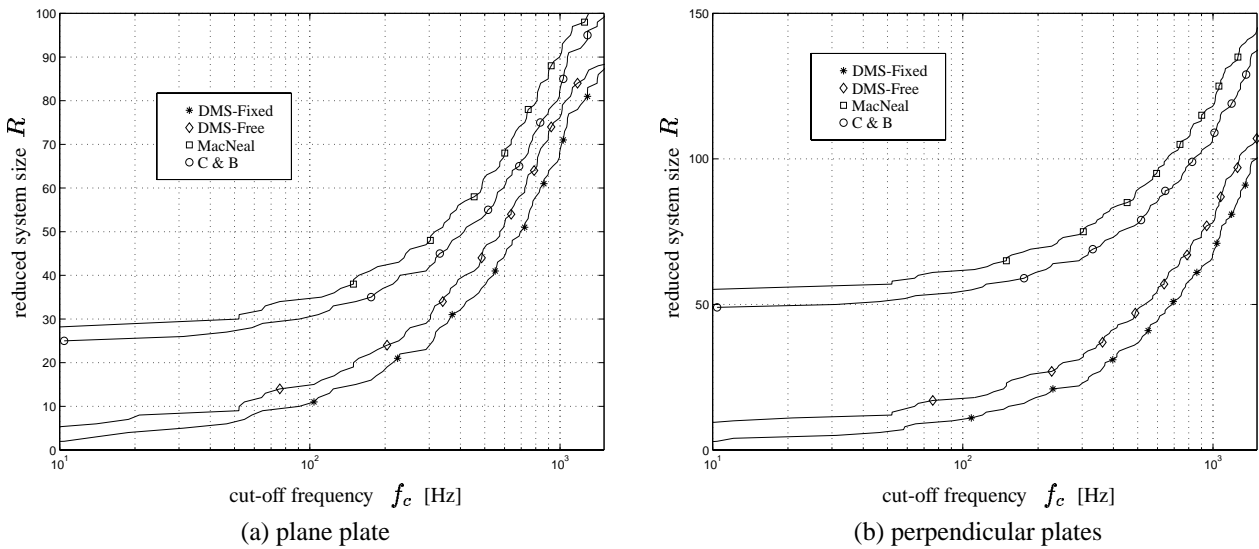


Figure 7: Calculated cost evolution to the two examples.

5. Conclusion

In this study a new hybrid method of component mode synthesis with branch modes is presented. In this method the branch modes are defined as the displacement modes of the assembled structure, with perfect coupling of the substructures, statically condensed on the interfaces. These branch modes allow a good representation of the dynamic of the interfaces. The quality of the modes makes possible to use a reduced number of equations to solve the problem. Thus, in the case of structures with free-interfaces, we write the displacement as a linear combination of the free-interface modes and the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interfaces. In the case of structures with fixed-interfaces we write the displacement as a linear combination of the fixed-interface modes and the displacement modes of the assembled structure, statically condensed on the interfaces.

Numerical tests have also been carried out in order to evaluate the efficiency of the proposed method. The results show the efficacy of the proposed method compared to the classical methods. We arrive to an equivalent level of error that of the traditional methods with a smallest component modes number to the condensed system.

This method can be applied in the identification of joint parameters, updating model of joints and optimization of the joints design parameters, of the complex structures with the large interfaces of liaison between its parts.

6. Acknowledgments

The first author gratefully thanks, therefore, the CAPES and the Ministry for the Education of Brazil for their financial support, grant BEX 1796/95-13.

7. References

- Craig-Jr, R.R. and Bampton, M.C.C., 1968, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 6, Num. 7, pp. 1313-1319
- Craig-Jr, R.R. and Chang, C.J., 1976, "Free-Interface methods of substructure coupling for dynamic analysis", *AIAA Journal*, Vol. 14, Num. 11, pp. 1633-1635.
- Gladwell, G.M.L., 1964, "Branch Mode Analysis of Vibrating Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, Num. 1, pp. 41-59
- Goldman, R.L., 1969, "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning", *AIAA Journal*, Vol. 7, Num. 6, pp.1152-1154
- Hale, A.L. and Meirovitch, L., 1982, "A General Procedure for Improving Substructures Representation in Dynamic Synthesis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, Num. 2, pp. 269-287
- Hou, S. 1969, "Review of Modal Synthesis Techniques and a New approach", *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 40, Num. 4, pp. 25-39
- Hurty, W.C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", *AIAA Journal*, Vol. 3, Num. 4, pp. 678-685
- Jézéquel, L., 1985, "A Hybrid Method of Modal Synthesis using Vibration Tests", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 100 Num. 2, pp. 191-210
- Jézéquel, L. and Setio, H.D., 1994, "Modal Synthesis Methods Based on Hybrid Models, part 2 : numerical tests and experimental identification of hybrid models", *Journal of Applied Mechanics - ASME*, Vol. 61, Num. 1, pp. 109-116
- MacNeal, R.H., 1971, "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", *Computers and Structures*, Vol. 1, Num. 4, pp. 581-601
- Rubin, S., 1975, "Improved Component Mode Representation for Structural Dynamic", *AIAA Journal*, Vol. 13, Num. 8, pp.995-1006

USO DE REDES NEURAIS ARTIFICIAIS RECORRENTES PARA REPRESENTAR O COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO NÃO LINEAR

Marcelo Massarani

Escola Politécnica da USP – São Paulo - SP
marcelo.massarani@poli.usp.br

Paulo Carlos Kaminski

Escola Politécnica da USP – São Paulo - SP
pckamins@usp.br

Resumo. Este trabalho apresenta a aplicação de redes neurais artificiais recorrentes para representar o comportamento viscoelástico não linear dos materiais. Algumas arquiteturas de redes neurais artificiais são desenvolvidas e verifica-se sua adequação para esta aplicação. As maiores dificuldades estão na definição da arquitetura das redes neurais e na obtenção de dados para o treinamento das mesmas. A grande vantagem observada é que as redes neurais, uma vez treinadas, são facilmente usadas, sem a necessidade de aproximações numéricas e podem ser facilmente incorporadas em um programa de computador para auxílio a projeto.

Palavras-chave: redes neurais artificiais, viscoelasticidade, equações constitutivas.

1. Introdução

Os modelos constitutivos conhecidos ainda têm grande dificuldade para representar alguns comportamentos viscoelásticos. Por exemplo as deformações causadas por carga e posterior descarga de um material (fluência e recuperação). Nesse caso específico não foi encontrado nenhum modelo analítico que represente para um dado material a fluência e a recuperação de uma forma geral.

A falta de dados de ensaios de materiais nas condições de fluência e relaxação para serem usados no treinamento das RNA levou à adoção hipóteses para gerar um modelo constitutivo como fonte de dados. O modelo resultante exibe características não lineares o que colabora para as eventuais conclusões a respeito das capacidades das RNA's utilizadas neste exemplo.

2. Redes Neurais Recorrentes

As RNA multi-camadas para frente podem ser modificadas para operar de forma recorrente através da conexão da saída de um ou mais neurônios na entrada de um ou mais neurônios na mesma camada ou em camadas anteriores. Estas modificações podem incluir ligações de realimentação para o próprio neurônio e conexões laterais entre neurônios de uma mesma camada. As ligações de realimentação na RNA resultam em mudanças significativas na forma de operação. RNA's recorrentes exibem um comportamento dinâmico. Podem mapear funções do tempo e/ou espaço o que as torna capazes de realizar tarefas mais complexas do que as RNA não recorrentes. Por exemplo, podem aprender seqüências temporais, ou seja, padrões dependentes do tempo ou do contexto.

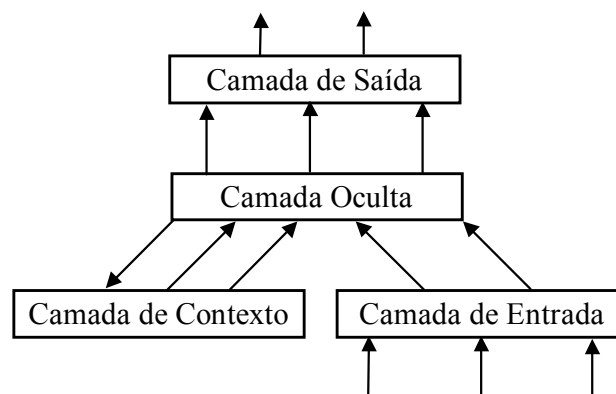


Figura 1 Exemplo de RNA recorrente

As RNA usadas nesta aplicação foram propostas por Elman (1991,1993). Possuem realimentação parcial e por isso são chamadas RNA recorrentes simples. As saídas dos neurônios da camada oculta realimentam o próprio neurônio através de unidades de armazenamento que formam a chamada camada de contexto Fig. (1). Os pesos das ligações a partir da camada oculta para a camada de contexto são constantes. Todos os outros pesos são ajustados por retro-propagação de erros.

O processamento dos sinais é feito em duas etapas. Na primeira etapa, no instante $t-1$, os sinais das camadas de entrada e de contexto são distribuídos para os neurônios da camada oculta. Na segunda etapa os sinais da camada oculta são enviados para a camada de saída no instante t . Ao mesmo tempo, os valores de saída dos neurônios da camada oculta são armazenados nas unidades de contexto. Novos valores de entrada e os valores armazenados nas unidades de contexto são enviados para a camada oculta dando início a um novo ciclo no instante $t+1$.

3. O material (Massarani, 1998)

A falta de dados de ensaios de fluência de materiais viscoelásticos nas condições de carga e descarga e também a falta de um modelo constitutivo capaz de representar o comportamento do material foram os motivos da adoção de um “pseudo-material” como fonte de dados para treinamento. Como hipóteses básicas temos as seguintes: o material obedece o modelo constitutivo proposto por Glockner (1987,1990) e para condições de carregamentos complexos (carga/descarga, variações de tensão) vale o Princípio da Superposição de Boltzmann. Segundo Ward (1983), estas hipóteses podem aproximar o comportamento à fluência de um material.

Glockner propôs um modelo constitutivo que considera que a taxa de deformação total de um material é a soma de três parcelas: uma taxa de deformação elástica, uma taxa de deformação recuperável (reversível) e uma taxa de deformação permanente (irreversível) como indicado na Eq. (1).

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{v_1} \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma^n(\tau) j(t-\tau) d\tau + \frac{1}{v_2} \sigma^n(t) \quad (1)$$

onde E , n , v_1 e v_2 são parâmetros do material.

Para as condições de um teste de fluência à tensão constante σ_0 , a Eq. (1) fica

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0^n}{v_1} j(t) + \frac{\sigma_0^n}{v_2}, \quad (2)$$

e após a integração

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0^n}{v_1} J(t) + \frac{\sigma_0^n}{v_2} t \quad (3)$$

onde

$$J(t) = \int_0^t j(\tau) d\tau. \quad (4)$$

A função $j(t)$ é normalizada de forma que $j(0)=1$ e ainda adota-se $j(t)$ tal que $j(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$. Para uso na aplicação presente a função $j(t)$ pode ser aproximada por

$$j(\bar{t}) = \frac{1}{(1 + 0.5\bar{t})^2} \quad \text{com} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_1} \quad (5)$$

onde t_1 é um parâmetro obtido do ensaio do material.

O Princípio da Superposição de Boltzmann considera que cada variação no valor da tensão gera uma contribuição independente na deformação total durante a fluência. Para acréscimos de carregamentos $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$, etc. nos instantes τ_1 , τ_2 , τ_3 , etc. a deformação será:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & \left[\frac{\Delta\sigma_1}{E} + \frac{\Delta\sigma_1^n}{v_1} J(t-\tau_1) + \frac{\Delta\sigma_1^n}{v_2} (t-\tau_1) \right] + \\ & + \left[\frac{\Delta\sigma_2}{E} + \frac{\Delta\sigma_2^n}{v_1} J(t-\tau_2) + \frac{\Delta\sigma_2^n}{v_2} (t-\tau_2) \right] + \\ & + \left[\frac{\Delta\sigma_3}{E} + \frac{\Delta\sigma_3^n}{v_1} J(t-\tau_3) + \frac{\Delta\sigma_3^n}{v_2} (t-\tau_3) \right] + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

O modelo constitutivo resultante das hipóteses discutidas representa a viscoelasticidade não linear, já que o Princípio da Superposição de Boltzman é atendido somente em parte.

O material escolhido foi o asbesto, cujos parâmetros foram determinados por Glockner (1987):

$$E = 8,1 \text{ GPa}$$

$$n = 1,4$$

$$v_1 = 8,67 \cdot 10^6 \text{ MPa}^n \cdot \text{h}$$

$$v_2 = 354 \cdot 10^8 \text{ MPa}^n \cdot \text{h}$$

$$t_1 = 100 \text{ h}$$

Com a Eq. (3), a Eq. (6), e os parâmetros do material, podem-se determinar as deformações do material ao longo do tempo sob condições de carregamento uniaxial.

4. O carregamento (Massarani, 1998)

Um total de 60 histórias de carregamentos foram geradas aleatoriamente por um programa de computador. Destas, 50 fazem parte do conjunto de dados de treinamento (Tab.(1)) e 10 do conjunto de dados de teste. Cada história pode ter de nenhuma até 4 variações no valor da tensão e possuem 100 pontos no intervalo de 0 a 10000 horas (Fig.(2) e Fig.(3))

Tabela 1 - Histórias de carregamentos para treinamento - tempo em horas e tensão em MPa.

história	tempo 1	tensão 1	tempo 2	tensão 2	tempo 3	tensão 3	tempo 4	tensão 4	tempo 5	tensão 5
1	0	30	4900	20						
2	0	12	7800	19	8200	30				
3	0	27	7400	11						
4	0	21	500	30	2200	2	2800			
5	0	23	1200	28	4900	11				
6	0	30	2600	6	3300	15				
7	0	13	700	18	1900	4	7700	30	9200	28
8	0	17	2500	30	7000	28	8800	9		
9	0	11	9200	30						
10	0	30								
11	0	5	7400	11						
12	0	13	3200	0	3600	28	4400	15	7300	20
13	0	27	2600	30	6700	28				
14	0	30	1800	3						
15	0	20	1200	9	2900	28	5000	30		
16	0	23	700	30						
17	0	28								
18	0	19	2600	0						
19	0	27	300	30						
20	0	11	3100	30	6900	14	9300	26		
21	0	17	1300	10	2700					
22	0	5								
23	0	16								
24	0	7	3200	22	9500	30				
25	0	24	5000	20						
26	0	12								
27	0	16	1700	0	7000	1	7600	0		
28	0	22	4700	29	7900	30				
29	0	17	3500	22	3700	30				
30	0	15	4800	30	5600	18	6100	3	9600	
31	0	0								
32	0	14	9800	30						
33	0	23	4100	27	4400	30	8400	27	8500	14
34	0	13	2700	0						
35	0	19	300	5	2600	21	3000			
36	0	28								
37	0	24	3100	0						
38	0	15	2000	0	10000	18				
39	0	27	2100	30						
40	0	4	3500	0	5900	30	7100	14	8000	30
41	0	9	2100	6						
42	0	27	6400	30						
43	0	27	2400	30	4100	28	7400		7600	13
44	0	20	1100	30						
45	0	19	9700	0						
46	0	14								
47	0	10	4100	8						
48	0	17								
49	0	29	900	17	2200	30				
50	0	13	200	30						

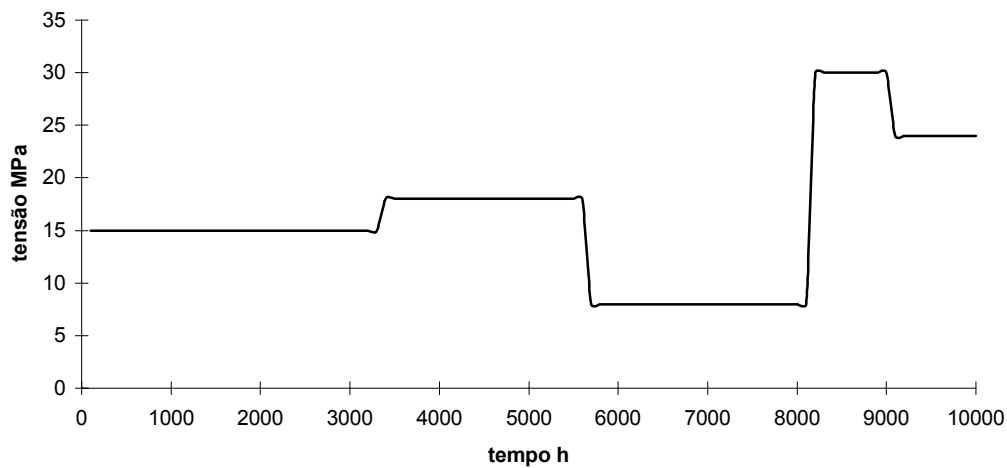


Figura 2 - Exemplo de história de carregamento - tensão x tempo.

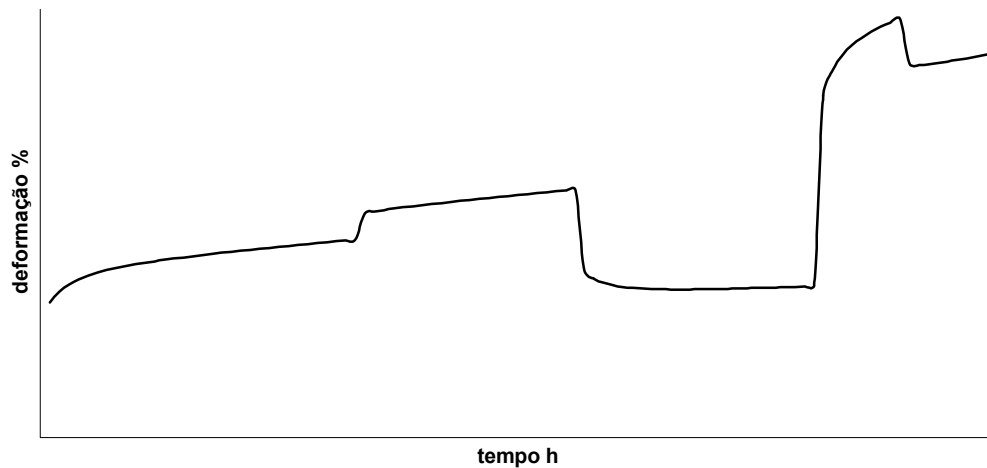


Figura 3 - Exemplo de história de carregamento - deformação x tempo.

5. Resultados da RNA Recorrente

Massarani (1998) conclui que: a forma geral das curvas é aprendida por RNA Recorrentes do tipo Elman (1991, 1993) com uma camada oculta e esta consegue representar a forma da curva para carregamentos com ou sem variação de tensão.

Uma vez verificada que as RNA recorrentes conseguem representar a curva tensãoXdeformação para carregamentos complexos, algumas diferentes configurações de RNA's quanto ao número de camadas e de neurônios por camada foram testadas (Tab.(2)). Os tipos de neurônios usados possuem a função sigmóide como função de ativação.

Tabela 2 – Testes de novas configurações de RNA.

Rede Número	Neurônios na(s) Camada(s) Oculta(s)	Épocas	Menor Erro Alcançado
01	10	10000	20,6%
02	15	25000	17,1%
03	20	32500	16,8%
04	4 e 2	20000	20,1%
05	6 e 2	5000	21,1%
06	7 e 2	14500	15,1%
07	7 e 3	41000	15,5%
08	6, 2 e 2	60000	16,2%
09	3, 2 e 2	5000	19,6%
10	3, 4 e 2	10000	19,3%
11	3, 5 e 2	6500	20,6%
12	2, 3, 3 e 2	3000	21,9%
13	2, 3, 4 e 2	3000	20,7%

Foi usado o programa FAST v.2.2 (3) para treinar a RNA (Arras; Mohraz, 1996). Os erros apresentados são calculados através da expressão:

$$erro = \sqrt{\frac{\sum_p \sum_o dif_{p,o}^2}{p \cdot o}}$$

$$erro = \sqrt{\frac{p \cdot o \cdot \sum_p \sum_o alvo_{p,o}^2 - \left(\sum_p \sum_o alvo_{p,o} \right)^2}{p \cdot o \cdot (p \cdot o - 1)}}$$

sendo:

p número de pares;

o número de unidades de saída da RNA;

$dif_p = alvo_p - saída_p$;

$saída_p$ é o valor de saída da rede para o par de treinamento p ;

$alvo_p$ é o valor esperado como saída da rede.

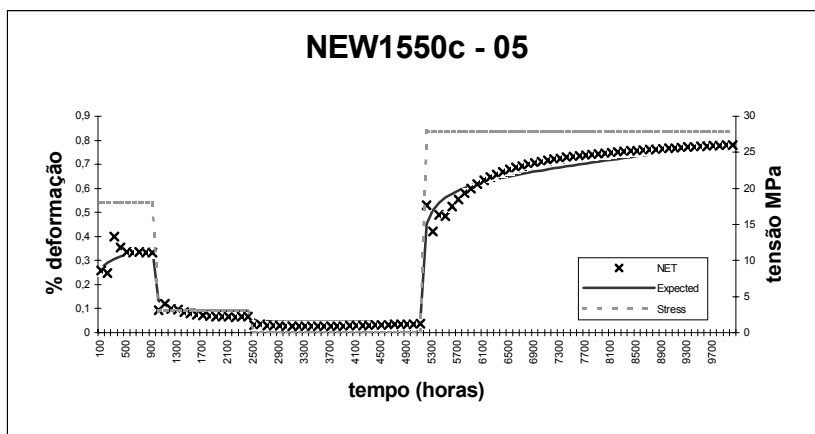


Figura 4 – RNA 01: 1 camada oculta – 10 neurônios.

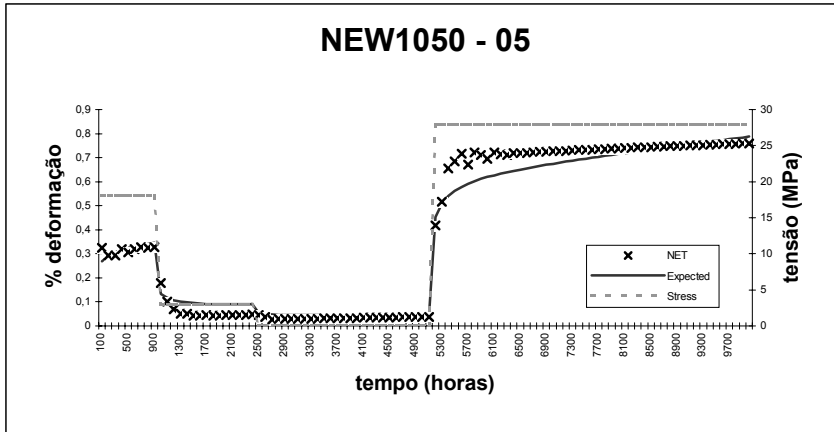


Figura 5 – RNA 02: 1 camada oculta – 15 neurônios.

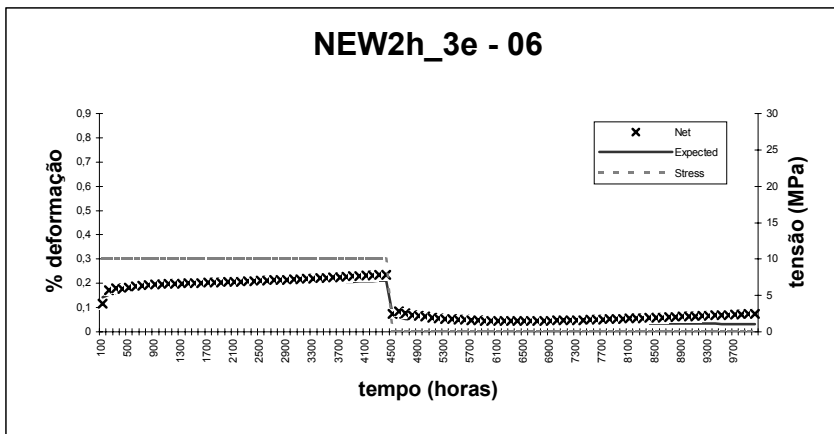


Figura 6 – RNA 06: 2 camadas ocultas – 7 e 2 neurônios.

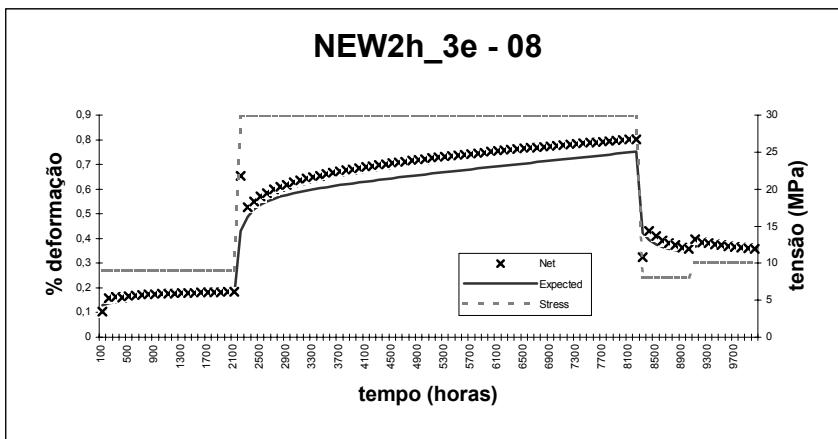


Figura 7 – RNA 06: 2 camadas ocultas – 7 e 2 neurônios.

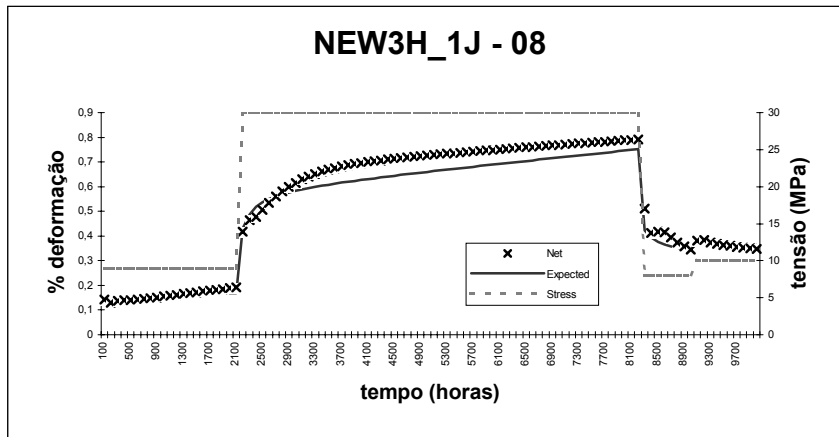


Figura 8 – RNA 08: 3 camadas ocultas – 6, 2 e 2 neurônios.

Da análise dos resultados e gráficos obtidos (figuras 4 a 8), conclui-se que das configurações de RNA testadas, aquelas que melhor representam o comportamento do material são as RNA 06 e 08. A RNA 06 apresenta melhor convergência e melhor representação da fluência e da recuperação.

6. Conclusões e trabalhos futuros

6.1. Dificuldades observadas

- **Definição das RNA.** A grande dificuldade no uso das RNA é a definição do paradigma a ser usado e, se for o caso, a determinação do número de camadas ocultas e do número de neurônios por camada.
- **O tempo usado no processo de treinamento de uma RNA.** No caso dos exemplos realizados, o tempo de processamento necessário para o treinamento de cada RNA recorrente foi de aproximadamente 24 horas, utilizando um microcomputador com processador Pentium III 550 MHz .
- **As RNA necessitam de exemplos para o treinamento.** Uma dificuldade, quando o objetivo é representar o comportamento viscoelástico de um material, é conseguir dados experimentais em quantidade suficiente para treinar uma RNA. Os modelos constitutivos analíticos procuram definir parâmetros representativos do material e que possam ser obtidos de poucos ensaios. A abordagem usando RNA exige uma maior quantidade de ensaios. A síntese de RNA que representam o comportamento viscoelástico depende de dados experimentais.
- **Definição do conjunto de treinamento ideal.** Parece ser consenso que quanto mais dados para treinamento melhor. Mas não se sabe como precisar a quantidade de exemplos suficiente para um treinamento supervisionado nem sua distribuição no domínio de interesse. Ainda existe a dificuldade de como representar os dados para treinamento - a normalização feita nos dados é decisiva para a obtenção de bons resultados.
- **O funcionamento das RNA não está completamente esclarecido.** Com o pouco conhecimento a respeito de RNA, a definição da arquitetura e do número de pares de treinamento suficientes para treinar uma RNA é feito de forma empírica.
- **As RNA não explicam os fenômenos.** O conhecimento a respeito do comportamento do material não é acessível, fica distribuído pela RNA na forma dos pesos das conexões. As RNA não aumentam o conhecimento a respeito do comportamento do material.

6.2 Vantagens observadas em relação aos modelos constitutivos analíticos

- **Nenhuma hipótese a respeito do material é necessária.** Nos exemplos desenvolvidos a preocupação foi somente a de definir uma RNA que representasse os dados de treinamento e de teste com determinada precisão. Os dados obtidos de ensaios compõem o conjunto de treinamento de onde o comportamento viscoelástico do material é aprendido. Na verdade, nem se considerou que a massa de dados veio de um dado comportamento de um material.
- **Nenhuma regra formal ou expressão matemática é usada.** O uso de RNA para modelar materiais viscoelásticos dispensa o uso de equações e regras que normalmente limitam a aplicação dos modelos analíticos.
- **Possibilidade de melhorar o modelo com novos dados de ensaios.** A RNA pode ser treinada novamente e incorporar os novos dados de ensaios à sua representação do comportamento viscoelástico do material.
- **RNA são de fácil utilização após treinadas.** Nenhuma aproximação numérica é necessária para a implementação computacional. Uma vez treinada, a utilização de uma RNA consiste em propagar os sinais da entrada para a saída realizando operações matemáticas simples.

6.3 Balanço: vantagens x dificuldades

- As desvantagens relacionadas com a definição de RNA, determinação do conjunto de treinamento ideal e demora no treinamento, se devem ao pouco conhecimento do funcionamento das RNA. Essas desvantagens são transitórias e irão diminuir a medida que avançar o desenvolvimento de paradigmas de RNA e de algoritmos de treinamento.
- O fato do conhecimento a respeito do comportamento do material ser inacessível não tem importância para o uso em projeto, que é a motivação deste trabalho. A necessidade, neste caso, é de um modelo que possa representar o comportamento do material em condições diversas e não explicá-lo. O número de ensaios necessários para se obter os exemplos para o treinamento, é a maior desvantagem do uso de RNA.
- Os resultados dos exemplos foram obtidos sem o estabelecimento de hipóteses a respeito do material e sem a definição de expressões matemáticas, que é a grande vantagem do uso de RNA's. Os mesmos resultados apresentados pelas RNA seriam extremamente trabalhosos de se obter com modelos constitutivos analíticos.
- Nenhuma aproximação numérica é necessária com o uso de RNA para representar os fenômenos estudados.

6.4 Trabalhos futuros

Para desenvolver melhores modelos de materiais com RNA, alguns desenvolvimentos são necessários. Especificamente:

- **Aumentar o conhecimento a respeito do funcionamento das RNA.** É preciso explicar melhor como são obtidos os resultados pelas RNA, especialmente pelas RNA recorrentes para que sejam usadas de forma mais consciente.
- **Desenvolver procedimentos para a síntese de RNA.** As dificuldades para síntese de RNA devem ser diminuídas através do desenvolvimento de algoritmos e métodos para a definição da configuração mais adequada para a aplicação.
- **Procedimentos de ensaio de materiais viscoelásticos.** O maior número de ensaios necessários para o treinamento de RNA pede formas simples de realizar testes em materiais viscoelásticos.

7. Agradecimento

Este trabalho foi desenvolvido com o apoio da FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

8. Referências

- Arras, M.K.; Mohraz, K.,1996, "FORWISS artificial neural network simulation toolbox - FAST v2.2", Erlangen, Bavarian Research Center for Knowledge-Based Systems (FORWISS).
- Elman, J.L.,1991, "Incremental learning, or the importance of starting small", San Diego, Center for Research in Language, University of California, (CRL Technical Report 9101).
- Elman, J.L.,1993, "Learning and development in neural networks: The importance of starting small", Cognition, No.48, pp. 71-99.
- Ghaboussi, J.; Garret Jr, J.H.,1991, "Knowledge-based modeling of material behavior with neural network", Journal of Engineering Mechanics, Vol.117, No.1, pp. 132-153.
- Glockner, P.G.; Szyszkowski, W.,1987, "On a multiaxial non-linear hereditary constitutive law for non-ageing materials with fading memory", International Journal of Solids Structures, Vol.23, No.2, pp.305-324.
- Glockner, P.G.; Szyszkowski, W.,1990, "An engineering multiaxial constitutive model for nonlinear time-dependent materials", International Journal of Solids Structures, Vol.26, No.1, pp.73-82.
- Massarani, M. ,1998, "Uso de redes neurais artificiais para representar o comportamento viscoelástico de materiais", Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo – Brasil, 139 p.
- Ward, I.M.,1983, "Mechanical properties of solid polymers", 2^a ed. Chichester, John Wiley & Sons, Inc (Wiley-Interscience).
- Wasserman, P. D.;1993, "Advanced methods in neural computing", Van Nostrand Reinhold, New York-USA.

Using Recurrent Neural Networks to Represent Non Linear Viscoelastic Behavior

Marcelo Massarani

Escola Politécnica da USP – São Paulo - SP
marcelo.massarani@poli.usp.br

Paulo Carlos Kaminski

Escola Politécnica da USP – São Paulo - SP
pckamins@usp.br

Abstract. *The non linear viscoelastic material behavior is poorly represented by constitutive equations. The present study proposes a neural network approach for non linear viscoelastic behavior under uniaxial loading. Some samples were done using recurrent neural networks modeling non linear viscoelastic behavior. The results were encouraging. The main benefits of neural network approach are: no assumptions about de material behavior are required ; the material behavior can be represented directly from experimental data; once trained, no numerical approximations are required when using the neural network.*

Keywords: neural networks, viscoelasticity, constitutive equations.

Structural Mechanics of Flexible Risers Subjected to Combined Loads

Roberto Ramos Jr.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – Depto. de Eng. Mecânica
e-mail: rramosjr@usp.br

Celso Pupo Pesce

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – Depto. de Eng. Mecânica
e-mail: ceppesce@usp.br

Abstract: *This work presents an analytical model for the analysis of flexible risers subjected to combined loads of bending, twisting and tension. Flexible risers, either umbilical cables or flexible pipes, are complex structures used in offshore oil exploitation activities. Such structures are composed of several concentric polymeric and steel armour layers which withstand static and dynamic loads applied by the floating production vessel and by the ocean environment. The complexity imposed mainly by geometry renders a finite element analysis of these structures practically unfeasible, even if we are to consider that all the materials obey a linear elastic behaviour. So, in order to calculate the stresses distribution in the layers, as well as the axial and flexural stiffness values of these structures, analytical methods have been proved to be, till now, a better choice. Using sets of equations which comprise equilibrium conditions, constitutive equations and geometrical relations, it is possible to solve the problem for all the unknowns. This paper presents a detailed formulation leading to the solution in terms of stresses and deformation components in a flexible riser subjected to combined loads. It also highlights the principal modelling hypotheses. A practical example is shown and discussed.*

Keywords: *flexible risers, structural mechanics, analytical model.*

1. Introduction

Flexible pipes have been largely used by the oil industry in a very large number of offshore applications. One could certainly say that such a concept has proved successful, as far as structural integrity and functionality are concerned. Nevertheless, the structural and geometrical complexity of these pipes requires a number of simplifying assumptions in order to render feasible any structural analysis and modelling. Commonly assumed hypotheses can lead to significant discrepancies between calculated and experimental values, as clearly exemplified by Witz (1996), noticing that most analytical models predict stiffness values two to three times greater than those measured in the experiments. Moreover, the sets of equations considered in some analytical models are often omitted in the literature and, consequently, the actual hypotheses behind those models are not always clear.

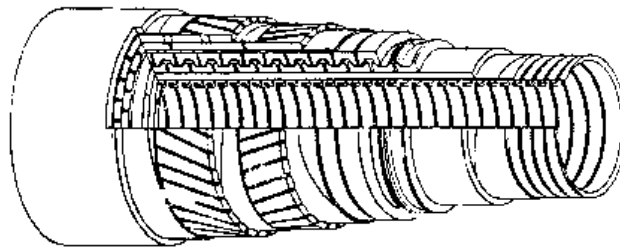


Figure 1. A typical flexible pipe structure.

This paper aims to add some discussion to this matter by presenting an analytical model to calculate stresses and deformation components in flexible pipes subjected to combined loadings including: bending, twisting, tension and internal and external pressures. Simplifying assumptions and resulting sets of equations are explicitly presented. Consistency is verified through comparisons of analytically calculated stiffness values, using the proposed model, with experimental results obtained in literature.

2. Analytical model

In a local analysis of a flexible pipe, one seeks to calculate the stresses acting on the several layers as well pipe deformations due to the prescribed loads, which can be used to determine its axial, torsional and flexural stiffness values. Initially, let us assume that the pipe is subjected only to axisymmetric loads of tension, twisting and internal/external pressures. Considering such loads almost uniformly distributed along the pipe length, it is reasonable to assume that all cross-sections behave in the same manner, what means that all of the layers present the same twist per unit of pipe length and the same elongation. These hypotheses render the analysis much simpler and are assumed by a

number of authors, such as Knapp (1979), Lanteigne (1985), Féret and Bournazel (1987) and Witz and Tan (1992). Besides the twist per unit of pipe length and the elongation, the axisymmetric loads will also cause a change of the mean radius of each layer and a change in the laying angle for the helically armoured layers.

Let us consider now that, following the axisymmetric loads, a bending moment is applied to the pipe. There are two classical approaches that can be considered: (a) the “no-slip” model or (b) the “full-slip” model. Obviously, considering an intermediate case, where slip occurs partially, would imply to model the internal friction. As a first model, however, it will be assumed here the “no-slip” model, what means that no-slip occurs between the layers due to the bending, in such way one can consider that a curvature K (assumed constant) is superposed to the already deformed geometry of the pipe. As we are going to see, the “no-slip” model is completely unsatisfactory, leading to extremely large values of bending stiffness, if compared to experimental results. However, it may well serve as a starting point to more elaborated models, as it will be seen further. A non-linear Coulombian friction model has been proposed by Ferét et al (1995).

Taking now a typical flexible pipe with n helically armoured layers and m polymeric layers, the identification and number of the unknowns of the problem may be given according to Tab. (1). In this table, index i is related to the number of layer, ranging from 1 (most internal layer) to $n+m$ (most external layer). The unknowns $p_{c,i}$ and g_i are related, respectively, to the contact pressure and gap formation between the i -th and $(i+1)$ -th layers and, in this case, i ranges from 1 to $n + m - 1$.

Table 1. Unknowns of the problem.

Unknown identification	Symbol	Number of unknowns
Contact pressure (or gap) between i -th and $(i+1)$ -th layers	$p_{c,i}$ (g_i)	$n + m - 1$
Axial force supported by i -th layer	F_i	$n + m$
Twisting moment supported by the i -th layer	$M_{t,i}$	$n + m$
Bending moment supported by i -th layer	$M_{b,i}$	$n + m$
Mean radius variation of i -th layer	ΔR_i	$n + m$
Thickness variation of i -th layer	Δt_i	$n + m$
Laying angle variation of helically armoured layers	$\Delta \alpha_i$	n
Pipe elongation	$\Delta L/L$	1
Pipe twist per unit of pipe length	$\Delta \phi/L$	1
Curvature of pipe's central line	K	1

Concerning the loading applied to the pipe, it may consist of: an axial force (F), a twisting moment (M_T), a bending moment (M_B), an internal pressure (p_{in}) and an external pressure (p_o). Alternatively, prescribed displacements and/or rotations applied to the pipe's extremities may be regarded as loading (as it is usual in tests carried out to determine pipe's properties). Or, yet, a combination of these two cases may exist, when, for instance, an axial force is applied to a pipe having its extremities constrained to rotate. However, to treat such cases only a change of unknowns is required and so, for the sake of clarity, the applied loads will be taken here as F , M_T and M_B (besides the pressures p_{in} and p_o).

In order to solve for the $7n + 6m + 2$ unknowns, a system with the same number of equations is required. Such system of equations, as in any other problem of mechanics of deformable solids, may be derived considering: equilibrium equations, constitutive equations and geometric relations. Table (2) and the subsequent paragraphs show a possible system of equations that can be used to solve for the unknowns.

Table 2. System to determine the unknowns of the problem.

Eq. number	Equation linking the unknowns	Applies for	Number of equations
(1)	$\Delta R_i, \Delta R_{i+1}, \Delta t_i, \Delta t_{i+1}, g_i$	all layers, but the last	$n + m - 1$
(2)	$F_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	Polymeric layers	m
(3)	$M_{t,i}, \Delta \phi/L$	Polymeric layers	m
(4)	$M_{b,i}, K$	Polymeric layers	m
(5)	$\Delta R_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	Polymeric layers	m
(6)	$\Delta t_i, \Delta L/L, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	Polymeric layers	m
(7)	$F_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	Armour layers	n
(8)	$M_{t,i}, \Delta \alpha, \Delta R_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L$	Armour layers	n
(9)	$M_{b,i}, K$	Armour layers	n
(10)	$p_{c,i-1}, p_{c,i}, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	Armour layers	n
(11)	$\Delta t_i, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i, p_{c,i-1}, p_{c,i}$	Armour layers	n
(12)	$\Delta \alpha, \Delta L/L, \Delta \phi/L, \Delta R_i$	Armour layers	n
(13)	$F_i, M_{t,i}, M_{b,i}$	global equilibrium	3

For the sake of completeness and brevity, the hypotheses which are assumed for the validity of the forthcoming equations will be outlined previously. They are:

- (a) all cross-sections and all layers present the same twist per unit of pipe length and the same elongation;
- (b) no gap between adjacent layers is allowed in the unstressed (initial) state;
- (c) there is no contact between adjacent tendons in the same layer;
- (d) all materials are homogeneous, isotropic and have linear elastic behaviour;
- (e) the strains, which occur in any part of the pipe, must be small enough;
- (f) pipe ovalisation due to the applied loads can be neglected and will not be considered;
- (g) mean radius and thickness variations of the layers are assumed to be uniform in each layer;
- (h) for the armour layers' strips, one of the cross-section principal flexure axis is considered to be always orthogonal to the surface of adjacent layers.

Next we shall proceed with the sets of equations mentioned in Tab. (2). The first set of equations comprises compatibility equations relating mean radius and thickness variations with gap formation of adjacent layers. Considering hypotheses (b), (f) and (g), this set of equations takes the form:

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + (\Delta t_{i+1} + \Delta t_i) / 2 + g_i \quad (1)$$

The second set of equations applies for polymeric layers and relates the axial force supported by the layer with pipe elongation and internal/external pressures applied to the layer. Using hypotheses (a), (b), (d), (e) and (f), it can be shown that:

$$\frac{F_i}{A_i} = E_i \cdot \left(\frac{\Delta L}{L} \right) + \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \frac{v_i \cdot (2R_i - t_i) \cdot (p_{c,i-1} + \mu_{in} \cdot p_{in})}{2 \cdot t_i} - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \frac{v_i \cdot (2R_i + t_i) \cdot (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o)}{2 \cdot t_i} \quad (2)$$

In Eq. (2), the following nomenclature is used: A_i = cross-sectional area; E_i = Young modulus; v_i = Poisson ratio. The variables μ_{in} and μ_o are, in fact, flags that return '1' when the considered polymeric layer is the first (last for μ_o) watertight layer of the pipe, and '0' otherwise. Equation (2) is obtained directly from the theory of elasticity and is also valid for thick walled layers.

The next two sets of equations relate, respectively, the twisting moment supported by the polymeric layer with the twist per unit of pipe length (Eq. (3)) and the bending moment supported by the layer with the curvature (Eq. (4)). Assuming hypotheses (d) and (e), such equations can be expressed approximately by:

$$M_{t,i} = (G_i \cdot J_{t,i}) \cdot \frac{\Delta \phi}{L} \quad (3)$$

$$M_{b,i} = (E_i \cdot J_i) \cdot K \quad (4)$$

where $G_i \cdot J_{t,i}$ and $E_i \cdot J_i$ stand for the layer's torsional and flexural stiffness values, respectively.

Equations (5) and (6) give mean radius variation and thickness variation for the polymeric layers as functions of pipe elongation and pressures acting inside and outside the layer. Using hypotheses (a), (b), (d), (e) and (f), it can be shown, from the theory of elasticity, that the following relations hold:

$$\Delta R_i = -v_i \cdot R_i \left(\frac{\Delta L}{L} \right) + \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1 - v_i^2) \cdot R_i^2}{t_i \cdot E_i} + \frac{v_i \cdot (1 + v_i) \cdot R_i}{2 \cdot E_i} \right] \cdot (p_{c,i-1} + \mu_{in} \cdot p_{in}) - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1 - v_i^2) \cdot R_i^2}{t_i \cdot E_i} - \frac{v_i \cdot (1 + v_i) \cdot R_i}{2 \cdot E_i} \right] \cdot (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o) \quad (5)$$

$$\Delta t_i = -v_i \cdot t_i \left(\frac{\Delta L}{L} \right) - \left(1 - \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1 - v_i^2) \cdot t_i}{2E_i} + \frac{v_i \cdot (1 + v_i) \cdot R_i}{E_i} \right] \cdot (p_{c,i-1} + \mu_{in} \cdot p_{in}) - \left(1 + \frac{t_i}{2R_i} \right) \left[\frac{(1 - v_i^2) \cdot t_i}{2E_i} - \frac{v_i \cdot (1 + v_i) \cdot R_i}{E_i} \right] \cdot (p_{c,i} + \mu_o \cdot p_o) \quad (6)$$

Considering now the helically armoured layers, the sets of equations (7), (8) and (9) give, respectively, the axial force, the twisting moment and the bending moment supported by a given armour layer as functions of pipe deformations ($\Delta L/L$, $\Delta\phi/L$, K), mean radius variation (ΔR_i) and laying angle variation ($\Delta\alpha_i$):

$$F_i = n_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot \left[(\cos^3 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta L}{L} + (R_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \cdot \frac{\Delta \phi}{L} + (\sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \right] \quad (7)$$

$$M_{t,i} = \frac{n_i}{R_i} \cdot [G_i I_{t,i} \cos \alpha_i \cos(2\alpha_i) + E_i I_{y,i} \sin \alpha_i \sin(2\alpha_i)] \Delta \alpha_i + [n_i E_i A_i R_i \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i] \frac{\Delta L}{L} + n_i \sin \alpha_i \left[E_i A_i \sin^2 \alpha_i - \frac{G_i I_{t,i} \cos^2 \alpha_i}{R_i^2} - \frac{E_i I_{y,i} \sin^2 \alpha_i}{R_i^2} \right] \Delta R_i + [n_i E_i A_i R_i^2 \cos \alpha_i \cdot \sin^2 \alpha_i] \frac{\Delta \phi}{L} \quad (8)$$

$$M_{b,i} = \frac{n_i \cdot \cos^3 \alpha_i}{2} \cdot \left[2G_i I_{t,i} \sin^2 \alpha_i + \frac{E_i I_{x,i} \cdot (2 - \cos^2 \alpha_i)}{\cos^2 \alpha_i} + E_i I_{y,i} \cdot (2 \cos^2 \alpha_i - 1) + E_i A_i R_i^2 \right] \cdot K \quad (9)$$

The next set of equations comes from a force equilibrium equation for the armour layers and relates the contact pressure differential applied to the tendons with pipe deformations ($\Delta L/L$, $\Delta\phi/L$) and mean radius variation (ΔR_i) of the layer:

$$(p_{c,i} - p_{c,i-1}) \cdot b_i = - \left[\frac{E_i A_i \sin^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_i}{R_i} \right] \frac{\Delta L}{L} - [E_i A_i \sin^3 \alpha_i \cos \alpha_i] \frac{\Delta \phi}{L} - \left[\frac{E_i A_i \sin^4 \alpha_i}{R_i^2} \right] \Delta R_i \quad (10)$$

where b_i represents the width of the tendon. Equation (10) neglects the effect of bending curvature on the contact pressure differential, assuming that the main contribution to the equilibrium comes from the axisymmetric loads.

Equation (11) gives an approximate relation to compute the thickness variation of armour layers as a function of contact pressures acting inside and outside the layer, pipe deformations ($\Delta L/L$, $\Delta\phi/L$) and mean radius variation (ΔR_i) of the layer:

$$\Delta t_i = - \frac{t_i}{2E_i} \cdot (p_{c,i} + p_{c,i-1}) - (v_i t_i \cos^2 \alpha_i) \frac{\Delta L}{L} - (v_i t_i R_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i) \frac{\Delta \phi}{L} - \left(\frac{v_i t_i \sin^2 \alpha_i}{R_i} \right) \Delta R_i \quad (11)$$

The last set of equations for armour layers relates the laying angle variation to pipe deformations ($\Delta L/L$, $\Delta\phi/L$) and mean radius variation (ΔR_i) of the layer:

$$\Delta \alpha_i = - (\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i) \frac{\Delta L}{L} + (\cos^2 \alpha_i \cdot R_i) \frac{\Delta \phi}{L} + \left(\frac{\sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i}{R_i} \right) \Delta R_i \quad (12)$$

It must be stressed that the laying angle variation given by Eq. (12) is solely due to the axisymmetric loading applied to the pipe, since we have assumed that there is no slip between adjacent layers when the bending moment is applied. So, the laying angle variation is supposed to be constant along the tendon's length.

The three last equations represent global equilibrium equations assuring axial force, twisting moment and bending moment equilibrium for the pipe as a whole. They are given by:

$$\sum_{i=1}^{n+m} F_i = F \quad \sum_{i=1}^{n+m} M_{t,i} = M_T \quad \sum_{i=1}^{n+m} M_{b,i} = M_B \quad (13)$$

These 13 sets of equations constitute a linear system of $7n + 6m + 2$ equations that can be solved for all the unknowns given in Tab. (1). However, it must be kept in mind that all the hypotheses stated here must apply, otherwise we can obtain erroneous results. So, if a calculated contact pressure, for instance, result with a negative sign, that means a gap would appear between the adjacent layers considered, what invalidates hypothesis (b) and, consequently, all the results obtained.

3. A case study

In order to verify the adequacy of the proposed analytical model, values of axial, torsional and flexural stiffness calculated for a 2.5" ID flexible pipe will now be compared to experimental data previously published in the literature (see Witz (1996)). The structure of the flexible pipe to be analysed, which consists of 8 layers, is reproduced in Tab. (3).

Concerning the symbols used in Tab. (3), the following nomenclature applies: ID = layer inside diameter; OD = layer outside diameter; α = laying angle; LH = left hand; RH = right hand; A = cross-sectional area of strip; n = number of strips; I_y = tangential inertia; I_x = radial inertia; I_t = torsional inertia; E = Young modulus; ν = Poisson ratio.

Some more information about the flexible pipe geometric properties, including some sketches of the interlocked carcass (layer 1) and the pressure reinforcement (layer 3), can be found in the work of Witz (1996). Other necessary data for our model, but not given by Witz (1996), were considered as follows:

- $n_1 = 1$ (number of strips for layer 1);
- $n_3 = 1$ (number of strips for layer 3);
- $\alpha_1 = -87.5$ deg (laying angle evaluated for layer 1);
- $E_1 = 190$ GPa (elastic modulus for stainless steel according to Juvinall and Marshek (1983));
- $E_3 = E_5 = E_7 = 207$ GPa (elastic modulus for carbon/alloy steel, according to Juvinall and Marshek (1983));
- $E_8 = 300$ MPa (elastic modulus assumed for layer 8).

Concerning the Poisson ratio, it was assumed a constant value of 0.3 for all layers (polymeric or not), in absence of better data.

Table 3. Flexible pipe properties.

Layer	Geometric properties	Material properties
Layer 1: interlocked steel carcass	ID = 6.32E-2 m OD = 7.02E-2 m layer thickness = 3.5E-3 m strip dimensions: 2.8E-2m x 0.7E-3 m $\alpha = 87.5$ deg. (LH) A = 1.96E-5 m ² $I_y = 2.0E-11$ m ⁴ $I_x = 5.56E-10$ m ⁴ $I_t = 6.5E-12$ m ⁴	Material: stainless steel (AISI304) Mass/unit length = 3.49 kg/m
Layer 2: pressure sheath	ID = 7.02E-2 m OD = 8.01E-2 m layer thickness = 4.95E-3 m	Material: Grilamid (nylon 12) Mass/unit length = 1.25 kg/m E = 284 MPa
Layer 3: zeta steel strip (pres. reinforcement)	ID = 8.01E-2 m OD = 9.25E-2 m layer thickness = 6.2E-3 m strip dimensions: 9.25E-3m x 6.2E-3 m $\alpha = 85.5$ deg. (LH) A = 5.15E-5 m ² $I_y = 1.0E-10$ m ⁴ $I_x = 7.71E-10$ m ⁴ $I_t = 2.046E-10$ m ⁴	Material: FI15 steel Mass/unit length = 11.21 kg/m
Layer 4: anti-friction tape	ID = 9.25E-2 m OD = 9.55E-2 m layer thickness = 1.5E-3 m tape dimensions: 3.0E-2m x 1.5E-3 m	Material: Rilsan (nylon 11) Mass/unit length = 0.46 kg/m E = 301 MPa
Layer 5: inner steel armour	ID = 9.55E-2 m OD = 1.015E-1 m layer thickness = 3.0E-3 m strip dimensions: 6.0E-3m x 3.0E-3 m $\alpha = 35$ deg. (LH) A = 1.8E-5 m ² $I_y = 1.35E-11$ m ⁴ $I_x = 5.4E-11$ m ⁴ $I_t = 3.71E-11$ m ⁴ n = 40	Material: FI41 steel Mass/unit length = 6.37 kg/m
Layer 6: anti-friction tape	ID = 1.015E-1 m OD = 1.045E-1 m layer thickness = 1.5E-3 m tape dimensions: 3.0E-2m x 1.5E-3 m	Material: Rilsan (nylon 11) Mass/unit length = 0.5 kg/m E = 301 MPa
Layer 7: outer steel armour	ID = 1.045E-1 m OD = 1.105E-1 m layer thickness = 3.0E-3 m strip dimensions: 6.0E-3m x 3.0E-3 m $\alpha = 35$ deg. (RH) A = 1.8E-5 m ² $I_y = 1.35E-11$ m ⁴ $I_x = 5.4E-11$ m ⁴ $I_t = 3.71E-11$ m ⁴ n = 44	Material: FI41 steel Mass/unit length = 7.01 kg/m
Layer 8: fabric tape	ID = 1.105E-1 m OD = 1.115E-1 m layer thickness = 0.5E-3 m tape dimensions: 7.5E-2m x 0.6E-4 m	Material: fabric Mass/unit length = 0.14 kg/m

Let us consider first the results for axial load: Fig. (2) shows the “Axial force x Elongation” curve obtained experimentally for the flexible riser described. According to Witz (1996), the experiment was conducted in such a way that the pipe ends were free to rotate, what means that, practically speaking, no twisting moment was applied to the pipe. Figure (2) shows only the first three load cycles, but it can be clearly noticed the hysteresis associated with the load cycles and the difference in the values of the apparent stiffness measured in the first and subsequent cycles: the measured curve shows a lower apparent stiffness in the first loading cycle (something about 84 MN), whereas at the third cycle it raises to approximately 119 MN. This hysteretic behaviour is often observed with non-bonded flexible pipes, being commonly attributed to bedding in of component layers and friction. Figure (2) also presents a “secant” curve, that gives a mean value for the axial stiffness (for the present case, the secant modulus is about 89 MN).

For the present case study, considering no twisting moment and no pressures applied to the pipe, the analytical tool previously described calculated the apparent axial stiffness as being 128 MN. Since friction forces were not yet implemented in the model, it gives a constant stiffness as result. This value is much closer to the “upper gradient” value, calculated for the third loading cycle, than to the “lower gradient”, calculated for the first cycle. This result should be expected, since initial gaps, which may always be present in flexible pipes, tend to close up after some loading cycles, what makes the assumptions considered in the analytical model more realistic. It must be also recalled that assumption (a), which considers uniformity of elongation and twist for all layers and along all the pipe length, may not have been fully obtained in practice, what could also explain some differences. So, this hypothesis must be taken with caution when considering experiments, but it continues to seem reasonable in practice, since the conditions existing in the extremities of the pipe should only affect the regions close to them (it must be observed that the relative error, considering the analytical result and the measured apparent stiffness given by the upper gradient, is less than 8%).

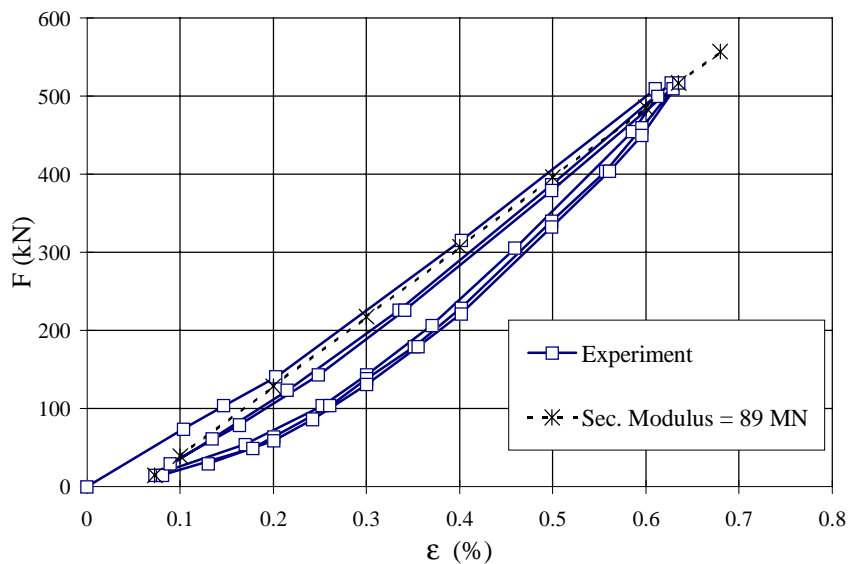


Figure 2. Axial force x elongation curve (pipe’s ends free to rotate).

Let us consider now the results for torsional load: Fig. (3) shows both “Clockwise twisting moment x Twisting angle” and “Anti-clockwise twisting moment x Twisting angle” curves obtained experimentally for the flexible riser described. The sign convention used for the twisting moment is such that an anti-clockwise twisting moment is considered to have a positive sign, whereas a clockwise twisting moment is considered to be negative. In this experiment, besides the twisting moment, an axial force was also applied to the pipe, so that pipe’s ends were prevented from moving axially. As it can be noticed in Fig. (3), the direction of application of the twisting moment has a strong influence on the value of the apparent torsional stiffness: for clockwise twist the apparent torsional stiffness is about 31 kN.m²/rad (secant modulus), whereas, for anti-clockwise twist, the stiffness raises to about 111 kN.m²/rad (secant modulus). This difference in the measured torsional stiffness values is due to the own construction of the flexible pipe: in this case, for instance, the tendons of the outer armour layer tend to unlay as a clockwise twisting moment is applied, forming a gap between this layer and the adjacent internal one. Therefore, a low torsional stiffness is observed for clockwise twisting.

Using the present analytical model, the calculated torsional stiffness resulted 216 kN.m²/rad (for anti-clockwise twist) and 81 kN.m²/rad (for clockwise twist). Comparing experimental results with analytical results, it can be noticed that values predicted by the analytical model are twice to three times larger than those experimentally measured (comparison is made using the secant modulus). A possible source for these differences could be related to the assumption of uniform twist and elongation along all the pipe length and for all layers. In other words, there would be a decrease in torsional stiffness provided that slippage between layers occurs during experiments.

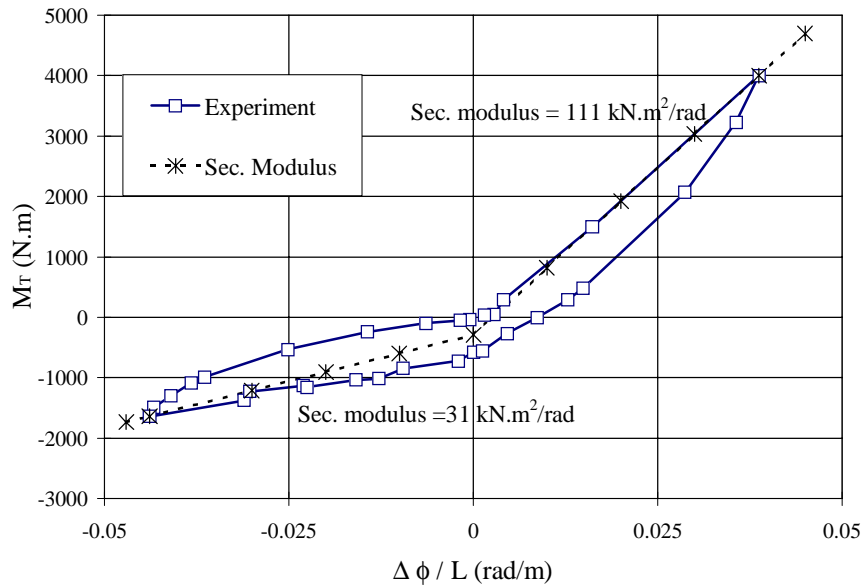


Figure 3. Twisting moment x twisting angle curve (pipe’s ends prevented from moving axially).

Let us consider, at last, results for bending load: Fig. (4) presents “Bending moment x Curvature” experimental results for the flexible pipe described, considering zero internal gauge pressure. Figure (5) presents the same kind of curve, but for an internal pressure of 30 MPa. Figures (4) and (5) also present a mean flexural stiffness, evaluated with the secant modulus for each case. These mean values are 1.46 kN.m² and 2.0 kN.m², for zero internal pressure and 30 MPa internal pressure, respectively.

The analytical results obtained with the proposed model predicted a flexural stiffness of 231 kN.m² for both cases, irrespective the applied pressure. As anticipated, theoretical results (under the no-slipping hypothesis) for cases including bending moments failed completely, leading to the conclusion that slipping (either total or partial) must be incorporated. Nevertheless, the “no-slipping” model can be useful as a basis to elaborate better models: considering the deformed geometry of the armour layer tendons in the so-called “no-slipping” model as a starting point, the next step is to obtain the slippage of the tendons’ central line as a function of the curvature imposed to the pipe. Such displacements tend to minimize the strains/stresses acting in the tendons due to the bending and, consequently, the energy involved in the process. This is being pursued and, hopefully, will improve the analytical model, even before any consideration regarding internal friction is made.

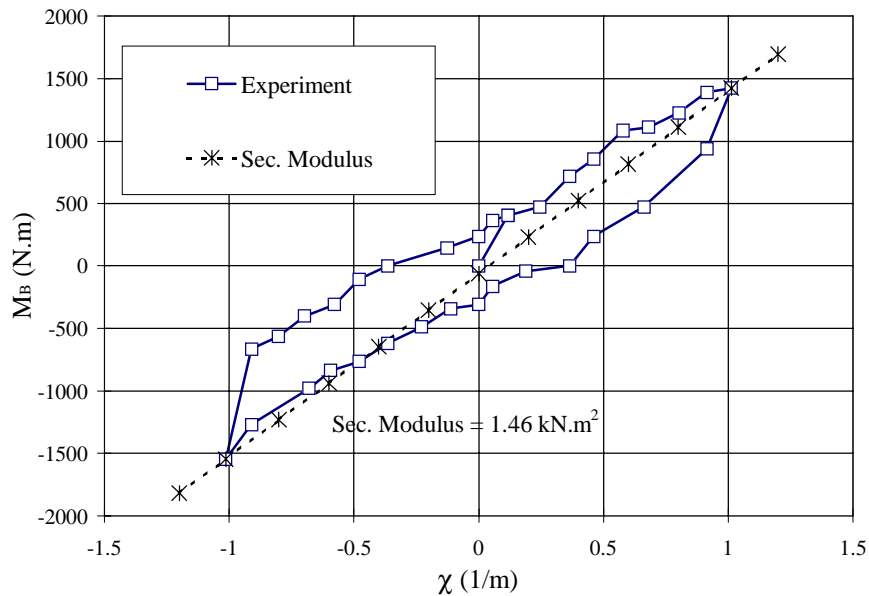


Figure 4. Bending moment x curvature for no internal pressure applied to the pipe.

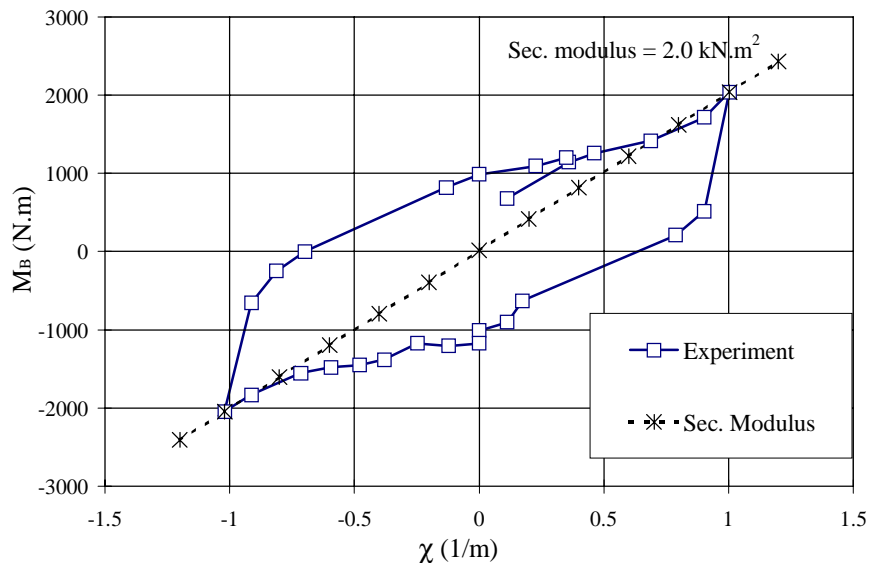


Figure 5. Bending moment x curvature for an internal pressure of 30 MPa applied to the pipe.

4. Conclusions

In this paper an analytical model was proposed to calculate stresses and deformations in flexible pipes subjected to combined loadings including bending, twisting, tension and internal/external pressures. The hypotheses used in formulation were explicitly highlighted. Several comparisons between analytically calculated stiffness, using the proposed model, and experimental results were then made, showing that:

- (i) the error obtained in axial stiffness evaluation is satisfactory, if we are to consider that conditions assumed by the hypotheses may not have been fully obtained during the experiment (e.g., the assumption of uniformity of elongation and twist per unit of pipe length);
- (ii) the model can also estimate the apparent torsional stiffness. Regarding the results, the stiffness predicted by the analytical model resulted twice larger than that experimentally obtained (for anti-clockwise twisting moment), and almost three times larger than that experimentally obtained (for clockwise twisting moment);
- (iii) as expected, the “no-slipping” model failed in calculating the bending stiffness values. A consistent “full-slipping” formulation has been sought, by which slippage of the tendon’s central line along its arc-length should be obtained as a function of the imposed curvature, thus relieving the energy involved in the process;
- (iv) concerning the general aspect of the measured curves, the main problem of the proposed analytical model can be attributed to the failure in capturing hysteresis, which is related to the existence of initial gaps between the component layers: a feature often encountered in unbonded flexible pipes. These gaps have a strong influence in the interaction of the layers and introduce non-linearity in the curves as they close up. Friction between the component layers may also be considered as an important source of non-linearity. However, both sources of non-linearity (gaps and friction) constitute parameters which are difficult to quantify.

Acknowledgements

The second author wish to thank FAPESP and CNPq (grants 304062-EM and 469095/00-8(NV)), respectively State of São Paulo Research Foundation and National Research Council of Brazil, for partial financial support.

References

- Alexander, JC, and Antman, SS (1982). “The ambiguous twist of Love,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 40, pp 83-92.
- Antman, SS (1974). “Kirchhoff’s problem for nonlinearly elastic rods,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XXXII, pp 221-240.
- Atanackovic, TM (1997). “Stability theory of elastic rods,” Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Costello, GA (1990). “Theory of wire rope,” New York, Springer Verlag.
- Féret, JJ and Bournazel, CL (1987). “Calculation of stresses and slip in structural layers of unbonded flexible pipes,” *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 109, pp 263-269.

- Ferét, J.J. & Leroy, JM, Estrier, P. (1995) "Calculation of Stresses and Slips in Flexible Armour Layers with Layers Interaction". *Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE'1995*; vol. V., pp 469-474.
- Juvinall, RC and Marshek, KM (1983). "Fundamentals of machine component design", 2nd ed, John Wiley & Sons, Inc.
- Knapp, RH (1979). "Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion," *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp 515-529.
- Lanteigne, J (1985). "Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp 423-432.
- Love, AEH (1944). "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed, New York, Dover Pub Inc.
- Patel, MH, Witz, JA and Tan, Z (1994). "A Flexible Riser Design Manual," *Offshore Technology Series*, London, Bentham Press.
- Pesce, CP, Ramos Jr., R and Aranha, JAP (1996). "Development of a methodology for predicting life of flexible pipes and umbilicals. Structural Modelling, vol. I, Analytical Model"; (in portuguese). Technical Report. University of São Paulo, SP.
- Pesce, CP, Ramos Jr., R and Aranha, JAP (1997). "Development of a methodology for predicting life of flexible pipes and umbilicals. Structural Modelling, vol. II, Finite Element Model"; (in portuguese). Technical Report. University of São Paulo, SP.
- Progelhof, RC and Throne, JL (1993). "Polymer engineering principles," Hanser Verlag.
- Ramos Jr., R, Pesce, CP and Martins, CA (1999) "Some remarks on the structural behaviour of flexible pipes subjected to axial loading". 2nd Workshop on Subsea Pipelines, Rio de Janeiro, April, 25-26, 1999, pp 133-147.
- Witz, JA and Tan, Z (1992). "On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables," *Marine Structures*, vol. 5, pp 205-227.
- Witz, JA (1996). "A Case Study in the Cross-Section Analysis of Flexible Risers," *Marine Structures*, vol. 9, pp 885-904.

REVISITANDO O PRINCÍPIO DE d'ALEMBERT

Agamenon R. E. Oliveira

Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas (DME)

Escola Politécnica da UFRJ

agamenon@rionet.com.br

Resumo. O famoso princípio de d'Alembert, publicado em seu "Tratado de Dinâmica", em 1743, tem tido muitas interpretações divergentes de sua forma original, em especial nos livros-texto de mecânica utilizados nas diversas Escolas de engenharia do país e do exterior. Neste trabalho procura-se resgatar a originalidade e as idéias fundamentais que nortearam o enunciado do referido princípio dentro do quadro de intensos debates que eram travados aquela época.

Palavras-chave: História da mecânica, Dinâmica, Iluminismo, Racionalismo, Ensino de Engenharia.

1. INTRODUÇÃO:

Ao consultarmos alguns livros-texto de mecânica, com a finalidade de rever o princípio de d'Alembert, nos deparamos com uma série de ambigüidades e até mesmo de interpretações falaciosas, as quais não se justificam em se tratando de um princípio praticamente fundador da mecânica.

Vejam os então três referências fundamentais no ensino da mecânica atualmente. O livro "DINÂMICA", do MERIAM, 2ª edição de 1994, na pg. 232 afirma: "Quando a partícula é observada a partir de um sistema em movimento, x-y-z, ao qual está ligada na origem, Fig. 4.9 b, a partícula necessariamente parece estar em repouso, ou em equilíbrio em x-y-z. O observador que está acelerando com x-y-z, então, conclui que a força - **ma** atua na partícula para equilibrar $\sum F$. Este ponto de vista, que permite o tratamento de um problema de dinâmica pelos métodos da estática, foi uma inovação do trabalho de d'Alembert, contido no seu "Traité de Dynamique", publicado em 1743."

O outro autor é BEER- JOHNSTON Jr, 5ª edição de 1991, volume de "DINÂMICA", onde podemos ler na pg. 541: "Consideremos, em particular, um sistema de forças externas que atuam sobre um corpo rígido (Fig. 16.6 a) e o sistema de forças efetivas associadas aos pontos materiais que formam o corpo (Fig. 16.6 b). Vimos na Seção 14.1 que os dois sistemas assim definidos são equipolentes. Mas, como os pontos materiais agora considerados formam um corpo, segue-se da discussão acima que os dois sistemas são também equivalentes. Então, podemos afirmar que as "forças externas que atuam sobre um corpo-rígido são equivalentes as forças efetivas dos vários pontos materiais que o formam". Esta afirmação corresponde ao princípio de d'Alembert, devido ao matemático francês Jean Le Rond d'Alembert (1717- 1783), embora o enunciado original de d'Alembert tivesse sido escrito de forma um pouco diferente."

O terceiro livro consultado, o HIBBELLER, 8ª edição de 1998, volume de "DINÂMICA", em nota de roda-pé, pg. 76, escreve: "A equação de movimento pode também ser escrita na forma $\sum \mathbf{F} - \mathbf{ma} = \mathbf{0}$. O vetor - **ma** é referenciado como vetor força de inércia. Ele é tratado da mesma forma que um "vetor força", assim, o estado de "equilíbrio" resultante é referenciado como equilíbrio dinâmico. Este procedimento de aplicação é frequentemente referenciado como princípio de d'Alembert, nome do matemático francês Jean Le Rond d'Alembert."

Se consultarmos outras referências, sendo livros-texto ou não, a menos de detalhes, invariavelmente encontraremos enunciados semelhantes.

O que pretendemos mostrar no presente trabalho, é que o princípio de d'Alembert difere fundamentalmente do que é apresentado pelos livros-texto da maioria das Escolas de Engenharia do país e do exterior, mesmo que alguns deles, como é o caso do BEER, faça certas ressalvas com relação à forma como o princípio se apresenta atualmente.

2. RESUMO BIOGRÁFICO DE D'ALEMBERT.

Jean Le Rond d'Alembert nasceu em Paris em 16 de Novembro de 1717 e morreu, também em Paris em 29 de Outubro de 1783. Sendo filho ilegítimo de Madame de Tencin, foi adotado por uma família da qual tirou seu nome.

Dos quatro aos doze anos recebeu suas primeiras lições em uma pensão e logo a seguir entrou no Colégio Mazarin, onde demonstrou grandes aptidões para as ciências exatas, principalmente para a matemática.

Depois de ter se tornado mestre das artes em 1735, ele passou a estudar direito e depois medicina, mas sempre atraído por sua "cara geometria". Posteriormente ele abandonaria os outros estudos para se dedicar exclusivamente à matemática.

Em 1739, com apenas 22 anos d'Alembert apresentou à Academia de Ciências uma memória sobre o

equinócios e sobre a nutação do eixo da terra”, em 1749, “Ensaio de uma nova teoria sobre a resistência dos fluidos”, em 1762, “Pesquisas sobre os diferentes pontos importantes do sistema do mundo”, no período 1754-56, “Elementos de Filosofia”, em 1759 e finalmente os “Opúsculos Matemáticos”, de 1761 - 1780. Neste último e importante trabalho são tratados diversos assuntos relativos à análise matemática, à mecânica e à astronomia.

Muito embora os trabalhos supra citados constituam a maior parte de sua obra, principalmente no que diz respeito à mecânica, existem outras publicações e numerosos artigos para a “Encyclopedie”, que ele organizou juntamente com Diderot (1713 - 1784).

Não podemos esquecer que foi d’Alembert quem criou a teoria das equações á derivadas parciais para resolver o problema das cordas vibrantes. É inquestionável que esse seu trabalho preparou o caminho para a “Mecânica Analítica” de Lagrange (1736 - 1813). Também deve ser ressaltado que ele juntamente com Newton (1642 - 1727) e Laplace (1749 - 1827) ocupam um lugar de destaque nos estudos da mecânica celeste.

Finalmente, o novo e portentoso edifício teórico da mecânica que estava sendo construído no século XVIII tem como um de seus arquitetos e construtores fundamentais d’Alembert, ao lado de Euler (1707 - 1783) e Lagrange.

3. D’ALEMBERT E O CONCEITO DE FORÇA.

A questão da força, principalmente da força de atração universal á distancia, foi seriamente questionada especialmente pelos cartesianos, entre os quais d’Alembert se incluía e era um dos mais eminentes. Este questionamento repousava fundamentalmente no caráter misterioso e porque não dizer metafísico dessa ação á distancia inexplicável para o próprio Newton. Isso, contudo, continha ou era uma herança de idéias que vinham da antiguidade, desde Aristóteles (384 - 322 A.C.) que não acreditava na existência do vácuo. Em outras palavras, uma força para se propagar necessitava de um meio que a conduzisse de um objeto á outro. Daí as diversas teorias sobre o éter que perduraram até 1905 e desapareceram apesar das inúmeras resistências em contrário, com a teoria da relatividade restrita de Einstein (1879 - 1955). Um fato curioso é que em 1902, Mendeleev (1834 - 1907) o autor da tabela periódica dos elementos, tentava considerar o éter como um elemento químico e assim encontrar uma posição para ele em sua tabela.

O problema, naquilo que se referia à d’Alembert, foi colocado pela primeira vez por Leibniz (1646 - 1716) e levou a uma intensa discussão sobre a quantidade que se conservava no movimento, se era a quantidade de movimento ou a energia cinética. Isto para colocarmos o problema em termos atuais. Esses conceitos, à época de Leibniz estavam sendo construídos. Neste contexto d’Alembert afirmava: “Quando falamos de força de um corpo em movimento, também não temos uma idéia clara do que a palavra significa ou se podemos somente querer dizer em geral a propriedade dos corpos em movimento pelo qual eles ultrapassam os obstáculos que ele encontra ou resiste a ele”. Ele considerava a força como movimento.

Na realidade d’Alembert segue muito de perto as idéias de Leibniz, tanto na sua concepção de força como na crítica á idéia de força de Newton. Apesar disso, d’Alembert continua bastante alinhado com o pensamento geral de Descartes (1596- 1650) como grande cartesiano que era.

Essas considerações iniciais têm somente a finalidade de ressaltar a total discordância de d’Alembert com relação ao quadro conceitual montado por Newton para explicar o movimento á época da publicação de seu “Tratado de Dinâmica” e, conseqüentemente, logo de início contrapor as duas visões de força naquela época. Isto posto, perde qualquer sentido falar que d’Alembert sugeriu, ou o que é pior, que tenha transposto forças de tipo newtoniano para o primeiro membro da equação de movimento, como sugerem alguns textos de mecânica. Mas o que é mais grave, em termos históricos, é que a equação representando a segunda lei de Newton na forma como a conhecemos hoje, ainda não tinha sido estabelecida em 1743 conforme veremos mais adiante.

4. O PRINCÍPIO DE D’ALEMBERT.

4.1 Considerações iniciais.

Como veremos no item seguinte em maiores detalhes, d’Alembert se propõe a resolver o problema dinâmico de um sistema de partículas submetido á forças quaisquer. A pesquisa e solução desse problema, que é o problema geral da dinâmica, não dependeriam segundo ele senão dos métodos analíticos empregados, com as dificuldades inerentes ao cálculo diferencial, dentro da tradição racionalista francesa da época.

Essa forma de visualizar a dinâmica, a qual aprofundaremos no decorrer do texto, pressupõe uma teoria do movimento contida em uma racionalidade apriorística, significando que as leis do movimento fazem parte do pensamento puro e podem ser descobertas somente usando a matemática. Dessa forma, fica sem sentido falar que d’Alembert criou forças fictícias para transformar um problema de dinâmica em um outro de estática quando estava em questão era exatamente o conceito de força proposto por Newton com o qual ele não concordava. As distorções das idéias originais de d’Alembert se dão por conta deste equivoco agravado com a aplicação de seu princípio associado ao princípio dos trabalhos virtuais.

4.2 D’Alembert expõe seu princípio.

“Princípio geral para encontrar o movimento de vários corpos que atuam uns sobre os outros de uma maneira qualquer, com várias aplicações deste Princípio”.

EXPOSIÇÃO DO PRINCÍPIO

“Os corpos atuam uns sobre os outros de três maneiras diferentes que nos são conhecidas: ou por impulsão imediata, como no choque ordinário; ou por meio de qualquer corpo interposto entre eles, e ao qual eles estão ligados; ou enfim por uma virtude de atração recíproca, como acontece no sistema newtoniano o sol e os planetas. Os efeitos desta última espécie de ação tendo sido suficientemente examinados, eu me restringirei a tratar aqui do movimento dos corpos que se chocam de uma maneira qualquer, ou daqueles que se suspendem por fios ou barras inflexíveis. Eu me deterei portanto mais a vontade sobre esse assunto, pois que os maiores geômetras não resolveram até o presente (em 1742) senão um pequeno número de problemas deste gênero, e que espero, pelo método geral que vou oferecer, colocar todos aqueles que estão a par do cálculo e dos princípios da mecânica, em condições de resolver os mais difíceis problemas desta espécie.”

DEFINIÇÃO

“Chamarei no que se segue de movimento de um corpo, a velocidade do mesmo corpo considerado e que se tenha sua direção; e por quantidade de movimento, entenderei o produto ordinário da massa pela velocidade”.

PROBLEMA GERAL

“Seja dado um sistema de corpos dispostos uns em relação aos outros de uma maneira qualquer, e suponhamos que se imprima a cada um desses corpos um movimento particular, que ele não possa seguir por causa da ação dos outros corpos; encontrar o movimento que cada corpo deve adquirir”.

SOLUÇÃO

“Sejam A, B, C, etc. os corpos que compõem o sistema, e suponhamos que tenhamos impresso os movimentos a, b, c, etc. que eles sejam forçados por causa de sua ação mútua, de mudar para os movimentos a, b, c, etc. É claro que podemos olhar o movimento a impresso ao corpo A como composto do movimento a que ele adquiriu, e de um outro movimento \hat{a} ; que podemos igualmente olhar os movimentos b e c, etc., como compostos dos movimentos b e \hat{a} ; c e \hat{a} ; etc., donde se segue que o movimento dos corpos A, B, C, etc., entre eles terá sido o mesmo, se no lugar de lhes dar impulsões a, b, c, nós os dermos as duas impulsões a e \hat{a} ; b e \hat{a} ; c e \hat{a} , etc. Ou pela suposição os corpos A, B, C, etc. adquiriram deles mesmos os movimentos a, b, c, etc. Então os movimentos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} etc. devem ser tais que eles não perturbem em nada os movimentos a, b, c, etc isto é que se os corpos não tivessem recebido senão os movimentos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , etc esses movimentos deveriam se destruir mutuamente, e o sistema permanecer em repouso.

Disto resulta o princípio seguinte, para encontrar o movimento de vários corpos que atuam uns sobre os outros. Decompor os movimentos a, b, c, etc. impressos a cada corpo, cada um em dois outros a, \hat{a} ; b, \hat{b} ; c, \hat{c} ; etc. que sejam tais que se não se imprime aos corpos senão os movimentos a, b, c, etc., eles tenham podido conservar seus movimentos sem se perturbarem reciprocamente, e que se não se tenha impresso senão os movimentos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} etc., o sistema permanece em repouso; é claro que a, b, c, serão os movimentos que os corpos adquirirão em virtude de sua ação. Isto é o que devíamos encontrar.”

COROLÁRIO

“Quando um dos movimentos impressos for = 0, é claro que os movimentos nos quais o decomposmos são movimentos iguais e contrários. Por exemplo, se a é = 0, teremos o movimento \hat{a} = e de direção contrária ao movimento a; com efeito a é em todo caso a diagonal de um paralelogramo onde a e \hat{a} são os lados; ou quando a diagonal é = 0, os lados são iguais e diretamente opostos.”

5. DISCUSSÃO DO PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT.

Em nota de rodapé de seu “Tratado de Dinâmica”, d’Alembert afirma: “Este princípio e a maior parte dos problemas seguintes estão contidos em uma Memória que eu li na Academia no fim de 1742 e dessa forma a primeira edição deste Tratado não apareceu senão em 1743. No mesmo dia que eu comecei a leitura de minha Memória, M. Clairaut apresentou uma que tinha o título: “Sobre alguns princípios que facilitam a solução de um grande número de problemas de dinâmica”; esta Memória impressa no volume de 1742, foi lida depois da minha, e não tem nada em comum com a minha.”

Esta breve citação de d’Alembert tem a finalidade de nos situar no contexto no qual o seu “Tratado” foi escrito. Não somente Clairaut (1713 - 1765), mas uma grande quantidade de matemáticos, ou como eram chamados na época,

os geômetras, estavam seriamente empenhados em solucionar problemas gerais do movimento dos corpos. Não podemos esquecer que 50 anos antes Newton havia escrito os “Principia” e que no período de 1670 á 1680 ou até um pouco mais,

Leibniz confrontava o conceito newtoniano de força, aportando importantes contribuições á dinâmica, criticando também de forma acerba alguns fundamentos da mecânica de Descartes, principalmente o conceito de extensão como característica fundamental da matéria. É também importante acrescentar que foi Leibniz quem primeiro criticou a noção de movimento absoluto em Newton.

Voltando a Descartes, o famoso filósofo francês tinha feito várias proposições à teoria mecânica em seus “Princípios de Filosofia”, publicado em 1644. Em linhas gerais, mesmo no período em que d’Alembert escreveu o seu “Tratado” as idéias de Newton ainda não estavam perfeitamente estabelecidas e sofriam um severo questionamento por parte dos cartesianos. O ponto fraco da teoria newtoniana era exatamente o conceito de força à distancia.

Em nossa opinião o grande divisor de águas desse embate histórico é o ano de 1750 quando Euler escreve a segunda lei de Newton na forma que conhecemos atualmente. A famosa equação que em alguns países é chamada de Newton-Euler com a inclusão do somatório dos momentos relacionados com a variação do movimento angular, sua utilização apropriando-se do formalismo proposto por Leibniz foi decisivo para a recepção do newtonianismo no continente europeu.

Voltando ao princípio de d’Alembert, podemos observar que o problema do choque de partículas tem vários antecedentes importantes. Principalmente Descartes, Huygens (1629 - 1695) e Leibniz haviam estudado e discutido em profundidade os vários aspectos deste problema. Dessas investigações iriam surgir os princípios da conservação da quantidade de movimento e da energia cinética, bem como o próprio conceito de energia potencial. Além disso, essas idéias trariam imensas contribuições à própria constituição da mecânica analítica, formalizada no ano de 1788 por Lagrange. Uma outra consideração que julgamos importante enfatizar é que aparentemente o problema proposto por d’Alembert e a formulação que ele emprega pode dar a falsa impressão de tratar-se de um problema de cinemática. Não devemos esquecer que d’Alembert associa movimento à força e que uma decomposição de movimento pode significar uma decomposição de forças além do que no item “definição” ele se refere explicitamente à quantidade de movimento que como sabemos é uma quantidade do domínio da dinâmica.

Com a finalidade de tentar resgatar não somente o contexto no qual o “Tratado” foi escrito, mas também, se possível, as idéias originais de d’Alembert ao escrever seu conhecido princípio, utilizaremos algumas citações do mesmo. Conforme já mencionamos anteriormente, d’Alembert acreditava ser possível apreender as leis do movimento somente através da matemática. Assim ele afirma: “É evidente que somente pela aplicação da geometria e do cálculo, podemos sem a ajuda de nenhum outro princípio, encontrar as propriedades gerais do movimento, seguindo uma lei qualquer”. Além de acreditar que as leis do movimento estão contidas nos teoremas e proposições da matemática, d’Alembert também dirige uma severa crítica à Newton pois era possível estudar o movimento sem o concurso da segunda lei.

Ao se referir às causas do movimento que para Newton eram as forças, d’Alembert indaga e ao mesmo tempo responde: “Quais são as causas capazes de produzir ou de mudar o movimento de um corpo? Nós não conhecemos até o presente senão dois tipos: as que se manifestam a nós ao mesmo tempo em que o efeito que elas produzem...; são elas que têm sua fonte na ação sensível e mútua dos corpos, resultante de sua impenetrabilidade: elas se reduzem á impulsão e a outras ações derivadas daqueles; todas as outras causas não se fazem conhecer senão pelo seu efeito e nós ignoramos inteiramente sua natureza...” Em outras palavras, embora as causas do movimento fossem externas aos corpos, nós só poderíamos conhece-las, conhecendo seus efeitos sobre esses corpos.

Seguindo a linha de raciocínio de d'Alembert com relação às causas do movimento vamos diretamente a sua crítica a segunda lei quando afirma: “Por que então teríamos nós de recorrer a este princípio que todo o mundo faz uso hoje em dia, que a força aceleratriz ou retardatriz é proporcional ao elemento da velocidade? Princípio apoiado sobre este único axioma vago e obscuro, que o efeito é proporcional a causa...” E ele continua: “Nós não o adotaremos mais, com alguns geômetras, senão como uma verdade puramente contingente pois que arruinaria a certeza da mecânica e a reduziria a não ser mais que uma ciência experimental: nós nos contentaremos a observar que verdadeiro ou duvidoso, claro ou obscuro, ele é inútil à mecânica, e que por consequência deve ser banido.” Segundo d'Alembert a segunda lei de Newton introduz o dado experimental da realidade, destruindo sua racionalidade apriorística que lhe era tão cara e portanto deveria ser abolida. Isto cinquenta anos após a publicação dos “Principia”.

Este é o quadro geral no qual se dava o embate dos cartesianos contra as idéias newtonianas. Vejamos então em maiores detalhes o quadro conceitual no qual se apoiava a mecânica de d'Alembert. Segundo ele: “O princípio do equilíbrio juntamente com o da força de inércia e do movimento composto, nos conduzem à solução de todos os problemas onde se considere o movimento de um corpo...” E prossegue: “Tudo o que nós vemos bem distintamente no movimento de um corpo, é que ele percorre um certo espaço e que ele emprega um certo tempo em percorre-lo. É então desta idéia somente que devemos tirar todos os princípios da mecânica...” Continuando ele volta à questão da força: “Assim eu proscreei inteiramente as forças inerentes aos corpos em movimento, seres obscuros e metafísicos, que não são capazes senão de trazer as trevas sobre uma ciência clara por ela mesma...” E discorrendo como estimar as forças que atuam sobre um determinado corpo ele acrescenta: “É unicamente pelos obstáculos que um corpo encontra e pela resistência que lhe oferecem... Mais obstáculos que um corpo pode vencer ou que ele possa resistir... mais se pode dizer que a força é grande... E não é então senão no equilíbrio ou no movimento retardado que devemos procurar a medida (**das forças**) ...” “ **Então no equilíbrio o produto da massa pela velocidade, ou, que é a mesma coisa, a quantidade de movimento, pode representar a força**”.

Fica claro dentro do quadro conceitual usado por d'Alembert que a questão do equilíbrio se refere a uma forma de estimar as forças e não como um meio de transformar o problema de dinâmica em um outro de estática como alguns pretendem. A força de inércia a qual ele se refere também não tem nenhuma relação com a adição de uma força fictícia no sentido de parar o movimento como os textos de mecânica interpretam modernamente o seu princípio. Para ele, força de inércia é a que advém da massa do corpo conforme ele se refere no “Tratado”, desta feita em concordância com o conceito de inércia de Newton.

6. LAGRANGE DISCUTE O PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT.

Lagrange, em sua obra principal “Mécanique Analytique”, publicada em 1788, discute de forma clara e acessível, o princípio de d'Alembert. Muito embora o trecho que nos interessa seja razoavelmente longo, preferimos usar as próprias palavras de Lagrange: O “Tratado de Dinâmica” de d'Alembert que apareceu em 1743 coloca um fim nessas espécies de desafios, oferecendo um método direto e geral para resolver, ou pelo menos para colocar em equações todos os problemas de dinâmica que se possa imaginar. Este método reduz todas as leis de movimento dos corpos a outro de seu equilíbrio e conduz a dinâmica à estática. Nós temos já observado que o princípio empregado por Jacques Bernoulli (1654 - 1705) na pesquisa do centro de oscilação teve a vantagem de fazer depender esta pesquisa das condições de equilíbrio da alavanca; mas estava reservado a d'Alembert visualizar este princípio de uma maneira e de lhe dar toda a simplicidade e a fecundidade que ele pode ser suscetível.

Se imprimirmos a vários corpos movimentos que sejam forçados a variar por causa de sua ação mútua, é claro que podemos observar esses movimentos como compostos daqueles que os corpos adquirem realmente, e de outros que são destruídos; donde se segue que os últimos devem ser tais que os corpos animados somente com eles se mantêm em equilíbrio.

Tal é o princípio que d'Alembert apresentou em seu “Tratado de Dinâmica” e onde **ele fez um feliz** uso em muitos problemas e, sobretudo naquele da precessão dos equinócios. Este princípio não fornece imediatamente as equações necessárias *para a solução dos problemas de dinâmica, mas ele ensina a deduzir as condições de equilíbrio. Assim, combinando este princípio com os princípios ordinários de equilíbrio da alavanca ou da composição de forças, podemos sempre encontrar as equações de cada problema; mas a dificuldade de determinar as forças que devem ser destruídas, além das leis de equilíbrio entre essas forças, torna freqüentemente a aplicação deste princípio embaraçante e penoso; e as soluções que resultam são quase sempre mais complicadas que se elas fossem deduzidas de princípios menos simples e menos diretos, como podemos nos convencer pela segunda parte do mesmo “Tratado de Dinâmica”.*

Se nós quiséssemos evitar as decomposições de movimentos que este princípio exige, não teríamos senão que estabelecer imediatamente o equilíbrio entre as forças e os movimentos engendrados, mas tomados em direções contrárias. Pois se imaginarmos que se imprime em cada corpo, em sentido contrário, o movimento que ele deve tomar é claro que o sistema será reduzido ao repouso; por consequência, seria necessário que esses movimentos destruíssem esses que os corpos tinham recebido e que eles teriam seguido sem sua ação mútua; assim deve ter equilíbrio entre todos esses movimentos, ou entre as forças que os podem produzir.

Esta maneira de transformar as leis da dinâmica nas da estática é na verdade menos direta que a que resulta do princípio de d'Alembert, mas ela oferece mais do que simplicidade nas aplicações; isto remete a Herman e Euler, que a empregaram na solução de muitos dos problemas de mecânica e onde se encontra em alguns tratados de mecânica sob o nome de princípio de d'Alembert ”.

7. COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÃO.

O princípio de d'Alembert deve ser analisado no contexto de um confronto de idéias por parte dos cartesianos com as leis do movimento de Newton. O que os cartesianos defendem, como pudemos depreender das palavras de d'Alembert, é uma mecânica racional de tipo apriorística, onde as leis do movimento são deduzidas da matemática pura e simplesmente sem nenhuma intervenção ou investigação empírica. Não seria exagero se disséssemos que d'Alembert apresenta uma outra teoria para se estudar o movimento dos corpos. Isto soa bastante estranho, pois aquela época já são decorridos mais de cinquenta anos da publicação dos "Principia".

Tivemos também oportunidade de observar que d'Alembert não utiliza o conceito newtoniano de força e que ele muitas vezes confunde força com o próprio movimento, ou, o que é mais freqüente, força com quantidade de movimento como uma herança recebida diretamente de Descartes. Quase que como uma decorrência imediata de seu conceito de força, ele se refere a uma situação de repouso como uma forma de estimar as forças que atuam em um determinado corpo e é também por isso que ele tenta decompor o movimento utilizando os movimentos efetivos juntamente com aqueles que são destruídos, pois é pela resistência aos obstáculos, ou seja, tentando parar os objetos é que podemos medir as forças que atuam sobre eles.

Os erros cometidos pelos textos de mecânica, na sua grande maioria, consistem em confundir os conceitos de força como se não existissem diferenças entre d'Alembert e Newton. Em outras palavras, os textos não levam em conta a história de como esses conceitos foram constituídos e newtonizavam o próprio princípio de d'Alembert, enfocando o problema colocado por d'Alembert com uma visão moderna, posterior ao próprio Newton. De uma certa maneira até Lagrange ao discutir o princípio de d'Alembert "atualiza", digamos assim, o referido princípio, associando-o à idéia de trabalho virtual. Mas é fundamental deixar claro que no último parágrafo do item anterior Lagrange nega que o princípio de d'Alembert seja uma transformação de um problema de dinâmica em um outro de estática, acrescentando que este fato se deve a Herman e Euler.

Quando Lagrange discute o princípio de d'Alembert em sua "Mecânica Analítica", já se passaram 45 anos da publicação do "Tratado de Dinâmica". Nesse quase meio século, Euler tinha apresentado a segunda lei de Newton na forma que a conhecemos hoje e tinha demonstrado sua extrema fecundidade e potencialidade na solução de problemas os mais variados da mecânica. Era portanto, perfeitamente justificável que Lagrange ao voltar ao princípio de

d'Alembert introduzisse conceitos novos e de eficácia já comprovada. Lagrange não só faz isto como também isenta o princípio de ser uma mera transformação de coordenadas ou algo semelhante com o intuito de "parar" o movimento.

8. REFERENCIAS

- Beer, F. P. & Johnston, E. R. Jr., 1991, "Mecânica Vetorial para Engenheiros", Mc Graw- Hill, Ltda.
 d'Alembert, J., 1921, "Traité de Dynamique", Gauthier-Villars et Cia, Editeurs, Paris
 Gages, 1932, "Mecanique Rationnelle", treizieme édition, Paris.
 Heilbron, J. L., 1982, "Elements of early modern physics", UCLA Press, L. Angeles.
 Hibbeler, R. C., 1999, "Dinâmica", oitava edição, LTC-Livros Técnicos e Científicos S. A, Rio.
 Lagrange, J., 1888, "Mecanique Analytique", quatrieme edition, publiée par Gaston Darboux, Paris.
 Meriam, 1994, "Dinâmica", 2ª edição.

REVISITING THE d'ALEMBERT PRINCIPLE

Agamenon R. E. Oliveira

Department of Applied Mechanics and Structures (DME)

Polytechnic School of the Federal University of Rio de Janeiro

agamenon@rionet.com.br

Abstract. The famous d'Alembert principle, published in his "Traité de Dynamique" in 1743 has many different and divergent interpretations from the original ideas mainly in the mechanical text-books. This paper is an attempt to present the d'Alembert principle regarding the historical context of ideas and the debates among the scientists facing the Newton's concept of force.

Keywords. History of Mechanics, Dynamics, Enlightenment, Rationalism, Engineering Education.

ON THE NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE TRUSSES CONSIDERING LARGE STRAINS, DAMAGE AND PLASTICITY

Larissa Driemeier

Department of Mechatronics and Mechanical System Engineering, University of São Paulo, Av. Prof. Mello Moraes, 2231, São Paulo, S.P., Brazil, CEP:05508-900, e-mail:driemec@usp.br

Marcílio Alves

Department of Mechatronics and Mechanical System Engineering, University of São Paulo, Av. Prof. Mello Moraes, 2231, São Paulo, S.P., Brazil, CEP:05508-900, e-mail:maralves@usp.br

Abstract: *The purpose of this work is to explore theoretical and numerical aspects of the behaviour of plane trusses which undergo large displacements and strains, leading the material to operate in the plastic regime with damage. Such nonlinearities justify the use of a simple structural element, ie plane truss, in order to present the basic theoretical aspects of the formulation employed, in the simplest possible context. The logarithmic deformation measure is used together with its respective conjugated stress measure. A truss element exhibiting such features is implemented in a Finite Element code and an example is discussed aiming to show the consistency of the formulation and the importance of the consideration of geometrical and/or physical nonlinearity in the structural analysis.*

Keywords: *Plane Truss, Large Strains, Damage Mechanics, Plasticity.*

1. Strains

Consider a bar with current length ℓ and current cross section a , submitted to a normal force N . The initial configuration is given by the initial length L and cross section A . The simplest strain measure is the stretching ratio, λ , which permit us to obtain a dimensionless equation with respect to the displacement. λ can be defined as the ratio between the initial and final lengths,

$$\lambda = \frac{\ell}{L}. \quad (1)$$

Although the stretching, λ , is a measure of deformation other measures can be worked out from it, leading to the concept of *strain*. The basic idea is that any new strain measure should vanish at the reference configuration, i.e. $\lambda = 1$, and should agree with the classical definition stated as the change in length over the original length.

In one dimension, a general measure of strain, ε , as function of the stretch ratio,

$$\varepsilon = f(\lambda).$$

can be introduced, where the function f is chosen at our convenience. ε can be expanded in a Taylor series about the unstrained state

$$\varepsilon = f(1) + (\lambda - 1) \frac{df}{d\lambda} + \frac{1}{2!} (\lambda - 1)^2 \frac{d^2f}{d^2\lambda} + \dots \quad (2)$$

and enforce $f(1) = 0$, so that $\varepsilon = 0$ at $\lambda = 1$, as sought.

In order to make the strain to increase monotonically with the stretching, $\frac{df}{d\lambda} > 0$ for all values $\lambda > 0$. Hence, to each value of stretch there corresponds a unique value of strain. If $\frac{df}{d\lambda} = 1$ at $\lambda = 1$ all definitions coincide for small strains.

With these restrictions, many strain measures are possible and several commonly used. We can use the term *deformation family* to define

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) & \text{if } m \neq 0, \\ \ln \lambda & \text{if } m = 0, \end{cases} \quad (3)$$

with Table 1 defining the relations between m and the deformation class.

All the defined strain measures lead to the same result for small stretch ratios ($\lambda \approx 1$). However, when the stretch ratio grows, the strain values are rather different one from each other.

Table 1. Deformation family and stress conjugated measures.

<i>deformation</i>	<i>m</i>	<i>symbol</i>	<i>equation</i>	<i>stress</i>
Almansi	-2	ε_A	$\frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$	$\sigma_A = \sigma_n \lambda^3$
Hyperbolic	-1	ε_H	$1 - \lambda^{-1}$	$\sigma_H = \sigma_n \lambda^2$
Logarithmic	0	ε_L	$\ln \lambda$	$\sigma_L = \sigma_n \lambda$
Engineering	1	ε_E	$\lambda - 1$	$\sigma_E = \sigma_n$
Green	2	ε_G	$\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$	$\sigma_G = \sigma_n \lambda^{-2}$

1.1. Strain rate

The strain rates can be easily calculated from Eq. (3) as,

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^{m-1} \dot{\lambda} = \lambda^m \dot{d} \quad (4)$$

where $d = \lambda^{-1} \dot{\lambda}$ is called *instantaneous strain rate*.

2. Stress and Equilibrium

For numerical analysis by the finite-element method, it is suitable to write the equilibrium of a structure using the weak form of the Principle of Virtual Power,

$$\frac{d}{dt} T(v) + W^i + W^e = 0 \quad (5)$$

where v is the velocity, $T(v) = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$ is the kinetic energy and,

$$W^i = \int_V \sigma \dot{\varepsilon} dV \quad W^e = - \int_V \rho b v dV - \sum_i f_i v_i \quad (6)$$

are the internal and external power, respectively, with ρ being the density, b representing the volume forces and f_i are the prescribed local forces.

For the particular case when the equilibrium is static, the Principle of Virtual Work is applied. Since velocities are not involved, a virtual displacement produces the virtual work. In this way, the Principle of Virtual Work states that a body is in equilibrium when the total virtual work of the applied forces is null, $F^i - F^e = 0$, where

$$F^i = \int_V \sigma \delta \varepsilon dV \quad \text{and} \quad F^e = \int_V \delta u \rho b dV - \sum_i f_i \delta u_i \quad (7)$$

are the internal and external work, respectively.

Hill (Hill, 1978), in 1968, introduced the concept of conjugate stress and strain measures as a tool with which one can explore constitutive inequalities in solid mechanics. The stress σ and the deformation ε are conjugate if the potential per unit of volume can be written as:

$$w^i = \sigma \dot{\varepsilon} \quad (8)$$

Such that, regardless of the strain-stress measures used, the potential w^i is always the same. The expression *work-conjugate* is used to imply that a set of strain-stress definitions is physically consistent.

In this way, the potential of a normal force N is given by:

$$w^i = \frac{N \dot{\ell}}{AL} = \frac{N}{A} \dot{\lambda} \quad (9)$$

where $\dot{\lambda}$ is the Biot' strain rate and $\sigma_n = \frac{N}{A}$ is the nominal stress. In this way, from the equality,

$$\frac{N}{A} \dot{\lambda} = \sigma_m \dot{\varepsilon}_m = \sigma_m \lambda^{m-1} \dot{\lambda} \quad (10)$$

one can obtain any stress measure conjugated to the strain family Eq. (3),

$$\sigma_m = \sigma_n \lambda^{1-m} \quad (11)$$

It is worth to point out that with $m = 1$ we have the classical stress–strain measures, while for $m = 0$, $\dot{\varepsilon}_L = \dot{d} = \dot{\lambda}\lambda^{-1}$, the conjugated stress is called *true stress* where,

$$\frac{N\dot{\ell}}{A\dot{L}} = \frac{v}{V} \frac{N}{a} \dot{d} = \sigma_L \dot{\varepsilon}_L \quad (12)$$

which means,

$$\sigma_L = \frac{N}{a} \frac{v}{V} \quad (13)$$

When the volume is kept constant during an analysis, Eq. (13) becomes $\sigma_L = \frac{N}{a}$.

We can enhance Table 1 by listing the complete set of stresses conjugated to their strains.

2.1. Stress rate

The time derivative of expression (11) gives the expression for the general stress rate,

$$\dot{\sigma}_m = \dot{\sigma}_n \lambda^{1-m} - (m-1) \lambda^{-m} \sigma \dot{\lambda} \quad (14)$$

3. Constitutive Laws

Until now, kinematics relations and equilibrium equations were studied separately. The way to link the stress and strain fields is through a constitutive law. The constitutive law must be able to reproduce in details the experimental observations about the material behaviour. In general,

$$\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m) \quad (15)$$

The simplest expression for the function $\sigma_m(\varepsilon_m)$ is to assume it linear, which leads to the classical elastic material model. For example, the Young Modulus, E , relates the nominal stress with Biot' strain,

$$\sigma_E = E \varepsilon_E \quad (16)$$

In fact, we can define a general elastic modulus E_m related to E , for each stress–strain measures.

A relation in rates can be obtained from Eq. (15),

$$\dot{\sigma}_m = \mathcal{D}_m \dot{\varepsilon}_m \quad (17)$$

where $\mathcal{D}_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m}$ is the tangent elastic modulus and it coincides with E_m only in the linear elastic case.

Recently, not only the elastoplasticity theory in large strains field has been discussed extensively, as well as material degradation can be formulated, using Continuum Damage Mechanics framework. In elastoplastic analysis with damage, the degradation (or voids evolution) is represented by a damage parameter, D ; while the plastic variable represents the permanent deformation in the crystalline structure of metals,

$$\sigma_m = (1-D) E_m \varepsilon_m^e \quad (18)$$

where ε_m^e is the elastic part of the total strain.

3.1. Basic equations

When a bar is loaded, its configuration changes from a given initial state with area A and length L at $t = t_0$ into the current state, $t = t_1$, with area a and length ℓ . If the truss is then unloaded at $t = t_2$, this unloaded configuration will differ from the initial one only by a rigid body rotation, when assuming an elastic material.

However, for a material undergoing inelastic behaviour, permanent deformations are observed when the material is freed from stresses, Figure 1. The configuration shown in Figure 1 is called *intermediate local configuration*, relative to which the elastic and plastic responses of the material are characterized (Bonet and Wood, 1997).

Since bar element is one of the particular cases when the permanent and elastic deformations are colinear, the stretching can be written as follow (Simo and Hughes, 1997; Bonet and Wood, 1997; Kirchner et al., 1997),

$$\lambda = \lambda^e \lambda^p \quad (19)$$

The Eq. (19) is called *multiplicative decomposition* of the stretch ratio into its elastic and plastic components. From Figure 1, the following equations can be derived,

$$ds = \lambda dS \quad ds = \lambda^e ds^p \quad ds^p = \lambda^p dS \quad (20)$$

leading to the additive decomposition used in the small strain regime

$$\ln(\lambda_i) = \ln(\lambda_i^e) + \ln(\lambda_i^p) \quad (21)$$

when a logarithmic strain definition is used. In the next sections, instead of using general expressions for stress and strain variables, the logarithmic strain $\varepsilon = \ln(\lambda)$ and its conjugate stress $\sigma = \frac{N}{a} \frac{v}{V}$ will be used.

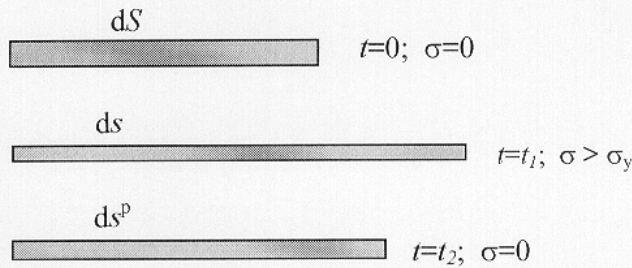


Figure 1. Spatial position of a bar stressed beyond its elastic limit and then unloaded.

3.2. Elastoplasticity with damage model for unidimensional case

The well known von Mises criterion with isotropic hardening is used to define the region where only reversible phenomena take place. For unidimensional analysis, it is represented by the equation,

$$\phi(\sigma, \alpha, D) = \frac{|\sigma|}{1 - D} - \sqrt{\frac{2}{3}}R(\alpha) \leq 0 \tag{22}$$

where $R(\alpha)$ is the flow stress for the current value of the work hardening parameter α . A general form for $R(\alpha)$ is the exponential equation suggested by Voce (1955) apud (Simo and Hughes, 1997),

$$R(\alpha) = \sigma_y + K\alpha + (K_\infty - K_0)[1 - \exp(-\delta\alpha)] \tag{23}$$

where K, K_∞, K_0 and δ are positive material constant and $K_\infty \geq K_0$.

The incremental plastic strain is proportional to the gradient of the yield surface ϕ ,

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \frac{\text{sign}(\sigma)}{1 - D} \tag{24}$$

For material degradation, we can use the model suggested by Lemaitre (Lemaitre, 1985), where the damage evolution is given by,

$$\dot{D} = \frac{Y}{S(1 - D)} \dot{\gamma} \tag{25}$$

where,

$$Y = -\frac{\sigma^2}{2E(1 - D)} \tag{26}$$

and S is a material parameter.

Applying the strain-hardening hypothesis, the hardening parameter is represented by the equivalent plastic strain,

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\dot{\epsilon}^p \dot{\epsilon}^p} = \dot{\gamma} \frac{1}{1 - D} \tag{27}$$

$\dot{\gamma}$ and ϕ must obey the *Kuhn-Tucker conditions* of optimization theory:

$$\dot{\gamma} \phi = 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0 \tag{28}$$

and the *consistency condition*:

$$\dot{\gamma} \dot{\phi} = 0 \tag{29}$$

3.3. Elastoplastic with damage tangent modulus

In view of $\dot{\gamma} \neq 0$, the consistency condition is written as,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (30)$$

which must be satisfied for plastic flow, i.e., when $\dot{\alpha} \geq 0$. Using equations (22)–(26), the following expression for the hardening parameter is found:

$$\dot{\alpha} = \frac{E \operatorname{sign}(\sigma)}{E + R_\alpha} \dot{\varepsilon} \quad (31)$$

where

$$R_\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} [K + \delta(K_\infty - K_0) \exp -\delta\alpha] \quad (32)$$

From equations (24), (27), (31) and (32), the incremental plastic deformation can be written as,

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + R_\alpha} \dot{\varepsilon} \quad (33)$$

and, finally, the stress–strain relation in rates is,

$$\dot{\sigma} = \left[(1 - D) \frac{ER_\alpha}{E + R_\alpha} - \frac{|\sigma|EY}{R_\alpha S(1 - D)} \right] \dot{\varepsilon} \quad (34)$$

which defines the elastoplastic with damage tangent modulus, \mathcal{D}^{dep} ,

$$\mathcal{D}^{dep} = \begin{cases} E & \text{if } \dot{\gamma} = 0, \\ \left[\frac{(1-D)ER_\alpha}{E+R_\alpha} - \frac{|\sigma|EY}{R_\alpha S(1-D)} \right] & \text{if } \dot{\gamma} > 0. \end{cases} \quad (35)$$

4. Algorithmic aspects of finite plasticity with damage

4.1. Incremental problem – time discretization

Consider a structure formed by bar elements with cross section A_i and length L_i , subject to nodal forces f and body forces b .

Let $t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t$ be convenient time instant along the time interval over which the response is sought. Consider the time step $\Delta t = t_{n+1} - t_n$: at $t = t_n$ the total and plastic strain fields and the internal variables are known and the solution should be computed at $t = t_{n+1}$ for given load increments Δb and Δf .

The nonlinear boundary value problem concerning the finite-step should be solved with an iterative scheme. In the scheme here adopted, each iteration consists of a linear predictor phase and a non-linear corrector phase plus a convergence test. The index $n + 1$ of the time step has been omitted and the superscripts i and $i + 1$ refer to the iteration.

4.1.1. Predictor phase

At the iteration $i + 1$ for a fixed plastic and damage variable value, e.g. equal to the value reached at the end of the previous step $\lambda_{i+1}^p = \lambda_i^p$ and $D_{i+1} = D_i$, the trial state is summarised in Box 1.

Box 1. Equations of *Predictor phase*.

1. Evaluate elastic trial stretching, elastic trial deformation:

$$\lambda_{i+1}^{e,trial} = \lambda_{i+1}(\lambda^p)_i^{-1}$$

$$\varepsilon_{i+1}^{e,trial} = \ln(\lambda_{i+1}^{e,trial})$$

2. Evaluate the trial elastic stress state:

$$\sigma_{i+1}^{e,trial} = E(1 - D_i)\varepsilon_{i+1}^{e,trial}$$

In order to check if the state of stress is compatible with the assumption of an elastic step, we can use

$$\phi(\sigma^{trial}, \alpha_i, D_i) = \frac{|\sigma^{trial}|}{1 - D_i} - \sqrt{\frac{2}{3}} R(\alpha_i) \leq 0 \quad (36)$$

If $\phi \leq 0$, then the step is already elastic, that means, $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, $D_{n+1} = D_n$ and $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$, perform now a next step. On the other hand, if $\phi > 0$, then a *corrector phase* is necessary.

4.1.2. Corrector phase

For the corrector phase, the stress, damage, hardening parameter and plastic and elastic strains are updated as follow:

$$\sigma_{i+1} = E(1 - D_{i+1})\varepsilon_{i+1}^e \quad (37)$$

$$D_{i+1} = D_i + \Delta\gamma \frac{Y_{i+1}}{1 - D_{i+1}} \quad (38)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{i+1}} \quad (39)$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\gamma N_{i+1} \quad (40)$$

$$\varepsilon_{i+1}^e = \varepsilon_{i+1}^{e,trial} - \Delta\gamma N_{i+1} \quad (41)$$

where:

$$N_{i+1} = \frac{\text{sign}(\sigma_{i+1})}{1 - D_{i+1}} \quad (42)$$

The value of $\Delta\gamma$, δD and σ_{i+1} are obtained from the following system of equations,

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} - \frac{1 - D_{i+1}}{1 - D_i} + E\Delta\gamma \text{sign}(\sigma_i) &= 0 \\ D_{i+1} - D_i - \Delta\gamma \frac{Y_{i+1}}{S(1 - D_{i+1})} &= 0 \\ \frac{|\sigma_{i+1}|}{1 - D_{i+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}}R(\alpha_{i+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

where,

$$Y_{i+1} = -\frac{\sigma_{i+1}^2}{2E(1 - D_{i+1})} \quad (44)$$

4.1.3. Convergence test

Compute residual force vectors and check convergence comparing a norm of the residual with a fixed tolerance. If the convergence test is not passed, perform a new iteration.

4.2. Finite element method – spatial discretization

Figure 2 shows a plane truss element. It is a two nodes isoparametric element, with linear interpolation (see shape functions N on the figure) for displacement and continuity over the elements.

The displacements and coordinates are defined, respectively, as,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (45)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (46)$$

where

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2] \quad (47)$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2] \quad (48)$$

are vectors of nodal displacements and nodal coordinates.

Strains are defined as,

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u} = \ln \left(\frac{\ell}{L} \right) \quad (49)$$

where

$$\ell^2 = (\mathbf{x}_{21} + \mathbf{u}_{21})^T (\mathbf{x}_{21} + \mathbf{u}_{21}) \quad L^2 = \mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21} \quad (50)$$

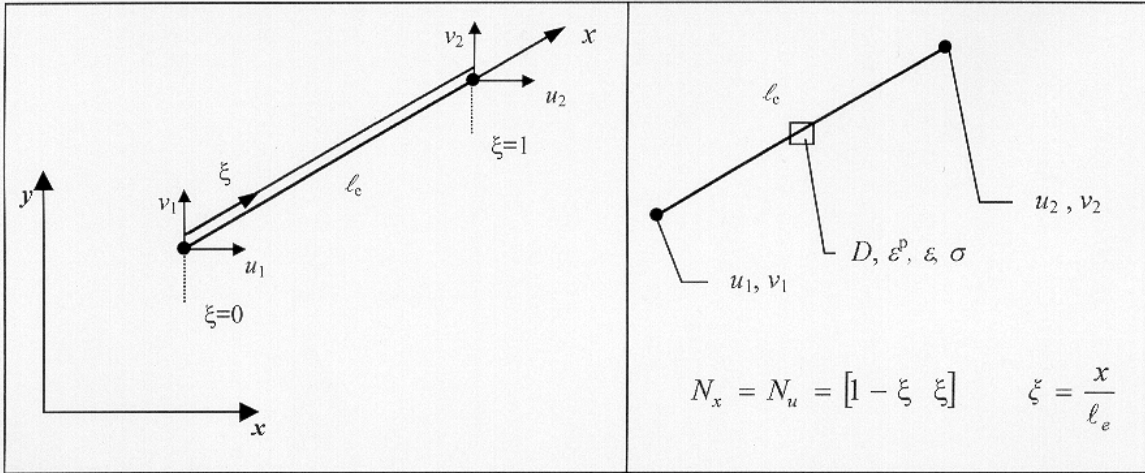


Figure 2. Truss element.

with

$$\mathbf{x}_{21}^T = [x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1] \quad \mathbf{u}_{21}^T = [u_2 - u_1 \quad v_2 - v_1] \quad (51)$$

The matrix $\mathbf{B} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}}$ in Eq. (49) is given by,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\ell} \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (52)$$

where \mathbf{A} is an auxiliary matrix,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

4.2.1. Iterative solution procedure

As discussed in section 2, for static analysis, a body is in equilibrium if the sum of internal and external work is null, $F^i - F^e = 0$. For each finite element (subscript e), internal and external work take the form,

$$F_e^i = \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{B}^T \sigma dV \quad (54)$$

$$F_e^e = \mathbf{u}^T \left[\int_V \mathbf{N}^T \rho b dV - \mathbf{N}^T f \right]$$

The global force vectors can be computed from all element contributions through a standard assembly operator (Hughes and Winget, 1980), (Simo and Hughes, 1997), which is linear and will not change the operations carried out at element level.

In the last section, the first step procedure (predictor phase) is based on a known value of $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,i+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}_{n+1,i+1} = \ln(\lambda_{n+1,i+1})$, where

$$\mathbf{u}_{n+1,i+1} = \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_{n+1,i+1} \quad (55)$$

Then, $\delta \mathbf{u}_{n+1,i+1}$ remains to be determined through an iterative solution procedure, where $F_{e,i+1}^i$ is linearized about the current state, defined by \mathbf{u}_i ,

$$F_{e,i+1}^i = F_{e,i}^i + \frac{\partial F_{e,i}^i}{\partial \mathbf{u}_i} \delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{k}_i \delta \mathbf{u}_{i+1} \quad (56)$$

where \mathbf{k}_i is the element tangent stiffness matrix. As before, the index $n + 1$ of the time step has been omitted and the superscripts i and $i + 1$ refer to the iteration.

By solving Eq. (54a), one arrives at:

$$F_e^i = \lambda^{-(1+2\nu)} \frac{\sigma A}{L} \mathbf{A} (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (57)$$

where ν is the Poisson.

That means,

$$\mathbf{k}_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \mathbf{u}_i}^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i} \lambda^{-(1+2\nu)} \frac{A}{L} \mathbf{b}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}(\mathbf{u})^T \frac{\partial \lambda^{-(1+2\nu)}}{\partial u_i} \frac{\sigma A}{L} + \lambda^{-(1+2\nu)} \frac{\sigma A}{L} \mathbf{A} \quad (58)$$

where $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} (\mathbf{x} + \mathbf{u})$.

Finally,

$$\mathbf{k}_i = k_t + k_{\sigma 1} + k_{\sigma 2} \quad (59)$$

where the submatrices are given by,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= \mathbf{b}(\mathbf{u})^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i} \frac{\lambda^{-(1+2\nu)}}{L \ell^2} \mathbf{b}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{k}_{\sigma 1} &= \lambda^{-(1+2\nu)} \frac{\sigma A}{L} \mathbf{A} \\ \mathbf{k}_{\sigma 2} &= -(1 + 2\nu) \lambda^{-(3+2\nu)} \frac{\sigma A}{L^3} \mathbf{b}(\mathbf{u})^T \mathbf{b}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (60)$$

The equilibrium equation is replaced with the linear approximation of $F_{e,i+1}^{int}$, which results in a iterative procedure.

The explicit expression for the coefficient $\frac{\partial \sigma_{i,n+1}}{\partial \varepsilon_{i,n+1}}$ is discussed next.

4.3. About algorithmic damaged elastoplastic tangent modulus

Since equations (37) and (41) define the stress σ as an implicit function of the trial logarithmic strain $\varepsilon^{e,trial}$, the linearization of the relation defines the consistent algorithmic elastoplastic modulus as (Simo, 1992):

$$\mathcal{D}_{n+1}^{dep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,trial}} \quad (61)$$

Recall that,

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{n+1}} \delta \sigma_{n+1} + \frac{\partial \phi}{\partial D_{n+1}} \delta D_{n+1} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_{n+1}} \delta \alpha_{n+1} = 0 \quad (62)$$

where,

$$\delta \alpha_{n+1} = \left[\frac{1}{1 - D_{n+1}} + \frac{Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})^3} \right] \delta \Delta \gamma + \frac{3Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})^4} \Delta \gamma \delta D_{n+1} \quad (63)$$

In view of Eq. (38),

$$\delta D_{n+1} = \left[1 - \frac{3Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})^2} \Delta \gamma \right]^{-1} \left[\frac{Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})} \delta \Delta \gamma - \frac{\sigma_{n+1}}{ES(1 - D_{n+1})^3} \Delta \gamma \delta \sigma_{n+1} \right] \quad (64)$$

The constitutive law leads to,

$$\delta \sigma_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,trial}} \delta \varepsilon_{n+1}^{e,trial} + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \gamma} \delta \Delta \gamma + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial D_{n+1}} \delta D_{n+1} + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \delta \sigma_{n+1} \quad (65)$$

when remembering that during a global iteration, the trial state is not held fixed due to a change of the displacement.

With the set of equations (62), (63), (64) and (65) and in view of,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\text{sign}(\sigma_{n+1})}{1 - D_{n+1}}; & \frac{\partial \phi}{\partial D_{n+1}} &= \frac{|\sigma_{n+1}|}{(1 - D_{n+1})^2}; & \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_{n+1}} &= R_\alpha \\ \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,trial}} &= E(1 - D_{n+1}); & \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial D_{n+1}} &= -E \varepsilon_{n+1}^{e,trial} \frac{3Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})^2} \Delta \gamma \\ \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \gamma} &= -E \text{sign}(\sigma_{n+1}) - E \varepsilon_{n+1}^{e,trial} \frac{Y_{n+1}}{S(1 - D_{n+1})} \\ \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -E \varepsilon_{n+1}^{e,trial} \frac{\sigma_{n+1}}{ES(1 - D_{n+1})^3} \Delta \gamma \end{aligned} \quad (66)$$

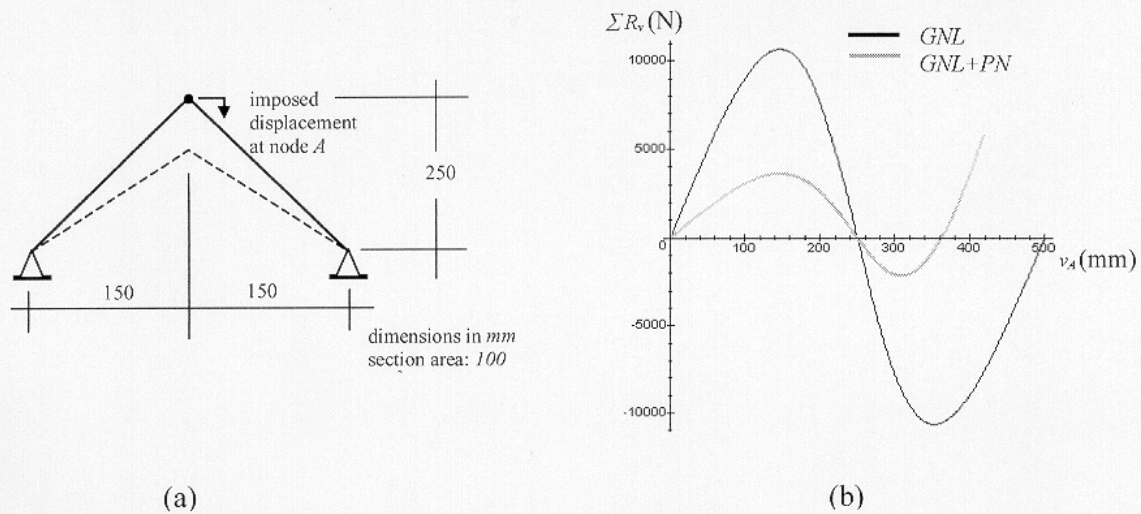


Figure 3. (a) Classical truss example and (b) the load-displacement curve.

we can express $\delta\sigma_{n+1}$ in terms of $\delta\varepsilon_{n+1}^{e,trial}$ as:

$$\delta\sigma_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1}^{dep} \delta\varepsilon_{n+1}^{e,trial} \quad (67)$$

and \mathcal{D}_{n+1}^{dep} is called algorithmic tangent modulus and it does not coincide with the elastoplastic with damage tangent modulus defined by Eq. (35).

5. Example

Figure 3(a) shows a classical example when large strains are considered. Initially, the truss was analysed considering only geometrical nonlinearity (GNL), with controlled displacement at node A; the elasticity modulus is $E = 2 \cdot 10^5$ Mpa and $\nu = 0$. In a second analysis, the physical nonlinear response (GNL+PNL) was also included through plasticity with damage, where $K = 1 \cdot 10^5$ Mpa, $K_\infty = K_0 = 0$ and $S = 0.2$ MPa.

The response changes significantly for the two analysis, as can be seen in the load-displacement curve of Figure 3(b). The curves present a descending branch, well known as *snap-through* behaviour, when the critical load is reached.

6. Acknowledgments

This study was supported by the Funding Research Agency at São Paulo, Brazil through grant FAPESP 99/05219-1.

References

- Bonet, J. and Wood, R. D., 1997, "Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis", Cambridge University Press, UK.
- Hill, R., 1978, "Aspects of invariance in solid mechanics", Archives in Applied Mechanics, Vol.18, pp.1-75.
- Hughes, T. J. R. and Winget, J., 1980, "Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp. 1862-1867.
- Kirchner, E., Reese, A. and Wriggers, P., 1997, "A finite element method for plane stress problems with large elastic and plastic deformations", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.13, pp.963-976.

Lemaitre, J. A., 1985, "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", *J. Engrg. Mat. Technol.*, Vol.107,pp.83-89.

Simo, J. C., 1992, "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.99,pp.61-112.

Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., 1997, "Computational Inelasticity", Springer-Verlag.

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS APOIADAS EM FUNDAÇÕES VISCO-ELÁSTICAS E SUBMETIDAS A CARGAS MÓVEIS

Wallace Moreira Bessa

Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ – Programa de Engenharia Mecânica
Centro de Tecnologia, Bloco G/ 204 – Caixa Postal: 68.503 – 21945-970 – Cidade Universitária, RJ, Brasil
e-mail: wmbessa@ufrj.br

Fernando Ribeiro da Silva

Instituto Militar de Engenharia – IME – Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil
e-mail: d4fernan@epq.ime.ub.br

Max Suell Dutra

Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ – Programa de Engenharia Mecânica
Centro de Tecnologia, Bloco G/ 204 – Caixa Postal: 68.503 – 21945-970 – Cidade Universitária, RJ, Brasil
e-mail: maxdutra@ufrj.br

Resumo. Uma formulação para o estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma placa apoiada sobre uma fundação visco-elástica, e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento, que percorra uma trajetória qualquer ao longo da superfície da placa é apresentada neste trabalho. Utiliza-se o método dos elementos finitos e a técnica dos grafos de ligação na modelagem do sistema. O modelo matemático, obtido na forma de equações de estado, permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise do comportamento dinâmico da estrutura de placa e do subsistema mecânico, interagindo entre si. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Elementos Finitos, Grafos de Ligação

1. Introdução

Dentre as aplicações do problema de cargas móveis, a análise da interação entre veículo e estrutura, constitui um dos maiores desafios enfrentados. As dificuldades estão na necessidade de se considerar em um mesmo modelo, subsistemas de natureza distinta, interagindo entre si.

Por se tratar de um assunto de grande relevância para a engenharia, esforços têm sido realizados com o intuito de se dar um tratamento matemático mais aprimorado, visando o estudo de sistemas mais sofisticados, e que representem melhor a realidade.

Diferentes aspectos do problema em questão foram investigados ao longo das últimas décadas. Biggs (1964), Timoshenko (1965) e Warburton (1976) apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial de governo de uma viga Bernoulli-Euler submetida a uma carga móvel simples e constante.

Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória do modelo estrutural, Achembach & Sun (1965) analisaram o comportamento de uma viga de Timoshenko infinita apoiada em uma fundação elástica, quando atravessada por uma carga móvel. Jahanshahi & Monzel (1965) e Adler & Reismann (1974), utilizando a teoria de Mindlin para placas, incorporaram os mesmos efeitos para o caso de uma placa infinita sob a ação de um carregamento móvel distribuído em linha perpendicularmente à sua trajetória. Todos estes trabalhos, entretanto, não consideraram o regime transiente da estrutura e o carregamento adotado era sempre constante.

Utilizando a técnica dos grafos de ligação, Margolis (1976) apresentou um procedimento para a análise dinâmica de um veículo trafegando sobre uma ponte. Neste trabalho a ponte foi representada por uma viga, através de suas autofunções e frequências naturais, enquanto o veículo foi modelado como corpo rígido apoiado sobre sua suspensão. A dinâmica do sistema completo pôde, então, ser estudada. Estendendo esta metodologia para a análise de modelos estruturais bidimensionais, Da Silva & Bessa (1999), analisaram a interação entre uma placa de Kirchhoff e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento.

Entretanto, a modelagem do subsistema estrutural através de suas autofunções, implica que a solução analítica da equação diferencial parcial de governo seja previamente conhecida. Isto traz uma limitação para a modelagem de estruturas com condições de contorno mais complexas.

Com o desenvolvimento e difusão de computadores digitais com maior capacidade de armazenamento e maior velocidade de processamento, tornou-se viável a utilização de ferramentas computacionais e métodos numéricos mais elaborados. O método dos elementos finitos, particularmente, tem se mostrado eficaz na representação de modelos estruturais com elevado grau de complexidade.

Vários autores utilizaram esta metodologia para estudar o problema de cargas móveis. Lin & Trethewey (1990) e Yang & Wu (2001) analisaram o comportamento de uma viga Bernoulli-Euler interagindo com sistemas dinâmicos de

um e dois graus liberdade. Considerando uma carga simples, Thambiratnam & Zhuge (1996) e Hung & Yang (2001) investigaram o caso de uma viga apoiada em uma fundação elástica, enquanto Taheri & Ting (1990) apresentaram um modelo para a análise de uma placa com condições de contorno arbitrárias.

Apesar da eficácia proporcionada pelo método dos elementos finitos na modelagem do subsistema estrutural, a principal dificuldade consiste na complexidade matemática de se analisar sua interação com um subsistema de parâmetros concentrados.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade e modularidade da técnica dos grafos de ligação, Da Silva (1994) apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que interaja com subsistemas de natureza física distinta. Uma aplicação proposta consistia na análise de um veículo com quatro graus de liberdade trafegando sobre uma viga com apoios intermediários.

Utilizando este procedimento, Bessa (2000), Bessa & Da Silva (2000a) e Bessa & Da Silva (2000b) investigaram o comportamento dinâmico de vigas e placas com condições de contorno arbitrárias e submetidas a subsistemas mecânicos em movimento com diferentes níveis de complexidade.

Neste trabalho apresenta-se uma placa discretizada pelo método dos elementos finitos e representada por grafos multiligação submetida a um carregamento móvel. Comparam-se os resultados obtidos com os resultados de modelos simplificados disponíveis na literatura. Apresenta-se, ainda, um modelo específico para a análise da interação de uma placa de Kirchhoff apoiada sobre uma fundação visco-elástica com um carregamento oriundo de um subsistema mecânico que possua uma dinâmica própria.

2. Modelagem do sistema

2.1. Placa submetida a carga móvel constante

A determinação da resposta de uma placa sob a ação de um carregamento móvel é de grande interesse para a engenharia, pois seu campo de aplicações envolve o estudo do comportamento da fuselagem de aeronaves, e análise da interação entre veículos e estruturas.

Para investigar esta classe de problemas, parte-se de um modelo mais simplificado, no qual emprega-se uma carga concentrada, movendo-se com velocidade constante ao longo de uma trajetória plana pré-estabelecida, conforme apresentado na Fig. (1a). O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Fig. (1b).

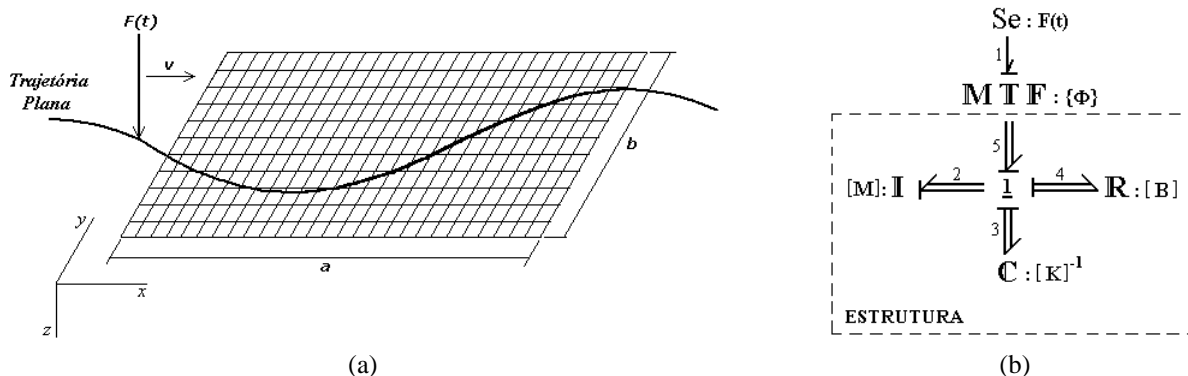


Figura 1. (a) Modelo físico do sistema e (b) Grafo de ligação do sistema

A parte deste grafo correspondente à estrutura baseia-se no modelo proposto por Da Silva (1994), e aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Fig. (1b) pelos campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente.

Pelo fato da carga estar em movimento, seu ponto de contato com a estrutura varia a cada instante de tempo. Deste modo, como o carregamento não se limita apenas aos nós, torna-se necessária sua representação no interior do elemento de placa. Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado (\mathbf{MTF}), cujo módulo $\{\Phi\}$ é definido através das funções de interpolação, calculadas no ponto de contato do carregamento com a placa.

As matrizes elementares do modelo estrutural foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento de dezesseis graus de liberdade (quatro graus de liberdade por nó – w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial^2 w/\partial x \partial y$). As funções de interpolação para este elemento são obtidas a partir do produto das funções de Hermite unidimensionais nas direções x e y .

Deste modo, definidas as funções de interpolação, determina-se os coeficientes das matrizes elementares de massa (M_{ij}^p) e rigidez (K_{ij}^p).

$$K_{ij}^P = \int_{\Omega} \left[D_x \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x^2} + D_1 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial y^2} \right) + D_y \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial y^2} + 4D_{xy} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (1)$$

$$M_{ij}^P = \int_{\Omega} \left[I_0 \mathbf{f}_i^e \mathbf{f}_j^e + I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i^e}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^e}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}_i^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2)$$

onde D_x , D_1 , D_y e D_{xy} representam a rigidez flexional de uma placa ortotrópica,

$$D_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}; \quad D_1 = \frac{\mathbf{n}_{12} E_2 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}; \quad D_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}; \quad D_{xy} = \frac{1}{12} G_{12} h^3$$

enquanto $I_0 = \mathbf{r}_v h$ e $I_2 = \frac{1}{12} \mathbf{r}_v h^3$ são os momentos de inércia de massa.

A matriz de amortecimento do modelo estrutural pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, conhecida como Amortecimento de Rayleigh.

$$\mathbf{B}_{ij}^P = \mathbf{a} \cdot M_{ij}^P + \mathbf{b} \cdot K_{ij}^P \quad (3)$$

Neste caso, as constantes de amortecimento \mathbf{a} e \mathbf{b} , são escolhidas de modo que sejam proporcionados os coeficientes de amortecimento modal (\mathbf{x}_i) desejados.

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{x}_1 \mathbf{w}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_2^2 - \mathbf{w}_1^2)} \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \frac{2(\mathbf{x}_2 \mathbf{w}_2 - \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_2^2 - \mathbf{w}_1^2)} \quad (5)$$

Estas matrizes foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento isolado da malha. Para a construção das matrizes globais [M], [K] e [B], que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

Assim, o modelo de estado obtido a partir do grafo da Fig. (1b), escrito em função das variáveis de estado de entrada do sistema, é apresentado na Eq. 6.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Phi\} \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (6)$$

onde \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_3 são os vetores com as quantidades de movimento e com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural e e_1 representa o carregamento que atua na estrutura.

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo estrutural. Porém, apenas dezesseis destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de placa no qual a carga esteja atuando, assumem valor diferente de zero. Assim, existe um sub-vetor 16×1 , que a medida que a carga se move para o próximo elemento, ele se desloca para os graus de liberdade representativos deste elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das funções de interpolação do elemento. Como a carga está em movimento, sua posição (\bar{x}, \bar{y}) no interior do elemento pode ser substituída por:

$$\bar{x} = v_1 (t - t_e) \quad (7)$$

$$\bar{y} = v_2 (t - t_e) \quad (8)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades em x e y , e t_e é o instante em que a carga entra no elemento.

2.2. Aplicativo: interação veículo – estrada

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficaz na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas com elevado grau de complexidade. Assim, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável à modelagem da interação entre um veículo e uma estrada, como apresentado na Fig. 2.

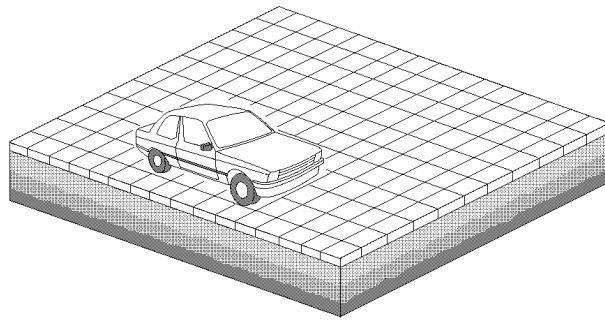


Figura 2. Modelo real do sistema veículo – estrada

Para representar corretamente este sistema dinâmico é de extrema importância a consideração da influência do terreno sob a estrada. O modelo físico proposto para representar este sistema consiste de um veículo, modelado com sete graus de liberdade, que trafega sobre uma placa apoiada sobre uma fundação visco-elástica.

Devido a modularidade da técnica de modelagem utilizada, o modelo dinâmico global pode ser obtido através do acoplamento dos grafos desenvolvidos, isoladamente, para cada subsistema. Deste modo, o grafo multiligação representativo do sistema completo é apresentado na Fig. (3c).

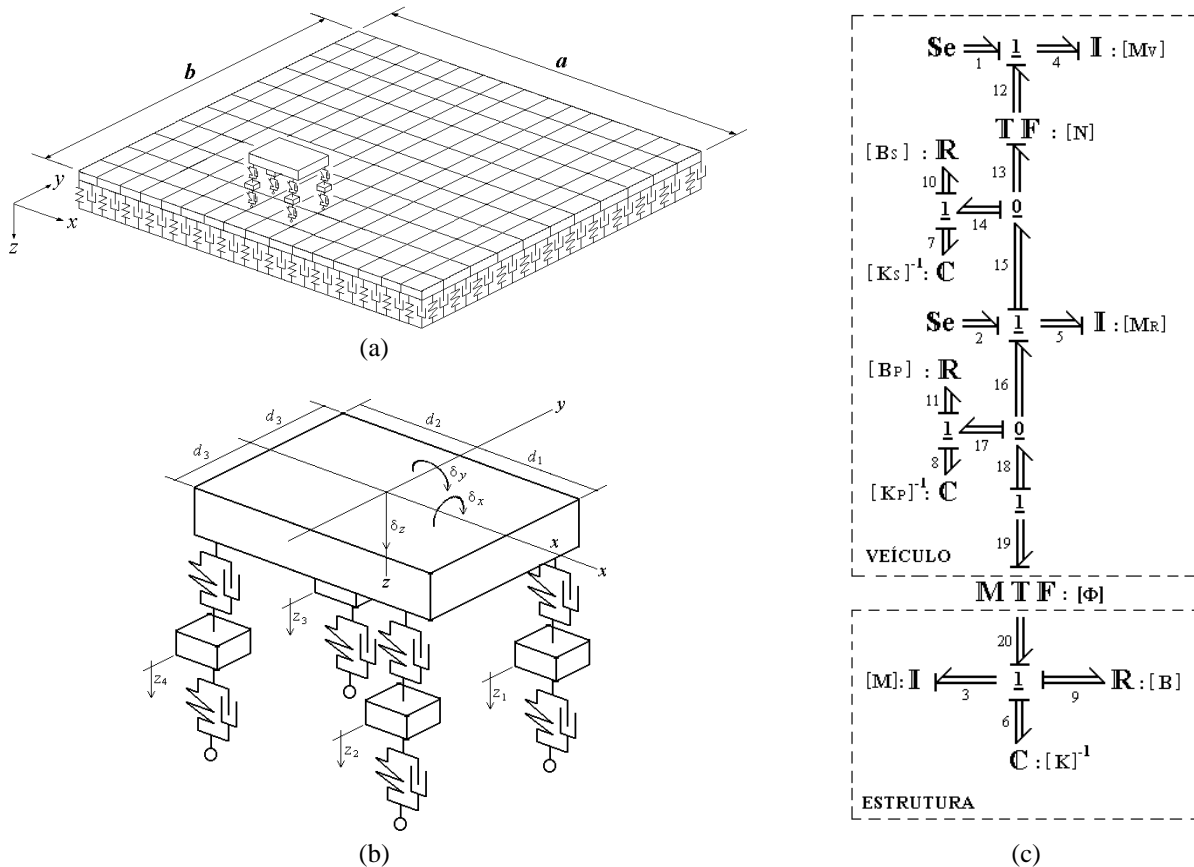


Figura 3. (a) Modelo físico do sistema veículo – estrada; (b) Modelo do veículo e (c) Grafo multiligação do sistema

Como pode ser observado na Fig. (3a), a fundação visco-elástica, utilizada para representar o terreno, foi modelada como sendo uma série de molas (k_f) e amortecedores (c_f) linearmente distribuídos sob a placa. Deste modo, as matrizes características deste modelo estrutural, podem ser obtidas através da simples adição das matrizes do elemento de placa (K_{ij}^p e B_{ij}^p), com as matrizes relativas à fundação elástica (K_{ij}^f e B_{ij}^f).

$$K_{ij}^f = \int_{\Omega_e} \mathbf{f}_i^e k_f \mathbf{f}_j^e dx dy \tag{9}$$

$$B_{ij}^f = \int_{\Omega_e} \mathbf{f}_i^e c_f \mathbf{f}_j^e dx dy \tag{10}$$

Destaca-se que, como não existe nenhum efeito inercial associado à fundação elástica, a matriz elementar de massa permanece idêntica à matriz de massa do elemento de placa.

A partir do grafo multiligação do sistema, pode-se determinar as equações de estado do modelo, aqui escritas na sua forma matricial, em função das variáveis de estado (X) e do vetor de entradas (U).

$$\dot{X} = AX + BU \tag{11}$$

$$Y = CX + DU \tag{12}$$

Neste caso, os vetores X , U e Y , e as matrizes A , B , C e D , presentes no modelo de estado, podem ser expressos por:

$$X = [\mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_4 \quad \mathbf{p}_5 \quad \mathbf{q}_6 \quad \mathbf{q}_7 \quad \mathbf{q}_8]^T$$

$$U = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T$$

$$Y = [\mathbf{f}_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + [\Phi][\mathbf{B}_p][\Phi]^T)[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & [\Phi][\mathbf{B}_p][\mathbf{M}_R]^{-1} & -[\mathbf{K}] & 0 & -[\Phi][\mathbf{K}_p] \\ 0 & -[\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & [\mathbf{N}][\mathbf{K}_s] & 0 \\ [\mathbf{B}_p][\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & [\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & -([\mathbf{B}_p] + [\mathbf{B}_s])[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & -[\mathbf{K}_s] & [\mathbf{K}_p] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ [\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & -[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{M}_v]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

onde $[\mathbf{N}]$ e $[\Phi]$ são os módulos dos transformadores, expressos por:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_3 & -d_3 & d_3 & -d_3 \\ d_1 & d_1 & -d_2 & -d_2 \end{bmatrix}; \quad [\Phi] = \{[\Phi]_1 \quad [\Phi]_2 \quad [\Phi]_3 \quad [\Phi]_4\}$$

Os elementos $\{[\Phi]_n\}$ da matriz $[\Phi]$, são os vetores responsáveis pela representação de cada roda do veículo, nos pontos de contato situados no interior do elemento de placa.

Destaca-se que, para modelar o veículo foram adotadas algumas propriedades características da área de dinâmica veicular. A matriz $[\mathbf{M}_v]$ por exemplo, contém as inércias referentes ao deslocamento vertical (m) e aos deslocamentos angulares (I_x e I_y) do veículo, enquanto que a matriz $[\mathbf{M}_R]$ representa a massa de cada roda.

$$[\mathbf{M}_v] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{M}_R] = \begin{bmatrix} M_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_R^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_R^4 \end{bmatrix}$$

As propriedades de rigidez e amortecimento da suspensão e do pneu, foram incorporadas ao modelo, através das matrizes:

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} K_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_s^4 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{B}_s] = \begin{bmatrix} B_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_s^4 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{K}_p] = \begin{bmatrix} K_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p^4 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{B}_p] = \begin{bmatrix} B_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p^4 \end{bmatrix}$$

3. Resultados obtidos

3.1. Placa submetida a carga móvel constante

Utilizando um código computacional, desenvolvido em FORTRAN 90, simulou-se o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento, e comparou-se os resultados obtidos com resultados provenientes da literatura (Taheri e Ting, 1990).

As propriedades adotadas para a comparação dos resultados foram as mesmas propostas por Taheri e Ting (1990), placa isotrópica simplesmente apoiada com propriedades: $E = 206,84 \text{ GPa}$, $\rho_v = 10684 \text{ kg /m}^3$, $G = 79,56 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$ e dimensões: $a = b = 0,1016 \text{ m}$ e $h = 0,00254 \text{ m}$, sendo submetida a uma carga de $8,9 \text{ N}$. Considerou-se uma trajetória retilínea para a carga, paralela ao lado a da placa passando pelo centro desta estrutura.

A Tabela (1) apresenta o fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático ($W_{est} = 0,0116Fa^2/D_E$, onde D_E é a rigidez flexional de uma placa isotrópica), para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T/τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ significa o tempo necessário para a carga percorrer toda a placa.

Tabela 1. Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T/τ	Este trabalho	Taheri e Ting (1990)
0,125	1,040	1,045
0,250	1,109	1,090
0,500	1,242	1,256
1,000	1,573	1,566
2,000	1,383	1,409

Confrontando os fatores dinâmicos de amplificação (F_{din}) calculados, com os resultados obtidos na referência, verifica-se que a discrepância máxima entre estes valores não alcança 2%. Em seu trabalho, Taheri e Ting (1990) também modelaram a estrutura pelo método dos elementos finitos, porém as equações correspondentes aos graus de liberdade de rotação ($\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$) foram resolvidas estaticamente. Outra diferença observada entre este trabalho e a referência, diz respeito ao passo de integração utilizado. Enquanto Taheri e Ting (1990) usaram apenas 25 passos, para um mesmo intervalo de tempo, neste trabalho foram considerados de 5.000 a 35.000 passos, dependendo da velocidade do carregamento.

O deslocamento transversal do nó central da placa, associado a cada parâmetro adimensional de velocidade (T/τ) da Tab. (1), é apresentado na Fig. (4) em função da posição do carregamento. Destaca-se que os deslocamentos a partir de $x/a > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura, pois neste instante a carga perde o contato com a estrutura.

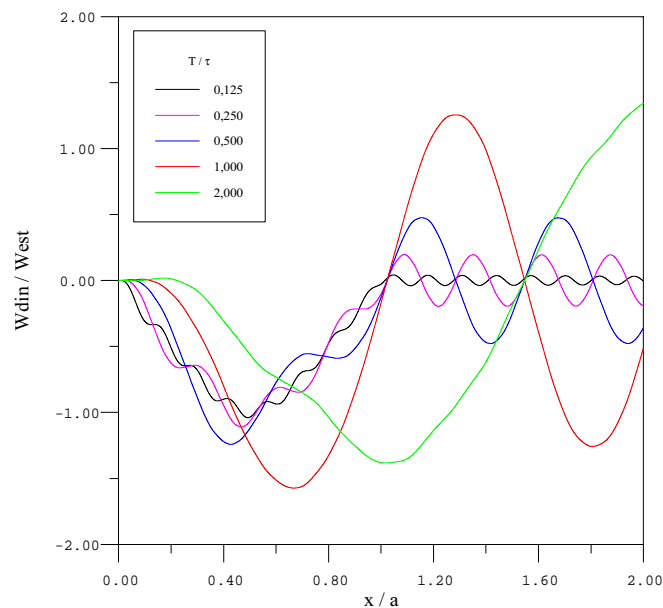


Figura 4. Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição da carga

Observando a Tab. (1) e a Fig. (4), pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo. Este deslocamento máximo foi identificado (Bessa, 2000), para o caso de uma carga móvel simples, como sendo 57,5% maior que o deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,575$), e ocorria quando o tempo necessário para a carga percorrer a placa era igual ao seu período fundamental ($T / \tau = 1,0$). Para o caso de uma placa submetida a um oscilador, a velocidade crítica do sistema depende da razão entre a massa do oscilador e a massa da placa (m/M_p). A Figura (5) apresenta a variação do fator dinâmico de amplificação para dois casos distintos: 1) placa submetida a uma carga simples e 2) placa submetida a um oscilador com $m/M_p = 0,125$.

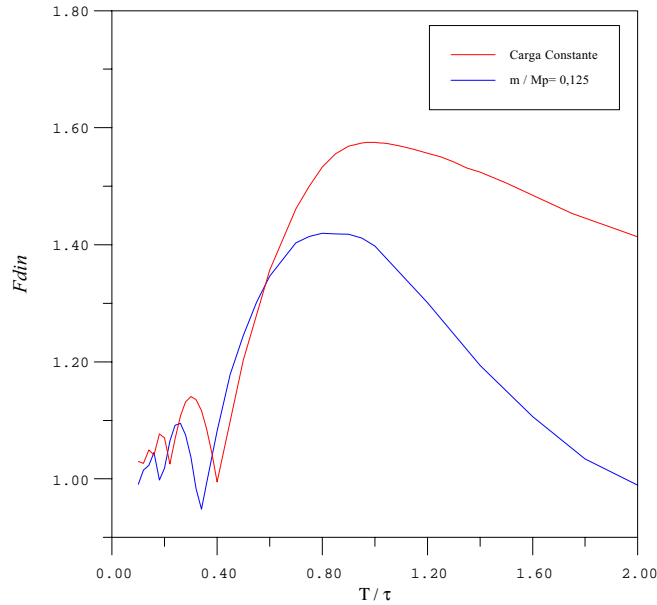


Figura 5. Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento

Observa-se que para um subsistema mecânico, sua inércia gera um desvio na curva do fator dinâmico de amplificação. É interessante notar que, para uma velocidade pré-determinada, este desvio causa uma diferença no comportamento da estrutura. Considerando, por exemplo, a região acima da velocidade crítica, verifica-se as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para o modelo com a carga constante, enquanto que em grande parte da região abaixo da velocidade crítica, as maiores amplitudes acontecem para o modelo com o oscilador.

3.2. Aplicativo: interação veículo – placa – fundação elástica

Procurando simular o comportamento dinâmico deste sistema, considerou-se um veículo trafegando com uma velocidade constante de 20 m/s, sobre uma estrada representada por uma placa apoiada sobre uma fundação visco-elástica (ver Fig. 3). As propriedades de cada subsistema são apresentadas na Tab. (2).

Tabela 2. Propriedades do sistema

Veículo	Estrutura
$m = 1100 \text{ kg}$	16 elementos de placa
$I_x = 700 \text{ kg.m}^2$	$a = 10 \text{ m}$
$I_y = 1.800 \text{ kg.m}^2$	$b = 10 \text{ m}$
$K_s^1 = K_s^2 = 10.000 \text{ N/m}$	$h = 0,1 \text{ m}$
$K_s^3 = K_s^4 = 9.000 \text{ N/m}$	$E = 24 \text{ Gpa}$
$B_s^1 = B_s^2 = 500 \text{ N.s/m}$	$G = 10 \text{ Gpa}$
$B_s^3 = B_s^4 = 450 \text{ N.s/m}$	$r_v = 2.300 \text{ kg/m}^3$
$K_p = 200.000 \text{ N/m}$	$n = 0,15$
$B_p = 50 \text{ N.s/m}$	$x_1 = x_2 = 5\%$
$d_1 = 1 \text{ m}$	$k_f = 4 \times 10^5 \text{ N/m}^3$
$d_2 = 1,8 \text{ m}$	$c_f = 1,5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}^3$
$d_3 = 1,4 \text{ m}$	
$M_R^1 = M_R^2 = M_R^3 = M_R^4 = 12 \text{ kg}$	

Considerando que a única força atuante sobre o veículo era o seu próprio peso, admitiu-se que ele começou a atravessar a placa no instante $t = 20s$, tempo este suficiente para que a sua posição de equilíbrio fosse atingida.

Deste modo, através dos resultados de simulação, pode-se mostrar a interação dinâmica entre os dois subsistemas, e verificar a influência que um exerce sobre o outro.

A Figura (6), por exemplo, mostra o deslocamento vertical no domínio do tempo, do ponto central da estrutura.

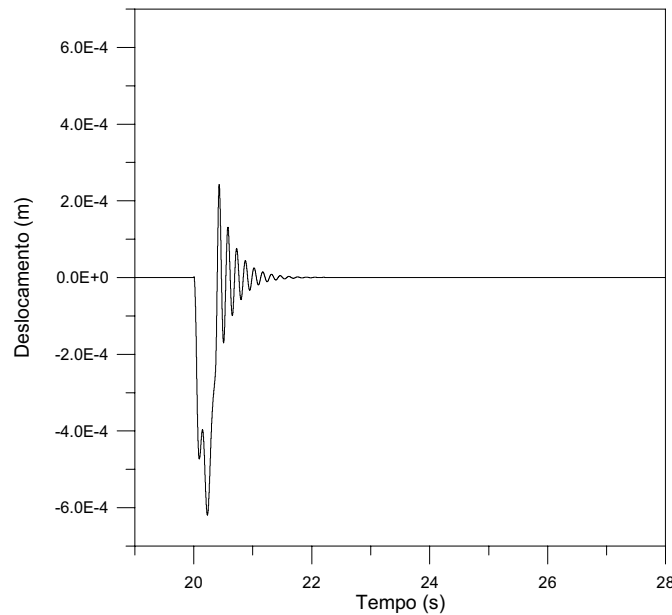


Figura 6. Deslocamento vertical da estrutura em $x = a/2$ e $y = b/2$

Para o veículo, apresenta-se na Fig. (7), as velocidades relacionadas ao movimento vertical (Bounce).

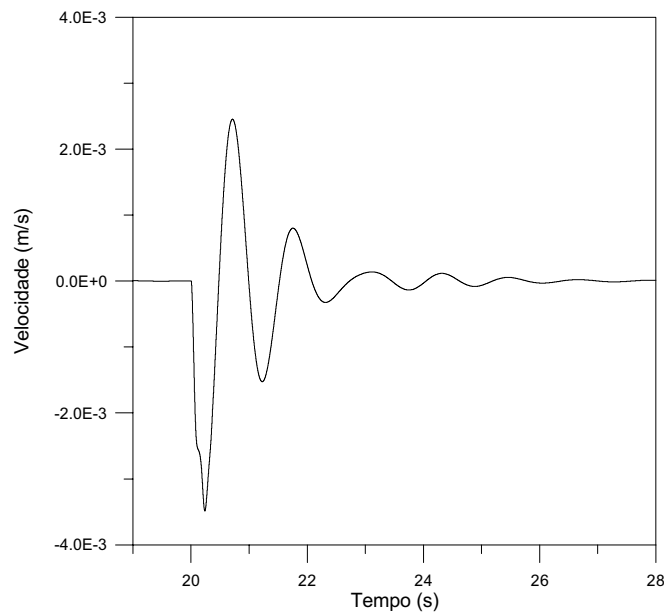


Figura 7. Velocidades relacionadas ao movimento vertical do veículo (\dot{d}_z)

Por fim, as velocidades relacionadas aos movimentos angulares em x e y , (*Roll* e *Pitch*, respectivamente), são apresentadas na Fig. (8).

Ressalta-se que outros resultados, podem facilmente ser obtidos através do código computacional desenvolvido. Para o veículo, por exemplo, pode-se avaliar a variação dos esforços, das acelerações, das velocidades e dos deslocamentos, relativos a cada um de seus componentes (molas, amortecedores e inércias). Estes resultados podem ser de grande valia para a análise da dinâmica veicular e do conforto do passageiro. Para a estrutura, além dos deslocamentos associados a cada grau de liberdade, poderia se explorar os esforços, as deformações e as tensões atuantes.

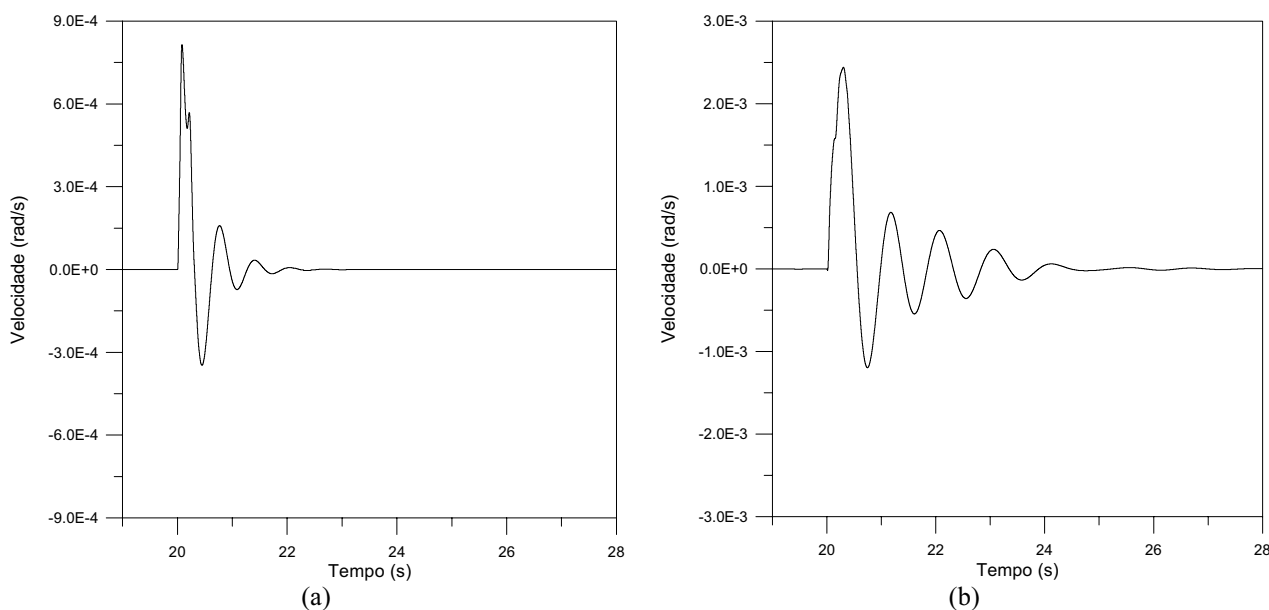


Figura 8. Velocidades dos movimentos angulares do veículo: (a) \dot{d}_x e (b) \dot{d}_y .

4. Considerações finais

O recente aumento do número de trabalhos publicados por pesquisadores, de diversas áreas da engenharia, sobre o problema de cargas móveis, demonstra a grande relevância desta classe de problemas, e a necessidade da obtenção de modelos matemáticos que permitam a representação de sistemas com diferentes níveis de complexidade.

Uma análise do comportamento dinâmico de uma placa submetida a um carregamento móvel foi apresentada. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento, identificando, inclusive, a presença de uma velocidade crítica, na qual a estrutura apresenta suas maiores amplitudes de deslocamento.

Observou-se que o deslocamento dinâmico transversal de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga simples, deslocando-se com uma velocidade constante, em uma trajetória paralela a um de seus lados, pode chegar a ser 1,575 vezes maior que deslocamento estático máximo, quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/t = 1,0$). Considerando que o carregamento atuante tenha sido proveniente de um subsistema massa-mola-amortecedor, verificou-se que a massa do subsistema influencia a resposta da estrutura.

Ressalta-se, através do modelo proposto para representar a interação veículo-estrutura, as vantagens de se utilizar um procedimento generalizado e modular na representação de um sistema de maior complexidade.

Foram apresentados, no item 3.2, alguns resultados para ressaltar as inúmeras possibilidades proporcionadas por este procedimento de modelagem. Isto não impede porém, que sejam extraídos outros resultados do modelo matemático, inclusive considerando dados mais realísticos para o modelo. Uma investigação interessante, e que merece uma maior atenção, é a análise das velocidades críticas do veículo, tanto sob o ponto de vista estrutural (conforme apresentado na Fig. 5), quanto em relação ao conforto do passageiro.

No que diz respeito ao desenvolvimento de futuros trabalhos, destaca-se a importância de se considerar, o efeito do cisalhamento e da inércia rotacional, através da teoria de Mindlin, para os casos de placas espessas, não considerados neste trabalho. Seria interessante, também, comparar as velocidades críticas obtidas através destas duas teorias, com os resultados apresentados neste trabalho.

Devido à característica multidisciplinar e modular da técnica dos grafos de ligação, pode-se, através deste procedimento, construir um modelo no qual esteja presente um sistema de controle, que possibilite a redução das amplitudes críticas de deslocamento da estrutura.

Outra importante contribuição, seria a utilização de um critério de redução de ordem para o modelo estrutural, o que permitiria uma diminuição significativa no tempo de processamento.

5. Referências

- Achenbach, J. D. & Sun, C. T., 1965, "Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam", *International Journal of Solids Structures*, vol. 1, p. 353 – 370.
- Adler, A. A. & Reismann, H., 1974, "Moving Loads on a Elastic Plate Strip", *Journal of Applied Mechanics – Transac. of the ASME*, vol. 41, p. 713 – 718.
- Bessa, W.M., 2000, "Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem", Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.

- Bessa, W. M. & Da Silva, F. R., 2000a, “Dinâmica de Sistemas Constituídos por Vigas Sujeitas a Cargas Móveis Oriundas de Subsistemas Mecânicos”, CONEM 2000, Natal.
- Bessa, W. M. & Da Silva, F. R., 2000b, “Modelagem da Interação Dinâmica entre Estruturas de Placa e Subsistemas Mecânicos em Movimento”, CONEM 2000, Natal.
- Biggs, J. M., 1964, “Introduction to Structural Dynamics”, McGraw Hill, New York.
- Da Silva, F. R. & Bessa, W. M., 1999, “Cargas Móveis Sobre Placas: Uma Formulação Através da Análise Modal”, XV COBEM, Águas de Lindóia.
- Da Silva, F. R., 1994, “Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Hung, H.-H. & Yang, Y.-B., 2001, “Elastic Waves in Visco-Elastic Half-Space Generated by Various Vehicle Loads”, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 21, p. 1 – 17.
- Jahanshahi, A. & Monzel, F. J., 1965, “Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear on the Response of Elastic Plates to Moving Loads”, Ingenieur-Archiv, vol. 34, No 6, p. 401 – 410.
- Lin, Y.-H. & Trethewey, M. W., 1990, “Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 136, No 2, p. 323 – 342.
- Margolis, D. L., 1976, “Finite Mode Bond-Graph representation of Vehicle-Guideway Interaction Problems”, Journal of The Franklin Institute, vol. 302, No 1, p. 1 – 17.
- Taheri, M. R. & Ting, E. C., 1990, “Dynamic Response of Plates to Moving Loads: Finite Element Method”, Computers & Structures, vol. 34, No 3, p. 509 – 521.
- Thambiratnam, D. & Zhuge, Y., 1996, “Dynamic Analysis of Beams on Elastic Foundations Subjected to Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 198, No 2, p. 149 – 169.
- Timoshenko, S. P., 1965, “Theory of Structures”, John Wiley, New York.
- Warburton, G. B., 1976, “The Dynamic Behavior of Structures”, Pergamon Press, Oxford.
- Yang, Y.-B. & Wu, Y.-S., 2001, “A Versatile Element for analyzing vehicle-bridge interaction response”, Engineering Structures, vol. 23, p. 452 – 469.

DYNAMIC BEHAVIOR OF STRUCTURES ON VISCO-ELASTIC FOUNDATIONS UNDER MOVING LOADS

Wallace Moreira Bessa

Federal University of Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ – Program of Mechanical Engineering
 Centro de Tecnologia, Bloco G/ 204 – Caixa Postal: 68.503 – 21945-970 – Cidade Universitária, RJ, Brasil
 e-mail: wmbessa@ufrj.br

Fernando Ribeiro of Silva

Military institute of Engineering–IME–Department of Mechanical Engineering and of Materials
 Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil
 e-mail: d4ferman@epq.ime.eb.br

Max Suell Dutra

Federal university of Rio de Janeiro–COPPE/UFRJ–Program of Mechanical Engineering
 Centro de Tecnologia, Bloco G/ 204 – Caixa Postal: 68.503 – 21945-970 – Cidade Universitária, RJ, Brasil
 e-mail: maxdutra@ufrj.br

Summary. *In several fields of engineering it has become of increasing interest to study the dynamic behavior of structures under moving loads. Simplifications have commonly been introduced by assuming the moving load as a moving force. This contribution presents a study of the interaction between a structure, represented by a plate, and a moving load originated from a mechanical subsystem. The effect of some important parameters of the mechanical subsystem in the structural response, is taken into account. Some results is shown to emphasize the significance of a model which considers the global behavior of the entire system.*

Keywords: *Dynamics, Vibrations, Moving Loads, Finite Elements, Bond Graphs*

STRESS WAVES PROPAGATION PHENOMENON IN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO AXIAL IMPACT

D. Karagiozova

Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences,
Acad. G. Bonchev Street, Block 4, Sofia 1113, Bulgaria, e-mail d.karagiozova@imbm.bas.bg

Marcílio Alves

Department of Mechatronics and Mechanical System Engineering
University of São Paulo – São Paulo – SP, 05508-900 Brazil, e-mail maralves@usp.br

Abstract. *The phenomena of dynamic plastic buckling (when the entire length of the shell wrinkles before the development of large radial displacements) and dynamic progressive buckling (when the shell folds form sequentially) are analysed from the viewpoint of stress wave propagation resulting from an axial impact. A numerical analysis of the buckling phenomena reveals that the material properties together with the geometrical characteristics of the shell determine the particular type of response for high velocity impacts. It is concluded that shells made of strain rate insensitive materials can respond either by dynamic plastic buckling or dynamic progressive buckling, depending on the material hardening properties of the shell, while those shells made of strain rate sensitive materials respond always by dynamic progressive buckling. It is shown that the prediction for the peak load, which can develop in a shell for a high velocity impact, depends on the particular yield criterion used in the analysis.*

Key words: *Stress waves, Cylindrical shells, Dynamic elastic-plastic buckling, Axial impact*

1. Introduction

Thin-walled circular tubes are used widely as energy absorbing devices since they are inexpensive, efficient and reliable. Most analyses are concerned mainly with the variation of the shell geometry and the loading conditions, while few studies examine the influence of the material properties on the dynamic shell response (see Reid (1996), Karagiozova and Jones (2001)). Historically, dynamic plastic buckling is associated with the high velocity impact of cylindrical shells made of aluminium alloy (mainly Al 6061-T6, e.g. Florence and Goodier (1968)), while a large number of experiments on steel shells, for application in transportation systems, and thus, subjected to low velocity impacts, register a progressive buckling phenomenon. Consequently, dynamic plastic buckling has been associated with high velocity impacts, while progressive buckling has been assumed for low velocity impacts (see Jones (1989)). However, some experiments on aluminium shells subjected to high velocity impacts, e.g. Tanaka and Kurokawa (1982), Murase and Jones (1993) and Kurokawa et al. (1997), also registered progressive buckling, which means that dynamic plastic buckling cannot be associated only with the influence of inertia effects.

Dynamic elastic-plastic buckling is a complex phenomenon, which is sensitive to inertia and strain rate effects as shown by Tam and Calladine (1991), Karagiozova and Jones (1996, 2000), Harrigan et al. (1999) and Langseth et al. (1999). The majority of these studies, however, consider mainly the effects of lateral inertia when analysing the dynamic elastic-plastic buckling of structures. The effects of axial inertia in shells, namely elastic-plastic stress waves resulting from axial impact, have been studied experimentally by Chen Changeen et al. (1992) and Li Ming et al. (1994). Recently, quantitative analyses have been published by Karagiozova and Jones (2000, 2001) and Karagiozova et al. (2000) which explore the connection between the axial stress waves and the buckling phenomena, which might develop in axially loaded circular cylindrical shells.

The purpose of this study is to analyse the response of thin-walled tubes, which are made of different materials, but subjected to identical dynamic loads, in order to explore the influence of the transient deformation process on the buckling phenomena. It is observed in the reported experiments that dynamic plastic buckling of cylindrical shells develops axisymmetrically, so that the response of relatively thick shells, which can buckle axisymmetrically, is analysed.

2. Materials and shell geometry

The response of shells made of two different materials is examined in order to study the influence of the material properties on the buckling phenomena, which might develop in circular cylindrical shells when subjected to a high velocity impact with an initial kinetic energy $T_0 = 2.2$ kJ. An aluminium alloy, which has a density $\rho = 2685$ kg/m³, is approximated as a bilinear strain rate insensitive material with an elastic modulus $E = 72.4$ GPa, hardening modulus $E_h = 542.6$ MPa and a yield stress $\sigma_0 = 295$ MPa. The actual static stress strain relationship for steel with $\rho = 7850$ kg/m³, $E = 210$ GPa and a static yield stress $\sigma_0 = 285$ MPa, is used and the strain-rate effects are taken into account according

to the Cowper-Symonds equation with the coefficients $D = 16640 \text{ s}^{-1}$ and $q = 3.53$. This static stress-strain curve is approximated as shown in Table 1. Isotropic strain hardening is assumed for both the steel and aluminium. All shells are 106.68 mm long. The aluminium shells **SA1** and **SA2** have a mean radius $R = 11.875 \text{ mm}$ and thickness $h = 1.65 \text{ mm}$. The steel shells **SS1** and **SS2** have radii $R = 11.875 \text{ mm}$ and $R = 16.238 \text{ mm}$, respectively and thicknesses $h = 1.65 \text{ mm}$ and $h = 1.2 \text{ mm}$, which results in equal masses of these shells.

ϵ_e^p	0	0.0237	0.0477	0.0711	0.0941	0.138	0.190
$\sigma_e, \text{N/mm}^2$	285	339	378	405	428	461	491

Table 1. Approximation of the static true stress-strain relationship for steel

3. Finite element simulation

An axial impact of a moving shell is modelled. The proximal end of the shell strikes a rigid wall at initial velocity V_0 and it is assumed that a mass, G , is attached to the distal end to provide a sufficient initial kinetic energy.

The numerical simulation of the impact event was carried out using the FE code ABAQUS/Standard, version 5.8. It is assumed that an axisymmetric buckling mode develops, so that 2D axisymmetric solid elements are used in the calculations. All shells are modelled by 60 elements in the longitudinal direction and four elements through the shell thickness.

The contact between the shell and the rigid wall is defined using the 'surface interaction' concept together with a friction coefficient of 0.25 at the impacted end. Any self-contact of the inner and the outer surfaces of the shell are assumed frictionless. The axial and the radial degrees of freedom, u, w , of the nodes at the distal end are fixed in order to model a clamped end, but no constraints are assumed for the degrees of freedom associated with the nodes at the proximal end. The modelled shells have no initial imperfections.

4. Stress wave speeds

An analysis of the three dimensional stress state of the shell, which is modelled by the present finite element simulation, reveals that the shell is in a biaxial stress state ($\sigma_x \neq 0, \sigma_\theta \neq 0, \sigma_z = 0$) during the early stage of deformation. This observation simplifies the theoretical analysis for the stress wave propagation.

Consider a thin-walled tube made of an elastic-plastic material with isotropic strain hardening subjected to an axial loading. The biaxial stress state, $\sigma_x \neq 0, \sigma_\theta \neq 0$, is assumed to obey either the von Mises or Tresca yield conditions in Fig. (1a) and (1b), respectively for strain rate insensitive materials, while only the von Mises yield condition is considered for strain rate sensitive materials. It is assumed that the total strain rate is the sum of the elastic and plastic strain rates

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

and the plastic flow rules are associated with the von Mises or Tresca yield criteria. In the particular case of a biaxial stress state, which neglects shear, the corresponding flow rules are

$$\dot{\epsilon}_x^p = \frac{\dot{\epsilon}_e^p}{2\sigma_e} (2\sigma_x - \sigma_\theta), \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \frac{\dot{\epsilon}_e^p}{2\sigma_e} (2\sigma_\theta - \sigma_x), \quad (2a,b)$$

$$\dot{\epsilon}_e^p = 2 / \sqrt{3} \left((\dot{\epsilon}_x^p)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta^p)^2 + \dot{\epsilon}_x^p \dot{\epsilon}_\theta^p \right)^{1/2}, \quad \sigma_e = \left(\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \sigma_\theta \right)^{1/2} \quad (2c,d)$$

associated with the von Mises yield criterion, and

$$\dot{\epsilon}_1^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_e^p, \quad \dot{\epsilon}_2^p = 0, \quad \dot{\epsilon}_3^p = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_e^p, \quad (3a,b)$$

$$\dot{\epsilon}_e^p = (2/3)^{1/2} \left((\dot{\epsilon}_1^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_3^p)^2 \right)^{1/2}, \quad \sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (3c,d)$$

where σ_1 and σ_3 are the maximum and minimum principal stresses (Mendelson (1972)) associated with the Tresca yield criterion.

The total strain rates in an elastic-plastic material associated with the von Mises yield criterion are

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_\theta) + \frac{\dot{\epsilon}_e^p}{2\sigma_e} (2\sigma_x - \sigma_\theta), \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_x) + \frac{\dot{\epsilon}_e^p}{2\sigma_e} (2\sigma_\theta - \sigma_x) \quad (4a,b)$$

and it is evident that they are continuous functions of the current stress state. Explicit relationships between the plastic strain rate and the stress rate can be obtained for each side of Tresca's yield hexagon (Fig. (1b)) for an elastic-plastic material with linear strain hardening (Karagiozova and Jones (2000)). In equations (1-4), $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ are total axial and circumferential strains, respectively, $\epsilon_x^p, \epsilon_\theta^p$ are the corresponding plastic strains and ϵ_e^p is the equivalent plastic strain. The axial, circumferential and equivalent stresses are $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_e$, respectively.

It is assumed for loading that the equivalent stress is a function only of the equivalent plastic strain for the strain rate independent case

$$\sigma_e = F(\epsilon_e^p), \quad \epsilon_e^p = g(\sigma_e), \tag{5a,b}$$

which leads to an explicit relationship between the corresponding rates

$$\dot{\epsilon}_e^p = g'(\sigma_e)\dot{\sigma}_e, \tag{6}$$

so that for a material with linear strain hardening, E_h ,

$$g'(\sigma_e) = (1 - \lambda) / E\lambda, \lambda = E_h / E. \tag{7}$$

Perzyna's model for strain rate sensitive materials (Perzyna (1963)), which assumes that the total strain rate is the sum of the elastic and plastic strain rates, is used in the present study

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma^* \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \tag{8}$$

where γ^* is a viscosity parameter, Φ is a non-linear function of F and $\langle \Phi(F) \rangle$ is determined as

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0, & F \leq 0 \\ \Phi(F), & F > 0 \end{cases}. \tag{9}$$

The inelastic strain rate is

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma^* \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{10}$$

where $f(\sigma_{ij}) = \sigma_e$ is the von Mises equivalent stress, so that the total strain rates for a biaxial stress state are

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_\theta) + \gamma^* \frac{\langle \Phi(F) \rangle}{2\sigma_e} (2\sigma_x - \sigma_\theta), \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_x) + \gamma^* \frac{\langle \Phi(F) \rangle}{2\sigma_e} (2\sigma_\theta - \sigma_x). \tag{11a,b}$$

Function $\Phi(F)$ is determined by power law, which depends only on the overstress

$$\Phi(F) = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma^0} - 1 \right)^q, \quad \gamma^* = D, \tag{12}$$

where D and q are specific constants for the considered material and $\sigma^0(e^p)$ is the static yield stress which depends on the plastic strain via isotropic hardening.

The equations of motion for a medium in a biaxial stress state are given by

$$\sigma_{x,x} = \rho \dot{v}_x \quad \text{and} \quad \sigma_\theta / R = \rho \dot{v}_r, \tag{13a,b}$$

where $v_x = \partial u / \partial t$ and $v_r = \partial w / \partial t$, while the kinematic equations can be written as

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{v}_{x,x} \quad \text{and} \quad \dot{\epsilon}_\theta = \dot{v}_r / R. \tag{14a,b}$$

The governing equations for the elastic-plastic stress waves in a tube with a biaxial stress state can be presented in a vector form when using eqns (13,14) together with eqns (4) or (11)

$$A^t \mathbf{w}_t + A^x \mathbf{w}_x + \mathbf{b} = 0, \tag{15}$$

where

$$\mathbf{w} = [\dot{u}, \sigma_x, \dot{w}, \sigma_\theta]^T, \tag{16}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \rho R & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad A^x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_\theta \\ -\dot{w}/R \end{bmatrix} \quad (17a-c)$$

in which

$$\alpha = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{(2\sigma_x - \sigma_\theta)^2}{(2\sigma_e)^2} \right], \quad \gamma = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{(2\sigma_\theta - \sigma_x)^2}{(2\sigma_e)^2} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{E} \left[-\nu + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{(2\sigma_x - \sigma_\theta)(2\sigma_\theta - \sigma_x)}{(2\sigma_e)^2} \right], \quad (18a-c)$$

for a strain rate insensitive material, while

$$A^t = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \rho R & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad A^x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma * \frac{\langle \Phi(F) \rangle}{2\sigma_e} (2\sigma_x - \sigma_\theta) \\ -\sigma_\theta \\ -\dot{w}/R + \gamma * \frac{\langle \Phi(F) \rangle}{2\sigma_e} (2\sigma_\theta - \sigma_x) \end{bmatrix} \quad (19a-c)$$

in which

$$\alpha = \gamma = 1/E, \quad \beta = -\nu/E \quad (20a,b)$$

for a strain rate sensitive material, where ρ and ν are the material density and Poisson's ratio, respectively. The wave speeds, c , are the roots of the equation

$$|-cA^t + A^x| = 0, \quad (21)$$

from eqn (15). For $c \neq 0$, the wave speeds are

$$c = \pm \left(\frac{\gamma}{\rho(\alpha\gamma - \beta^2)} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

It is evident that, for a strain rate dependent material, the waves have a constant speed and

$$c = \pm (E / \rho(1 - \nu^2))^{1/2}, \quad (23)$$

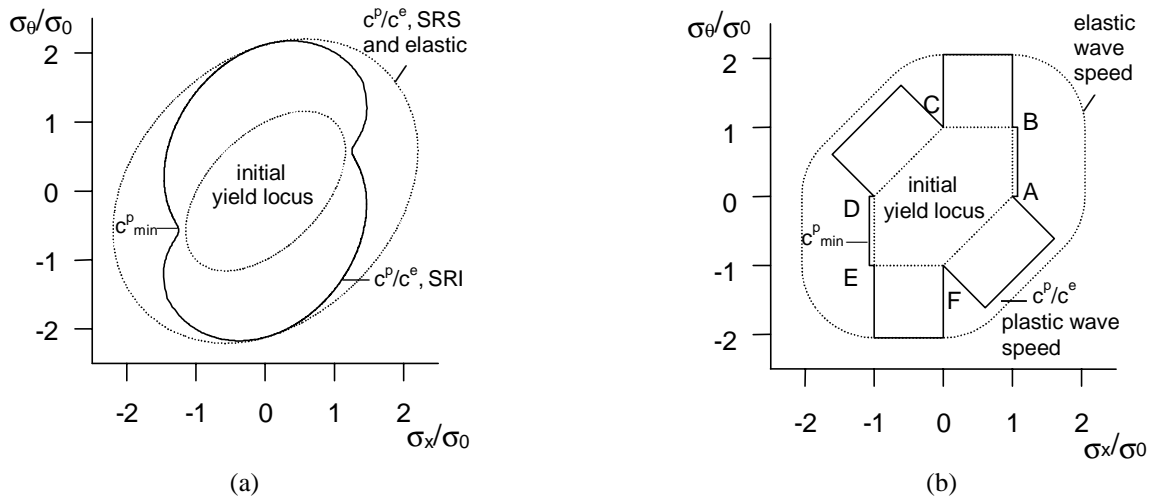


Figure 1. Stress wave speeds corresponding to different yield criteria, $E = 72.4$ GPa, $E_h = 542.6$ MPa. (a) von Mises yield criterion; (b) Thesca yield criterion; (SRI and SRS mark rate insensitive and sensitive materials)

while the wave speeds in a strain rate insensitive material depend on the stress state and the hardening modulus. It is shown by Karagiozova et al. (2000) that, for the later case, the uniaxial plastic wave speed can be considered as a lower bound for the speed of the plastic waves, which can propagate in a cylindrical shell made of a strain rate insensitive material. A graphical interpretation of the stress wave speed (eqn. (22)), which depends on the stress state and the material model, is presented in Figure (1a,b). The magnitudes of the elastic and plastic wave speeds, c^p / c^e , are plotted normal to the corresponding yield locus for $\lambda = 0.0076$ ($E_h = 542.6$ MPa, $E = 72.4$ GPa). The material model obeying the Tresca yield condition and having linear strain hardening leads to the discontinuities of the wave speeds shown in Figure (1b), which are associated with the singular points of the yield locus. It is evident that the stress wave speeds depend on the particular material idealization. In this context, any theoretical analyses on the dynamic elastic-plastic buckling of shells, which are based on the uniaxial stress wave theory for strain rate insensitive materials, cannot give adequate predictions since they are associated with a single value of the plastic wave speed. Fig. (1a) shows that any stress state producing $\dot{\epsilon}_\theta \neq 0$ gives rise to plastic wave speeds larger than c_{\min}^p i.e. always larger than the uniaxial plastic wave speed.

The radial inertia at the beginning of the impact event allows an axial compression to develop with large axial plastic strains and $\epsilon_\theta \approx 0$. This stress-strain state determines either the minimum value of the plastic wave speed associated with the von Mises yield criterion

$$c_{\min}^p = \pm(E / \rho)^{1/2} \{4\lambda / [4\lambda(1 - \nu^2) + 3(1 - \lambda)]\}^{1/2}, \quad (\sigma_\theta = \sigma_x / 2; \dot{\sigma}_\theta = \nu \dot{\sigma}_x, \sigma_x < 0, \sigma_\theta < 0), \quad (24)$$

or the speed of the slow plastic wave (see Karagiozova and Jones (2000)) associated with the side DE of the Tresca hexagon

$$c_{\min}^p = (E / \rho)^{1/2} \left\{ 2\lambda [2\lambda(1 - \nu^2) + (1 - \lambda)\sqrt{3}] \right\}^{1/2}, \quad (\sigma_e = -\sigma_x, \dot{\sigma}_\theta = \nu \dot{\sigma}_x, \sigma_x < 0, \sigma_\theta < 0). \quad (25)$$

The plastic waves start to propagate at $t = 0$ from the proximal end of the shell and determine the peak load resulting from a high velocity axial impact. It was shown by Karagiozova et al. (2000) that the peak load in a circular cylindrical shell made of a strain rate insensitive material, which obeys the von Mises yield condition, is

$$P_{Mises} / 2\pi R h = 2\sigma_0 / \sqrt{3} + \rho V_0 (E / \rho)^{1/2} \left\{ 4\lambda [4\lambda(1 - \nu^2) + 3(1 - \lambda)] \right\}^{1/2} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} (\sigma_0 + \rho V_0 (\rho E_h)^{1/2}) \quad (26)$$

for $\lambda \ll 1$.

The expression for the peak load in a shell made of an elastic-plastic material, which obeys the Tresca yield condition, is obtained as (see Karagiozova and Jones (2001))

$$P_{Tresca} / 2\pi R h = \sigma_0 + \rho V_0 (E / \rho)^{1/2} \left\{ 2\lambda [2\lambda(1 - \nu^2) + (1 - \lambda)\sqrt{3}] \right\}^{1/2} \approx \sigma_0 + \rho V_0 (\rho E_h)^{1/2} \left(2 / \sqrt{3} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

It should be noted that the minimum values for the plastic wave speeds associated with the von Mises or Tresca yield conditions and used in eqn (26) and (27), respectively, are higher than the plastic wave speed determined for the uniaxial stress state in a bar (Karagiozova et al. (2000)). Thus, an estimate of the peak load in a shell when using the uniaxial plastic wave speed would underestimate the dynamic effect by about 7.4% for materials obeying the Tresca yield criterion and by 15% for materials obeying the von Mises yield condition.

It is evident that the peak load is sensitive to the impact velocity and the material properties, including the hardening properties and the plastic yield condition. An illustration of the biaxial stress wave effects on the peak load is shown in Fig. (2) for shells made of an aluminium alloy with a strain hardening modulus $E_h = 542.6$ MPa, a yield stress, $\sigma_0 = 295$ MPa and obeying the von Mises or the Tresca yield conditions (solid lines). The dashed lines in this figure give the peak loads when using the uniaxial plastic wave speed together with the von Mises or Tresca yield condition. For comparison, the peak loads resulting from a numerical simulation using the FE code ABAQUS and the von Mises yield criterion are presented in the same figure. Good agreement is observed for the shell response to axial impacts with initial velocities between 40 m/sec and 120 m/sec. Impact velocities smaller than 40 m/sec do not cause an instantaneous plastic deformation at the proximal end of a shell made of the particular aluminium alloy. It should be noted that the von Mises and the Tresca yield loci are approximations of the actual yield properties for elastic-plastic materials, so that equations (26) and (27) can be considered as respective upper and lower bounds for the peak loads in circular shells made of strain rate insensitive materials and subjected to an axial impact.

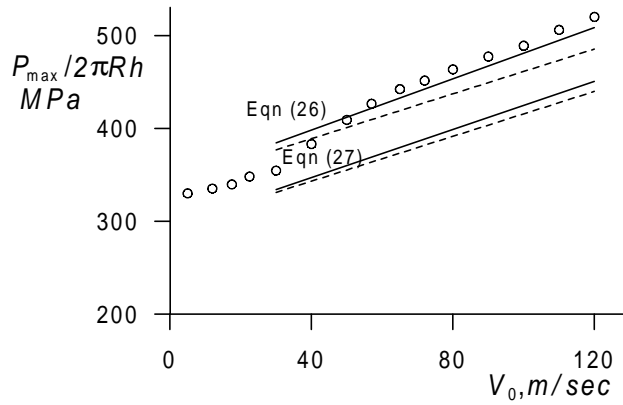


Figure 2. Peak load developed in shell SA1. \circ numerical values for the peak load using ABAQUS

5. Buckling phenomena

The numerical results reveal some characteristic features in the development of the buckling shapes, which depend on the material properties and the impact velocity. Two mechanisms of axisymmetric buckling initiation are observed for the shell geometry analysed in the present study - dynamic plastic buckling, when the entire length of the shell wrinkles before the development of large radial displacements, and dynamic progressive buckling, when the shell folds develop sequentially.

The static yield stresses of the two materials examined are comparable ($\sigma_0 = 295$ MPa for aluminium and $\sigma_0 = 285$ MPa for steel), so that the influences of the shell geometry, the material hardening characteristics and strain rate effects can be explored on the development of different phenomena in axisymmetrically deformed cylindrical shells.

5.1. Development of buckling shapes for aluminium shells

It is shown by Karagiozova et al. (2000) Karagiozova and Jones (2201) that the initiation of buckling arising from a high velocity impact is sensitive to the material behaviour in the plastic range. It is anticipated that particular combinations of the plastic wave speed (eqn (22)), determined by the hardening modulus, and the inertia properties of the shell lead either to a dynamic plastic buckling, or to a dynamic progressive buckling.

Shell SA1 having hardening modulus, $E_h = 542.6$ MPa is selected as an example where dynamic plastic buckling develops during the initial phase of the response under an axial impact at $V_0 = 80$ m/sec against a rigid wall. The development of the buckling shape of this shell is presented in Fig. (3). It is evident that the shell responds initially by dynamic plastic buckling (Fig. (3b)) after which progressive folding develops with one fully developed fold closer to the proximal end and two other folds near to the distal end. Shell SA2 has the same geometry, but is made of a bilinear material having one-half the hardening modulus, $E_h = 271.3$ MPa. This shell buckles only progressively starting from the proximal end, as shown in Figure (4). The results presented in Figures (3) and (4) show that the aluminium shell can respond to a high velocity impact either by dynamic plastic buckling, or by dynamic progressive buckling, depending on the value of the strain hardening modulus for the same shell geometry.

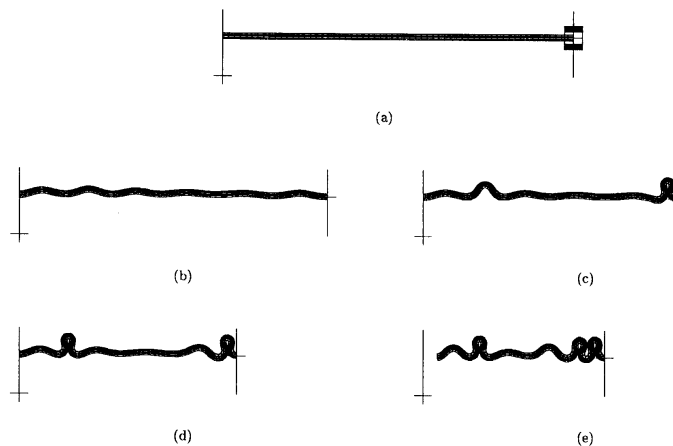


Figure 3. Development of the buckling shape of shell SA1, $V_0 = 80$ m/sec
 (a) initial, (b) $t = 0.124$ msec, (c) 0.435 msec, (d) 0.662 msec, (e) 1.1 msec

This conclusion is supported by several experiments reported in the literature. Dynamic plastic buckling of moving shells made of Al 6061-T6 ($E_h = 690$ MPa) is observed by Florence and Goodier (1968) for initial velocities between 101 m/sec and 127 m/sec. Dynamic plastic buckling of stationary shells made of the same material was observed experimentally by Murase and Jones (1993) for impact velocities between 50 m/sec and 150 m/sec. Dynamic progressive buckling of a stationary shell made of low strain hardening aluminium alloy, $E_h = 70$ MPa was observed by Kurokawa et al. (1997) for an impact velocity of 50 m/sec.

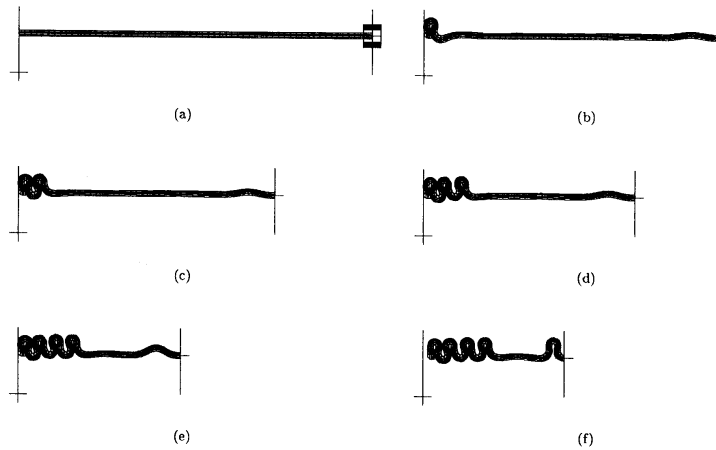


Figure 4. Development of the buckling shape of shell SA2, $V_0 = 80$ m/sec
 (a) initial, (b) $t = 0.178$ msec, (c) 0.435 msec, (d) 0.662 msec, (e) 0.961 msec, (f) 2.238 msec

The experimentally observed (Florence and Goodier (1968), Tanaka and Kurokawa (1982), Murase and Jones (1993), Kurokawa et al. (1997)) and numerically obtained (Figs. (3,4)) buckling phenomena can be analysed from the viewpoint of stress wave propagation caused by the dynamic axial compression of the shell. Figure (5a) shows the stress waves propagated along shell SA1, when it is struck against a rigid wall at $V_0 = 80$ m/sec. A mass $G = 0.652$ kg is attached to the distal end of the shell, which provides an initial kinetic energy of $T_0 = 2.2$ kJ. Due to the radial inertia effects, the shell response is dominated by axial compression during the initial deformation phase, so that a plastic wave having a speed $c^p \geq c_{min}^p$ propagates from the proximal end. The minimum plastic wave speed is $c_{min}^p = 516$ m/sec for a shell made of this material. For example, the plastic wave has propagated a distance of approximately 30 mm from the proximal end at $t = 57 \mu\text{sec}$ when the magnitudes of the compressive strains have reached an almost “saturated” value and the strains behind the wave front then increase only slightly for later times. The primary plastic wave and the plastic wave, which is caused by the reflection of an elastic wave from the distal end, meet at $t \approx 110 \mu\text{sec}$ when the entire length of the shell is then under large axial compressive plastic strains. Further axial compression and wrinkling develops until $t \approx 180 \mu\text{sec}$.

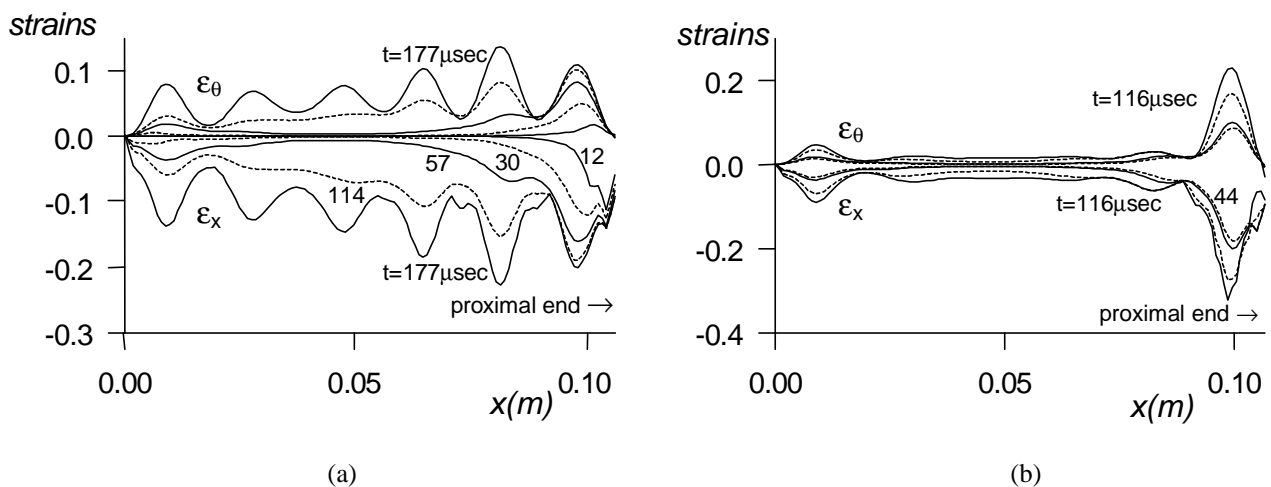


Figure 5. Stress wave propagation phenomenon in aluminium shells, $V_0 = 80$ m/sec
 Strain distributions at the mid surface at different times along the shell; (a) shell SA1, (b) shell SA2

The influence of the strain hardening material properties on the buckling process is demonstrated in Fig. (4). A smaller value of the strain hardening modulus give rise to lower plastic wave speeds, and an increased time for a plastic wave to propagate along a shell. The radial inertia forces then cannot support the unbuckled shape during this longer time, which is necessary for the plastic wave to propagate the entire shell length for the development of dynamic plastic buckling. Fig. (5b) illustrates the propagation of stress waves in shell SA2, which is struck against a rigid wall at $V_0 = 80$ m/sec. The plastic wave emanating from the proximal end, and having a speed of 370 m/sec, can propagate only 18.5 mm before the radial displacements near this particular end start to grow rapidly. This distance is sufficient for the formation of the first fold only. After $t \approx 80$ μ sec, only the radial displacements continue to grow which leads to large bending strains, while the compressive strains do not change along the unbuckled part of the shell. Elastic unloading occurs across the shell thickness and interrupts the propagation of the plastic wave.

An analysis of the deformation processes of shells SA1 and SA2 reveals that the initial buckling patterns of cylindrical shells under a high velocity impact are governed by the propagation of elastic and plastic stress waves, but that further deformation always develops progressively until the entire initial kinetic energy is absorbed.

5.2. Development of buckling shapes for steel shells

An analysis of the response of aluminium shells, which are subjected to high velocity impacts, shows that a sufficiently large radial inertia of a shell can lead to dynamic plastic buckling. This condition is also present for steel shells, partly because of the higher material density. However, dynamic plastic buckling is not observed for either of the steel shells when taking into account the influence of material strain rate sensitivity. Typical examples of the development of the buckling shapes for steel shells are presented in Fig. (6) for shells SS1 and SS2, which strike a rigid wall at 65 m/sec. Both shells buckle progressively initially from the proximal end, regardless of the wall thickness, but the sequence of the fold development is different. An analysis of the strains propagating along the shell shows that the initiation of buckling associated with a high velocity impact occurs without any unloading across the shell thickness, although large radial displacements develop near to the proximal end.

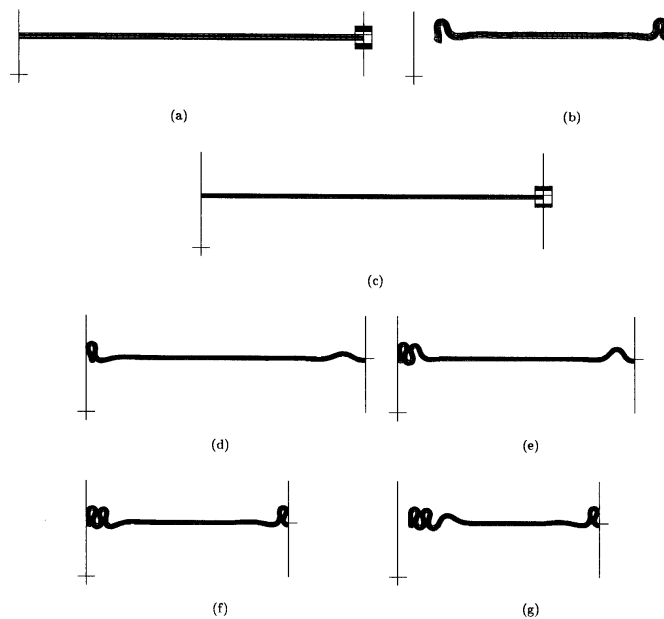


Figure 6. Development of the buckling shape of steel shells, $V_0 = 80$ m/sec

(a,b) Shell SS1; (a) initial, (b) $t = 2.72$ msec.

(c-g) Shell SS2; (c) initial, (d) $t = 0.356$ msec, (e) 0.641 msec, (f) 1.068 msec, (g) 2.966 msec

The propagation of stress waves in shell SS1 is shown in Fig. (7a). A mass $G = 0.938$ kg is attached to the distal end of the shell, to provide an initial kinetic energy of $T_0 = 2.2$ kJ. The axial plastic strains propagate at the elastic wave speed, so that the primary plastic wave reflects from the distal end and at $t \approx 20$ μ sec the associated strains are almost doubled. Folds develop near both ends and are fully developed at $t \approx 450$ μ sec. The deformed shape of the shell then remains virtually unchanged during the remaining response as is evident from Fig. (6). It is evident in Fig (7a) that the axial strains, although they vary in magnitude along the shell, increase with time along the entire length in contrast to the behaviour in aluminium shells (Fig. (5a)) where strains propagate along the shell.

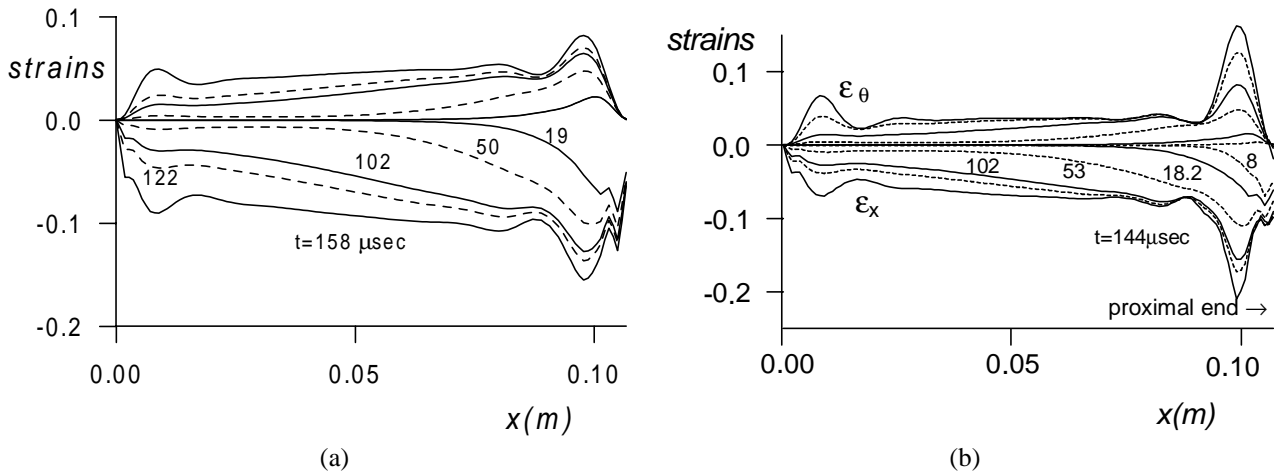


Figure 7. Stress wave propagation phenomenon steel shells, $V_0 = 65$ m/sec.
Strain distributions at the mid-surface at different times along the shell; (a) shell **SS1**, (b) shell **SS2**

The increase of strains with time at a particular location is discussed also by Bodner and Aboudi (1983) for a visco-plastic medium when subjected to a constant impact velocity. This phenomenon is related to the type of plasticity model used in the analysis. It is assumed in the present study that strain rate effects influence only the dynamic yield stress. If $\sigma_e = f_1(\epsilon_e^p)$ is the static stress-strain relation, the plasticity loading/unloading criterion is (Cristescu (1967))

$$\sigma_e > f_1(\epsilon^p) \text{ for plastic loading, i.e. } \frac{\partial \epsilon_e^p}{\partial t} > 0, \quad (28a)$$

$$\sigma_e \leq f_1(\epsilon^p) \text{ for elastic unloading, i.e. } \frac{\partial \epsilon_e^p}{\partial t} = 0. \quad (28b)$$

Thus, the plastic strains may increase even when the stress is decreasing in contrast to a strain rate insensitive material where the plastic strains remain constant as soon as the stress starts to decrease. Therefore, when the stress begins to decrease from a state $\sigma_e > f_1(\epsilon^p)$, the plastic strain first continues to increase, and only after a certain time, when the stress satisfies the relation $\sigma_e = f_1(\epsilon^p)$, the plastic strain remains constant. This material behaviour causes plastic strains with different magnitudes to propagate along the shell, and can lead to a strain localisation, which might be followed by a local buckling.

The stress wave propagation in shell **SS2**, which is struck against a rigid wall at $V_0 = 65$ m/sec, is shown in Fig. (7b). A similar pattern of plastic strains growing with time is observed. However, the strains near to the proximal end grow more rapidly in comparison with those near to the distal end due to the high strain rate at the beginning of the impact event and the smaller radial inertia of shell **SS2**. The strain distributions presented in Fig. (7b) are similar to those presented in Fig. (5b), except larger compressive strains develop along the steel shell. Although the strain patterns in Figs. (7b) and (5b) appear similar, different mechanisms of strain propagation has led to these particular distributions. Nevertheless, these patterns of strain distributions are associated with the dynamic progressive buckling of cylindrical shells under a high velocity impact. An analysis of the stress wave propagation behaviour presented in Fig. (7a,b) shows that the localisation of strains is related to the particular loading/unloading criterion (eqn (28a,b)), which governs the buckling process in shells made of strain rate sensitive materials. This behaviour contrasts with the buckling of strain rate insensitive shells where the plastic wave speed is important.

The progressive buckling of shells, which are made of strain rate sensitive materials and subjected to high velocity impacts, has been reported in the literature. For example, Tanaka and Kurokawa (1982) have observed experimentally that dynamic progressive buckling developed in a cylindrical shell made of a strain rate sensitive aluminium alloy A5052 when impacted axially against a rigid wall at $V_0 = 71$ m/sec.

7. Conclusions

The elastic-plastic stress wave propagation effects are analysed for a moving shell and it is found that, in general, the entire length of the shell made of a strain rate insensitive material can participate in the buckling process for a high velocity impact. It is shown that the initiation of buckling for a high velocity impact is sensitive to the material properties, particularly to the strain hardening modulus. The combination of the plastic wave speed, which is determined by the hardening modulus and inertia properties of a shell, leads either to dynamic plastic buckling or to dynamic progressive buckling. A regular buckling shape for a high velocity impact on relatively thick shells develops within a sustained axial plastic flow. A localisation of strains leading to progressive buckling develops in shells having small strain hardening properties. The buckling process then involves a partial elastic unloading of some cross-sections

of the shell, thereby interrupting any further stress wave propagation. Shells made of strain rate sensitive materials always buckle progressively when considering the particular material model. Buckling starts either from the impacted end due to the relaxation properties of the material causing strain localisation near this particular end, or from the distal end due to the increased strains caused by the reflected stress wave.

Acknowledgments – The work outlined in this paper was supported by Funding Research Agency at São Paulo, Brazil through grant 2000/08446-8.

8. References

- Bodner, S.R., Aboudi, J., 1983. "Stress wave propagation in rods of elastic-viscoplastic material". *International Journal of Solids and Structures*, Vol.19, pp. 305-314.
- Chen Changeen, Su Xianyue, Han Mingbao, Wang Ren, 1992. "An experimental investigation on the relation between the elastic-plastic dynamic buckling and the stress waves subjected to axial impact. Proceedings of the International Symposium on Intense Dynamic Loading and its Effects, Chengdo, China, "pp. 543-546.
- Cristescu, N., 1967. "Dynamic plasticity", North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Florence, A. L., Goodier, J. N., 1968. "Dynamic plastic buckling of cylindrical shells in sustained axial compressive flow". *Journal of Applied. Mechanics*, Vol.35, pp. 80-86.
- Harrigan, J. J., Reid, S. R., Peng, C., 1999. "Inertia effects in impact energy absorbing materials and structures". *International Journal of Impact Engineering*, Vol.22, pp. 955-979.
- Jones, N., 1989. "Structural impact", Cambridge University Press, Paperback edition, 1997.
- Karagiozova, D., Jones, N., 2000. "Dynamic elastic plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact". *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2005-2034.
- Karagiozova, D., Alves, M., Jones, N., 2000. "Inertia effects in axisymmetrically deformed cylindrical shells under axial impact". *International Journal of Impact Engineering*, Vol.24, pp. 1083-1115.
- Karagiozova, D., Jones, N., 2001. "Influence of the stress waves on the dynamic progressive and dynamic plastic buckling of cylindrical shells". *International Journal of Solids and Structures*, (in press).
- Kurokawa, T., Sasaki, T., Suzuki, H., Yamada, Y., 1997. "Axisymmetric collapse of circular tubes due to longitudinal impact". In: *Proceedings of Sino-Japanese Symposium on Deformation/Fracture of Solids*, Huangshan/China, pp. 9-16.
- Langseth, M., Hopperstad, O. S., Berstad, T., 1999. "Crashworthiness of aluminium extrusions: validation of numerical simulation, effect of mass ratio and impact velocity". *International Journal of Impact Engineering*, Vol.22, pp. 829-854.
- Li Ming, Wang Ren, Han Mingbao., 1994. "An experimental investigation of the dynamic axial buckling of cylindrical shells using a Kolsky bar". *Acta Mechanica Sinica*, Vol.10, pp. 260-266.
- Mendelson, A., 1972. "Plasticity: Theory and Applications". The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London.
- Murase, K., Jones, N., 1993. "The variation of modes in the dynamic axial plastic buckling of circular tubes". *Plasticity and Impact Mechanics*. Wiley Eastern Limited, New Delhi, pp. 222-237.
- Perzyna, P., 1963. "The constitutive equations for rate sensitive materials", *Quarterly Applied Mathematics*, Vol.20, pp. 321-331.
- Reid, J. D., 1996. "Towards the understanding of material property influence on automotive crash structures". *Thin-Walled Structures*, Vol.24, pp. 285-313.
- Tam, L. L., Calladine, C. R., 1991. "Inertia and strain-rate effects in a simple plate-structure under impact loading". *International Journal of Impact Engineering*, Vol.11, pp. 349-377.
- Tanaka, K., Kurokawa, T., 1982. "Plastic buckling of cylinders by axial impact". *Proceedings of the 1982 Joint Conference on Experimental Mechanics*, JSME, Vol.2, pp. 950-955.

INERTIA EFFECTS ON BUCKLING TRANSITION OF SHELLS SUBJECTED TO AXIAL IMPACT

D. Karagiozova

Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, Acad. G. Bonchev St., Block 4, Sofia 1113, Bulgaria

Marcílio Alves

Department of Mechatronics and Mechanical System Engineering
University of São Paulo – São Paulo – SP
05508-900 – Brazil

Norman Jones

Impact Research Centre, University of Liverpool, Liverpool, L69 3GH, UK

Abstract: *The structural response of a circular cylindrical shell subjected to an axial impact load by a moving mass is considered. The inertia sensitivity of a shell made of an elastic-plastic material is explored using a finite element analysis. It is shown that for a constant input momentum, GV_0 , the shell response depends on the initial velocity and striking mass. A conclusion is made that larger energies can be absorbed by a shell subjected to high velocity impacts when decreasing the striking mass. Moreover, the initial conditions and material properties define the particular patterns of the axial stress wave propagation, causing two different phenomena called dynamic plastic and dynamic progressive buckling. Material strain rate sensitivity is also considered in the analysis in order to further investigate the energy absorbing properties of the shells.*

Key Words: *elastic-plastic shells, buckling, impact, stress wave, energy absorption*

1. Introduction

An elastic-plastic cylindrical shell responds by different patterns of buckling when is subjected to an axial impact. A long cylindrical shell can become unstable in a global buckling mode when only a few localised folds occur along its length. This is a typical Euler buckling mode, characterised by a poor structural performance in terms of absorbing the impact energy and it is associated, generally speaking, with slender structures subjected to quasi-static loads or low velocity impacts. For sufficiently short tubes and with a radius to thickness ratio in the range of 5 to 20 (Jones, 1997), the so called progressive buckling might take place. This mode of buckling is such that the structures is stable and capable of absorbing a larger amount of energy when compared to the global buckling. Progressive buckling mode can be fully symmetric or, in addition, having a wavy cross-section. Typically, this progressive shell response does not occur in thick shells subjected to sufficiently high velocity impacts. In this case, a third mode of buckling occurs, when the shell becomes wrinkled throughout its whole length and it is called a dynamic plastic buckling.

Clearly, it is important to know what is the predominant buckling pattern for a given set of initial conditions, material characteristics and shell geometry. This allows one to engineer a structure in order to improve its performance as an energy absorber, an important task to be accomplished by many devices in the context of load and passenger transportation safety.

Generally speaking, high velocity impacts on relatively thick shells made of materials with a large hardening modulus cause a regular buckling shape to develop along the shell (Karagiozova and Jones, 2000), while a decrease of the shell thickness leads to locally developed deformations (Ren et al., 1983; Ming et al., 1994). It is the aim of this article to comment on the main findings recently published by the authors (Karagiozova et al., 2000). It is shown that different buckling modes are possible for a constant impact momentum when varying the impact velocity and, hence, the striking mass. Attention is restricted to symmetric buckling modes only, leaving out global buckling and non-symmetric through cross-section progressive buckling.

2. Method of analysis

The energy absorbing properties of a cylindrical shell having a mean radius of 11.875 mm and a thickness of 1.65 mm is simulated numerically when the mass of the striker is varied from 0.2 kg to 335 kg with impact velocities within the range 4 m/sec to 180 m/sec. The shell is made of a high strength aluminium alloy modelled as a bilinear material with a flow stress of 295MPa and a linear elastic and hardening moduli of 7.24 GPa and 542.6 MPa, respectively. The shell rests clamped on a base, with its free end being struck by a mass G travelling with an initial velocity V_0 . The bilinear material adopted exhibits also kinematic hardening during the deformation process, a feature which is believed to yield realistic predictions for dynamic buckling problems, particularly when high compressive strains are accumulated in the structure during the first compression phase (Karagiozova and Jones, 1995; Karagiozova and Jones, 1996).

The numerical simulation of the impact event was carried out using the FE code ABAQUS/Standard, Version 5.7. Since it is assumed that only axisymmetric buckling mode develops, the 2D solid element CAX8 is used for the calcula-

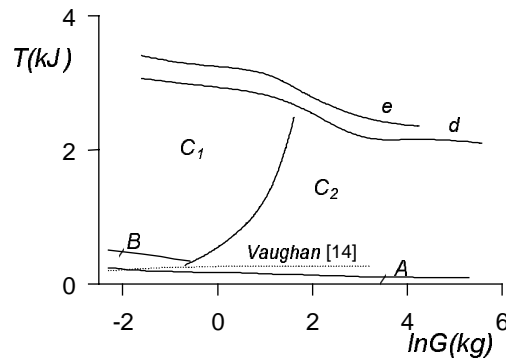


Figure 1: Regions for the load parameters where different buckling phenomena can occur. A - Uniform axial compression, B - Dynamic plastic buckling, C1 - Initial dynamic plastic buckling and a subsequent progressive buckling, C2 - Progressive buckling, *d* - maximum energy which can be absorbed by a shell made of strain rate insensitive material *e* - maximum energy which can be absorbed by a shell made of strain rate sensitive material (Karagiozova et al., 2000).

tions, with the load applied as a point mass attached to the nodes of a rigid body. The shell is modelled by 60 elements in the longitudinal direction, with four elements across the thickness. A constant amplitude force applied to the nodes of the rigid body models the gravitational load. Contact between the shell and the striking mass is defined using the surface interaction concept together with a friction coefficient of 0.25. Self-contacts, when occur, between the inner and outer surfaces of the shell are assumed frictionless. The modelled shell has no initial imperfections.

3. Axisymmetric Buckling Phenomena

A number of experiments on the axial impact of elastic-plastic cylindrical shells show a variety of final buckling shapes which depend on the shell geometry, shell material and the applied load, namely axisymmetric and asymmetric buckling and global bending.

Axisymmetric buckling can develop in different ways depending on the impact conditions (Florence and Goodier, 1966; Karagiozova and Jones, 2000). Here, the energy absorbing properties of a circular cylindrical shell are studied in order to analyse the buckling phenomena for different combinations of striking masses and initial impact velocities. A summary of the numerical simulation is presented in Figure 1, which shows the loading regions in which different axisymmetric buckling phenomena develop.

Region A in Figure 1 represents the uniform compression of the shell as a result of impacts with small initial kinetic energies. In this region, the entire impact energy is absorbed in axial compression and uniform circumferential expansion. The energy absorbed in this mode is observed to increase slightly when decreasing the striking mass. A further increase of the impact energy causes buckling of a shell, where dynamic plastic or dynamic progressive buckling can occur. Accordingly, high velocity impacts cause dynamic plastic buckling shown in Figure 2(a), while the same shell collapses progressively for low velocity impacts, Figure 2(b). This is an important point in the context of this work because two distinct modes of collapse occur for constant impact momentum, leading to the conclusion that the phenomenon of buckling is sensitive to the inertia. Of course, the impact velocity threshold determining one buckling mode or another to occur depends on the material properties and shell geometry.

Progressive buckling mode develops for the load parameters within the region C2 in Figure 1. The initial dynamic response of a shell for a high impact velocity is more complex than for progressive buckling, but the subsequent buckling behaviour can develop progressively with time. This response is observed in regions B and C1 in Figure 1 for relatively small striking masses. Low energy impacts cause buckling along the entire length and the initial kinetic energy is absorbed entirely in compression because the wrinkling develops within a sustained plastic flow, i.e. bending occurs with no elastic unloading of the shell cross-section (region B in Figure 1). Thus, the dynamic plastic buckling phenomenon (Jones, 1997) can develop only for load parameters lying within a narrow range and its main characteristic is to occur under a sustained plastic flow.

Higher impact energies within region C1 in Figure 1 cause the buckling process to initiate along the entire shell length and continue to develop later progressively. The summary of the numerical simulations in Figure 1 suggests that the post-buckling behaviour of a shell with large radial displacements and strains develops always progressively (regions C1 and C2). Curve *d* in Figure 1 indicates the maximum energy which can be absorbed by a shell made of a strain-rate insensitive material and subjected to a mass impact, which just avoids bottoming-out, with no more tubing available for

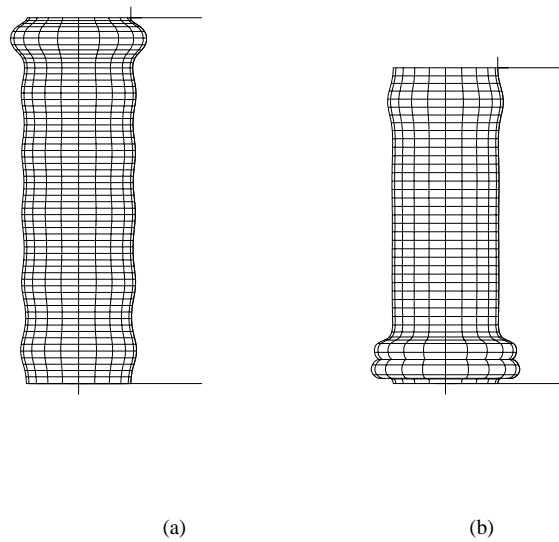


Figure 2: Two basic collapse mechanisms of buckling in shells as obtained from the finite element model. (a) dynamic plastic buckling, (b) progressive buckling.

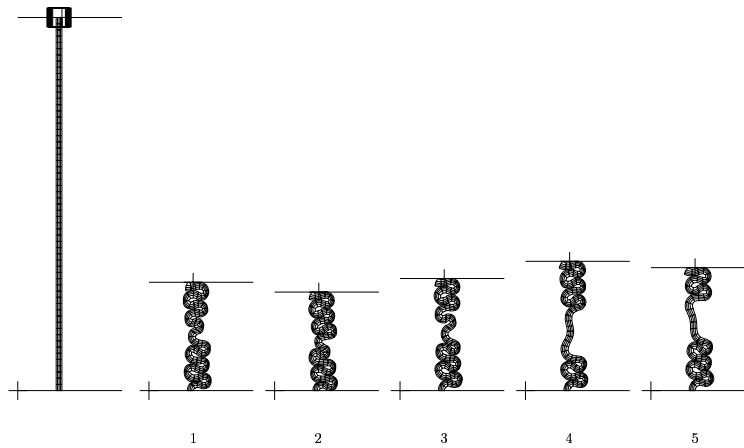


Figure 3: Final buckling shapes of the shell at maximum absorbed energies and different combinations of the striking mass and the impact velocity. 1 – $G = 0.4167$ kg, $V_0 = 120$ m/s, 2 – $G = 3$ kg, $V_0 = 43.2$ m/s, 3 – $G = 7$ kg, $V_0 = 32.76$ m/s, 4 – $G = 21$ kg, $V_0 = 14.62$ m/s, 5 – $G = 262.5$ kg, $V_0 = 4$ m/s.

further folding (complete squashing).

It is being observed that for many metals the stress-strain relationship depends on the strain rate. Curve *e* in Figure 1 has the same meaning as *d* but is associated with the same aluminium when taking the strain-rate effects into account, as described later. It is important to note that the initial buckling phase plays a decisive role in the formation of the final buckling shape of a shell. Some final buckling shapes at impact energies causing a complete squashing of a shell made of a strain-rate insensitive material are presented in Figure 3. The initially formed buckling shape, which results from a relatively high velocity impact (profiles 1-3 in Figure 3), is characterised by 6 wrinkles and this shape is preserved during the entire response. The final buckling shapes at the lower impact velocities, however, are characterised by 5 wrinkles (profiles 4 and 5 in Figure 3) with an almost straight intermediate section deformed only in compression.

An evident feature of curves *d* and *e* in Figure 1 is that the energy which causes complete squashing of a shell, decreases when increasing the striking mass. It is estimated from the present numerical simulations that dynamically loaded shells absorb up to 43% more energy at complete squashing than the energy required to squash quasi-statically the shell. This increase of the 'dynamic' energy is due to the influence of inertia effects when increasing the impact velocity. A summary of the typical shell responses are grouped in regions in Figure 1, which are discussed separately.

4. Compression Region A and B in Figure 1

Low energy axial impacts on a cylindrical shell cause only an axial compression and a uniform radial expansion for a high strain hardening aluminium alloy. Due to the influence of radial inertia forces, more energy is absorbed in compression when increasing the impact velocity. Energies associated with relatively small striking masses and impact

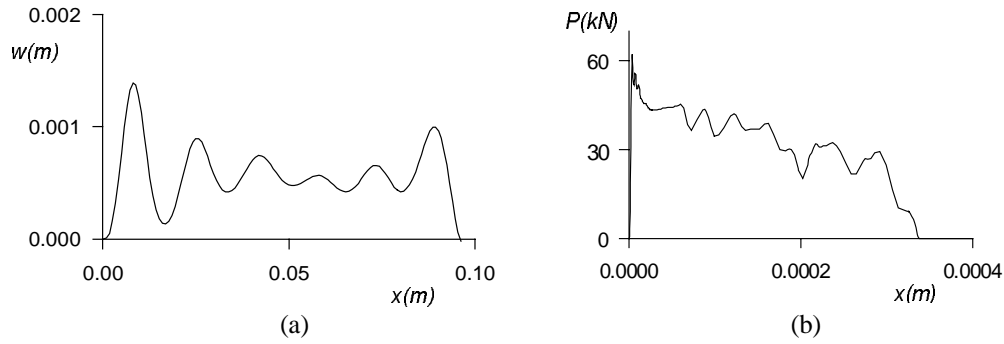


Figure 4: Dynamic plastic buckling of the shell impacted at 100m/s by a mass of 0.1 kg. (a) Final shape of buckling. (b) Load time history.

velocities higher than about 30 m/sec cause dynamic plastic buckling of the particular shell analysed here, where the initial kinetic energy is absorbed in compression. A regular shape of buckling with small radial displacements forms along the entire shell length.

The final buckling shape of the shell struck by a mass $G = 0.1$ kg at $V_0 = 100$ m/sec is shown in Figure 4(a) where a final shortening of 10% of its initial length is observed to occur. Small radial displacements develop within a sustained plastic flow causing no elastic unloading across the shell thickness. The load time history resulting from this impact and presented in Figure 4(b) indicates mainly compression of the shell.

Vaughan (Vaughan, 1969) considered a constant deceleration of the striker and proposed the threshold velocity for dynamic plastic buckling

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{h\sigma^0}{\rho R(1 + G/m)}}, \quad (1)$$

where m is the shell mass. The predictions of equation (1) were verified using the experimental data reported by Florence and Goodier (Florence and Goodier, 1966) when a thick shell was struck against a rigid wall, for which the condition of a sustained plastic flow for dynamic plastic buckling is satisfied. The dashed lines in Figure 1 is the prediction of equation (1) for the shell analysed in the present study.

It was found that the initiation of buckling of a shell under a high velocity impact is governed by the stress wave propagation phenomenon. An analysis of the stress waves in an elastic-plastic shell was performed for the Tresca (Karagiozova and Jones, 2000) and von Mises (Karagiozova et al., 2000) yield criteria where the minimum and maximum plastic waves speeds in a shell made of a von Mises material were obtained as

$$c_{min}^p = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho} \sqrt{\frac{4\lambda}{4\lambda(1 - \nu^2) + 3(1 - \lambda)}}} \quad (2)$$

and

$$c_{max}^p = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2}}} \quad (3)$$

Figure 5 indicates that the response of a cylindrical shell to an axial impact is dominated by axial compression during the initial deformation phase so that a plastic wave starts to propagate from the proximal end ($x = L$) having $-\sigma_\theta \approx -\sigma_x/2$. The loading path of a particular point along the shell and across the thickness can be made by analysing the strains and the movement of the yield loci in the stress plane. Figure 5(a) presents the axial and circumferential strains at the mid surface along the shell at several times. The movement of the yield loci at $t = 54\mu$ s in Figure 5(b) shows that an unloading plastic wave travelling at speed 520 m/s has propagated a distance of 28 mm from the proximal end. Together with this, a new plastic wave resulting from the reflection of the primary elastic wave from the distal end has moved at distance 18 mm. The two plastic waves travel towards each other and meet at a time $t = 90\mu$ sec, causing a plastic flow along the entire length of the shell and the strain distributions at $t = 124\mu$ sec in Figure 5(a) show that the shell has buckled with wrinkles along the entire length. The movements of the yield loci presented in Figures 5(c,d) correspond to the time $t = 202\mu$ sec, when the buckled shape of the shell is fully developed. It is evident that the axial movements are considerably larger than the circumferential ones (except for local effects at the proximal end) and no tensile strains have developed. Thus, the entire buckling process for the shell in Figure 4 has developed within a sustained compressive plastic flow.

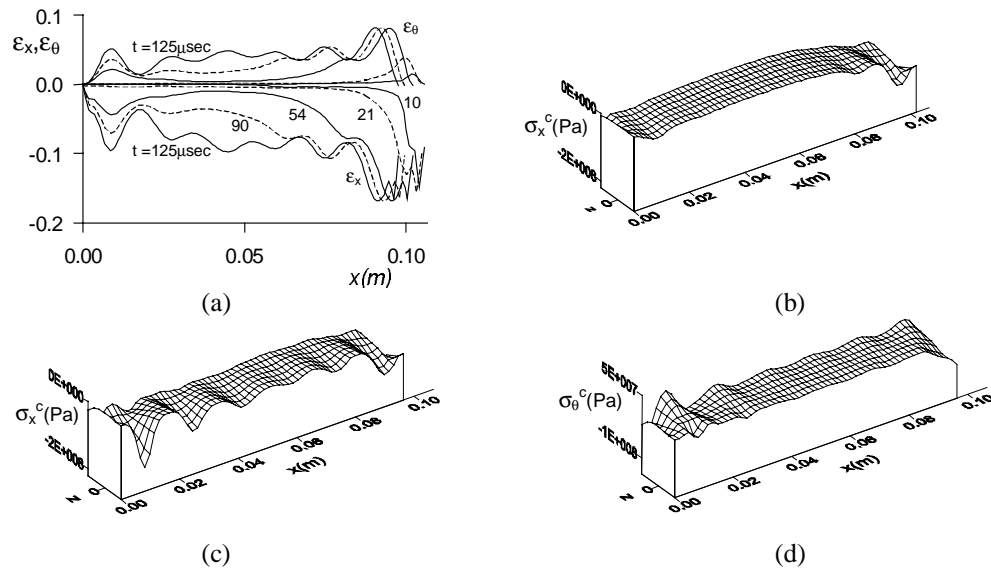


Figure 5: Stress wave propagation in the shell impacted with $G = 0.1\text{kg}$ and $V_0 = 100\text{m/s}$. (a) Strain distributions at the mid-surface at different times along the shell. (b) Movement of the yield loci σ_x^c at $t = 54\mu\text{s}$. (c) Movement of the yield loci σ_x^c at $t = 202\mu\text{s}$. (d) Movement of the yield loci σ_θ^c at $t = 202\mu\text{s}$.

5. Low Velocity Impact – Post-Buckling Behaviour (Region C2 in Figure 1)

For impact energies larger than those in regions A and B (i.e., regions C1 and C2 in Figure 1), a post-buckling behaviour of a shell with large radial displacements occurs until curve *d*, associated with an impacted shell, which is squashed completely.

The development of the buckling shape of the shell subjected to an impact with a mass $G = 262.5\text{kg}$ and travelling with $V_0 = 4\text{m/s}$ is presented in Figure 6. The numbers marking the deformed shapes correspond to the numbers marked on the load-time history curve in Figure 7(a). The shell wrinkles develop progressively regardless of the initial pattern of buckling and the main characteristics of the impact event when the shell is struck by a mass $G = 262.5\text{kg}$ travelling with $V_0 = 4\text{m/s}$ are presented in Figure 7. An external energy of 2.1 kJ is sufficient to cause complete squashing of the shell. Further increase of the impact energy would cause an increase of the load for $t > 0.03$ sec and a solid body response of the shell, as evident from the load-time history presented in Figure 7(a).

The velocity–time history in Figure 7(b) shows regions of a constant slope followed by a curved line. The constant slope region corresponds to the compression phase before the next wrinkle occurs while the curves between two straight lines represent the variation of the velocity during the bending phase of the fold formation. A correspondence between the velocity-time history and the energy transformation during the impact event is evident in Figure 7(c). The falling curve represents the variation of the kinetic energy of the striker, T_k , and the three rising curves correspond to the external work done by the gravity of the striking mass after initial impact, T_w , the energy dissipated in plastic deformations, T_p , and the reversible elastic energy due to the elastic material properties, T_e . The different rates of plastic dissipation are caused by the different phases of shell deformation. Thus, each fold of the shell undergoes a compression in addition to the initial one, which occurs in the shell before buckling. The shortening of the shell due to compression continues to increase during the entire impact event.

For this particular shell, the buckling deformations start to develop from the proximal end but, soon after, the axial stress near the distal end starts to dominate, so that two complete wrinkles develop sequentially near the distal end. After that, a new wrinkle develops near the proximal end due to the increase of the axial force and the small radial displacements near this particular end. After forming three complete folds near the distal end and two complete folds near the proximal end, the remaining length of the shell available for bending is too short in order to buckle, so that the last phase of deformation is compression only until the shell is completely squashed. A significant proportion of the impact energy is absorbed in compression as it is proportional to the shortening of the shell and this energy is estimated at 10.4% of the initial impact energy.

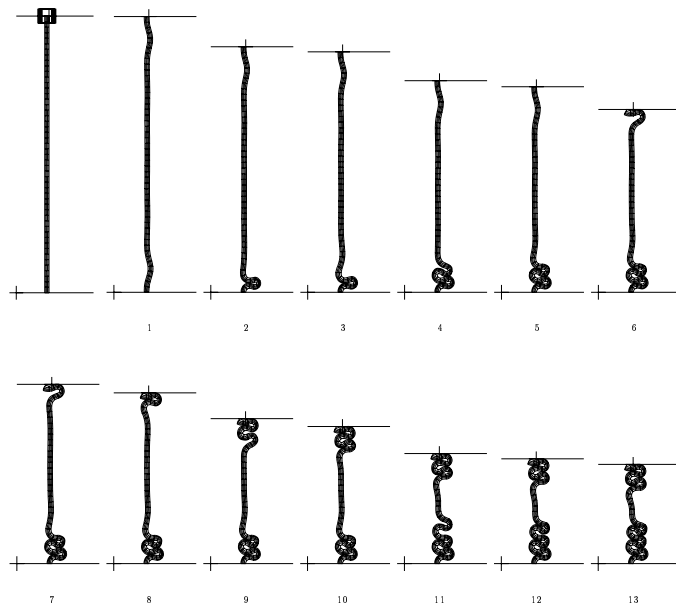


Figure 6: Development of the buckling shape of a shell, $G = 262.5\text{kg}$, $V_0 = 4\text{m/s}$

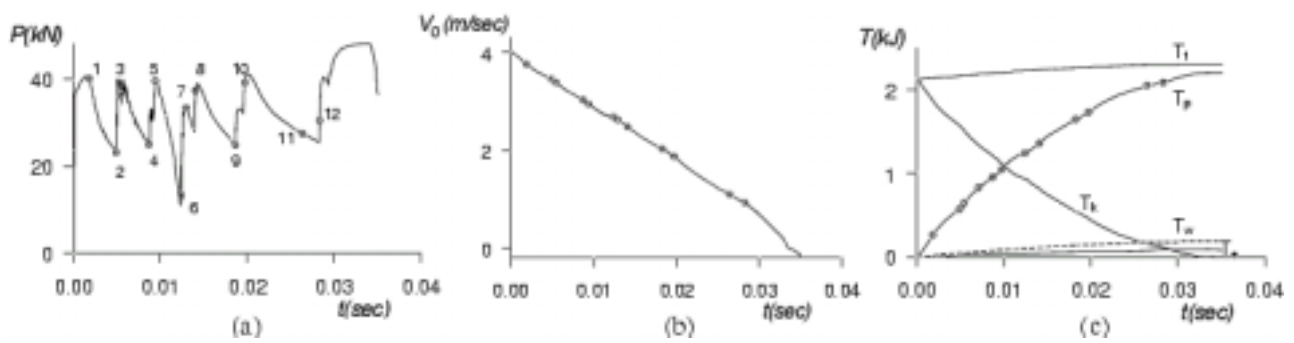


Figure 7: Progressive buckling for low velocity impact in a shell, $G = 262.5\text{kg}$, $V_0 = 4\text{m/s}$. (a) Load time history at the proximal end. (b) Velocity time history at the proximal end. (c) energy transformation during the impact event.

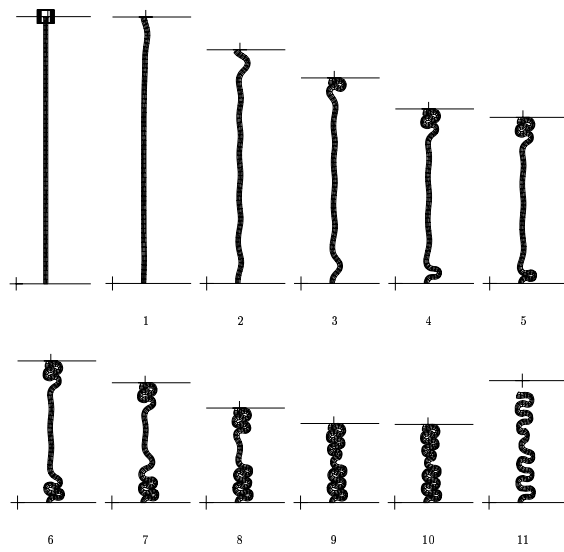


Figure 8: Development of the buckling shape of a shell, $G = 0.4167\text{kg}$, $V_0 = 120\text{m/s}$

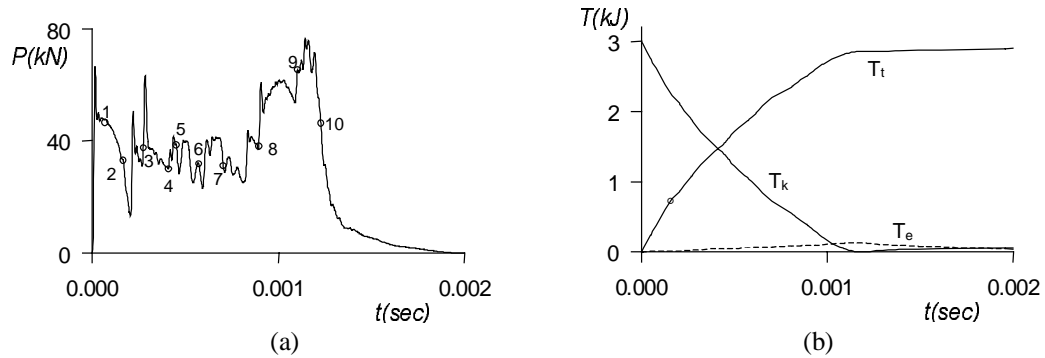


Figure 9: Dynamic plastic buckling phenomenon at high velocity impact, $G = 0.4167\text{kg}$, $V_0 = 120\text{m/s}$. (a) Load time history at the proximal end. (b) Energy transformation during the impact event.

6. High Velocity Impact (Region C1 in Figure 1)

The post-buckling behaviour of the shell requires 3.0kJ energy for complete squashing when it is struck with an initial velocity $V_0 = 120\text{ m/s}$. The development of the buckling shape for this particular shell is presented in Figure 8. The shell instability develops first in a dynamic plastic buckling mode and a regular buckling shape is observed at $t = 165.3\mu\text{sec}$ (position 2). The squashing of the shell continues to develop progressively, positions 4-9 in the figure. The final buckling shape is characterised by the same number of folds as those formed at the earlier phase of dynamic plastic buckling (position 2) so that the buckles formed initially during the dynamic plastic buckling phase act as 'initial imperfections' for the subsequent phases of deformation. The times corresponding to the buckled shapes presented in Figure 8 are marked on the force-time history in Figure 9, which is not as repetitive as that observed for a quasi-static loading in Figure 7(a).

In fact, the compression of the shell dominates the deformation process during the impact event. Large axial strains and stresses develop in the shell before the buckling phase which leads to a significant shortening of the shell at this stage. The reduction of the shell length during the first phase of compression is estimated as 12%, while the final reduction is 14.5%. The large compression of the shell during the first phase of deformation causes a significant portion of the initial kinetic energy to be absorbed before large radial displacements start to develop in the buckling phase.

7. Discussion

It is evident from the previous results that buckling is sensitive to both the inertia of the shell and the inertia of the striker. This sensitivity is a particular feature for axially loaded structural elements as shown, e.g., in ((Su et al., 1995), (Karagiozova and Jones, 1995), (Karagiozova and Jones, 2000)). This inertia effect is further illustrated in Figure 10, where the shell, subjected to equal impact energies but resulting from different combinations of the striking mass and the initial velocities, responds by decreasing a crushing distance when increasing the impact velocity, indicating that more energy is required for a complete squashing of the shell. The reason for a decrease in the crushing distance when the impact velocity increases can be attributed to the influence of radial inertia effects, since more energy is absorbed during the first compression phase when increasing the impact velocity.

The influence of strain rate on the material behaviour can be quite important for metals like steel. Although the aluminium exhibits a small strain rate sensitivity, a high velocity impact on a shell can cause considerable strain rates, which might influence the structural response.

In the present analysis, the strain rate is taken as $\dot{\epsilon} = V_0/L$ in order to estimate the dynamic yield stress of the material when using the Cowper-Symonds equation

$$\sigma_d = \sigma_s [1 + (\dot{\epsilon}/D)^{1/q}], \quad (4)$$

with $D = 128800\text{s}^{-1}$ and $p = 4$ (Jones, 1997). It is assumed also that the elastic and the strain hardening moduli do not change with the strain rate as well as the kinematic hardening. The largest increase of the dynamic yield stress is $\sigma_d = 1.1914\sigma_s$ for the shell subjected to an impact velocity of 184.5m/s.

Using these material properties, an increase of the maximum energy required for the complete squashing of the shell is observed (Figure 1), when strain rate effects are taken into account. This required energy for the shell increases by 11.4% when the dynamic yield stress is increased by 19.1%. However, the increase of the maximum energy absorbed by the shell due to the enhanced yield stress does not change the phenomena that develop under axial impact as the material hardening characteristics are assumed independent of the strain-rate. Only the values of the load parameters determining the boundaries between the regions for different types of shell responses are changed.

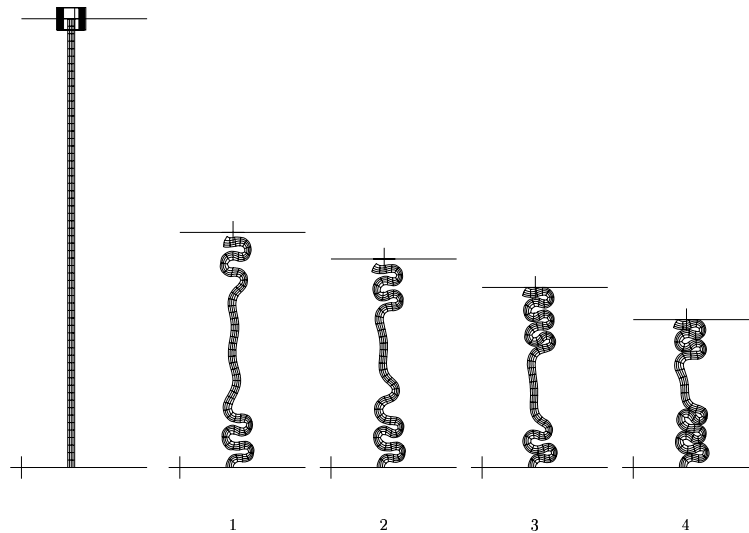


Figure 10: Final buckling shape for the shell impacted with energy of 2.1 kJ and different combinations of the striking mass and the impact velocity.

It was shown in (Karagiozova and Jones, 2000) and in section 3 that dynamic plastic buckling of shells, which buckle in the plastic range, develop only within a sustained plastic flow. The plastic wave is able to travel the entire shell length before a rapid growth of the radial displacements occurs and buckling develops with an almost uniform axial force along the shell. The smaller radial inertia of a thinner shell will lead to more rapid growth of the radial displacements, halting the propagation of the plastic wave and the development of local bending deformations results in a progressive buckling of the shell (Karagiozova and Jones, 2000). Strain hardening properties of the material also influence the development of local plastic deformations during the early phase of the impact event. Lower values of the strain hardening modulus give rise to lower plastic wave speeds, so that the time for the plastic wave to propagate along the shell is longer. The radial inertia forces cannot support the unbuckled shape during the time, which would be necessary for a development of dynamic buckling of the shell.

The general observations on the dynamic phenomena of axial compression, dynamic plastic buckling and dynamic progressive buckling remain valid for the axisymmetric response of strain rate insensitive cylindrical shells under axial impact and elastic-plastic materials displaying linear strain hardening. However, the boundaries between the regions for the various phenomena depend on the shell geometry and the material characteristics. For example, regions B and C1 in Figure 1 are smaller for thinner shells or shells made of a material having a small hardening modulus, thus causing the buckling process to be dominated by the dynamic progressive buckling phenomenon.

This tendency offers an explanation for the progressive buckling phenomenon discussed in (Kurokawa et al., 1997) for a cylindrical shell having $L = 300$ mm, $R = 15$ mm, $h = 1$ mm, made of an aluminium alloy with $\sigma_0 = 120$ MPa and $E_h = 7.0$ MPa and struck by a mass $G = 0.493$ kg travelling with initial velocity $V_0 = 50$ m/s. The shell geometry together with the very low material strain hardening characteristics provides a condition for the rapid development of local plastic deformations near the proximal end resulting, later, in progressive buckling. Thicker shells, or shells made of materials having a large strain hardening modulus, will manifest dynamic plastic buckling for a wider range of load parameters, so that the regions B and C1 in Figure 1 will expand.

8. Conclusions

A numerical simulation has been undertaken to examine the influence of inertia effects governing the buckling phenomena in axisymmetrically deformed cylindrical shells subjected to an axial impact loading. It is concluded that the dynamic behaviour of cylindrical shells are both velocity and mass sensitive.

It is shown that the inertia effects during the deformation process determine the particular pattern of buckling, which develops in a elastic-plastic circular cylindrical shell subjected to an axial impact. Larger kinetic energy can be absorbed for higher velocity impacts when decreasing the striking mass, because larger strains and stresses are accumulated in the shell during the initial compression phase. The compression of the shell develops intermittently throughout the entire response for a low velocity impact which causes a significant shortening of the shell. The shortening of the shell due to compression for a high velocity impact develops mainly during the initial phase of deformation before buckling commences.

Acknowledgments– This study was supported by the Funding Research Agency at São Paulo, Brazil through grants FAPESP 97/12492-0 and FAPESP 98/02857-4.

References

- Florence, L. and Goodier, J. ,1966, Dynamic plastic buckling of cylindrical shells in sustained plastic flow., "J. Appl. Mech.", March:80–86.
- Jones, N. ,1989 (paperback edition 1997), "Structural Impact". Cambridge University Press, Cambridge.
- Karagiozova, D., Alves, M., and Jones, N. ,2000, Inertia effects in axisymmetrically deformed cylindrical shells under axial impact, "International Journal of Impact Engineering", 24(10):1083–1115.
- Karagiozova, D. and Jones, N. ,1995, A note on inertia and rate effects in the tam and calladine model, "International Journal of Impact Engineering", 16:621–635.
- Karagiozova, D. and Jones, N. ,1996, Dynamic elastic-plastic buckling phenomena in a rod due to axial impact, "International Journal of Impact Engineering", 18:919–947.
- Karagiozova, D. and Jones, N. ,2000, Dynamic elastic-plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact, "International Journal of Solids and Structures", 37:2005–2034.
- Kurokawa, T., Sasaki, T., Suzuki, H., and Imaida, Y. ,1997, Axisymmetric collapse of circular tubes due to longitudinal impact, "Proc. Sino-Japanese Symp. Deformation/Fracture of Solids", March:9–16.
- Ming, L., Ren, W., and Mingbao, H. ,1994, An experimental investigation of the dynamic axial buckling of cylindrical shells using a kolsky bar, "Acta Mechanica Sinica", 10:260–266.
- Ren, W., Mingbao, H., Zhuping, H., and Qingchun, Y. ,1983, An experimental study on the dynamic axial plastic buckling of a cylindrical shell, "International Journal of Impact Engineering", 1:249–256.
- Su, X., Yu, T., and Reid, S. ,1995, Inertia-sensitive impact energy absorbing systems. part I - effect of inertia and elasticity, "International Journal of Impact Engineering", 16:561–672.
- Vaughan, H. ,1969, The response of a plastic cylindrical shells to axial impact, "ZAMP", 20:321–328.

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS EM CONCRETO ARMADO EMPREGANDO-SE MODELOS DE DANO

Cristina Ferreira de Paula

Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. do Trabalhador São-carlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: persival@sc.usp.br

Sergio Persival Baroncini Proença

Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. do Trabalhador São-carlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: persival@sc.usp.br

Resumo. Neste trabalho apresenta-se uma análise do comportamento dinâmico de estruturas reticuladas planas em concreto armado considerando-se a não-linearidade física. O modelo estrutural é formulado via Princípio dos Trabalhos Virtuais empregando-se o método dos elementos finitos. Para simular o comportamento não-linear físico do concreto empregam-se os modelos de dano de Mazars e de La Borderie. O aço é considerado como um material elastoplástico com encruamento linear. A análise dinâmica é efetuada no domínio do tempo. Um exemplo numérico ilustra a influência do dano e da plastificação na resposta dinâmica em estruturas reticuladas planas em concreto armado.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos, Princípio dos Trabalhos Virtuais, mecânica do dano contínuo, não-linearidade física, análise dinâmica

1. Introdução

Os estudos sobre a resposta não-linear de materiais têm gerado diferentes propostas de modelos mecânico-matemáticos capazes de simular com melhor precisão tal comportamento. De particular interesse para este trabalho destacam-se alguns modelos que decorrem da aplicação da teoria da plasticidade e da mecânica do dano em meios contínuos: Lemaitre & Chaboche (1990), Lemaitre (1992), Mazars (1984) e La Borderie (1991).

O principal objetivo aqui é avaliar o desempenho de modelos de dano na simulação do comportamento estrutural não-linear de estruturas reticulares planas em concreto armado considerando-se regimes de resposta dinâmica. A abordagem dinâmica é intencionalmente limitada à verificação da influência das chamadas forças inerciais e dissipativas sobre a evolução da danificação e da plastificação, bem como o seu efeito conjunto na resposta estrutural, Paula (2001).

Para representar o comportamento não-linear físico do concreto, adotam-se os modelos de dano escalar apresentados em Mazars (1984) e La Borderie (1991). O aço é modelado como um material elastoplástico com encruamento cinemático.

Para a solução numérica do sistema de equações não-lineares resultante da combinação da formulação variacional adotada com o método dos elementos finitos, utiliza-se o método de Newmark em conjunto com o procedimento incremental iterativo de Newton-Raphson, Argyris & Mlejnek (1991). As integrais de interesse são resolvidas numericamente pela quadratura de Gauss-Lobatto, Hughes (1987). Como critério de convergência, comparam-se as normas euclidianas de forças e de deslocamentos com uma certa tolerância adotada.

2. Formulação variacional para análise não-linear dinâmica

2.1. Equação de movimento

Levando-se em consideração o princípio de D'Alembert, Argyris & Mlejnek (1991), num certo intervalo de tempo e segundo uma descrição lagrangiana total, a equação de equilíbrio pode ser escrita pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais na forma:

$$\int_{V_0} \mathbf{r}_0 \cdot \delta \mathbf{d} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 + \int_{V_0} (\rho \ddot{\mathbf{d}}) \delta \mathbf{d} dV_0 + \int_{V_0} (\boldsymbol{\mu} \dot{\mathbf{d}}) \delta \mathbf{d} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d} dV_0 - \int_{A_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{d} dA_0 - \sum_i^{nc} \delta \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{f}_i = 0 \quad (1)$$

onde: \mathbf{b} e $\bar{\mathbf{t}}_0$ são, respectivamente, forças externas distribuídas por unidade de volume e de superfície da configuração de referência e \mathbf{S} é o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, $\delta \mathbf{d}$ é o vetor de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformações virtuais compatíveis, \mathbf{r}_0 indica o vetor resíduo de forças, $\delta \mathbf{d}_i$ é o vetor de deslocamentos virtuais correspondentes aos pontos onde o vetor de forças concentradas $\mathbf{f}_i(t)$ é aplicado e nc é o número de componentes desses vetores.

2.2. Forma aproximada gerada pelo método dos elementos finitos

Uma forma aproximada para a Eq. (1) poder ser obtida empregando-se o método dos elementos finitos. O elemento de barra empregado neste trabalho encontra-se descrito em Paula & Proença (2000), possuindo três graus de liberdade (dois deslocamentos e um giro) atrelados aos nós de extremidade.

Admitindo-se que a estrutura tenha sido discretizada num certo número de elementos, o vetor deslocamento de um ponto genérico de um elemento finito pode ser representado em função dos deslocamentos nodais por meio da seguinte forma matricial:

$$\underline{d} = \underline{\phi} \underline{q} \quad (2)$$

onde $\underline{\phi}$ é a matriz que contém as funções de forma e suas derivadas segundo x, coordenada que mede a posição dos pontos ao longo do eixo da barra, Paula & Proença (2000).

Os vetores velocidade e aceleração resultam:

$$\underline{\dot{d}} = \underline{\phi} \underline{\dot{q}} \quad \underline{\ddot{d}} = \underline{\phi} \underline{\ddot{q}} \quad (3a,b)$$

Por sua vez, os vetores dos deslocamentos virtuais e das deformações virtuais podem ser interpolados por:

$$\delta \underline{d} = \underline{\phi} \delta \underline{q} \quad \delta \underline{\epsilon} = \underline{B} \delta \underline{q} \quad (4a,b)$$

Substituindo-se as Eqs. (3a,b) e (4a,b) na Eq. (1), obtém-se:

$$\int_{V_0} \delta \underline{q}^T \underline{B}^T \underline{S} dV_0 + \int_{V_0} \delta \underline{q}^T \underline{\phi}^T \underline{\rho} \underline{\phi} \underline{\ddot{q}} dV_0 + \int_{V_0} \delta \underline{q}^T \underline{\phi}^T \underline{\mu} \underline{\phi} \underline{\dot{q}} dV_0 - \int_{V_0} \delta \underline{q}^T \underline{\phi}^T \underline{b} dV - \int_{V_0} \delta \underline{q}^T \underline{\phi}^T \underline{t}_0 dA_0 - \sum_i^{nc} \delta \underline{q}^T \underline{f}_i = 0 \quad (5)$$

Visto que os deslocamentos virtuais nodais são arbitrários, a nulidade expressa pela Eq. (5) pode ser verificada a partir da seguinte condição:

$$\int_{V_0} \underline{B}^T \underline{S} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{\rho} \underline{\phi} \underline{\ddot{q}} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{\mu} \underline{\phi} \underline{\dot{q}} dV_0 - \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{b} dV - \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{t}_0 dA_0 - \sum_i^{nc} \underline{f}_i = 0 \quad (6)$$

A relação anterior pode então ser escrita segundo o arranjo proposto por Argyris & Mlejnek (1991):

$$\underline{M} \underline{\ddot{q}} + \underline{C} \underline{\dot{q}} + \underline{F}^{int} = \underline{F}^{ext} \quad (7)$$

onde:

$$\underline{F}^{int} = \int_{V_0} \underline{B}^T \underline{S} dV_0 ; \underline{M} = \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{\rho} \underline{\phi} dV_0 ; \underline{C} = \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{\mu} \underline{\phi} dV_0 \quad (8a,b,c)$$

$$\underline{F}^{ext} = \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{b} dV + \int_{V_0} \underline{\phi}^T \underline{t}_0 dA_0 + \sum_i^{nc} \underline{f}_i \quad (9)$$

Do desenvolvimento da expressão que exprime a derivada do vetor dos esforços internos com relação ao deslocamento e considerando-se uma relação elástica entre os tensores de Piola-Kirchhoff e o de Green: $\underline{S} = \underline{D}\underline{\epsilon}$, segue que a matriz de rigidez tangente para o elemento de pórtico plano, grandes deslocamentos, fica dada por:

$$\underline{K}_T = \int_{V_0} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV_0 + \int_{V_0} \underline{G} \underline{S} dV_0 \quad (10)$$

Em particular, no caso unidimensional quando se considera a não-linearidade física $\underline{D} = (1-d)E$, sendo d a variável que quantifica o dano em correspondência a um certo nível de deformação.

Observando-se a Eq. (8c), tem-se que a matriz de amortecimento pode ser obtida por uma integração análoga àquela que gera a matriz de massa, porém é bastante difícil se determinar a magnitude do parâmetro de amortecimento

viscoso do material. Para se contornar tal dificuldade, utiliza-se o método de amortecimento de Rayleigh, Cook et all (1989), que supõe que a matriz de amortecimento seja dada pela combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massa:

$$\underline{C} = \lambda_m \underline{M} + \lambda_k \underline{K}_0 \quad (11)$$

onde λ_m e λ_k são constantes que quantificam proporção das contribuições das matrizes de massa e rigidez inicial, respectivamente, na matriz de amortecimento. Neste trabalho, adotam-se valores que possuem relação com uma fração do amortecimento crítico para uma dada frequência natural de vibração, conforme sugerida em Cook et all (1989).

3. Modelo constitutivo de Mazars

O modelo de Mazars, apresentado originalmente em Mazars (1984), introduz uma variável escalar D que representa e quantifica o estado local de deterioração do material.

Destacam-se as seguintes hipóteses gerais: as deformações permanentes são desprezadas, sejam elas de natureza plástica, viscosa, ou induzidas pelo próprio processo de danificação e o carregamento é proporcionalmente crescente (radial). Além disso, admite-se que o aparecimento e a evolução do dano decorram exclusivamente da existência de alongamentos. Nesse sentido, define-se a *deformação equivalente* como uma variável escalar representativa do estado local de extensão.

A deformação equivalente é calculada em função da parte positiva das componentes principais da deformação por:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_i \langle \epsilon_i \rangle_+^2} \quad (i = 1, \dots, 3) \quad (12)$$

No modelo de Mazars, o dano se inicia quando a deformação equivalente atinge um valor de referência igual à deformação ϵ_{d0} , à qual corresponde a resistência máxima em ensaios de tração uniaxial.

O critério de danificação, que permite identificar situações de evolução do dano, é dado pela seguinte função:

$$f(\tilde{\epsilon}, d) = \tilde{\epsilon} - s(d) \leq 0 \quad \text{com} \quad s(0) = \epsilon_{d0} \quad (13)$$

Para incluir estados de tensão mais complexos, mas preservando-se as características dos casos uniaxiais, a variável de dano d é então definida como uma combinação linear de d_T e d_C na forma:

$$d = \alpha_T d_T + \alpha_C d_C \quad (14)$$

respeitando-se sempre $\alpha_T + \alpha_C = 1$; naturalmente $\alpha_T = 1$ para tração uniaxial e $\alpha_C = 1$ para compressão uniaxial.

Nos casos de carregamento radial têm-se:

$$d_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]} \quad (15)$$

$$d_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{d0})]} \quad (16)$$

Nas expressões anteriores A_T , B_T e ϵ_{d0} são parâmetros característicos do material que podem ser identificados com base em resultados de ensaios de tração uniaxial com deformação controlada. Os parâmetros A_C e B_C podem ser identificados com resultados de ensaios de compressão uniaxial com deformação controlada, Álvares (1993).

Em termos de relação tensão-deformação, o dano escalar penaliza diretamente todas as componentes do tensor de rigidez elástica. Assim sendo, a relação constitutiva do modelo, nas formas secante e tangente, é expressa, respectivamente, por:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_0 (1 - d) \underline{\epsilon} \quad (17)$$

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{D}_0 (1 - d) \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{D}_0 \dot{d} \underline{\epsilon} \quad (18)$$

A taxa do dano é dada por:

$$\dot{d} = \frac{\partial d}{\partial \tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = F(\tilde{\varepsilon}) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_x} \dot{\varepsilon}_x \quad (19)$$

$$\text{onde: } F_T(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_T)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_T B_T}{\exp[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}; \quad F_C(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_C)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_C B_C}{\exp[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]};$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} = 1 \text{ se } \varepsilon > 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} = -v\sqrt{2} \text{ se } \varepsilon < 0$$

4. Modelo constitutivo de La Borderie

Este modelo aplica-se principalmente a situações de solicitações cíclicas com inversão de sinal. Na sua formulação permite-se levar em conta o aspecto unilateral da resposta do material, fenômeno inerente ao comportamento mecânico do concreto que consiste na independência dos processos de danificação de estados de tração e de compressão. Definem-se, então, duas variáveis escalares representativas do dano em tração (d_1) e do dano em compressão (d_2). A ativação de um ou outro processo de danificação, por efeito do fechamento ou abertura de fissuras, quando da inversão do processo de carregamento, é feita mediante um controle sobre o sinal das tensões principais. Consideram-se, também, deformações anelásticas ou residuais devidas exclusivamente ao dano.

As relações entre as variáveis de estado e as suas variáveis associadas podem ser deduzidas a partir de um potencial de estado. No modelo constitutivo de La Borderie sugere-se o potencial de energia livre de Gibbs (χ) como potencial de estado, La Borderie (1991), a adotar sendo o mesmo dado pela seguinte expressão:

$$\chi(\underline{\sigma}, d_1, d_2, z_1, z_2) = \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_+ : \langle \underline{\sigma} \rangle_+}{2E(1-d_1)} + \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_- : \langle \underline{\sigma} \rangle_-}{2E(1-d_2)} + \frac{\nu}{2E} (\underline{\sigma} : \underline{\sigma} - \text{Tr}^2(\underline{\sigma})) +$$

$$+ \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} f(\text{Tr}(\underline{\sigma})) + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} \text{Tr}(\underline{\sigma}) + G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (20)$$

onde: $\langle \underline{\sigma} \rangle_+$ e $\langle \underline{\sigma} \rangle_-$ são, respectivamente, as partes positiva e negativa do tensor de tensões, $\text{Tr}(\underline{\sigma})$ é o primeiro invariante do tensor de tensões, ν é o coeficiente de Poisson do material virgem, E é o módulo de elasticidade do material íntegro, β_1 e β_2 são os parâmetros a serem identificados, relacionados ao aparecimento de deformações anelásticas; $G_1(z_1)$ e $G_2(z_2)$ são funções de encruamento. Além disso, a função $f(\text{Tr}(\underline{\sigma}))$, que permite levar em conta a abertura e o fechamento de fissuras, assume diferentes relações de acordo com a relação entre os valores de $\text{Tr}(\underline{\sigma})$ e da tensão de fechamento de fissuras, σ_f , considerada um parâmetro do material a ser identificado.

As expressões propostas são:

$$f(\text{Tr}(\underline{\sigma})) = \text{Tr}(\underline{\sigma}) \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\underline{\sigma}) \in [0, \infty[$$

$$f(\text{Tr}(\underline{\sigma})) = \left(1 + \frac{\text{Tr}(\underline{\sigma})}{2\sigma_f}\right) \text{Tr}(\underline{\sigma}) \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\underline{\sigma}) \in]-\sigma_f, 0[\quad (21)$$

$$f(\text{Tr}(\underline{\sigma})) = -\frac{\sigma_f}{2} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\underline{\sigma}) \in]-\infty, -\sigma_f]$$

As leis de estado derivam do potencial de estado, dado pela Eq. (20) e definem as variáveis associadas às variáveis de estado mediante derivadas parciais. Assim, o tensor de deformações resulta de:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\partial \chi}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\varepsilon}_c + \underline{\varepsilon}_{an} \quad (22)$$

sendo $\underline{\varepsilon}_c$ a parcela de deformações elásticas e $\underline{\varepsilon}_{an}$ o tensor de deformações anelásticas. Tais componentes são dadas, respectivamente, por:

$$\underline{\varepsilon}_c = \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_+}{E(1-d_1)} + \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_-}{E(1-d_2)} + \frac{\nu}{E} (\underline{\sigma} - \text{Tr}(\underline{\sigma})I) \quad (23)$$

$$\underline{\varepsilon}_{an} = \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} I \quad (24)$$

Neste trabalho adotam-se as expressões para a determinação das variáveis associadas às variáveis de dano propostas em PITUBA et all (1999):

$$Y_1 = \frac{\partial \chi}{\partial d_1} = \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_+ : \langle \underline{\sigma} \rangle_+ + 2\beta_1 f(\underline{\sigma}) \alpha_1}{2E(1-d_1)^2} \quad (25)$$

$$Y_2 = \frac{\partial \chi}{\partial d_2} = \frac{\langle \underline{\sigma} \rangle_- : \langle \underline{\sigma} \rangle_- + 2\beta_2 \text{Tr}(\underline{\sigma}) \alpha_2}{2E(1-d_2)^2} \quad (26)$$

onde os coeficientes $\alpha_i (i = 1,2)$ assumem o valor unitário quando a variável de dano d_i for diferente de zero; caso contrário são nulos.

As variáveis Z_i poderiam ser definidas de forma análoga. Entretanto, em lugar de explicitar as G_i que aparecem na Eq. (20) e a partir delas, por derivação, obter aquelas variáveis, sugere-se empregar diretamente expressões para Z_i resultantes de ajustes sobre resultados experimentais. A forma geral dessas expressões é a seguinte:

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{d_i}{1-d_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1,2) \quad (27)$$

onde A_i , B_i e Y_{0i} são parâmetros a serem identificados.

Nota-se que as variáveis Z_i tem valores iniciais dados por $Z_i(d_i = 0) = Y_{0i}$. As Expressões (27) aparecem, na verdade, nas funções critério de danificação $F_i = Y_i - Z_i$, as quais caracterizam condições para a evolução ou não do dano em tração ou em compressão. Tais condições são:

$$\text{Se } Y_i < Z_i \text{, então } \dot{d}_i = 0 \text{ e a resposta imediata é elástica linear} \quad (28)$$

$$\text{Se } Y_i = Z_i \text{ e } \dot{Y}_i > 0 \text{, então } \dot{Y}_i = \dot{Z}_i \text{ e } \dot{d}_i \neq 0 \quad (29)$$

Havendo evolução de dano pode-se determinar d_i a partir da Eq. (27):

$$d_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i(Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad (30)$$

Detalhes sobre a implementação numérica para o caso unidimensional ver La Borderie (1991).

5. Exemplo numérico: viga bi-apoiada em concreto armado

Neste exemplo apresentam-se os resultados da análise dinâmica realizada sobre a estrutura (viga) apresentada em Álvares (1993). Considera-se a não-linearidade física do concreto e do aço. A estrutura é discretizada em 12 elementos finitos iguais. Os dados geométricos e a distribuição das armaduras estão apresentados na Fig. (1).

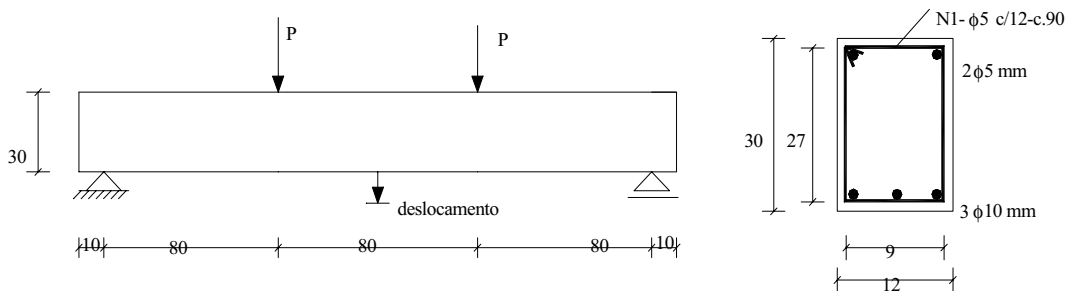


Figura 1. Geometria e armação da viga (dimensões em cm)

Propriedades do concreto: $E = 29200 \text{ MPa}$; $\nu = 0.2$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$

Propriedades do aço: $E = 196000 \text{ MPa}$; $f_y = 420 \text{ MPa}$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $E_T = 19600 \text{ MPa}$

Parâmetros do modelo de Mazars: $A_T = 0.995$ $B_T = 8000$ $A_C = 0.85$ $B_C = 1050$ $\epsilon_{d0} = 0.00007$

Parâmetros do modelo de La Borderie: $\beta_1 = 1 \text{ MPa}$; $\beta_2 = -10 \text{ MPa}$; $Y_{01} = 3.05 \times 10^{-4} \text{ MPa}$; $Y_{02} = 5 \times 10^{-3} \text{ MPa}$; $A_1 = 3.5 \times 10^3 \text{ MPa}^{-1}$; $A_2 = 6.8 \text{ MPa}^{-1}$; $B_1 = 0.95$; $B_2 = 0.7705$; $\sigma_f = 2.6 \text{ MPa}$

Para a análise dinâmica adota-se um passo de tempo $\Delta t = 1.10^{-5} \text{ s}$, considerando-se duas situações de solitação. A primeira corresponde à vibração forçada provocada por carga $P=25 \text{ kN}$, aplicada instantaneamente e mantida constante no tempo. A segunda corresponde à vibração livre provocada por deslocamentos iniciais de 4mm e 6 mm, impostos à seção central da viga. As duas análises foram feitas com e sem amortecimento, sendo as taxas de amortecimento crítico de 3% e 10%.

Na Figura (2) estão apresentadas as respostas das análises dinâmicas linear e não-linear física correspondentes à situação de vibração forçada sem amortecimento.

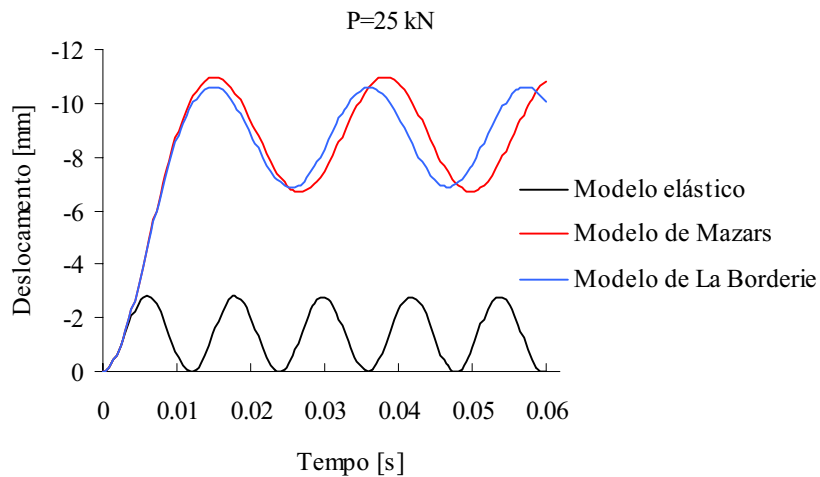


Figura 2. Variação do deslocamento com o tempo – vibração forçada não amortecida

Observa-se na Fig.(2) que em relação à resposta elástica o efeito da danificação combinado com o da plastificação do aço e do concreto, no modelo de La Borderie, provoca um aumento no nível do deslocamento máximo e no período e a amplitude de vibração da estrutura.

Na Figura (3) estão apresentadas as respostas para vibração forçada com amortecimento, somente com o modelo de dano de La Borderie. Neste caso, adotam-se taxas de amortecimento crítico de 3% e de 10%.

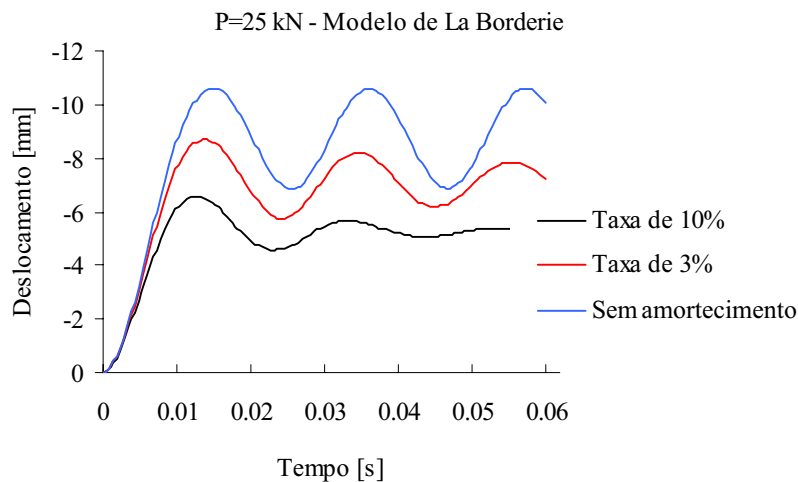


Figura 3. Variação do deslocamento com o tempo – vibração forçada amortecida

Observando-se a Fig. (3) verifica-se que quanto maior a taxa de amortecimento crítico menor é o nível do deslocamento final amortecido em virtude, certamente, do efeito inibidor do amortecimento sobre os processos de danificação e de plastificação.

Na Figura (4) estão apresentadas as respostas dinâmicas linear e não-linear para o caso de vibração livre sem amortecimento, provocada por deslocamento inicial de 4 mm, para os modelos de dano de Mazars e La Borderie.

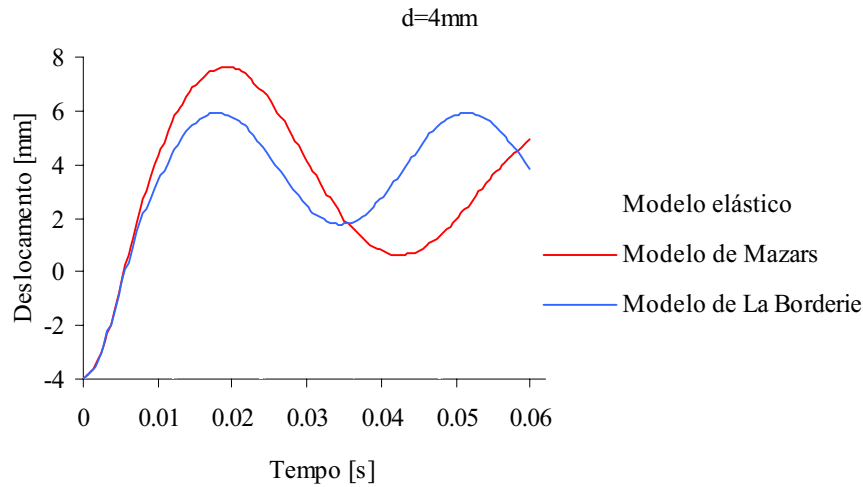


Figura 4. Variação do deslocamento com o tempo – vibração livre não amortecida

Nota-se, em primeiro lugar, na Fig. (4), que o deslocamento máximo obtido com as análises não-lineares é maior do que o da análise linear. Comparando-se as respostas não-lineares com a puramente elástica, observa-se também que quanto maior o nível de danificação e de plastificação menor a amplitude e maior o período de vibração, *HATZIGEORGIOU & BESKOS (2000)*. Entre as duas respostas não-lineares, o modelo de La Borderie apresenta menor amplitude e período de vibração. Isto porque o modelo leva em conta o efeito de fechamento de fissuras e deformações permanentes do concreto, e que não são levadas em conta no modelo de Mazars, e que fatores inibidores da evolução do dano.

Na Figura (5) os resultados referem-se ao caso de vibração livre sem amortecimento provocado por deslocamento inicial de 6 mm. Estão ilustradas as variações no tempo das frequências associadas ao primeiro modo de vibração natural da estrutura. Sobre as respostas obtidas existem os efeitos da danificação e plastificação do concreto, no modelo de La Borderie, combinados com a plastificação do aço.

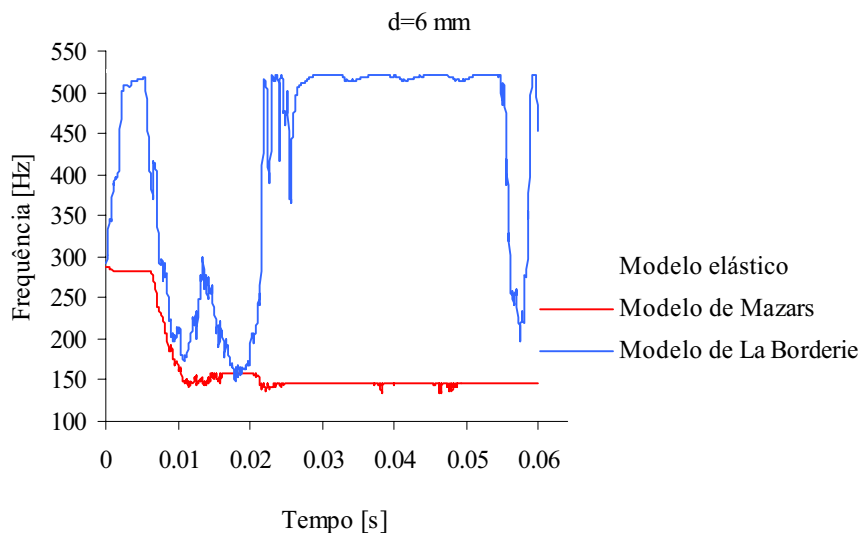


Figura 5. Variação do primeiro modo de vibração natural com o tempo – vibração livre

Um detalhe importante é que devido a imposição do deslocamento inicial de 6mm, a simulação da resposta dinâmica inicia-se com a estrutura já danificada. Conseqüentemente para ambos os modelos de dano empregados a

estrutura no instante inicial ($t=0$ s) apresenta uma frequência menor do que a do modelo elástico. Assim sendo, de um modo geral, a danificação e a plastificação diminuem a frequência natural de vibração da estrutura.

Na resposta obtida empregando-se o modelo de Mazars, a evolução do dano acarreta em diminuição da frequência, o que se nota no intervalo aproximado de 0.007 a 0.01 s. A partir, aproximadamente, do instante 0.01 s, se não houvesse evolução da danificação e se o aço se mantivesse em regime elástico, a curva de frequência deveria se manter constante no tempo. Porém a resposta obtida apresenta pequenas variações que devem ser imputadas à pequenas variações do dano e plastificação do aço.

Para o modelo de La Borderie, é importante lembrar que as alterações apresentadas na frequência refletem fortemente os efeitos do fechamento das fissuras e das deformações permanentes do concreto e do aço. Por conseguinte a interpretação dos resultados torna-se mais complexa. A análise descrita a seguir, fortemente pautada nas características do modelo de dano de La Borderie, poderia também ser justificada pela associação entre as respostas da curva de frequência e da curva de deslocamento no tempo similar àquela ilustrada na Fig.(4). Por exemplo, no intervalo de 0.0 a, mais ou menos, 0.005 s tem-se um aumento considerável no valor da frequência, refletindo o ganho de rigidez pelo processo de fechamento de fissuras e descarregamento do aço plastificado induzidos quando da imposição do deslocamento inicial. Entre 0.05 e 0.01 s há uma forte evolução da danificação, provocando queda de rigidez e de frequência. A variação alternada da frequência no intervalo de 0.01 a 0.02 s se deve aos processos de descarregamento do aço, seguido de danificação e plastificação do concreto. De 0.02 a 0.025 s o ganho de frequência decorre da recuperação de rigidez por fechamento de fissuras. No intervalo de 0.028 a 0.055 s a frequência se mantém praticamente constante porque não se tem uma evolução forte nos processos de danificação e de plastificação. Finalmente, a queda de frequência que se observa próximo do instante 0.055 s reflete a passagem de um regime de fechamento para abertura de fissuras.

6. Conclusões

O trabalho relaciona-se a simulação da resposta dinâmica de estruturas reticulares planas em concreto armado.

A formulação do equilíbrio dinâmico fundamenta-se na aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais segundo a descrição lagrangiana total. A mecânica do dano foi empregada para a consideração da não-linearidade física nas estruturas em concreto. Particularmente, a equação constitutiva utilizada para a análise do comportamento do concreto na tração e na compressão uniaxiais baseou-se nos modelos de danificação apresentados originalmente por Mazars (1984) e La Borderie (1991).

Nas integrações numéricas relativas à determinação da matriz de rigidez tangente e do vetor de esforços nodais internos aplicou-se a quadratura Gauss-Lobatto, a qual se mostrou bastante eficiente no caso de elementos em concreto armado.

Para integração no domínio do tempo, utilizou-se o procedimento implícito de Newmark combinado com o procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson.

De modo geral, observou-se, como era de se esperar, que a resposta dinâmica da estrutura sofre a influência do acréscimo de danificação induzido pelas forças inerciais.

Sobre a análise dinâmica, vale detalhar algumas conclusões específicas:

Observando-se as respostas que incluem a não-linearidade do concreto, verifica-se que elas são diferentes empregando-se os modelos de dano de Mazars e de La Borderie. Pelas suas características e sobretudo pelos resultados obtidos para as frequências de vibração, o modelo de dano de La Borderie é mais adequado que o modelo de dano de Mazars nas análises dinâmicas.

Tendo-se em vista o primeiro modo de vibração da estrutura, uma indicação importante dos resultados numéricos é que a danificação diminui a frequência natural, o que está de acordo com constatações apresentadas por Riera & Rios (2000) a partir de ensaios realizados em vigas de concreto armado.

Apesar de não ter sido possível realizar um confronto com resultados experimentais, as respostas obtidas nos diferentes exemplos analisados mostraram-se bastante coerentes.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

8. Referências

- Álvares, M.S., 1993, "Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos", São Carlos. Dissertação (Mestrado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 123p.
- Argyris, J., Mlejnek, H. P., 1991, "Dynamics of structures". Noth-Holland, v.5.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., 1989, "Concepts and applications of finite element analysis". New York: John Wiley.

- Hatzigeorgiou, G.D., Beskos, D.E., 2000, Dynamic response of 3-D elastoplastic or damaged structures by BEM. [CD-Rom]. "ECCOMAS 2000", Barcelona, 2000, Proceedings. 9p.
- Hughes, T.J.R. (1987). The finite element method – linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (USA).
- La Borderie, C., 1991, "Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton", PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- Lemaitre, J., 1992, "A Course on Damage Mechanics", Springer-Verlag.
- Lemaitre, J., Chaboche, J-L., 1990, "Mechanics of solid materials", Cambridge University Press.
- Mazars, J., 1984, "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure". PhD thesis, Université Paris 6.
- Paula, C.F., 2001, "Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas", São Carlos. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 121p.
- Paula, C.F., Proença, S.P.B., 2000, Simulação do comportamento não-linear físico e geométrico de estruturas reticulares planas em concreto armado, CD-Rom, "Computational Methods in Engineering'2000".
- Pituba, J.J.C., Proença, S.P.B., Álvares, M.S., 1999, Estudo do desempenho de modelos de dano para estruturas reticulares em concreto armado, "Computational Methods in Engineering'99".
- Riera, J.D., Rios, R.D., 2000, Evolução do amortecimento com o nível de dano em estruturas de concreto armado. CD-Rom, "XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural", Punta Del Este, 2000. 10p.

DYNAMICAL NUMERICAL RESPONSE OF PLANE REINFORCED CONCRETE FRAMES CONSIDERING DAMAGE MODELS

Cristina Ferreira de Paula

Department of Structural Engineering, São Carlos, School of Engineering, University of São Paulo, Av. do Trabalhador São-carlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: persival@sc.usp.br

Sergio Persival Baroncini Proença

Department of Structural Engineering, São Carlos, School of Engineering, University of São Paulo, Av. do Trabalhador São-carlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: persival@sc.usp.br

***Abstract.** This work presents a study of dynamic structural behavior of plane reinforced concrete frames considering nonlinearities induced by continuous damage. The structural model is formulated by Principle of Virtual Work and the finite element method is employed. The Mazars' and La Boderie's damage model are used to simulate concrete constitutive behavior. The reinforcement is considered as an elastoplastic material presenting linear kinematic hardening. The dynamic numerical analysis is performed on time domain. The influence of damage over the vibration response is evaluated on plane frames structures.*

***Keywords.** Finite Element Method, Principle of Virtual Work, continuous damage mechanic, material nonlinearity, dynamic analysis*

PREVISÃO NUMÉRICA DE TENSÕES RESIDUAIS EM PLACAS SOLDADAS

Alberto B. Vieira Jr.

UFU – FEMEC – CP 593 – 38400-902 – Uberlândia, MG
abvieira@mecanica.ufu.br

Domingos A. Rade

UFU – FEMEC – CP 593 – 38400-902 – Uberlândia, MG
domingos@ufu.br

Carlos Roberto Ribeiro

UFU – FEMEC – CP 593 – 38400-902 – Uberlândia, MG
cribeiro@mecanica.ufu.br

Resumo. O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia de modelagem numérico-computacional para previsão de tensões residuais que se formam em uma placa soldada. É usado um modelo numérico baseado na Técnica de Diferenças Finitas (TDF). As componentes de tensão são determinadas por derivações da função de tensão de Airy, a qual depende do estado termo-elasto-plástico do material em determinado instante. Esta análise, conduzida sucessivamente no tempo, permite que se obtenha o estado de tensão residual no final do processo. Após o desenvolvimento da formulação, são discutidos os métodos destinados à resolução numérica do problema. Em seguida são apresentados resultados de simulações numéricas de soldagem com simples deposição de calor (“bead on plate”) e soldagem de topo, bem como a comparação com resultados obtidos por outros autores.

Palavras chave: tensões residuais, deformações plásticas, métodos numéricos, técnica de diferenças finitas, soldagem.

1. Introdução

Processos de fabricação como conformação mecânica, usinagem ou soldagem normalmente resultam na presença de tensões residuais nas peças produzidas. Essas tensões residuais podem influir sobre o desempenho das peças, afetando a resistência à fadiga, à flambagem, à corrosão, a capacidade portante e a estabilidade dimensional (Parlane et al., 1981). Tensões residuais no cordão de solda podem alcançar o limite de escoamento do metal de adição. Assim, a determinação dos valores das tensões residuais torna-se importante no projeto e na avaliação de desempenho de peças soldadas. Esta determinação, porém, geralmente é difícil. O estado de tensão no interior de peças espessas quase sempre só é determinado através de complicados modelos numéricos de elementos finitos. As poucas possibilidades de técnicas experimentais, nesses casos, restringem-se a técnicas sofisticadas como a difração de neutrons. Oddy et al. (1998) relatam a ocorrência de uma dispersão de valores de tensões residuais da ordem de 100 MPa no interior de peças espessas, usando essa técnica. No caso da análise de placas finas, quando é admitida a distribuição uniforme das tensões ao longo da espessura, a modelagem numérica torna-se mais simples, sendo também viável o uso de procedimentos experimentais (técnica do furo central, fotoelasticidade de reflexão, “Moiré”, raios-X, ultrassom, etc.). Muitas destas técnicas, no entanto, apesar de relativamente simples, são onerosas. Isto limita a possibilidade de se obterem dados experimentais ao longo de toda a placa. Esta limitação é importante, pois sabe-se que as tensões residuais variam bastante ao longo de algumas regiões da placa (Kamtekar, 1978). Assim, a possibilidade de se obter rapidamente, e com menor custo, a distribuição das tensões residuais em toda a placa justifica a busca de uma modelagem numérica simplificada.

O uso de programas comerciais de elementos finitos na análise de tensões residuais em placas finas soldadas apresenta dificuldades devidas ao acoplamento das análises transientes térmica e mecânica. A existência de tensões residuais implica a presença de deformações plásticas, o que significa que a análise deve ser de natureza termo-elasto-plástica e, como tal, não-linear. Por se tratar de um problema de plasticidade, a análise deve levar em conta uma série histórica de distribuições de temperatura e adaptações sucessivas das deformações plásticas às tensões geradas no aquecimento e resfriamento da placa e do cordão de solda.

A modelagem numérica aqui apresentada, baseada na técnica de diferenças finitas, é de uso relativamente fácil. Como resultados de aplicação da técnica, além das três componentes de tensão residual em cada ponto da placa (considera-se estado plano de tensão), obtém-se também as deformações plásticas em cada ponto. Pode-se também conduzir análises transientes, considerando um determinado instante dentro do processo de soldagem. O método apresenta, no entanto, limitações como o fato de restringir-se a placas finas, retangulares e com extremidades livres, e considerar a tensão de escoamento como única propriedade do material variável com a temperatura. Estudos visando a eliminação destas restrições encontram-se atualmente em curso.

2. Fundamentos teóricos

2.1 Relação entre tensões, temperatura e deformações plásticas

É possível estabelecer a relação entre uma função de tensão de Airy, a temperatura e as deformações plásticas em uma placa soldada, por meio da seguinte equação (Mendelson, 1968):

$$\frac{1}{E} \nabla^4 (U) = -[\nabla^2 (\alpha \theta) + G + \Delta G], \quad (1)$$

onde:

- $U = U(x,y)$: função de tensão de Airy;
- α : coeficiente de expansão térmica do material;
- θ : distribuição da diferença de temperatura em relação à temperatura ambiente;
- E : módulo de elasticidade do material;

$$\nabla^4 (\cdot) \equiv \frac{\partial^4 (\cdot)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (\cdot)}{\partial y^4};$$

$$\nabla^2 (\cdot) \equiv \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial y^2};$$

$$G = \frac{\partial^2 \varepsilon_x^p}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^p}{\partial x^2}; \quad (2)$$

- $\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_{xy}^p$ são as deformações plásticas acumuladas;

$$\Delta G = \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_x^p)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_{xy}^p)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\delta \varepsilon_y^p)}{\partial x^2}; \quad (3)$$

- $\delta \varepsilon_x^p, \delta \varepsilon_y^p, \delta \varepsilon_{xy}^p$ são os incrementos de deformação plástica.

2.2 Distribuição de temperatura

A distribuição da temperatura θ na placa em cada instante (Fig.(1b)), ou seja, para cada posição do eletrodo, pode ser obtida com a formulação de Rosenthal (Kamtekar, 1978),

$$\theta(\xi) = \frac{Q}{2\pi k t_h} e^{-\lambda v \xi} K_0(\lambda v R), \quad (4)$$

onde:

- ξ : Coordenada de cada ponto em relação à posição do eletrodo. $\xi = x - vt$ (Fig.(1a));
- Q : potência fornecida, dada por $Q = \eta \cdot V \cdot I$, onde η é o rendimento térmico do processo de soldagem, V é a tensão e I é a corrente elétrica;
- v : velocidade de soldagem;

- k : condutividade térmica;
- t_h : espessura da placa;
- $\lambda = 1/(2K)$, K : difusividade térmica, $K = k/(\rho C_p)$, ρ : densidade, C_p : calor específico;
- K_0 : função modificada de Bessel, do segundo tipo, de ordem zero.
- $R = \sqrt{\xi^2 + y^2}$.

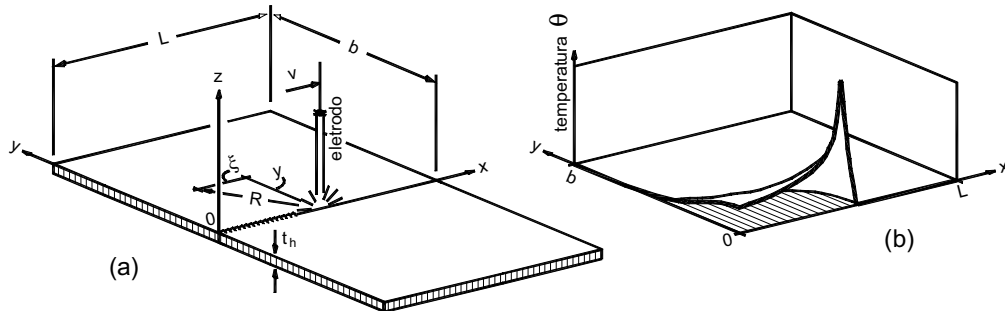


Figura 1. a) Coordenadas na placa b) Distribuição de temperatura

2.3 Modelagem numérica

Considerando uma malha de pontos apropriada, que cubra uma metade da placa, considerada simétrica em relação ao eixo de soldagem, conforme ilustrado na Fig.(2a), a Eq.(1) pode ser discretizada em um conjunto de pontos internos da placa, por meio da técnica de diferenças finitas (Mendelson, 1968). Para tanto, a Eq.(1) é reescrita sob a forma:

$$\nabla^4(U) = D, \tag{5}$$

onde:

$$D = -E(\nabla^2(\alpha\theta) + G + \Delta G), \tag{6}$$

Para cada ponto da placa, a Eq.(5) pode ser expressa na seguinte forma discreta:

$$\begin{aligned} &C_1 U_{i-2,j} + C_2 U_{i-1,j-1} + C_3 U_{i-1,j} + C_4 U_{i-1,j+1} + \\ &+ C_5 U_{i,j-2} + C_6 U_{i,j-1} + C_7 U_{i,j} + C_8 U_{i,j+1} + C_9 U_{i,j+2} + \\ &+ C_{10} U_{i+1,j-1} + C_{11} U_{i+1,j} + C_{12} U_{i+1,j+1} + C_{13} U_{i+2,j} = D(i,j) \end{aligned} \tag{7}$$

No caso de uma malha regular, os coeficientes C_1, C_2, \dots, C_{13} , são dados por:

$$\begin{aligned} C_1 = C_{13} &= \frac{1}{p^4}; & C_2 = C_4 = C_{10} = C_{12} &= \frac{2}{h^2 p^2}; & C_3 = C_{11} &= -\left(\frac{4}{p^4} + \frac{4}{h^2 p^2}\right); \\ C_5 = C_9 &= \frac{1}{h^4}; & C_6 = C_8 &= -\left(\frac{4}{h^4} + \frac{4}{h^2 p^2}\right); & C_7 &= \frac{6}{h^4} + \frac{6}{p^4} + \frac{8}{h^2 p^2}; \end{aligned}$$

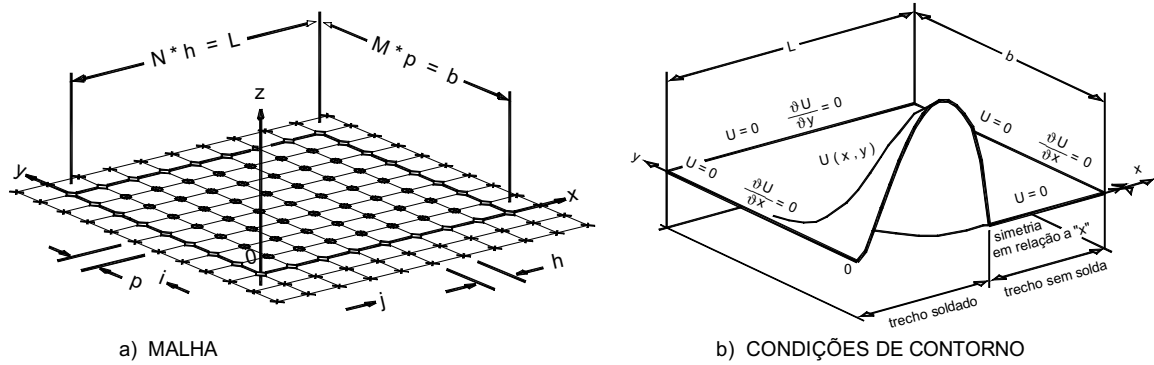


Figura 2. a)Esquema da malha adotada para aplicação da técnica de diferenças finitas b) Condições de contorno referentes à soldagem de topo de uma placa com extremidades livres

Deve-se considerar também, na solução, as condições de contorno e de simetria apropriadas. No caso de uma soldagem de topo de uma placa com extremidades livres, para um instante intermediário da soldagem, as condições de contorno são aquelas esquematizadas na Fig.(2b) (Kamtekar, 1978). Considerando todos os pontos internos da placa, bem como as condições de contorno e simetria, o conjunto de equações forma o seguinte sistema linear, cuja resolução fornecerá os valores da função de Airy em cada ponto da placa.

$$[A] \{U\} = \{D\}, \tag{8}$$

onde:

$[A]$: Matriz dos coeficientes C_1, C_2, \dots, C_{13} ;

$\{U\}$: Vetor-coluna dos valores da função de tensão;

$\{D\}$: Vetor-coluna dos valores de D correspondentes a cada ponto interno da malha.

Uma vez obtidos os valores discretos da função de tensão de Airy, as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} em cada ponto são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Rightarrow \sigma_x(i, j) \cong \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{p^2}; \tag{9a}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_y(i, j) \cong \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2}; \tag{9b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Rightarrow \tau_{xy}(i, j) \cong -\frac{(U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1}) - (U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1})}{4hp} \tag{9c}$$

Caso as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} configurem um estado de tensão tal que a placa se encontre em regime elástico em todos os seus pontos, a análise transiente estará completa. Neste caso, σ_x , σ_y e τ_{xy} são as tensões que ocorrem na placa para a temperatura θ . À temperatura ambiente não restarão tensões residuais e nem deformações plásticas. No entanto, se σ_x , σ_y e τ_{xy} e a tensão de escoamento f_y em determinado ponto da placa, para a temperatura θ em que esse ponto se encontra, configurarem a ocorrência de escoamento, restarão deformações plásticas e tensões residuais após o resfriamento. Neste caso, o lado direito da Eq. (5) não será conhecido a priori, demandando uma determinação das deformações plásticas em um processo iterativo, pois tais deformações dependem do estado de tensão. Configura-se, então, uma análise não-linear.

2.4 Critério de escoamento

Para verificar se determinado ponto da placa permanece em regime elástico a uma determinada temperatura, compara-se uma tensão equivalente, σ_e , com a tensão limite de escoamento do material à temperatura em que o ponto se encontra. De acordo com o critério de Von-Mises, o ponto em questão permanece em regime elástico se:

$$\sigma_e \leq f_y(\theta), \tag{10}$$

onde a tensão equivalente é dada por (Mendelson, 1968):

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \tag{11}$$

No caso de estado plano de tensão,

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{12}$$

2.5 Análise plástica

O Método das Soluções Elásticas Sucessivas, sugerido por Mendelson (1968) consiste em um processo iterativo para determinar os incrementos de deformação plástica correspondentes a um determinado incremento de carregamento. Tal método, esquematizado na Fig.(3), pode ser adaptado para a solução do problema termo-elasto-plástico do comportamento das tensões em uma placa, com a temperatura, durante a soldagem. Neste caso, o incremento de deformação plástica deve-se a uma mudança na distribuição de temperatura, e não a um incremento de carregamento.

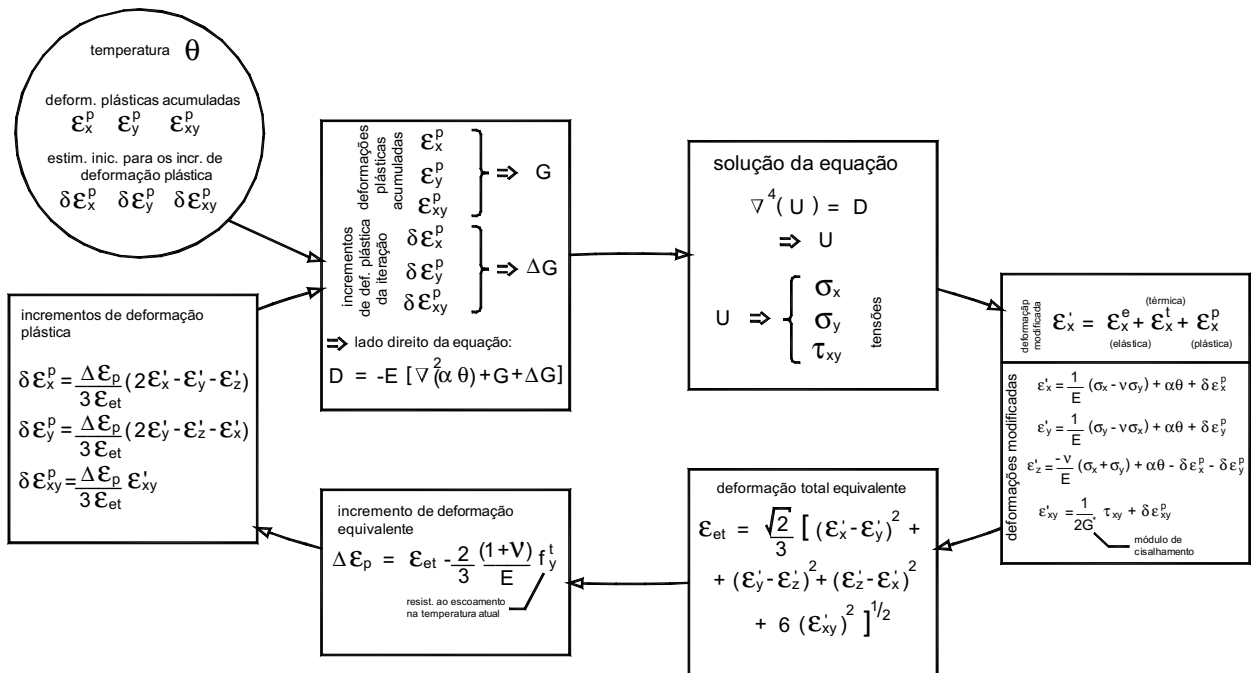


Figura 3 . Esquema do método das Soluções Elásticas Sucessivas

2.6 Métodos numéricos

Como o problema da determinação das tensões residuais é dependente da série histórica de temperaturas, das condições de contorno e da interação entre todos os pontos da placa, além de ser altamente sensível a pequenas variações nos valores das deformações plásticas, a análise deve utilizar intervalos de tempo pequenos e malhas refinadas, configurando grande esforço computacional. O interesse volta-se, então, para a análise e seleção dos métodos numéricos apropriados para a solução do problema. Os métodos numéricos de resolução de equações diferenciais subdividem-se em diretos e iterativos, sendo estes dois tipos detalhados a seguir.

2.6.1 Métodos iterativos

Os métodos iterativos (ou de relaxação) oferecem vantagens tais como a maior facilidade de adaptação a problemas diferentes. Permitem trabalhar com malhas com maior número de pontos, o que é especialmente desejável em se tratando de soluções que apresentem fortes gradientes, que demandam malhas mais refinadas. Além disso, podem ser usados em análises não-lineares, uma vez que o lado direito da equação pode ser mudado a cada iteração. Os métodos iterativos utilizam, como rotinas básicas de relaxação, métodos como o de Jacobi e o de Gauss Seidel. Ambos podem ser adaptados a estratégias de aceleração, conduzindo ao SOR ("Successive Overrelaxation") que é um algoritmo iterativo largamente utilizado até a década de 70 (Press, 1992).

Utilizando os procedimentos de Jacobi, Gauss-Seidel ou SOR, a precisão final da solução está associada ao espaçamento da malha e é, em geral, deficiente. A convergência é rápida nas primeiras iterações, mas passa a quase não progredir com um maior número de iterações. Esse problema é contornado com o uso da abordagem Multigrelha na solução numérica de equações diferenciais por diferenças finitas (Briggs, 1987). Nessa abordagem, a correção de um resíduo, que é a diferença entre o lado direito da equação e o produto da matriz de coeficientes pelo vetor-solução, é calculada em uma malha mais "grosseira" (com menor número de pontos) e transferida, por interpolação, para as malhas mais refinadas. O vetor-solução, calculado na malha mais refinada, é então corrigido. A eficácia da abordagem Multigrelha baseia-se em atingir todo o espectro do erro com a relaxação (que corrige principalmente erros de alta frequência) e a correção a partir do resíduo calculado em malhas diferentes (que atinge erros de baixa frequência) (Briggs, 1987). Métodos Multigrelha são, atualmente, o tipo de método a se adotar na solução de problemas com malhas densas, com grande produtividade (Press, 1992).

Apesar das vantagens dos métodos iterativos (facilidade de programação, versatilidade, adaptabilidade a problemas não-lineares), nem sempre eles podem ser empregados. Há casos em que o processo pode não convergir. Uma condição suficiente para se garantir a convergência é o sistema ser diagonal-dominante, isto é, a soma dos coeficientes dos pontos vizinhos de um ponto ser menor que o coeficiente do ponto.

2.6.2 Métodos diretos

Os métodos diretos conduzem a matrizes muito grandes, o que é um fator limitante da quantidade de pontos da malha. Métodos diretos tendem também a ser muito especializados, isto é, torna-se difícil adaptar um modelo para a solução de outros problemas com diferentes operadores e condições de contorno (Briggs, 1987).

Na construção de rotinas baseadas em métodos diretos deve-se estudar a constituição da matriz de coeficientes e as modificações que ela e o lado direito da equação devem sofrer para assimilar as condições de contorno. A matriz de coeficientes normalmente é de grandes dimensões. No entanto, a proporção de elementos não nulos é pequena, com estes se concentrando em região próxima à diagonal principal, sendo 13 as diagonais não nulas, no caso de problemas em ∇^4 (Fig. 4). Para reduzir o dispêndio de memória e esforço computacional, o programa utilizado deve ser capaz de aproveitar as características de esparsidade da matriz de coeficientes.

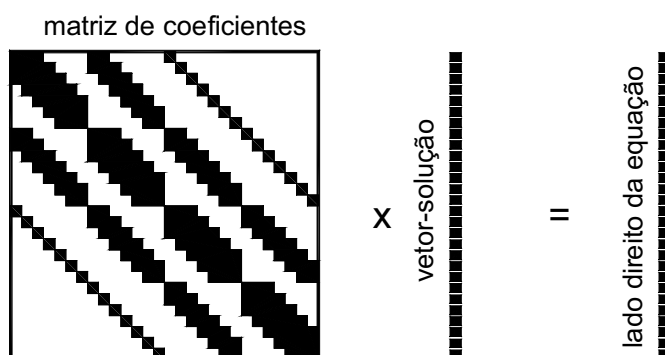


Figura 4. Esquema das matrizes e vetores considerados nos métodos numéricos para solução de problemas em ∇^4

3. Testes numéricos preliminares

O ambiente de programação escolhido foi o MATLAB[®]. Como é desejável trabalhar com malhas mais refinadas e a análise é de caráter não-linear, buscou-se desenvolver um modelo de solução usando um método iterativo com abordagem Multigrelha. Escolheu-se a rotina de relaxação Jacobi para se evitar laços em comando "for". Testes preliminares em problemas unidimensionais ou bidimensionais, com equações governadas pelo operador ∇^2 , mostraram a adequação de tais escolhas.

Ao se desenvolver o programa para solução do problema da formação de tensões residuais, onde se emprega a equação diferencial em que o operador é ∇^4 , os primeiros testes mostraram grande instabilidade numérica. As ordens de grandeza dos valores de σ_x , por exemplo, mostraram-se inadmissíveis. Na maioria das vezes havia divergência e não se obtinha uma solução. Considerou-se que essa divergência ocorria devido ao sistema de equações não ser diagonal-dominante e portanto, não se poder garantir a convergência.

Para contornar a instabilidade numérica, a rotina de relaxação foi alterada para um sistema em "xadrez" ("red-black relaxation" (Briggs, 1987)). Isso conferiu estabilidade numérica à solução do problema. Testou-se a resolução de uma equação diferencial em ∇^4 (Eq. (13)), cuja solução analítica é conhecida.

$$\nabla^4(U) = e^{xy} y^4 + 2e^{xy} x^2 y^2 + 4xy + 2 + e^{xy} x^4, \quad (13)$$

Solução : $U(x,y) = e^{xy}$,

Na Figura (5) podem ser vistos resultados obtidos com o uso dos vários dos métodos numéricos considerados. Pode-se notar a deficiência dos métodos iterativos testados. Os erros indicados são erros rms, ou seja, raiz da soma da média dos quadrados das diferenças entre os valores obtidos com os vários métodos empregados e os valores da solução exata em cada ponto da malha adotada.

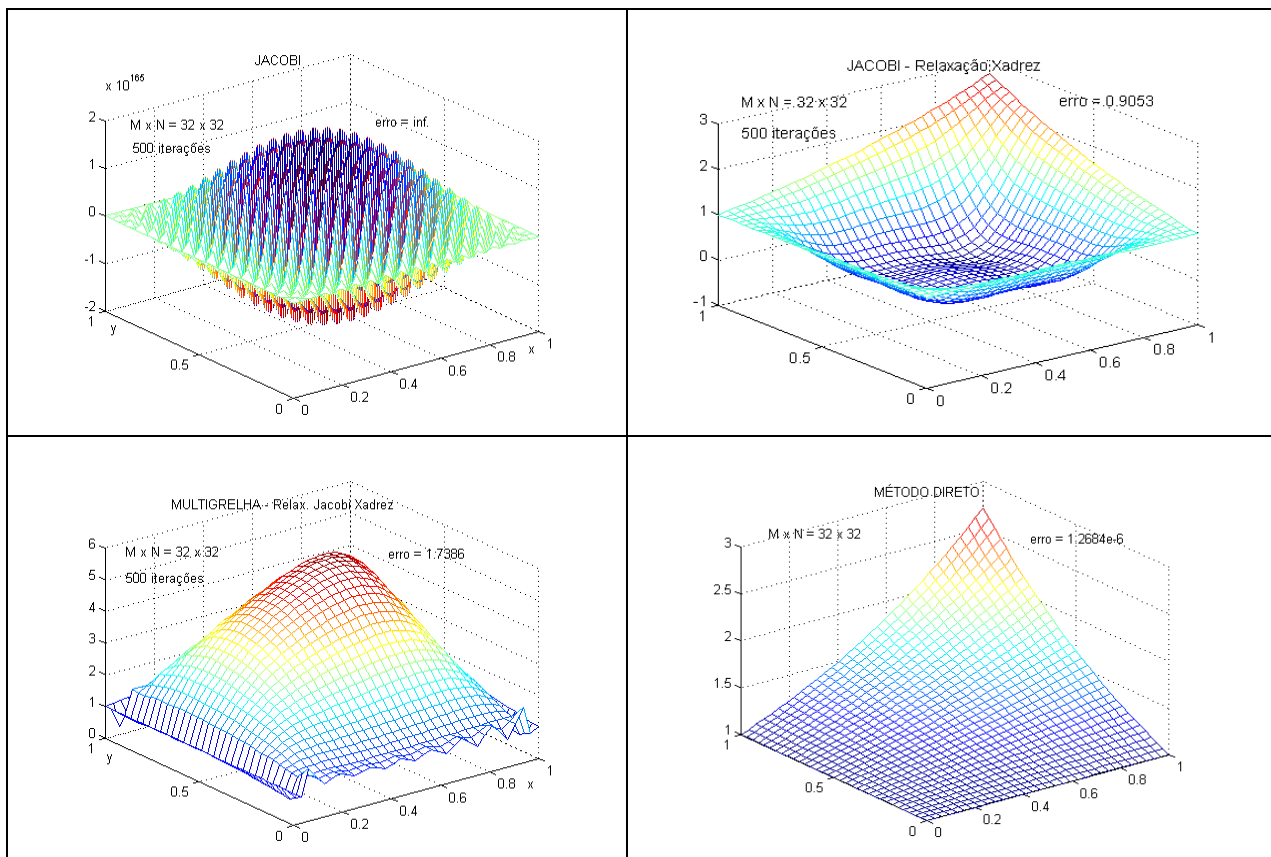


Figura 5 . Gráficos da resolução, por vários métodos numéricos, de uma equação diferencial em ∇^4 cuja solução analítica é conhecida

Frente ao baixo desempenho conseguido com os métodos iterativos optou-se pelo uso do método direto, apesar de suas limitações. Usou-se, na numeração dos pontos internos da malha, a convenção lexicográfica, ou seja, numeração conforme as linhas (Briggs,1987). Os resultados forneceram indícios da possibilidade de se resolver a equação governante da formação de tensões residuais, (Eq. (5)) usando o método direto, conforme apresentado a seguir.

4. Exemplo de aplicação ao problema de previsão de tensões residuais

Foram conduzidas simulações numéricas de soldagens em placas de aço, com variação das condições de soldagem. Considerou-se, em um caso, a simples deposição de calor ("bead on plate") e, em outro caso, a soldagem de topo, para verificar o efeito das diferentes condições sobre a distribuição e magnitude das tensões residuais. As características do material, parâmetros energéticos do processo e dimensões das placas podem ser vistas na Tabela 1. Tais características são semelhantes às utilizadas por Kaldas e Dickinson (1981a,b).

Tabela 1 – Características do material, parâmetros energéticos e dimensões das placas estudadas

Características, parâmetros e medidas	Aço
Condut. térmica (k)	0,050 J/(s.mm.C)
Densidade (ρ)	0,785e-5 Kg/mm ³
Calor específico (C _p)	420 J/(Kg.C)
Expansão térmica (α)	12e-6 (1/C)
Módulo de elastic. (E)	205e3 N/mm ²
Coef. de Poisson (ν)	0,28 (*)
Tensão de escoam. (f _v)	246 N/mm ² (*)
Temperatura de fusão	1500 C
Potência term. fornec (Q)	850,8 (J/s) (*)
veloc. de soldagem (v)	7,62 mm/s (*)
Comprimento da placa (L)	508 mm (*)
Semi-largura da placa (b)	127 mm (*)
Espessura (t)	3,175 mm (*)

(*)Kaldas e Dickinson (1981)

A Figura (6) mostra os gráficos das tensões residuais para o caso da soldagem da placa de aço na condição de simples deposição de calor ("bead on plate"). Na Figura (7) podem-se ver as deformações plásticas correspondentes. Observa-se que as deformações plásticas restringem-se a uma região adjacente ao cordão de solda, o que significa que a maior parte da placa encontra-se em regime elástico.

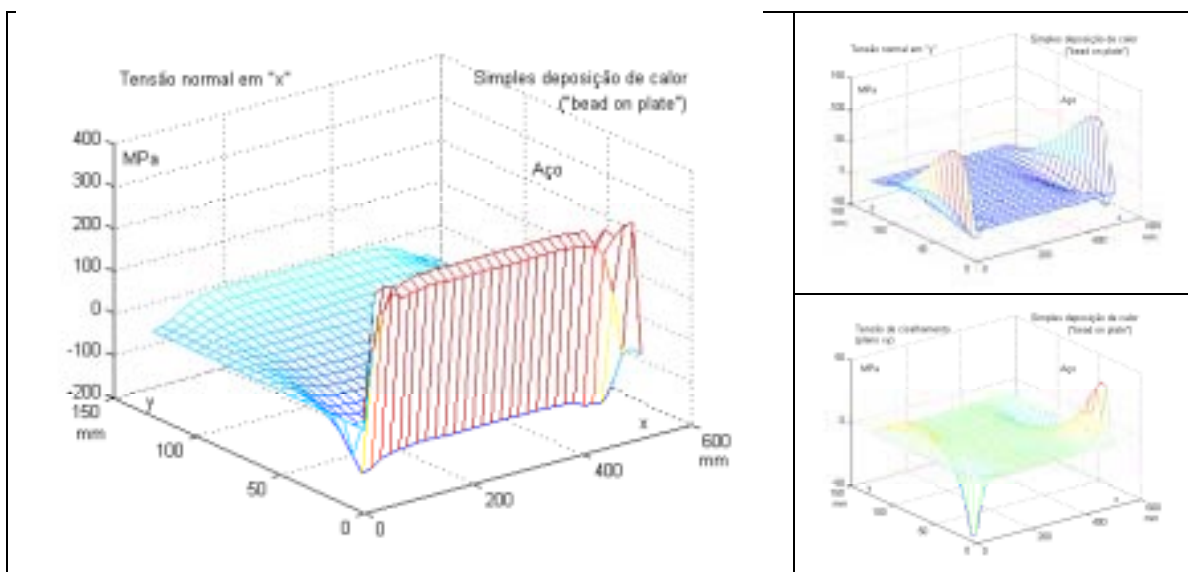


Figura 6 - Gráficos de tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} no caso da soldagem da placa de aço com simples deposição de calor ("bead on plate")

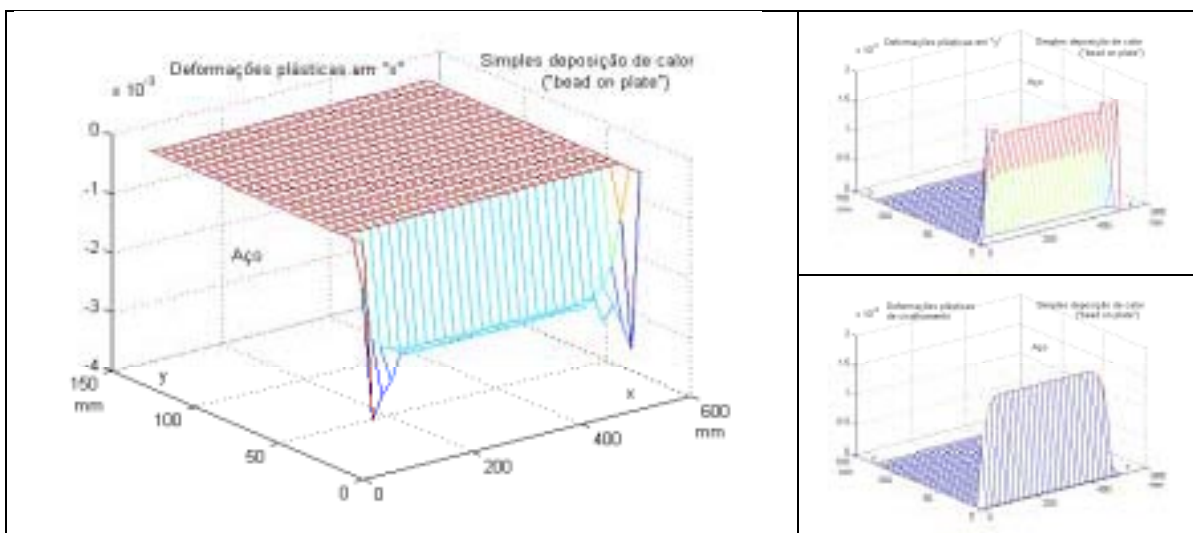


Figura 7 - Deformações plásticas ϵ_x^p , ϵ_y^p e ϵ_{xy}^p no caso da soldagem da placa de aço com simples deposição de calor ("bead on plate")

Na Figura (8) são apresentados gráficos das tensões residuais ao longo de direções específicas dentro da placa, sendo úteis para comparação dos efeitos das duas condições de soldagem estudadas (simples deposição de calor e soldagem de topo). Nota-se que o resultado final, em termos de tensões residuais, depende efetivamente da condição de soldagem. Na região adjacente ao cordão de solda, e longe das extremidades da placa, no entanto, a distribuição e magnitude das tensões são semelhantes. No gráfico de σ_x da Fig.(8) também são mostrados, para comparação, resultados (também obtidos por simulação numérica) apresentados por Kaldas e Dickinson (1981a,b). Notam-se diferenças no valor máximo de σ_x na região do cordão de solda. Os valores apresentados pelos últimos autores aproximam-se mais da tensão de escoamento do material, o que parece mais coerente, pois σ_y e τ_{xy} são pequenas na região central da placa e, assim, a tensão equivalente σ_e deve se aproximar de σ_x . Os resultados da presente modelagem melhorariam com a inclusão de uma condição de contorno adicional que limitasse o valor de σ_x . Isso seria mais fácil em um método iterativo de solução da equação governante.

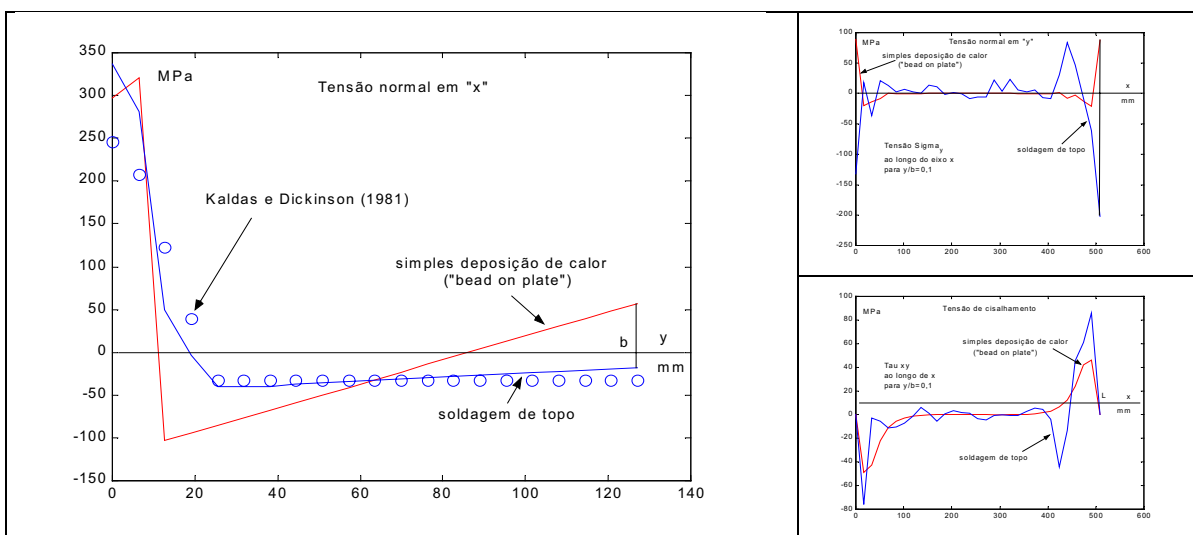


Figura 8 - Comparação entre tensões residuais resultantes de simples deposição de calor e soldagem de topo. Em (a) pode-se ver o resultado obtido, também com simulação numérica, por Kaldas e Dickinson (1981a-b).

5. Conclusões

Foi apresentado um equacionamento para o problema da determinação de tensões residuais e deformações plásticas em placas soldadas, com enfoque nos procedimentos para resolução numérica da equação diferencial regida pelo operador ∇^4 . Foram analisados dois tipos de métodos: iterativos e diretos. Os métodos iterativos aplicados apresentaram problemas de convergência. O programa computacional desenvolvido mostrou-se eficaz na determinação das tensões residuais decorrentes da soldagem, necessitando, porém, de melhorias no tratamento das tensões na região do cordão de solda. A utilização desse programa, formulado a partir de diferenças finitas, é consideravelmente mais

simples que a de pacotes comerciais que permitem análise termo-elasto-plástica não linear, dentro de suas restrições (placas retangulares) e simplificações admitidas. A abordagem do problema também é bastante fenomenológica, com a sequência de resolução ocorrendo de modo similar ao processo real de soldagem (mudanças na temperatura, formação de tensões e acomodação dessas tensões por deformações plásticas).

6. Referências

- Briggs, W.L.,1987, "A Multigrid Tutorial", Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 90 p.
- Kaldas, M.M. and Dickinson, S.M.,1981a, "Vibration and Buckling Calculations for Rectangular Plates Subject to Complicated In-Plane Stress Distributions by Using Numerical Integration in a Rayleigh-Ritz Analysis", Journal of Sound and Vibration, Vol.75, Num.2, Academic Press, U.K., pp. 151-152.
- Kaldas, M.M. and Dickinson, S.M.,1981b, "The Flexural Vibration of Welded Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.75, Num.2, Academic Press, U.K., pp. 163-178
- Kamtekar, A.G.,1978, "The Calculation of Welding Residual Stresses in Thin Steel Plates", International Journal of Mechanical Sciences, Vol.20, Pergamon, U.K., pp. 207-227.
- Mendelson, A., 1968, "Plasticity: Theory and Application", Macmillan, USA, 353 p.
- Oddy, A.S., McDill, J.M.J., Braid, J.E.M., Root, J.H. and Marsiglio, F., 1998, "Measurement and Variability of Residual Stresses in Weaved Repair Welds", 1998, "Trends in Welding Research", American Welding Society, USA, pp. 925-930.
- Parlane, A.J.A., Allen, J.S., Harrison, J.D., Leggatt, R.H., Dwight, J.B., Bailey, N., Procter, E. and Saunders, G.G., 1981, "Residual Stresses and their Effect", The Welding Institute, USA, 55p.
- Press, W.H., Vetterling, W.T., Teukolsky, S.A. and Flannery, B.P.,1992, "Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, USA, 994 p.

PREDICTION OF RESIDUAL STRESSES ON WELDED PLATES

Alberto B. Vieira Jr.

UFU – FEMEC – P.O.Box 593 – 38400-902 – Uberlandia, MG - Brazil
 abvieira@mecanica.ufu.br

Domingos A. Rade

UFU – FEMEC – P.O.Box 593 – 38400-902 – Uberlandia, MG - Brazil
 domingos@ufu.br

Carlos Roberto Ribeiro

UFU – FEMEC – P.O.Box 593 – 38400-902 – Uberlandia, MG - Brazil
 cribeiro@mecanica.ufu.br

Abstract. *This paper describes the development of a methodology for the numerical prediction of residual stresses due to welding on a plate. A numerical model, based on the Finite Difference Technique (FDT), is developed. Stress components are determined by computing the derivatives of the Airy stress function, which depends on thermo-elasto-plastic state of the material at a given moment. Results of welding simulations using different welding conditions, such as bead on plate and butt-welding are presented, as well a comparison with other authors' results.*

Keywords. *residual stresses, plastic strains, numerical methods, finite difference technique, welding.*

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE ESTRUTURAS DE MADEIRA REFORÇADAS POR FIBRAS DE CARBONO

Dogmar Antonio de Souza Junior

Mestrando do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia
Campus Santa Mônica - Uberlândia - MG - Brasil
Email : dogmar@mecanica.ufu.br

Jesiel Cunha

Professor Adjunto - Faculdade de Engenharia Civil
Universidade Federal de Uberlândia
Campus Santa Mônica - Uberlândia - MG - Brasil
Email : jecunha@ufu.br

Resumo. O objetivo deste trabalho é o estudo teórico/ numérico do comportamento mecânico de peças de madeira reforçadas por fibras de carbono, utilizando a técnica dos elementos finitos. A associação da madeira à fibra de carbono permite aplicações tanto em termos de concepção estrutural (projeto) como de reforço (recuperação) de peças em setores como a construção civil e naval. A teoria utilizada para a formulação do modelo se insere no contexto das teorias de estratificados para materiais compostos. Utilizando modelos de vigas, foram feitas diversas variações na posição e na taxa de reforço. Os resultados obtidos permitiram definir o comportamento estrutural do material resultante da associação da madeira com as fibras de carbono e o ganho de rigidez da peça em função do reforço aplicado.

Palavras chave: comportamento mecânico, reforço, madeira, fibras de carbono, materiais compostos.

1. Introdução

A idéia inicial de associar um material leve à madeira foi de reforçar edificações com problemas estruturais. A Austrália por exemplo, possui mais de 10.000 pontes de madeira em sua rede de estradas principais, regionais e locais. Muitas delas têm sofrido com a falta de manutenção e estão em serviço por mais tempo que o previsto em projeto, necessitando de uma reabilitação. Muitas outras estruturas de madeira como cais, depósitos e edifícios antigos também se encontram deteriorados. Parte destas estruturas são importantes obras históricas, outras são parte essencial de infra-estrutura, o que impossibilita a demolição.

A recuperação estrutural entra em cena como resposta aos problemas de envelhecimento das obras. Ela abrange também edificações abaladas por sinistros de qualquer natureza ou por falhas no planejamento, projeto, execução ou por emprego de materiais e componentes de baixa qualidade. Atualmente, a discussão a respeito da manutenção e durabilidade das estruturas é assunto de vital importância. O Reino Unido por exemplo, consome cerca de 4% de seu PNB (cerca de US\$ 51 bilhões anuais) com o reparo e a manutenção de estruturas. Frequentemente, devido a limitação de recursos, apenas trabalhos mínimos são feitos para garantir as estruturas em serviço, uma estratégia de manutenção que não é a ideal. Além disso, as cargas de serviço agora impostas às estruturas são maiores que as cargas inicialmente projetadas. Considerando os aspectos de impacto ambiental no uso de madeiras nativas e a rápida diminuição de árvores com seção transversal elevada, os métodos tradicionais de reabilitação de estruturas de madeira não são sustentáveis.

O uso de Plásticos Reforçados por Fibras de Carbono (PRFC) tem se limitado ao reforço de estruturas de concreto, mas existe um enorme potencial para o seu uso no reforço de estruturas de madeira. Na América do Norte, Europa e Japão já existe uma grande aceitação dos elementos estruturais de materiais convencionais reforçados por fibras. Existem vários tipos de matrizes e fibras utilizadas como reforço. As primeiras fibras utilizadas em estruturas foram as fibras de vidro, aramida e carbono (Bulleit, 1983). As fibras de aramida e carbono possuem maior resistência e durabilidade, por isso são as mais utilizadas. As matrizes associadas a essas fibras podem ser termoplásticas ou termofixas.

O alto custo das fibras de carbono e a incompatibilidade entre a madeira e estas fibras tornavam inconveniente o reforço de estruturas de madeira (Tingley e Cegelka, 1996). Estes problemas estão sendo resolvidos com a redução no custo e com os novos métodos de aplicação das fibras de carbono.

O objetivo principal deste trabalho é o estudo do reforço de estruturas de madeiras através de fibras de carbono, identificando a curva de enrijecimento em função do reforço aplicado. A análise rigorosa da estrutura através das teorias de estratificados em materiais compostos permite a compreensão detalhada do comportamento mecânico do material. O estudo visa auxiliar aplicações não somente na recuperação de estruturas como na concepção estrutural de novos projetos. Para validação do modelo numérico, numa primeira etapa os resultados foram comparados com resultados obtidos através de formulação analítica. Numa segunda etapa, utilizando o programa computacional de elementos finitos ANSYS[®], foram feitos diversos testes variando-se a quantidade e a posição do reforço e a carga aplicada. Um enfoque particular será dado ao comportamento mecânico das estruturas reforçadas nas faces inferior e superior.

2. Características das fibras de carbono

O uso de materiais compostos na engenharia tem crescido rapidamente, principalmente nos casos onde altas relações resistência/peso específico são exigidas. Tanto do ponto de vista de esforços mecânicos como de outros efeitos específicos, como ações da temperatura e da umidade, os materiais modernos são exigidos no desempenho de funções múltiplas (Cunha, 1992). Uma grande vantagem dos materiais compostos é a possibilidade da variação dos elementos constituintes da estrutura segundo as direções desejadas. No caso de reforço de estruturas, esta característica permite uma distribuição segundo as direções preferenciais dos esforços, gerando uma eficiência excepcional para o material resultante da associação. Os PRFC em particular possuem as seguintes propriedades:

- Alta relação resistência/peso específico;
- Não se plastificam: seu limite elástico corresponde ao limite de ruptura;
- Boa resistência à fadiga e à corrosão;
- São pouco sensíveis aos produtos químicos como graxa, óleo, líquidos hidráulicos, pintura, solvente, etc;
- A resistência a impactos e aos choques são menores nos compostos em relação aos materiais metálicos;
- Para uma dada espessura, os materiais compostos possuem uma melhor resistência ao fogo que as ligas leves.

O coeficiente de Poisson para madeiras estruturais estão entre 0.033-0.47 e para os PRFC está entre 0.12-0.36, mas 0.33 é o mais comum. Isto faz com que os PRFC sejam compatíveis com a madeira (Tingley, 1996). A baixa densidade dos PRFC gera pouco acréscimo de carga nas estruturas. Devido a estas características, o uso de PRFC na engenharia estrutural tem crescido bastante nos últimos anos.

3. Compósitos de madeira

O uso da madeira com seção sólida esbarra em dois inconvenientes: as peças de madeira possuem suas dimensões limitadas e peças com tamanho muito grande, em geral, possuem muitos defeitos naturais (Calil et al., 2000). Para vencer estes inconvenientes são utilizados processos de transformação, que possibilitam a criação de estruturas compósitas como os laminados, contraplacados e aglomerados.

Os compósitos de madeira são um grupo de materiais que contêm madeira em seu todo ou fibras de madeira como componente básico. As fibras são interligadas por um adesivo natural ou sintético. Entretanto, a madeira sólida pode ser vista como um material composto da combinação de fibras com a lignina. Ainda, a madeira pode ser tratada como um sistema composto de lâminas de faixas alternadas de material de alta e baixa densidade. Como exemplo de estrutura compósita, a Figura (1) mostra estruturas laminadas horizontalmente coladas (*Glulam*), que utilizam madeira de reflorestamento, permitindo vencer grandes vãos e suportar grandes carregamentos. São muito utilizadas em edifícios, galpões e em vigas de pontes. O uso de PRFC como reforço (Fig. 2), permite diminuir a seção transversal das peças. As Figuras (3) e (4) ilustram algumas aplicações das estruturas do tipo Glulam.



Figura 1. Estrutura laminada tipo Glulam.

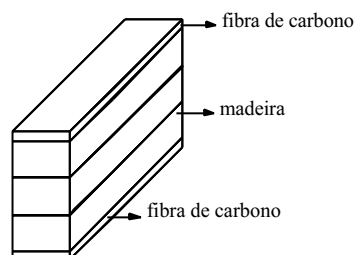


Figura 2. Glulam reforçado com PRFC.



Figura 3. Aplicação do Glulam na construção de residências.



Figura 4. Aplicação na construção de arcos.

4. Teoria de cálculo

O cálculo exato dos esforços e deslocamentos de estruturas em geral pode se mostrar difícil ou até impossível. Os métodos numéricos são uma alternativa interessante a esses problemas. Em particular o método dos elementos finitos (MEF) permite o cálculo de estruturas com formas geométricas variadas e condições de contorno e de carregamento complexas. Sua precisão depende entre outros, da teoria utilizada e do grau de refinamento da malha.

A teoria mais usual para o cálculo de placas estratificadas é a Teoria Clássica. Porém, as simplificações introduzidas por esta teoria podem gerar erros significativos em relação à resposta estática e dinâmica da estrutura. Vários estudos mostram que a Teoria clássica subestima as deflexões e superestima as frequências, a capacidade de amortecimento específico e as forças de flambagem. Além disso, as deformações cisalhantes transversais, desprezadas pela Teoria clássica, desempenham uma função importante no processo de ruptura de materiais compostos do tipo poliméricos por exemplo. A Teoria do Cisalhamento de 1ª Ordem (FSDT), que considera o cisalhamento transversal, possibilita a obtenção de resultados satisfatórios para a maioria dos casos de estratificados.

A obtenção das equações diferenciais parciais que regem o estado de equilíbrio entre os deslocamentos, deformações, tensões e forças, pode ser feita basicamente de duas maneiras (Jones, 1975): utilizando diretamente as equações de equilíbrio estático e cinemático da estrutura ou utilizando as condições de estacionaridade de funcionais. Na FSDT, o campo de deslocamentos a ser imposto em um ponto qualquer de uma estrutura do tipo placa é definido pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_o(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_o(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y) = w_o(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Este campo de deslocamentos é determinado por cinco variáveis independentes: u_o , v_o e w_o , que são os deslocamentos do plano médio e α_x e α_y , que são as rotações do plano médio segundo as direções x e y , respectivamente. A aplicação dos princípios de equilíbrio ou energéticos, conjuntamente com as condições de contorno, leva à seguinte relação constitutiva do material estratificado:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde N , M e Q são os esforços normais, de flexão/torção e de cisalhamento, respectivamente. A_{ij} são os coeficientes da matriz de rigidez de membrana, B_{ij} são os coeficientes da matriz de acoplamento membrana/flexão-torção, D_{ij} são os coeficientes da matriz de rigidez de flexão-torção e H_{ij} são os coeficientes da matriz de rigidez de cisalhamento transversal. Tem-se:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (3)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (5)$$

$$H_{ij} = k \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (6)$$

sendo:

h_{k-1} : distância do plano médio da seção transversal até o limite inferior da camada k ;

h_k : distância do plano médio da seção transversal até o limite superior da camada k ;

\bar{Q}_{ij} : coeficientes de rigidez, referenciados a um sistema de eixos qualquer;
 k : fator de correção do cisalhamento transversal.

5. Propriedades dos materiais

A madeira considerada neste estudo é o Pinus Caribea da classe de resistência das Coníferas, conforme especificações da NBR 7190 - Projeto de estruturas de madeira. Diferentemente dos cálculos convencionais, nesta simulação a madeira é considerada como um material ortotrópico, conforme Fig. (5), onde as propriedades elásticas são dadas pelas relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : E_2 : E_3 \cong 20 : 1.6 : 1 \\ G_{12} : G_{13} : G_{23} \cong 10 : 9.4 : 1 \\ E_1 : G_{12} \cong 14 : 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} E_1 = 8.431 \text{ GPa} & E_2 = 0.674 \text{ GPa} & E_3 = 0.422 \text{ GPa} \\ G_{12} = 0.602 \text{ GPa} & G_{13} = 0.566 \text{ GPa} & G_{23} = 0.060 \text{ GPa} \end{array} \right.$$

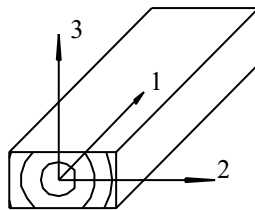


Figura 5. Sistema de eixos principais da madeira.

Os valores utilizados para o coeficiente de Poisson foram (Bodig, 1982): $\nu_{12} = 0.219$; $\nu_{13} = 0.262$; $\nu_{23} = 0.364$. As propriedades usadas para a camada unidirecional de fibras de carbono, considerada como transversalmente isotrópica, foram obtidas de formulações da micromecânica, com um volume de fibras de 60%:

$E_1 = 230 \text{ GPa}$	$G_{12} = 5 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.32$
$E_2 = 20 \text{ GPa}$	$G_{13} = 5 \text{ GPa}$	$\nu_{13} = 0.32$
$E_3 = 20 \text{ GPa}$	$G_{23} = 4 \text{ GPa}$	$\nu_{23} = 0.35$

As propriedades da cola isotrópica são (Triantafillou e Deskovic, 1992):

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E_3 &= 0.9 \text{ GPa} \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} &= 0.32 \text{ GPa} \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} &= 0.4 \end{aligned}$$

6. Avaliação da confiabilidade do modelo

A confiabilidade de um modelo numérico deve ser testada, ou através de um modelo experimental, ou através de um modelo teórico consolidado. Para verificar este aspecto, modelou-se uma viga bi-apoiada carregada uniformemente, como mostra a Fig. (6). Os resultados obtidos com o programa computacional ANSYS foram comparados com os resultados do modelo teórico. Foi utilizado para a modelagem o elemento específico para materiais compostos SOLID46. O modelo utilizou 60 elementos, resultando em 543 g.d.l para a estrutura.

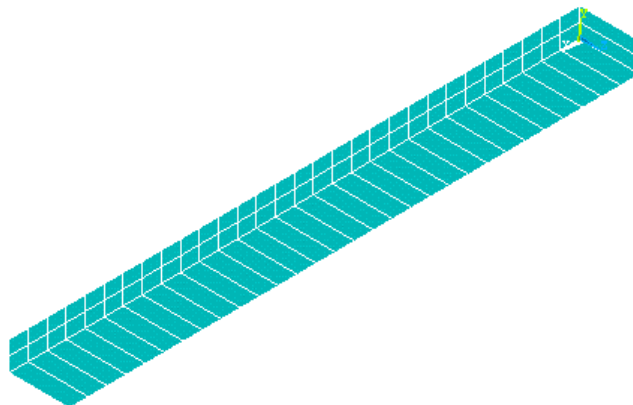


Figura 6. Modelo de elementos finitos da viga.

A viga possui vão $L=0.60\text{m}$ e seção transversal de $0.03 \times 0.06 \text{ m}^2$. O carregamento é $q=900 \text{ N/m}$. No caso de viga, a FSDT é simplificada, levando ao seguinte valor para a flecha no meio do vão (Berthelot, 1992), Eq. (6):

$$w_c = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot b} \cdot D_{11}^* \tag{6}$$

onde:

$$D_{11}^* = \frac{1}{\Delta} (D_{22} \cdot D_{66} - D_{26}^2)$$

$$\Delta = D_{11} \cdot D_{22} \cdot D_{66} + 2 \cdot D_{12} \cdot D_{16} \cdot D_{26} - D_{11} \cdot D_{26}^2 - D_{22} \cdot D_{16}^2 - D_{66} \cdot D_{12}^2$$

sendo as constantes D_{ij} dadas pela Eq. (5).

O modelo estudado pode ser considerado como sendo um estratificado composto por diversas camadas de PRFC, cola e madeira. As Figuras (7) e (8) esquematizam a composição do estratificado.



Figura 7. Seção transversal do estratificado utilizado na modelagem numérica.

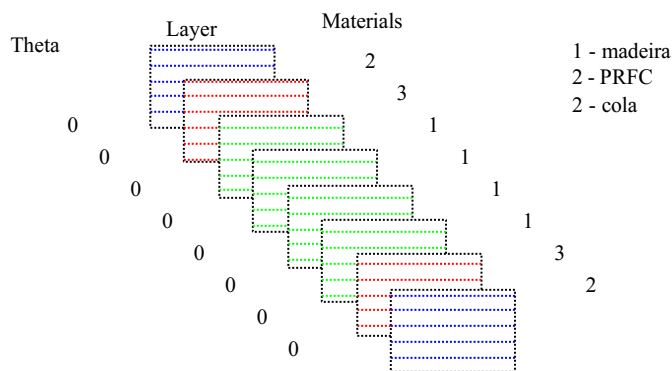


Figura 8. Esquema de empilhamento das camadas.

A Figura (9) mostra as curvas obtidas para o modelo numérico e teórico (Eq. 6). Os resultados obtidos apresentam uma ótima aproximação entre os modelos.

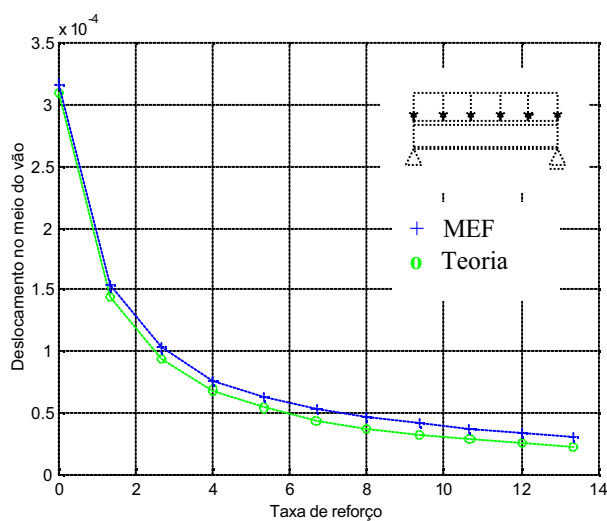


Figura 9. Resultados obtidos da flecha para verificar a confiabilidade do modelo numérico.

7. Análise do enrijecimento da estrutura reforçada

Nesta etapa calculou-se o deslocamento no meio do vão para a viga bi-apoiada descrita no item anterior, com reforço na face inferior ou com reforço nas faces inferior e superior. Os resultados obtidos, Fig. (10), mostram que para uma mesma taxa de fibras de carbono, o posicionamento do reforço nas faces inferior e superior gera um enrijecimento maior da peça. O enrijecimento foi calculado pela Eq. (7):

$$\text{Enrijecimento}(\%) = \frac{(w_c - w_{co})}{w_{co}} \cdot 100\% \tag{7}$$

onde:

w_c : deslocamento no meio do vão para uma determinada taxa de reforço;

w_{co} : deslocamento no meio do vão para a viga sem reforço.

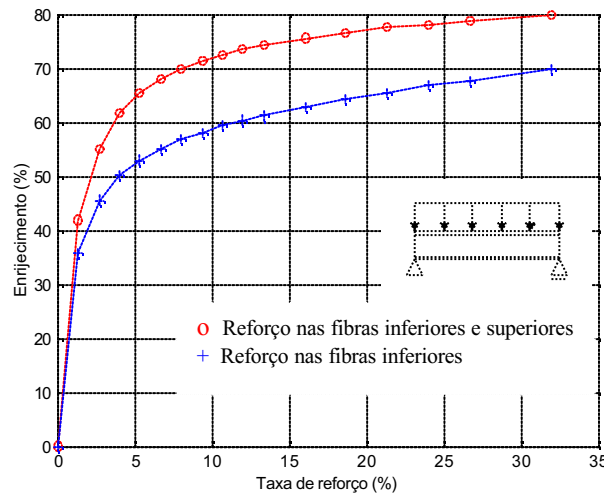


Figura 10. Resultados do enrijecimento da viga.

8. Comportamento mecânico do material

Ao associar os dois materiais, madeira e PRFC, gera-se um estratificado cujas camadas possuem diferenças significativas nas suas propriedades elásticas. Por exemplo, o módulo de elasticidade E_f do PRFC é 27.28 vezes maior que o da madeira. Dessa forma, foi levantada a hipótese de que o material resultante poderia trabalhar como uma estrutura sanduíche. As camadas de PRFC nas faces inferior e superior funcionariam como “peles”, resistindo as tensões normais da flexão e a madeira funcionaria como alma, um espaçador entre as peles, resistindo aos esforços cisalhantes transversais.

As Figuras (11) e (12) representam as tensões normais σ_{xx} e cisalhantes σ_{xz} na viga. As tensões normais estão de acordo com o comportamento esperado para estruturas sanduíches, porém as tensões cisalhantes dependem, além das propriedades elásticas, da relação espessura das peles/espessura do espaçador (t/e), ou seja, da taxa de reforço aplicado. Na Fig. (12.a) a relação utilizada (t/e) foi de 1.33%, o que não caracterizou o sanduíche do ponto de vista da distribuição das tensões cisalhantes. Já para a Fig. (12.b), a relação utilizada (t/e) foi de 0.208%, o que comprovou a hipótese levantada.

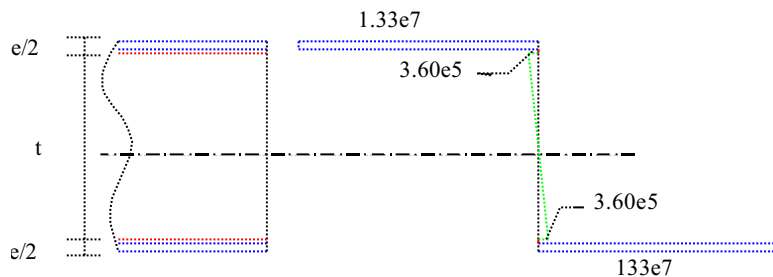


Figura 11. Gráfico das tensões σ_{xx} (N/m^2) ao longo da seção transversal.

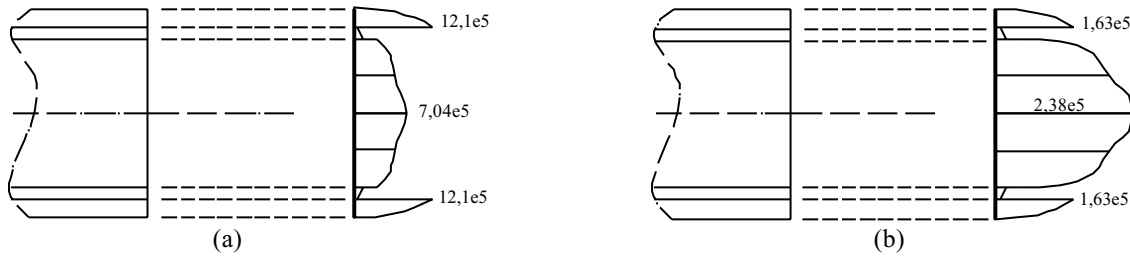


Figura 12. Distribuição das tensões cisalhantes σ_{xz} (N/m^2) ao longo da seção transversal.

Deve-se ressaltar que, embora a teoria utilizada pelo ANSYS seja similar à FSDT, existe um ajuste das tensões de cisalhamento transversal, o que garante a distribuição parabólica ao longo da seção transversal e a nulidade destas tensões nas faces externas do estratificado. As Equações (8) de ajuste são:

$$\sigma_{xz,k}^* = \frac{3}{2}(1 - r^2)\sigma_{xz,k} \quad \sigma_{yz,k}^* = \frac{3}{2}(1 - r^2)\sigma_{yz,k} \quad (8)$$

onde $\sigma_{xz,k}^*$ e $\sigma_{yz,k}^*$ são as tensões cisalhantes transversais ajustadas e 'r' é a coordenada normal, variando de -1.0 (face inferior do estratificado) a 1.0 (face superior do estratificado).

A Figura (13) mostra como variam as tensões nos materiais em função da taxa de reforço aplicado. Os valores das tensões foram normalizados. T_{xx} representa o valor da tensão para uma taxa de reforço qualquer e T_{xx0} representa para a madeira o valor da tensão na peça sem reforço, e para a cola e o PRFC, o valor da tensão para uma taxa de reforço de 1.33%.

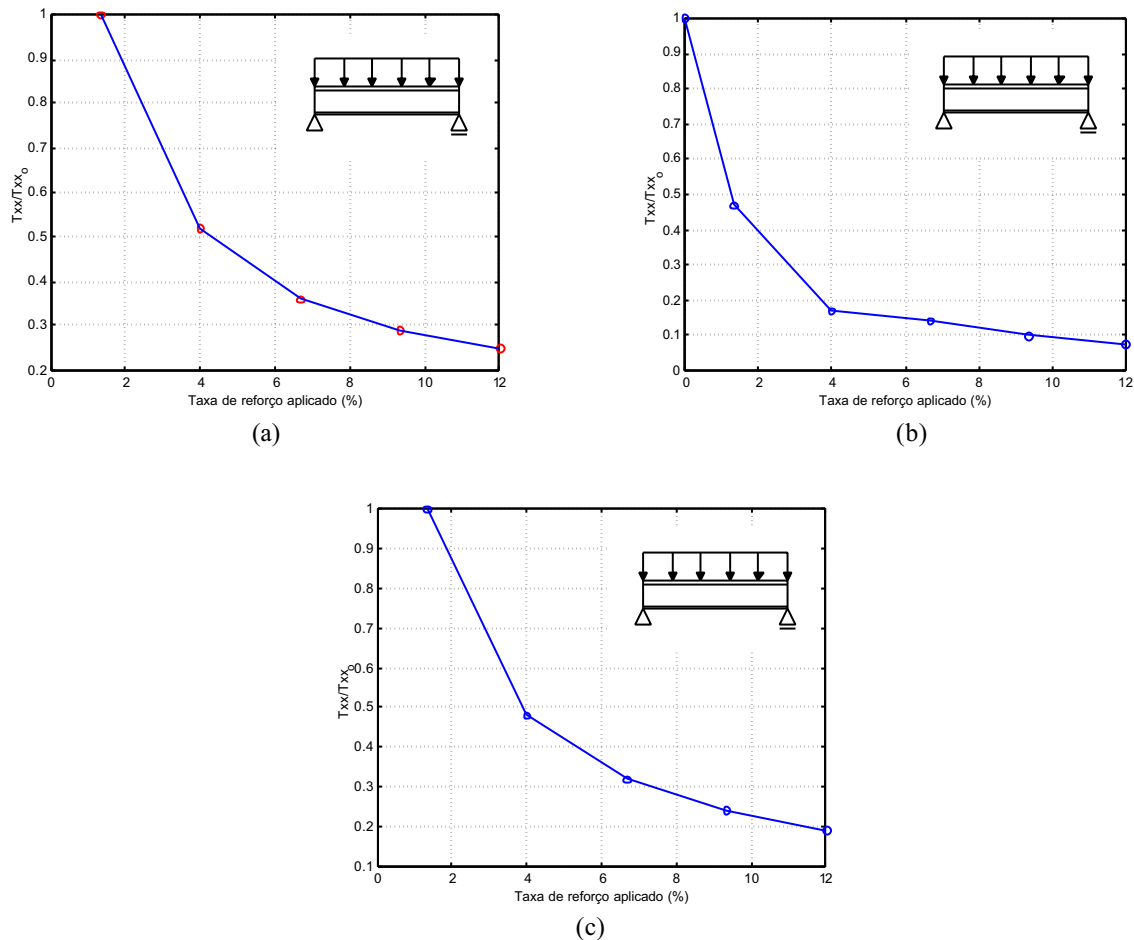


Figura 13. Resultados da variação das tensões (a) na cola, (b) na madeira e (c) no reforço.

Para verificar a relação carga \times deslocamento da viga, aplicou-se algumas taxas de reforço, e variando o carregamento da viga, traçaram-se as curvas de deslocamento em função da carga aplicada. Os resultados obtidos na Fig. (14) mostram que a relação carga \times deslocamento da viga tem comportamento linear.

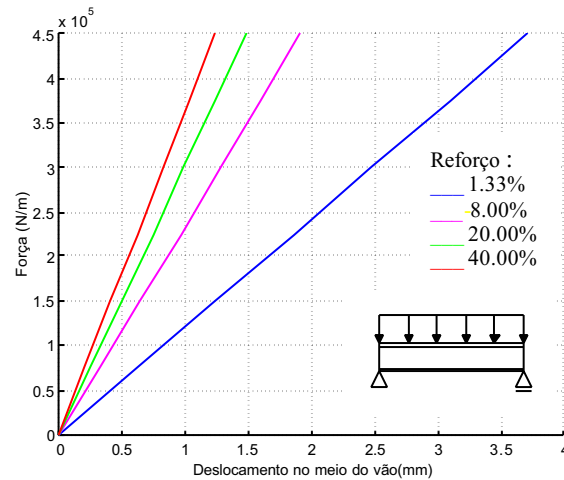


Figura 14. Comportamento carga \times deslocamento da viga.

9. Conclusão

Estudou-se neste trabalho a aplicação de fibra de carbono no reforço de estruturas de madeira através de simulações numéricas via elementos finitos. A metodologia de análise possibilitou o cálculo preciso do comportamento mecânico do composto. A utilização das fibras de carbono possibilitou grandes enrijecimentos para uma pequena taxa de reforço aplicado. Dessa forma, é possível reforçar estruturas danificadas sem aumento significativo do seu peso próprio, ou ainda, criar peças novas capazes de resistir a grandes esforços com seções transversais reduzidas. Este trabalho terá continuidade com a análise de estruturas do tipo placa visando outras aplicações, além da realização de ensaios experimentais.

10. Referências

- Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), 1997, “Projeto de estruturas de madeira - NBR 7190:1997”, ABNT, Rio de Janeiro.
- Berthelot, J.-M., 1992, “Matériaux Composites - Comportement Mécanique et Analyse des Structures”, Masson, Paris, 620p.
- Bodig, J. and Jayne, B. A., 1982, “Mechanics of Wood and Wood Composites”, 710p.
- Bulleit W. M., 1983, “Reinforcement of Wood Materials: A Review”, Proceedings of the Society of Wood Science and Technology, pp. 391-397.
- Calil Jr, C., Baraldi, L. T., Stamato, G. C. e Ferreira, N. S. S., 2000, “Estruturas de Madeira - Notas de Aula”, São Paulo, Brasil, 102p.
- Cunha, J., 1992, “Análise do Comportamento Mecânico e Elaboração de Placas Sanduíches Anisotrópicas”, Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil, 180p.
- Crews, K., Greenland, A. and Bakoss, S., “Application of Advanced Fibre Reinforced Plastic Composites to Structural Timber”.
- Dagher, H. J., “High-Performance Wood Composites for Construction”, University of Maine, USA.
- Jenkins, C. H., 1983, Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composite, 2ª edição.
- Jones, R. M., 1975, “Mechanics of Composite Materials”, International Student Edition, 355p.
- Tingley, D. A. and Cegelka, S., 1996, “High Strength Fiber Reinforced Plastic Reinforced Wood”, Proceedings of the International Wood Engineering Conference, USA.
- Tingley, D. A., 1996, “The Stress-strain Relationships in Wood and Fiber-reinforced Plastic Laminae of reinforced glue laminated wood beams”, Ph.D. Thesis, Oregon State University, Corvallis, OR.
- Triantafyllou, T. C. and Deskovic, N., 1992, “Prestressed FRP Sheets as External Reinforcement of Wood Members”, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Paper N° 1843, USA.

**ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF TIMBER STRUCTURES REINFORCED
BY CARBON FIBERS**

Dogmar Antonio de Souza Junior

Graduate Student - School of Mechanical Engineering
Federal University of Uberlândia
Campus Santa Mônica - Uberlândia - MG - Brasil
Email : dogmar@mecanica.ufu.br

Jesiel Cunha

Assistant Professor - School of Civil Engineering
Federal University of Uberlândia
Campus Santa Mônica - Uberlândia - MG - Brasil
Email : jecunha@ufu.br

***Abstract.** The objective of this work is a theoretical / numerical study of the mechanical behavior of timber pieces reinforced by carbon fibers, using finite element method. The association of the wood to the carbon fiber allows applications in structural design as of repair of structures in civil and naval constructions. The used theory for the numerical modelling is inserted in the context of the laminated theories for composite materials. By using models of beams, several simulations of the placement and the reinforcement ratio have been made. The obtained results allowed to analyse in details the mechanical behavior of the resultant composite and the gain of rigidity as a function of the applied reinforcement.*

Keywords: mechanical behavior, reinforcement, timber structures, carbon fiber, composite materials.

MESHLESS METHOD APPLIED TO NONLINEAR STATIC AND DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS

Felício Brüzzi Barros

Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, S.P., Brazil, CEP:13566-59, e-mail:fbbarros@sc.usp.br

Sergio Persival Baroncini Proença

Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, S.P., Brazil, CEP:13566-590, e-mail:persival@sc.usp.br

Abstract: *The aim is to evaluate the numerical response of the hp-cloud meshless method on different kinds of nonlinear analysis such as the static and dynamic ones. The problem of a reinforced concrete beam is considered. The behavior of the concrete is taken into account by the two damage models of Mazars and of La Borderie. The beam is considered as a layered system. General details about the numerical implementation of the numerical method are outlined. Firstly, a static analysis is performed being the numerical results compared with experimental measures. A good performance of the method is verified with both damage models. Then a dynamic analysis of the system is conducted without accounting for damping effect. The results show the strong influence of progressive damage on the nonlinear structural behavior. The dynamic response can be different depending on the kind of damage model adopted.*

Key Words: *Meshless Methods, Damage Mechanics, Nonlinear Dynamics*

1. Introduction

Despite the recent advances in using traditional Finite Element Method, FEM, nonlinear mechanical problems, such as damage and crack propagation has motivated, through the last few years, a search for the development of less cumbersome numerical procedures which preclude the use of a mesh for building the approximate functions. Among these procedures is the hp-cloud Method, (Duarte, 1996), that has been largely used in the solution of several kinds of boundary-value problems, BVP.

The objective of this paper is not to present any additional development on the method itself but otherwise to verify its performance when applied to nonlinear static and dynamic structural analysis. In the section 2 the formalism of the method is reviewed as well as the general procedure to build the Galerkin-approximation of a BVP. The problem to be considered is presented in the section 3 and consists of a reinforced concrete beam analysis. Two scalar damage models are employed to describe the nonlinear behavior of the concrete, the Mazars' and La Borderie's models. The peculiarities of both models are briefly commented. Static and dynamic analysis are then performed by the hp-cloud method.

2. Meshless Methods

As well the Finite Element Method, the meshless methods also provide a systematic way to implement Galerkin approximations of variational boundary-value problems, BVP. According to (Duarte, 1995), a method can be considered meshless if the basic equations governing a BVP do not depend on the availability of a well defined mesh. The hp-Clouds Method, (Duarte, 1996), is a good example of this kind of procedure. This method is based on the ideas launched with the Diffuse Element Method, DEM, (Nayroles et al., 1992), and improved by (Belytschko et al., 1994) with the Element Free Galerkin Method, EFGM. In the DEM the Moving Least Square functions, MLS, are used to define the finite-dimensional spaces of the trial and test functions of the Galerkin's method. In the EFGM, the DEM formulation is improved by the correct computation of the MLS derivatives and by using Lagrange multipliers to impose the Dirichlet boundary conditions. In spite of being a meshless method, the EFGM employs an auxiliary grid to support numerical quadrature integrations.

In the hp-Clouds Method the approximation functions, among them the MLS ones, are viewed as partitions of unity, (Oden and Reddy, 1976), and used to construct an hierarchy of functions in order to trivially implement a p -enrichment.

2.1. Moving Least Square (MLS)

Let be considered the problem of finding an approximating continuous function $u(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, ($n = 1, 2$ or 3) based upon a discrete number of known values u_j at an arbitrary set of points $Q_N = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N$, $\mathbf{x}_j \in \bar{\Omega}$. The strategy of solution to be adopted consists of building the approximation $\tilde{u}(\mathbf{x})$ locally at each position \mathbf{x} of the domain. Such best approximation is defined as a linear combination of the elements of a set of linearly-independent functions $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^m$, often a polynomial basis. The coefficients $\alpha_j(\mathbf{x})$ involved in the combination are linked to a sub-set of $m \leq n \leq N$ points, belonging to a sub-domain $\hat{Q}_n \subset Q_N$:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Let be introduced a positive \mathbf{x}_j dependent weight function W_j , defined in a such way that it takes values in a compact support $\omega_j = \{\mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq R_j\}$ and attains a maximum at the point \mathbf{x}_j . The scalar R_j is a measure of the influence domain of \mathbf{x}_j . In the context of the MLS, (Lancaster and Salkauskas, 1981), the coefficients $\alpha_j(\mathbf{x})$ of (1) are determined by minimizing the following function $J(\mathbf{x})$ of the weighted sum of the square distances between $\tilde{u}(\mathbf{x})$ and $u(\mathbf{x})$:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \{u_j - \tilde{u}(\mathbf{x})\}^2 \quad (2)$$

Note that as an effect of the weight function W_j , only the n nodes \mathbf{x}_j whose domains of influence ω_j contain the considered position \mathbf{x} participate of the sum. Therefore, the $\alpha(\mathbf{x})$ vector which minimizes $J(\mathbf{x})$ is given by:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) u_j \quad (3)$$

where:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \mathbf{p}(\mathbf{x}_r) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_r) \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \quad (5)$$

Thus, the approximation (1) can be written as:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) u_j \quad (6)$$

where ϕ_j is a generic element of the set of shape functions, with the same support ω_j of the correspondent W_j and given by:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) \quad (7)$$

The existence of $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$ requires a special choice of R_j , (Duarte, 1996). The enrichment of the approximation given by the MLS is only possible by increasing the degree of the polynomials in the set \mathbf{P} . Some studies about the characterization of the weight functions as well as its influence on the approximation can be found in (Belytschko et al., 1994) and (Mendonça et al., 2000).

2.2. Hp-cloud family $\mathfrak{S}_N^{k,p}$

In (Duarte, 1996), a new class of hierarchical shape functions is proposed, the hp-cloud family, which is constructed by multiplying partition of unity functions by some basis functions. It can be shown that the shape functions of the MLS are partitions of unit.

Then let be considered the MLS shape functions (7) generated by the set of m monomials $\mathbf{P}_k = \{p_j\}_{j=1}^m$ that spans the space \mathcal{P}_k of polynomials of degree less than or equal to k . The hp-cloud family, $\mathfrak{S}_N^{k,p}$ is defined in such way that it can represent any polynomial of degree less than or equal to $p \geq k$. Such definition is represented as:

$$\mathfrak{S}_N^{k,p} = \{\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N \cup \{\phi_j(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x})\}_{j=1}^N : i = m+1, \dots, q; p_i \in \mathcal{P}_p - \mathcal{P}_k; p \geq k\} \quad (8)$$

where \mathcal{P}_p is the space of polynomials of degree less than or equal to p spanned by the basis of q monomials $\mathbf{P}_p = \{p_j\}_{j=1}^q$.

An important feature of the hp family is its ability of developing customized functions for specific applications, which is achieved by introducing special kinds of functions in the set \mathbf{P}_p , as suggested in (Oden and Duarte, 1997).

By replacing the functions (8) in the expression (6), the hp-cloud approximation function can be written as:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=m+1}^q p_i(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (9)$$

where b_{ji} is an element of the set of additional coefficients introduced at each node \mathbf{x}_j .

In this work, the hp family is obtained by the enrichment of a particular basis of MLS functions formed by the set of monomials of degree $k = 0$, $\mathbf{P}_0 = \{1\}$, named Shepard functions:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \frac{W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_{r=1}^N W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)} \quad (10)$$

As it is observed in (Duarte, 1996), with Shepard functions the inversion of $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ at each position \mathbf{x} is by no means necessary. As a consequence, the implementation of the MLS algorithm becomes easier and the computational cost of the numerical analysis is lower than using the other types of MLS approximation functions.

2.3. Galerkin approximation of boundary-value problems

Following (Oden and Reddy, 1976), the boundary-value problem, BVP, can be stated as:

$$\text{Find } u \in \mathcal{U} \text{ such that: } \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ B_k u = g_k & \text{on } \partial\Omega, \text{ with } 0 \leq k \leq m-1 \end{cases} \quad (11)$$

where \mathcal{U} is a Hilbert space, Ω is a smooth, open and bounded subset of \mathfrak{R}^n , with a smooth boundary $\partial\Omega$. The linear differential operator A is of order $2m$ and $\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$ are boundary linear differential operators. Finally, f and g_k are prescribed functions of another Hilbert space $Q = \text{Im}(A)$, i.e., the image of A . The associated variational BVP is:

$$\text{Find } u \in \mathcal{U} \text{ such that: } B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (12)$$

where \mathcal{V} is a Hilbert space of test functions, $B(\cdot, \cdot)$ is a bilinear form of $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$ and $l(\cdot)$ is a linear form of $\mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$.

By the Galerkin method, an approximation to the solution of the above problem can be found on finite-dimensional spaces $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ and $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. The shape functions spanning both subspaces can be, for instance, the ones defined by the MLS procedure (7), or by the hp-cloud family (9). In the first case one has the EFGM, and in the other one the hp-cloud method. Since the shape functions do not present the selective properties, that is $\phi_j(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij}$, (Belytschko et al., 1994), the exact boundary conditions can be imposed by Lagrange multipliers. Thus, the BVP may be rewritten as:

$$\bar{B}(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}_h \quad (13)$$

with

$$\bar{B}(\tilde{u}, \tilde{v}) = B(\tilde{u}, \tilde{v}) + [\lambda_k, B_k \tilde{u} - g_k] \text{ with } \lambda_k \in Q'$$

where Q' is the space of Lagrange multipliers λ_k , dual of Q , and $[\cdot, \cdot]$ is a duality pairing on $Q' \times Q$ used to impose the essential boundary conditions. The function λ_k are defined by the linear finite element functions N_i and the N' nodes $x_i \in \partial\Omega$. By defining the following vectors of nodal parameters and shape functions as:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T &= [u_1 \quad b_{1q} \quad \cdots \quad b_{1q} \quad \cdots \quad u_N \quad b_{N1} \quad \cdots \quad b_{Nq}] \\ \mathbf{V}^T &= [v_1 \quad b_{11} \quad \cdots \quad c_{1q} \quad \cdots \quad v_N \quad c_{N1} \quad \cdots \quad c_{Nq}] \\ \Phi^T &= [\phi_1 \quad p_1(\mathbf{x})\phi_1 \quad \cdots \quad p_1(\mathbf{x})\phi_q \quad \cdots \quad \phi_N \quad p_1(\mathbf{x})\phi_N \quad \cdots \quad p_N(\mathbf{x})\phi_q] \\ \boldsymbol{\lambda}^T &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{N'}] \quad \mathbf{N}^T = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_{N'}] \end{aligned}$$

and, in the case of the hp-cloud method, replacing (9) into (13), it results a system of equations represented by:

$$\bar{B}(\Phi^T \mathbf{U}, \Phi^T \mathbf{V}) = l(\Phi^T \mathbf{V}) \quad (14)$$

The solution vector \mathbf{U} may then be substituted again in (9), so that the expression for the approximation solution can be built.

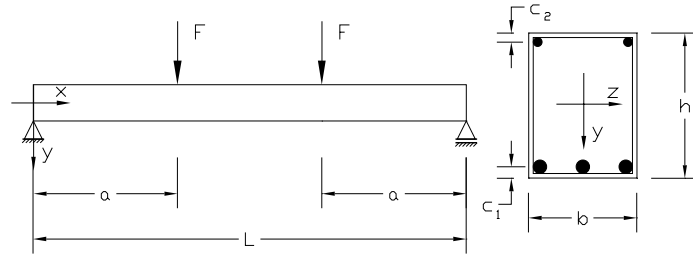
3. Reinforced concrete beam

The performance of the hp-cloud method on solving nonlinear problems is verified through the analysis of a reinforced concrete beam represented in Fig. (1). As the nonlinear behavior of the structure is mainly due to the nucleation and growing of microcracks in the concrete, the material constitutive modeling is formulated by the Continuum Damage Mechanics. Static and dynamic analysis are conducted and some peculiarities of the numerical simulation are outlined.

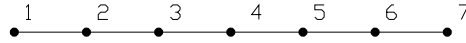
3.1. Governing equations and numerical implementation

Let be considered the beam of rectangular cross section, shown in Fig. (1(a)), and loaded by two vertical forces F . The Bernoulli beam theory is assumed with a strain field given by $\varepsilon_x = u'_x - yu''_y$. Being u'_x and u''_y the first and the second derivatives of the displacements components u_x and u_y in the x and y directions, respectively, of points positioned at the x axis. The potential energy functional aiming a dynamic analysis without damping can be stated as:

$$\begin{aligned} \Pi &= \overbrace{\int_0^L \left\{ \int_0^h \frac{E}{2} (u'_x - yu''_y)^2 dy \right\} b dx}^{U_{int}} - \overbrace{(F \cdot u_y|_{x=a} + F \cdot u_y|_{x=L-a})}^{W_{ext}} \\ &- \underbrace{\int_0^L \left\{ \int_0^h u_x \rho \ddot{u}_x + u_y \rho \ddot{u}_y dy \right\} b dx}_{W_{in}} \end{aligned} \quad (15)$$



(a) Geometry and loading of the beam



(b) Domain approximation

Figure 1. Reinforced concrete beam

where E is the Young's modulus of the material, ρ is its density; W_{ext} is the potential of the external forces, U_{int} is the strain energy and W_{in} is the potential of the inertial forces, assumed as part of the body forces by d'Alembert principle, (Bathe, 1996). The essential boundary conditions at any time are: $u_x|_{x=0} = 0$ and $u_y|_{x=0} = u_y|_{x=L} = 0$. For dynamics analysis, at time $t = 0$, the accelerations must be imposed on the boundary as $\ddot{u}_x|_{x=0} = 0$ and $\ddot{u}_y|_{x=0} = \ddot{u}_y|_{x=L} = 0$.

On applying the principle of the stationary potential energy at $t = 0$, in agreement with the Galerkin method, as well as the boundary conditions by the Lagrange multipliers, the following approximated form, can be written:

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\Pi} = & \int_0^L \left\{ \delta U_x^T \Phi'_x \Phi_x^T U_x \int_0^h E b dy - \delta U_x^T \Phi'_x \Phi_y^{\prime\prime T} U_y \int_0^h E y b dy \right. \\
 & - \delta U_y^T \Phi_y^{\prime\prime} \Phi_x^T U_x \int_0^h E y b dy + \delta U_y^T \Phi_y^{\prime\prime} \Phi_y^{\prime\prime T} U_y \int_0^h E y^2 b dy \left. \right\} dx \\
 & - (\delta U_y)^T \Phi_y \Big|_{x=a} F - (\delta U_y)^T \Phi_y \Big|_{x=L-a} F \\
 & - \int_0^L \left\{ \delta \ddot{U}_x^T \Phi_x \Phi_x^T \ddot{U}_x \int_0^h E b dy - \delta \ddot{U}_x^T \Phi_x \Phi_y^{\prime\prime T} \ddot{U}_y \int_0^h E y b dy \right. \\
 & - \delta \ddot{U}_y^T \Phi_y^{\prime\prime} \Phi_x^T \ddot{U}_x \int_0^h E y b dy + \delta \ddot{U}_y^T \Phi_y^{\prime\prime} \Phi_y^{\prime\prime T} \ddot{U}_y \int_0^h E y^2 b dy \left. \right\} dx \\
 & + (\delta \lambda^{u_x})^T N \Phi^T U_x \Big|_{x=0} + \delta U_x^T \Phi N^T \lambda^{u_x} \Big|_{x=0} \\
 & + (\delta \lambda^{u_y})^T N \Phi^T U_y \Big|_{x=0} + \delta U_y^T \Phi N^T \lambda^{u_y} \Big|_{x=0} \\
 & + (\delta \lambda^{u_x})^T N \Phi^T U_x \Big|_{x=L} + \delta U_x^T \Phi N^T \lambda^{u_x} \Big|_{x=L} \\
 & + (\delta \ddot{\lambda}^{u_x})^T N \Phi^T \ddot{U}_x \Big|_{x=0} + \delta \ddot{U}_x^T \Phi N^T \ddot{\lambda}^{u_x} \Big|_{x=0} \\
 & + (\delta \ddot{\lambda}^{u_y})^T N \Phi^T \ddot{U}_y \Big|_{x=0} + \delta \ddot{U}_y^T \Phi N^T \ddot{\lambda}^{u_y} \Big|_{x=0} \\
 & + (\delta \ddot{\lambda}^{u_x})^T N \Phi^T \ddot{U}_x \Big|_{x=L} + \delta \ddot{U}_x^T \Phi N^T \ddot{\lambda}^{u_x} \Big|_{x=L} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

where the field of approximated displacements is given by the expression (9) for the hp-cloud method. The subscripts x and y define the horizontal and vertical directions of the vectors of nodal parameters, shape functions and Lagrange multipliers given in the section 2.3. Note that U_x and U_y as well as its second time derivatives, \ddot{U}_x and \ddot{U}_y , are approximated in the same way. The imposition of the boundary initial conditions follows analogous procedure to the one described in the section 2.3, and with respect to the acceleration new Lagrange multipliers $\ddot{\lambda}^{u_x}$ and $\ddot{\lambda}^{u_y}$ are introduced.

After simplifying, the system of equations obtained by (16) can be represented by the following matrix form:

$$\begin{aligned}
 & \widehat{\mathbf{K}} \text{ of } [(2N+3) \times (2N+3)] \\
 & \left[\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{K}_{(N \times N)}^x & \mathbf{K}_{(N \times N)}^{xy} & {}^1\mathbf{G}_{(N \times 1)}^x & {}^1\mathbf{G}_{(N \times 1)}^y & {}^N\mathbf{G}_{(N \times 1)}^y \\
 \left(\mathbf{K}_{(N \times N)}^{xy}\right)^T & \mathbf{K}_{(N \times N)}^y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^1\mathbf{G}_{(N \times 1)}^x\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^1\mathbf{G}_{(N \times 1)}^y\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^N\mathbf{G}_{(N \times 1)}^y\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c}
 \mathbf{a} \text{ of } [2N+3] \\
 \mathbf{U}_x \\
 \mathbf{U}_y \\
 (\lambda^{u_x})_1 \\
 (\lambda^{u_y})_1 \\
 (\lambda^{u_y})_N
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c}
 \mathbf{f} \text{ of } [2N+3] \\
 \mathbf{0} \\
 \mathbf{f} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right\} + \\
 & \left[\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{M}_{(N \times N)}^x & \mathbf{M}_{(N \times N)}^{xy} & {}^1\mathbf{H}_{(N \times 1)}^x & {}^1\mathbf{H}_{(N \times 1)}^y & {}^N\mathbf{H}_{(N \times 1)}^y \\
 \left(\mathbf{M}_{(N \times N)}^{xy}\right)^T & \mathbf{M}_{(N \times N)}^y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^1\mathbf{H}_{(N \times 1)}^x\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^1\mathbf{H}_{(N \times 1)}^y\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \left({}^N\mathbf{H}_{(N \times 1)}^y\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c}
 \ddot{\mathbf{U}}_x \\
 \ddot{\mathbf{U}}_y \\
 (\dot{\lambda}^{u_x})_1 \\
 (\dot{\lambda}^{u_y})_1 \\
 (\dot{\lambda}^{u_y})_N
 \end{array} \right\} \\
 & \widehat{\mathbf{M}} \text{ of } [(2N+3) \times (2N+3)] \\
 & \mathbf{\ddot{a}} \text{ of } [2N+3]
 \end{aligned} \tag{17}$$

where:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^x &= \int_0^L \left\{ (\Phi'_x \Phi'^T_x)_{ij} \int_0^h E b dy \right\} dx; & K_{ij}^y &= \int_0^L \left\{ (\Phi'_y \Phi'^T_y)_{ij} \int_0^h E y^2 b dy \right\} dx; \\
 K_{ij}^{xy} &= - \int_0^L \left\{ (\Phi'_y \Phi''^T_x)_{ij} \int_0^h E y b dy \right\} dx; & f_i &= F (\Phi_i^y|_{x=a} + \Phi_i^y|_{x=L-a}); \\
 M_{ij}^x &= \int_0^L \left\{ (\Phi_x \Phi_x^T)_{ij} \int_0^h E b dy \right\} dx; & M_{ij}^y &= \int_0^L \left\{ (\Phi'_y \Phi'^T_y)_{ij} \int_0^h E y^2 b dy \right\} dx; \\
 M_{ij}^{xy} &= - \int_0^L \left\{ (\Phi'_y \Phi_x^T)_{ij} \int_0^h E y b dy \right\} dx; & {}^1G_i^x &= N_1(0) \Phi_i^x(0); \\
 {}^1G_i^y &= N_1(0) \Phi_i^y(0); & {}^N G_i^y &= N_N(L) \Phi_i^y(L); & {}^1H_i^x &= N_1(0) \Phi_i^x(0); \\
 {}^1H_i^y &= N_1(0) \Phi_i^y(0); & {}^N H_i^y &= N_N(L) \Phi_i^y(L); & & \text{for } i, j = 1, \dots, N;
 \end{aligned}$$

In the relations above, \mathbf{M} is the consistent mass matrix, and N is the number of nodes used to approximate the one-dimensional x -domain. The left superscripts 1 and N refer to the coefficients of the Lagrange multipliers of the nodes 1 and N respectively.

Finally, the vector of internal forces, \mathbf{f}_{int} , presents the following structure:

$$\mathbf{f}_{int}^T = \left[\int_0^L \int_0^h \Phi'_x \sigma_x b dy dx \quad \left(- \int_0^L \int_0^h y \Phi''_y \sigma_x b dy dx \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] - \widehat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{a}} \tag{18}$$

inertial forces
transpose vector

3.2. Mazars' damage model

In the Mazars' model, (Mazars, 1984), the concrete is assumed to be an elastic medium with progressive damage. The damage of the material is quantified locally by a scalar variable $0 \leq D \leq 1$. By imposing the strain equivalence principle, (Lemaitre and Chaboche, 1990), the secant form of the constitutive relation is written as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \tag{19}$$

where \mathbf{D}_0 is the initial elastic constitutive fourth order tensor of the undamaged material.

For the multiaxial stress state case, D is defined by a linear combination of the basic variables D_T and D_C correspondent to the tensile and compressive parcels of stress state:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \tag{20}$$

The basic damage variables are given by:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{(1 - A_T)}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}; \quad D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{(1 - A_C)}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}$$

where:

- A_T , B_T , A_C and B_C are characteristic parameters of the material that can be identified on the basis of uniaxial strain controlled tests;
- α_T and α_C are coefficients determined on basis of the state of strain at each point of the body, (Álvares, 1993), being related to the tensile and compressive parts of the stress state. The condition $\alpha_T + \alpha_C = 1$ is always true. Obviously, for pure tension $\alpha_T = 1$, while for pure compression $\alpha_C = 1$.
- In the Mazars' model, the damage is locally consequence of extensions. Then $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$ named equivalent strain, represents the amount of extension and is obtained from the positive part of the principal strain components;
- ε_{d0} is a threshold value of the equivalent strain below of which no damage occurs.

The uniaxial version of the model is of special interest in this work. Then the rate constitutive relation can be expressed in the tangent form as:

$$\dot{\sigma}_x = (1 - D)E_0\dot{\varepsilon} - \dot{D}E_0\varepsilon \quad (21)$$

where E_0 is the Young's modulus of the undamaged material. The damage rate is defined as a function of the strain rate and of the equivalent strain as:

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \mathcal{F}(\tilde{\varepsilon}) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_x} \dot{\varepsilon}_x \quad (22)$$

being:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_x} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_x > 0 \\ -\nu\sqrt{2} & \text{if } \varepsilon_x < 0 \end{cases}$$

The function $\mathcal{F}(\tilde{\varepsilon})$ appearing in (22) is given, to the tension and compression cases, by:

$$\mathcal{F}_T(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_T B_T}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}; \quad \mathcal{F}_C(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_C B_C}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}$$

3.3. La Borderie's damage model

The Mazars' model doesn't take into account two important phenomena to the representation of the damage of concrete in a dynamic analysis:

- the recovering of the stiffness with the crack closure ("unilateral effect");
- the presence of inelastic strains.

The La Borderie's model, (La Borderie, 1991), success in incorporating these aspects by introducing in the eq. (19) two scalar damage variables, D_1 for damage due to tension, and D_2 for damage due to compression. Differently from the Mazars' model these variables are not combined, making possible to describe the unilateral behavior of the concrete. In (La Borderie, 1991) the model is presented following the formalism of the local state method. In such approach the state potential is given by the Gibbs free energy χ , defined as:

$$\chi = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{2E(1 - D_1)} + \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{2E(1 - D_2)} + \frac{\nu}{E} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - Tr^2(\boldsymbol{\sigma})] + \frac{\beta_1 D_1}{E(1 - D_1)} f(Tr(\boldsymbol{\sigma})) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1 - D_2)} Tr(\boldsymbol{\sigma}) + G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (23)$$

where (\cdot) represents the internal product operation, $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+$ and $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-$ are the positive and negative part of the stress tensor respectively, $Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii}$, β_1 and β_2 are material constants related to the arising of the inelastic strains, $G_1(z_1)$ and $G_2(z_2)$ are hardening functions of z_1 e z_2 (accumulated damage measures), and f is a function describing the crack opening and closure conditions, defined as:

$$f(Tr(\boldsymbol{\sigma})) = \begin{cases} Tr(\boldsymbol{\sigma}) & \text{when } Tr(\boldsymbol{\sigma}) \in (0, +\infty] \\ \left[1 + \frac{Tr(\boldsymbol{\sigma})}{2\sigma_f} \right] Tr(\boldsymbol{\sigma}) & \text{when } Tr(\boldsymbol{\sigma}) \in (-\sigma_f, 0] \\ -\frac{\sigma_f}{2} Tr(\boldsymbol{\sigma}) & \text{when } Tr(\boldsymbol{\sigma}) \in (-\infty, -\sigma_f] \end{cases} \quad (24)$$

with σ_f being the crack closure stress. The total strain derives from the potential (23) as:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (25)$$

where its elastic and inelastic parts are:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{E(1-D_1)} + \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E} [\boldsymbol{\sigma} - Tr(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{I} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} \frac{\partial f(Tr(\boldsymbol{\sigma}))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} \mathbf{I} \quad (27)$$

The associated variables to damage are given by:

$$Y_1 = \frac{\partial \chi}{\partial D_1} = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ + \alpha_1 2\beta_1 f(\boldsymbol{\sigma})}{2E(1-D_1)^2} \quad (28)$$

$$Y_2 = \frac{\partial \chi}{\partial D_2} = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- + \alpha_2 2\beta_2 Tr(\boldsymbol{\sigma})}{2E(1-D_2)^2} \quad (29)$$

being α_i ($i = 1, 2$) equal to zero if $D_i = 0$ and equal to the unity if $D_i \neq 0$, (Pituba et al., 1999).

A damage criteria can be expressed by the law $F_i = Y_i - Z_i$, where Z_i are the thermodynamic associated variables to z_i which are obtained by the following expressions:

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = \left[Y_{oi} \frac{1}{A_i} \left(\frac{D_i}{1-D_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (30)$$

being A_i , B_i and Y_{oi} material parameters to be identified. Considering the damage criteria F_i , the damage evolution can be characterized as:

$$\begin{aligned} \text{If } Y_i < Z_i &\Rightarrow \dot{D}_i = 0 \text{ linear-elastic response} \\ \text{If } Y_i = Z_i \text{ and } \dot{Y}_i > 0 &\Rightarrow \dot{D}_i \neq 0 \text{ and } D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i (Y_i - Y_{oi})]^{B_i}} \end{aligned} \quad (31)$$

Complementary details about the unidimensional implementation of the model can be found in (La Borderie, 1991).

3.4. Layered system

In section 3.2, it was shown that the material stiffness is deteriorated by the damage process. For this reason there is no way to perform analytically the integrals of the equations (16) and (18) in the y direction. In the present work, a similar technique to the one used on a FEM context, (Álvares, 1993), is employed, where each element is layered across its height. As in the hp-cloud method there is no element mesh associated, the integration cells are considered to be layered. Instead of keeping constant the elastic properties of the material at each layer, here $E = E_0(1-D)$ is linearly interpolated on base of its values at the layer boundaries. Therefore, for a number of n layers, some of the integrals of interest become:

$$\begin{aligned} \int_0^h E b dy &= \sum_{i=1}^n \frac{b}{2} (E_{i+1} + E_i)(y_i - y_{i+1}) \\ \int_0^h E y b dy &= \sum_{i=1}^n \frac{b}{6} [(E_{i+1}(y_i^2 + y_i y_{i+1} - 2y_{i+1}^2) + E_i(2y_i^2 + y_i y_{i+1} - y_{i+1}^2))] \\ \int_0^h E y^2 b dy &= \sum_{i=1}^n \frac{b}{12} [(E_{i+1}(y_i^3 + y_i^2 y_{i+1} + y_i y_{i+1}^2 - 3y_{i+1}^2) + \\ &\quad + E_i(3y_i^3 - y_i^2 y_{i+1} - y_i y_{i+1}^2 - y_{i+1}^2))] \end{aligned} \quad (32)$$

Note that in the numerical analysis, each layer has an one-dimensional response, which allows to work with the tangent stiffness of the expression (21). The same technique can be applied to calculate the vector of internal forces \mathbf{f}_{int} , (18). The steel reinforcement bars are considered separately as a pure elastic media being the arrangement of bars substituted by an equivalent steel layer.

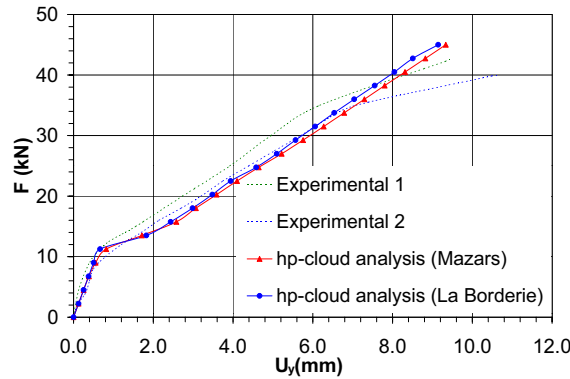
Table 1. Geometric data adopted, model parameters and material properties

$A_T = 0.995$	$B_T = 8000$	$A_C = 0.85$	$B_C = 1050$
$\varepsilon_{d0} = 0.00007$	$E_c = 29200 \text{ MPa}$	$E_s = 196000 \text{ MPa}$	$\nu_c = 0.2$
$Y_{o1} = 3.05 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}$	$A_1 = 3.50 \cdot 10^3 \text{ MPa}^{-1}$	$B_1 = 0.95$	$\beta_1 = 1.0 \text{ MPa}$
$Y_{o2} = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$	$A_2 = 6.80 \text{ MPa}^{-1}$	$B_2 = 0.7705$	$\beta_2 = -10.0 \text{ MPa}$
$\sigma_f = 2.60 \text{ MPa}$	$h \times b = 30 \times 12 \text{ cm}^2$	$L = 2.4 \text{ m}$	$a = 80 \text{ cm}$
$\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$	$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$	$c_1 = 2 \text{ cm}$	$c_2 = 1.5 \text{ cm}$

3.5. Numerical examples

The structure analyzed is the beam represented in Fig. (1). The details about the reinforcement distribution are depicted in the same figure. The reinforcement consists of three steel bars of 10 mm diameter disposed in the tension zone and two steel bars of 5 mm diameter in the compression one. Geometric data adopted, model parameters and material properties are presented in Tab. (1).

The subscripts c and s refer to the concrete and the steel, respectively. The coefficient c_1 is the distance between the geometric center of the tension steel bars and the inferior border of the cross section; c_2 is the correspondent distance related to the centroid of the compression steel bars and the superior border of the cross section. The parameters of the Mazars' model were identified on the basis of tests reported in (Álvares, 1993), where it can also be found the experimental results used here for comparison with the numerical analysis. In respect of the parameters of the La Borderie's model, they were obtained by fitting the numerical response from tension and compression uniaxial loading to the Mazar's model ones. The following assumptions are adopted to the hp-cloud method:


 Figure 2. Static analysis - Load intensity F versus U_y transversal displacement of the node 4, see Fig. (1).

- Polynomial degree:** The problem (16) requires C^1 -continuity for displacement u_y and C^0 -continuity for displacement u_x , so that the approximation must represent any complete polynomial of degree less than or equal to 2 and 1 in the y and x directions, respectively. The completeness requirement is verified by adopting the families $\mathfrak{S}_N^{k=0,p=3}$ and $\mathfrak{S}_N^{k=0,p=1}$ to approximate u_y and u_x . Shepard functions are enriched by the basis of monomials $P_{p=3} = \{ 1 \ x \ x^2 \ x^3 \}$ and $P_{p=1} = \{ 1 \ x \}$;
- approximation of the domain:** An uniform distribution of points along the complete length of the beam is adopted, as it is shown in Fig. (1(b));
- weight function:** C^2 -continuous cubic spline weight functions are adopted:

$$W_j(x - x_j) \equiv f(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3 & \text{if } r \leq 1/2 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4/3r^3 & \text{if } 1/2 < r \leq 1 \end{cases} \quad (33)$$

with $r = \frac{|x - x_j|}{R_j}$, and $R_j = h \ \forall j$. The resulting approximations present C^2 -continuity for both u_x and u_y , and verify the compatibility requirements;

- numerical integration:** As long as it is a nonlinear problem, the properties of the material differ along the beam so that a great number of integration points and layers is necessary. Good results can be obtained using 20 Gauss-Legendre points per cell across the length and 10 layers across the height;

- e) **physical nonlinearity:** Only the concrete is responsible for the global nonlinear behavior. The steel is taken as a linear-elastic material perfectly adhered to the concrete. The final nonlinear system is solved by the Newton-Raphson method, (Bathe, 1996);
- f) **dynamic analysis:** To integrate the system of equations (16), the Newmark algorithm is employed, (Argyris and Mlejnek, 1991). The parameters vectors, the stiffness matrix and the mass matrix employed are not the true ones, due to the kind of the shape functions adopted;
- g) **equilibrium:** At each load and time step of the iterative procedure, the equilibrium of the internal forces is verified by both the energy norm, with a tolerance of 10^{-10} , and the L_2 norm of the residual of the displacements, with a relative tolerance of 10^{-6} .

In the graphic of the Fig. (2), the numerical solutions (Mazars' and La Borderie's models) for the static analysis are compared with experimental measures enclosed by the two dotted curves. The divergences of the numerical solutions beyond the load level $F = 35 \text{ kN}$ are due to the yielding of the steel bars which is not accounted for the adopted models. On the other hand, both solutions are very closed to each other and to the experimental one up to such a load level. As long as this is a static analysis, the loading is not reversible and both models reproduce basically the same phenomena. In the dynamic analysis, it is adopted a time step $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Furthermore two loading situations are studied: forced vibration, Fig. (3(a)), with $F = 25 \text{ kN}$ and free vibration, Fig. (3(b)), induced by an initial displacement of 1 mm at the middle section of the beam.

In both loading situations, the physical nonlinear responses of the structure are compared with the linear elastic one without damage. It can be observed an increasing of the period of the vibration induced by the damage evolution. The Mazars and La Borderie's models induce similar responses in the forced vibration regime but the same is not true in the case of the free vibration one. The pure elastic and Mazars' models appoint oscillations around the rest position of the structure. On the other hand, using the La Borderie's model, the oscillation occurs around a different position. This behavior can be explained by the fact that only the La Borderie's model takes into account the residual strains. Other important issue here is the reversing of response that causes the closure of the micro-cracks. This phenomenon produces a recovering of the stiffness and is considered only by the La Borderie's model.

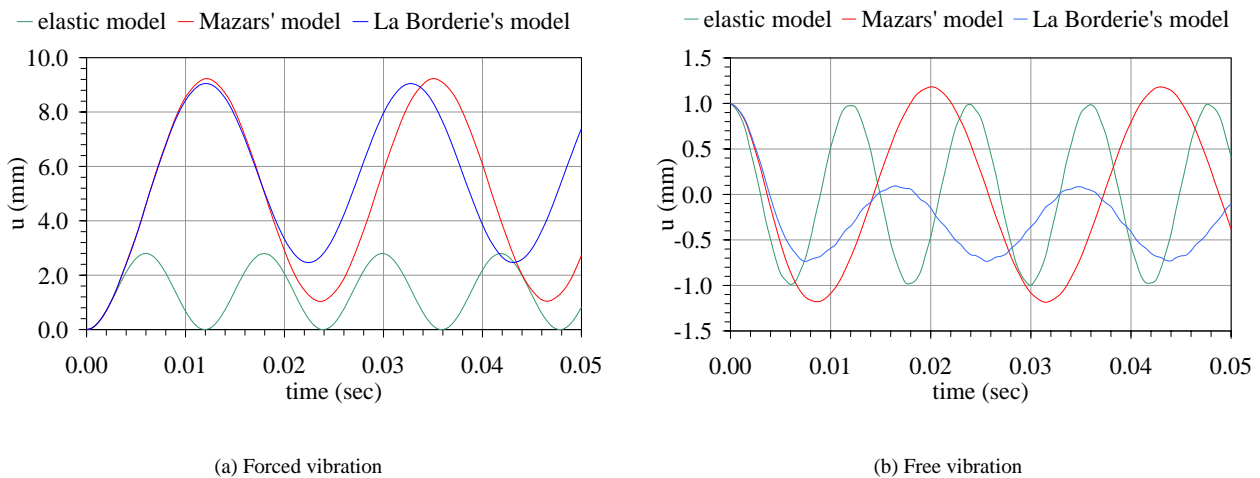


Figure 3. Dynamic analysis of the reinforced concrete beam

4. Conclusions

In this paper the formalism of the hp-cloud method was briefly reviewed and a general procedure of its implementation in a Galerkin approximation of BVP was described. Aiming to evaluate its numerical performance, static and dynamic analysis were conducted on a reinforced concrete beam. The structural behavior was described in an one-dimensional domain and a very simple nodal distribution was employed. Good numerical results were obtained by taking advantage of the hp-cloud enrichment polynomial technique. The behavior of the concrete structure was simulated by the two different damage models of Mazars and La Borderie. Both models presented equivalent numerical responses for the static analysis. In the dynamic analysis only the La Borderie was able to simulate the presence of residual strains and the stiffness recovering due to the crack closure.

A lot of simulations still remain to be done but the results obtained up to now allow to evaluate the hp-cloud method as a efficient numerical tool to this kind of problems.

5. Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) at Brazil.

References

- Argyris, J. and Mlejnek, H. P. ,1991, “Dynamics of structures”. North-Holland.
- Bathe, K. J. ,1996, “Finite element procedures”. Prentice-Hall, Inc.
- Belytschko, T., Lu, Y., and Gu, L. ,1994, Element-free Galerkin methods, “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, 37:229–256.
- Duarte, C. A. ,1995, A review of some meshless methods to solve partial differential equations, Technical Report 06, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A. ,1996, “The hp-cloud method”, PhD thesis, The University of Texas at Austin.
- La Borderie, C. ,1991, “Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l’analyse de structures en beton”, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- Lancaster, P. and Salkauskas, K. ,1981, Surfaces generated by moving least squares methods, “Mathematics of Computation”, 37(155):141–158.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J. L. ,1990, “Mechanics of solid materials”. Cambridge University Press.
- Álvares, M. S. ,1993, Estudo de um modelo de dano para o concreto: Formulação, indentificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos, Master’s thesis, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, in Portuguese.
- Mazars, J. ,1984, “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure”, PhD thesis, Université Paris 6.
- Mendonça, P. T. R., Barcellos, C. S., and Duarte, A. ,2000, Investigations on the hp-cloud method by solving Timoshenko beam problems, “Computational Mechanics”, 25:286–295.
- Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P. ,1992, Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, “Computational Mechanics”, 10:307–318.
- Oden, J. T. and Duarte, C. A. ,1997, Clouds, cracks and FEM’s, “Recent Developments in Computational and Applied Mechanics”, pages 302–321.
- Oden, J. T. and Reddy, J. N. ,1976, “An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements”, Pure and Applied Mathematics. John Willey & Sons, Inc.
- Pituba, J. J. C., Proença, S. P. B., and Álvares, M. S. ,1999, Estudo do desempenho de modelos de dano para estruturas reticulares em concreto armado, “Computational Methods in Engineering’99”, in Portuguese.

OS INVARIANTES DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E GENERALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE HAMILTON

Professor Eng. Antonio Carlos Tonini

Universidade de Taubaté, Dpto Engenharia Mecânica – Rua Daniel Danelli s/n, CEP 12060-440 – Taubaté – SP
e-mail antonio-carlos.tonini@power.alstom.com

Professor Eng. Dr. Antonio Marmo de Oliveira

Universidade de Taubaté, Reitoria – Rua 4 de Março nº 432, CEP12020-270 – Taubaté – SP
e-mail amarmo@terra.com.br e marmo@unitau.br

Resumo. Este trabalho tem por finalidade generalizar a formulação canônica de Hamilton, vislumbrando a mecânica dos meios contínuos, cujas energias cinética e potencial, ou suas lagrangeanas, envolvem derivadas de ordem superior em relação aos parâmetros espaciais das variáveis de campo e de velocidade, na perspectiva de se obter leis de conservação e sua invariância com respeito ao grupo de transformações canônicas das variáveis de campo, além de exemplos da mecânica do contínuo focando aplicações em problemas concretos.

Palavras chave: Hamilton, contínuo, invariantes, conservação, canônicas

1. Introdução

Generalizar a formulação canônica de Hamilton objetivando a mecânica dos meios contínuos e mostrando que a mesma é relacionada com a equação do tipo:

$$F_q^* [EF(q)] = f \quad (1)$$

mais condições de contorno, onde

$F \Rightarrow$ é um operador não linear e não potencial

$q \Rightarrow$ é uma variável primal generalizada

$f \Rightarrow$ é um termo que descreve fontes ou sumidouros nos problemas de mecânica

$E \Rightarrow$ um tensor que descreve uma lei constitutiva

$F_q^* \Rightarrow$ é o adjunto da derivada de Fréchet do operador não linear $F(q)$

2. Equações Canônicas de Hamilton

Do ponto de vista Hamiltoniano da Mecânica sabe-se que, dada a energia mecânica de um sistema em função de seus deslocamentos q e de suas quantidades de movimento $p = m\dot{q}$ as equações do movimento resultam da chamada formulação canônica de Hamilton:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3)$$

Nestas equações, o funcional H representa a energia mecânica do sistema conservativo e ∂ a derivada parcial (Arnold, 1987; Lanczos, 1970; Leech, 1965; Whittaker, 1964; Goldstein, 1959). O sistema acima descrito corresponde ao diagrama da fig. (1), (Tonti, 1969).

Neste diagrama, q indica uma variável primal considerada num espaço de funções U ; \dot{q} , a respectiva velocidade, pertencente ao espaço de funções V ; p a variável dual de q considerada num espaço V' emparelhado com o seu original V através de uma relação constitutiva m e de uma dualidade canônica (que é indicada posteriormente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$) e L^* operador adjunto de L , (Vainberg, 1964; Reddy, 1965; Riezz, and Nagy, 1972).

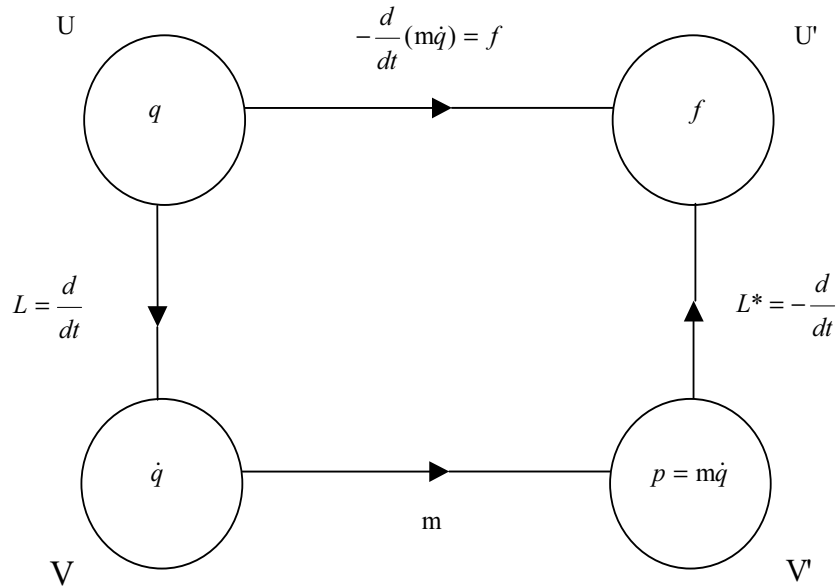


Figura 1. Formulação canônica de Hamilton

3. Generalização das Equações Canônicas de Hamilton

Seja $\frac{\delta H}{\delta q}$ a derivada variacional de H em relação a q , definida por: $\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial H}{\partial q} - \left[\frac{\partial H}{\partial q'} \right]' + \left[\frac{\partial H}{\partial q''} \right]'' + \dots$, (Oliveira, 1986).

Em problemas da mecânica dos meios contínuos, vamos considerar um determinado operador não linear $F(q)$, que associaremos às seguintes equações que denominaremos, canônicas generalizadas:

$$\frac{\delta H}{\delta q} = F_q^{*} [p] \tag{4}$$

$$\frac{\delta H}{\delta p} = F (q) . \tag{5}$$

Nessas equações aparecem além de q, p e $F(q)$ as quantidades H e F_q^{*} , que são respectivamente denominadas “funcional Hamiltoniano” e adjunto da derivada de Fréchet F_q' do operador $F(q)$. A razão do nome funcional, reside no fato de a função Hamiltoniana clássica H ser aqui definida por meio da seguinte integral:

$$H(q, p) = \int_{\Omega} H (t, \bar{x}, q, p) d\Omega , \tag{6}$$

ou seja, mais precisamente H é um funcional de $U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \times V \rightarrow F$, onde F é um espaço de funções convenientes, definido de tal modo que H seja sua integral em Ω subconjunto simplesmente conexo do \mathbb{R}^n ($\text{int}(\Omega) = \Omega - \partial \Omega$). H é denominado “uma densidade Hamiltoniana”.

Recorda-se aqui as noções de diferenciabilidade à Fréchet e derivada variacional.

Sejam U e V espaços normados e $L(U, V)$ o espaço de Banach das aplicações lineares e contínuas de U e V .

definição 3.1

Seja $F : S \subset U \rightarrow V$, onde S é um aberto de U . A aplicação F é Fréchet diferenciável em $q \in S$ se existe $F_q' \in L(U, V)$, tal que

$$F(q+h) - F(q) = F'_q(h) + v(q; h), \text{ para todo } h, \text{ tal que:} \tag{7}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|v(q; h)\|_V}{\|h\|_U} = 0 \tag{8}$$

O operador $dF(q, h)$, tal que:

$$F'_q(h) = dF(q; h) = F'(q) \cdot h \tag{9}$$

é chamado diferencial de Fréchet ou diferencial forte do operador F em q .

Associados ao operador F'_q encontram-se o seu adjunto $F_q'^{*} : V' \rightarrow U'$ e um operador traço γ , definidos pela seguinte fórmula de Green abstrata:

$$\langle p, F_q'[\delta q] \rangle_V = \langle F_q'^*[p], \delta q \rangle_U + \langle \gamma(p), \delta q \rangle_{\partial U} \tag{10}$$

onde: δq denota a variação em relação a q , γ é o operador traço de $\partial V'$ para $\partial U'$, de modo que $\gamma(p) \in \partial U'$, ∂u indica o espaço das variáveis definidas na fronteira de região física Ω .

As equações canônicas (4) e (5) correspondem ao diagrama da fig. (2).

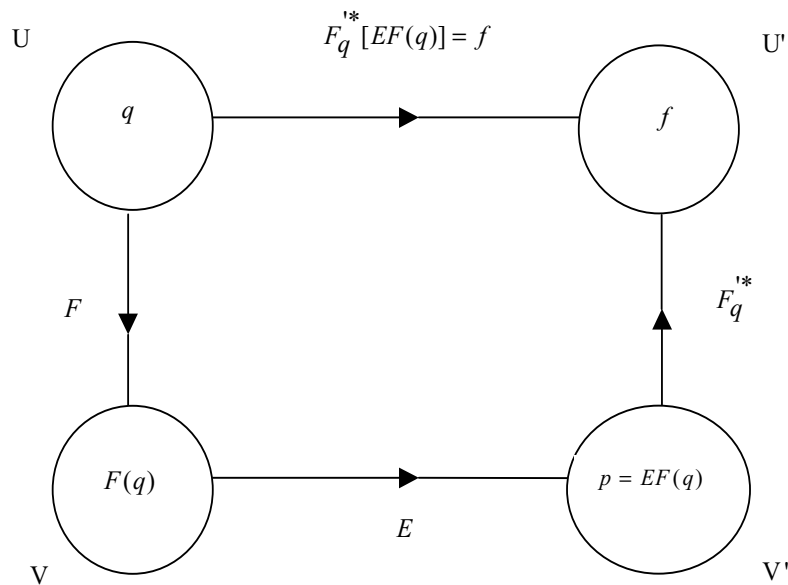


Figura 2. Formulação canônica generalizada de Hamilton

O sistema acima, considerado como “Sistema Canônico Generalizado”, abrange o de Hamilton para o caso de ser $F = \frac{d}{dt}$, e está vinculado à equação $F_q'^{*} [EF(q)] = f$, que por sua vez aceita uma formulação variacional. Esse último conceito está intimamente ligado às noções de potencialidade e gradiente de um funcional.

4. Leis da Conservação

Uma lei de conservação é dada por uma equação do tipo:

$$\frac{dH}{dt} = -div S, \tag{11}$$

cujo objetivo é encontrar um tensor S que satisfaça a mesma, através da densidade Hamiltoniana do tipo quadrático, decomposta em duas parcelas como segue, cujo a equação de Euler-Lagrange $\varepsilon(L) = M\ddot{q} + F'_q{}^* [EF(q)]$

$$H [t; \bar{q}, \dot{\bar{q}}, EF(q)] = -\frac{1}{2} \dot{\bar{q}} M \ddot{\bar{q}} - \frac{1}{2} F(\bar{q}) EF(\bar{q}), \tag{12}$$

onde, para maior generalização, q e p são vetores, e ressalta-se a presença do operador não linear $F(\bar{q})$. Logo, a lei de conservação é análoga ao do tipo, (Olver, 1979)

$$\frac{d}{dt} (\text{densidade}) + div (\text{fluxo}) = 0 \tag{13}$$

Teorema 4.1

Se H é dado por (12), então (11) é válida para

$$S = B [\dot{\bar{q}}, EF(\bar{q})], \tag{14}$$

sendo B a forma bilinear, em q e p , de fronteira concomitante de F'_q , dado por (10), isto é:

$$B [\dot{\bar{q}}, EF(\bar{q})] = \langle F'_q[\dot{\bar{q}}], EF(\bar{q}) \rangle - \langle \dot{\bar{q}}, F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})] \rangle \tag{15}$$

Segue da expressão (12) que

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{\bar{q}} M \ddot{\bar{q}} - EF(\bar{q}) F'_q(\dot{\bar{q}}), \tag{16}$$

Usando a definição da expressão local da formula de Green Generalizada, tem-se que

$$div \{B[\dot{\bar{q}}, EF(\bar{q})]\} = EF(\bar{q}) F'_q(\dot{\bar{q}}) - \dot{\bar{q}} F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})], \tag{17}$$

com B a forma bilinear de fronteira concomitante de F'_q .

Observando a identidade

$$EF(\bar{q}) F'_q(\dot{\bar{q}}) = EF(\bar{q}) F'_q(\dot{\bar{q}}) - \dot{\bar{q}} F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})] + \dot{\bar{q}} F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})], \tag{18}$$

obtém-se, então

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{\bar{q}} \{M\ddot{\bar{q}} + F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})]\} - \{EF(\bar{q}) F'_q(\dot{\bar{q}}) - \dot{\bar{q}} F_q{}^{1*} [EF(\bar{q})]\}. \tag{19}$$

Observando a definição $\varepsilon(L)$ e a equação (17), reescreve-se a equação acima como:

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{\bar{q}} \{ \varepsilon(L) \} - \text{div} \{ B[\dot{\bar{q}}, EF(\bar{q})] \}. \tag{20}$$

Fazendo $S = B[\dot{\bar{q}}, EF(\bar{q})]$, e como numa curva extrema $\varepsilon(L) = 0$, chega-se a

$$\frac{dH}{dt} = -\text{div} S, \text{ demonstrando assim o teorema.} \tag{21}$$

5. O Tensor S

Tendo em vista que na mecânica dos meios contínuos os problemas geralmente são descritos por equações diferenciais a derivadas parciais, é necessário adaptar o tensor S definido acima para o caso de operadores não lineares com derivadas parciais. Então considera-se o conjunto de índices dos tipos $\{i_1\}, \{i_1, i_2\}, \{i_1, i_2, i_3\}, \dots$, associados com derivadas parciais de variável dependente. Por exemplo,

$$\frac{\partial q}{\partial x^{i_1}} = q_{i_1}; \quad \frac{\partial q}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = q_{i_1 i_2}; \text{ etc...} \tag{22}$$

Seleciona-se um dos índices, por exemplo i_1 , e indicando

$$i_1(i_2 i_3 i_4 \dots) \text{ por } i_1 \Lambda \tag{23}$$

Λ representa qualquer conjunto de índices tipo $i_2, i_2 i_3, i_2 i_3 i_4, \dots$ etc, isto é, $\Lambda \in \{i_2, i_2 i_3, i_2 i_3 i_4, \dots, i_2 i_3 \dots i_n\}$.

Para obtenção do tensor S , considera-se a seguinte versão da formula de Green generalizada associada a um operador F'_q e duas funções ψ e ϕ ,

$$\Gamma(\phi, \psi) = \langle \psi, F'_q(\phi) \rangle - \langle F_q^{i_1 \Lambda}(\psi), \phi \rangle, \text{ onde} \tag{24}$$

$$\Gamma(\phi, \psi) = \int_{\partial \Omega} \left[\left(F'_{q i_1 \Lambda} \right)^* \right] (\psi) \cdot \phi_\Lambda N_{i_1} dS \tag{25}$$

com soma nos fatores repetidos, N_{i_1} componentes da normal a $\partial \Omega$ e

$$\left[\left(F'_{q i_1 \Lambda} \right)^* \right] (\psi) \cdot \phi_\Lambda = \phi F_{q i_1}^{i_1 \Lambda}(\psi) + \phi_{i_2} F_{q i_1 i_2}^{i_1 \Lambda}(\psi) + \phi_{i_2 i_3} F_{q i_1 i_2 i_3}^{i_1 \Lambda}(\psi) + \dots, \tag{26}$$

sendo que

$$F_{q_{i_1}}^{*}(\psi) = \psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1}} - \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left[\psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1 i_2}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} \left[\psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1 i_2 i_3}} \right] + \dots \quad (27)$$

$$F_{q_{i_1 i_2}}^{*}(\psi) = \psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1 i_2}} - \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} \left[\psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1 i_2 i_3}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} \left[\psi \frac{\partial F}{\partial q_{i_1 i_2 i_3 i_4}} \right] + \dots \quad (28)$$

.....

Ao se comparar a parte semilinear da expressão (24), $\langle F_q^{*}(\psi), \phi \rangle$, com a parte semilinear de $\frac{dH}{dt}$, a expressão (20) e (15), $\langle F_q^{*}[EF(\bar{q})], \dot{\bar{q}} \rangle$ chega-se a $\psi = EF(\bar{q})$ e $\phi = \dot{\bar{q}}$, e observando uma fórmula que envolve o operador ∇ , conclui-se que,

$$S = B[\psi, \phi] = \left[\left(F'_{q_{i_1} \Lambda} \right)^* \right] (\psi) \cdot \phi_{\Lambda}, \quad (29)$$

somando nos blocos repetidos Λ (blocos de índice).

Pode-se agora enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1

Associado ao operador não linear $F(\bar{q})$ diferenciável à Fréchet, existe um tensor S , tal que vale a seguinte lei de conservação

$$\frac{dH}{dt} = -div S, \text{ onde} \quad (30)$$

$$S = \left[\left(F'_{q_{i_1} \Lambda} \right)^* \right] (\psi) \cdot \phi_{\Lambda} \quad (31)$$

PROVA: Basta tomar $\psi = EF(\bar{q})$.

6. Exemplo: Equação não linear do movimento transônico

Como exemplo da formulação anterior, será considerado a equação do movimento transônico bi-dimensional, (Liepmann, and Roshko, 1967).

$$\varepsilon(L) = \phi_{xx} + \phi_{zz} - \phi_x \phi_{xx} = 0 \quad (32)$$

onde ϕ é o potencial de velocidade.

O operador diferencial aplicado a ϕ na equação acima é dado por:

$$F(\phi) = \phi_{xx} + \phi_{zz} - \phi_x \phi_{xx} \quad (33)$$

A fim de constituir-se o Hamiltoniano associado a este operador, constroi-se primeiro a densidade Lagrangeana $L(\phi)$ associada a $F(\phi)$, que pode ser feito através do funcional da circulação.

$$\begin{aligned}
 f(\phi) &= \int_0^1 \langle F(\lambda\phi), \phi \rangle d\lambda \\
 f(\phi) &= \int_0^1 \left\{ \int_S [\lambda(\phi_{xx} + \phi_{zz}) - \lambda^2 \phi_x \phi_{xx}] \phi dx dz \right\} d\lambda \\
 f(\phi) &= \int_S \frac{1}{2} (\phi_{xx} + \phi_{zz}) \phi dx dz - \int_S \frac{1}{3} \phi_x \phi_{xx} \phi dx dz
 \end{aligned} \tag{34}$$

Por integração por partes rebaixa-se a ordem das derivadas (livra-se ϕ dos símbolos de derivação (segunda)), então:

$$f(\phi) = \int_S \left\{ -\frac{1}{2} [\phi_x^2 + \phi_z^2] + \frac{1}{6} \phi_x^3 \right\} dx dz + t.c., \quad \text{onde } t.c. \text{ são os termos de contorno.} \tag{35}$$

Justificativa:

$$\frac{d}{dx} (\phi_x^2 \phi) = 2\phi_x \phi_{xx} \phi + \phi_x^3, \text{ e assim} \tag{36}$$

$$\frac{1}{3} \phi_x \phi_{xx} \phi = -\frac{1}{6} \phi_x^3 + \frac{1}{6} \frac{d}{dx} (\phi_x^2 \phi) \tag{37}$$

cujo a densidade Lagrangeana é dada por:

$$L(\phi) = -\frac{1}{2} [\phi_x^2 + \phi_z^2] + \frac{1}{6} \phi_x^3 \tag{38}$$

Encontrada a densidade Lagrangeana, deve-se identificar as coordenadas generalizadas “ q ” e o momentum “ p ”.

Escolhendo estas coordenadas e tendo a densidade L , a construção da Hamiltoniana H pode ser feita em analogia à construção da Hamiltoniana da mecânica de partículas onde agora $\dot{q} = \phi_z$ ($q = \phi$), tem-se $p = -\phi_z$,

(pois $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \phi_z} = -\phi_z$) e assim verifica-se que a Densidade Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2} \phi_x^2 - \frac{1}{2} \phi_z^2 - \frac{1}{6} \phi_x^3, \text{ aqui } t \text{ corresponde a } z \tag{39}$$

$$\frac{dH}{dz} = \phi_x \phi_{xz} - \phi_z \phi_{zz} - \frac{1}{2} \phi_x^2 \phi_{xz} \tag{40}$$

Partindo-se das equações de Euler-Lagrange dadas por (32), e da equação (20), determina-se a forma bilinear de fronteira B . Então,

$$\frac{dH}{dz} + \dot{q} \{ \varepsilon(L) \} = \left[\phi_x \phi_z - \frac{1}{2} \phi_x^2 \phi_z \right]_x \tag{41}$$

Tomando $B = -\left[\phi_x \phi_z - \frac{1}{2} \phi_x^2 \phi_z \right]$, numa curva extrema ($\varepsilon(L) = 0$), tem-se então a lei de conservação, ou seja,

$$H_z = -[B]_x \tag{42}$$

Observe-se também que fixando ϕ_z como parâmetro e variando ϕ_x :

$$B = \frac{\partial L}{\partial \phi_x} \phi_z = \left[-\phi_x + \frac{1}{2} \phi_x^2 \right] \phi_z \quad (43)$$

7. Exemplo: Oscilações transversais de uma barra circular em forma de anel

(Whittaker, 1964)

As energias cinética e potencial associadas às oscilações de uma barra de secção circular, definida pelo setor circular $[-x_0, x_0]$ de um anel de raio R, e oscilando no plano do anel são dadas por

$$T(u) = \frac{mR}{2} \int_{-x_0}^{x_0} (\dot{u}^2 + \dot{u}_x^2) dx \quad (44)$$

$$V(u) = \frac{EI}{2R^3} \int_{-x_0}^{x_0} (u_x + u_{xxx})^2 dx \quad (45)$$

onde x é a coordenada angular a partir do centro do setor, u é o deslocamento tangencial ao arco que passa pelo centro das secções da barra, I é o momento de Inércia, E é o módulo de Young e m a massa uniformemente distribuída da barra. de (44) e (45), obtém-se as densidades:

$$J(\dot{u}, \dot{u}_x) = \frac{1}{2} mR (\dot{u}^2 + \dot{u}_x^2) \quad (46)$$

$$V(u, u_{x^3}) = \frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} (u_x + u_{x^3})^2 \quad (47)$$

$$L(u_x, u_{x^3}, \dot{u}, \dot{u}_x) = \frac{1}{2} \left[mR (\dot{u}^2 + \dot{u}_x^2) - \frac{EI}{R^3} (u_x + u_{x^3})^2 \right] \quad (48)$$

onde: $L = J - V$ e $u_{x^r} = \frac{\partial^r u}{(\partial x)^r}$, $r = 1, 3$.

Agora calcula-se as derivadas variacionais de L a serem aplicadas na equação de Euler-Lagrange (51)

$$\frac{\delta L}{\delta u} = (-1)^s D_{\alpha_s} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha_s}} \right) = (-1)^s \frac{d^s}{(dx)^s} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{x^s}} \right) = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{d^3}{(dx)^3} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{x^3}} \right)$$

$$\frac{\delta L}{\delta u} = \frac{EI}{R^3} (u_{x^2} + 2u_{x^4} + u_{x^6}) \quad (49)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{u}} = (-1)^s D_{\alpha_s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{\alpha_s}} \right) = (-1)^s \frac{d^s}{(dx)^s} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{x^s}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_x} \right) = mR (\dot{u} - \dot{u}_{x^2}) \quad (50)$$

Substituindo-se estas expressões na equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta L}{\delta u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{u}^i} \right) = 0 \tag{51}$$

onde: $\frac{\delta L}{\delta u^i}$ é a derivada variacional em relação a u^i e $\frac{\delta L}{\delta \dot{u}^i}$ é o mesmo em relação a \dot{u}^i , obtém-se a equação do movimento (52), a seguir:

$$u_{x^6} + 2u_{x^4} + u_{x^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{x^2} - u) = 0 \tag{52}$$

Isto posto, pode-se calcular as equações canônicas, como segue, e usando o fato que $p = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}}$, obtém-se, $p = mR(\dot{u} - \dot{u}_{x^2})$, que resolvida em $\dot{u} = \dot{u}(t, x, u, p)$, obtém-se uma solução da forma,

$$\dot{u} = \frac{1}{mR} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{x^2i} = \frac{q}{mR}, \quad \text{com} \quad q = \sum_{i=0}^{\infty} p_{x^2i} \tag{53}$$

Substituindo esta expressão em $H = p\dot{q} - L$ (60), com uso de (48) tem-se a densidade Hamiltoniana

$$H(u_x, u_{x^3}, q, q_x, q_{x^2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{mR} (q^2 - 2qq_{x^2} - q_{x^2}^2) + \frac{EI}{R^3} (u_x + u_{x^3})^2 \right] \tag{54}$$

De (4) e (5), obtém-se

$$\begin{cases} \dot{u}^i = \frac{\delta H}{\delta p_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\delta H}{\delta u_i} \end{cases} \tag{55}$$

Por outro lado, como:

$$\frac{\delta H}{\delta u} = (-1)^s D_{\alpha_s} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{\alpha_s}} \right) = (-1)^s \frac{d^s}{(dx)^s} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{x^s}} \right)$$

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial u_x} \right) - \frac{d^3}{(dx)^3} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{x^3}} \right) = -\frac{EI}{R^3} (u_{x^2} + 2u_{x^4} + u_{x^6}) \tag{56}$$

$$\frac{\delta H}{\delta q} = (-1)^s D \alpha_s \left(\frac{\partial H}{\partial q \alpha_s} \right) = (-1)^s \frac{d^s}{(dx)^s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{x^s}} \right)$$

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{x^2}} \right) = \frac{1}{mR} (q - q_{x^2}) \tag{57}$$

resulta:

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \frac{p}{mR} \quad \therefore \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{q}{mR} \tag{58}$$

Substituindo estas expressões em (55) obtém-se o sistema canônico correspondente a (52), ou seja:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{mR} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_{x^2 i} \\ \dot{p} = \frac{EI}{R^3} (u_{x^2} + 2u_{x^4} + u_{x^6}) \end{cases} \tag{59}$$

8. Equação de Euler –Lagrange

Devido a dualidade das transformações de Legendre, partindo-se da densidade Hamiltoniana, pode-se construir a densidade Lagrangeana correspondente, como segue:

$$H = p\dot{q} - L \tag{60}$$

Em particular considera-se aqui o caso em que Λ é dado por

$$L = pF(q) - \frac{1}{2} \frac{p^2}{E} - q \int_0^1 f(\lambda q) d\lambda \tag{61}$$

Além do mais, $p = EF(q)$; assim chega-se a

$$L = \frac{1}{2} EF^2(q) - q \int_0^1 f(\lambda q) d\lambda \tag{62}$$

E tomando-se condições de contorno homogêneas, tem-se

$$L(q, F(q)) = J(q, F(q)) = \frac{1}{2} EF^2(q) - H(q, F(q)) \tag{63}$$

Considerando agora a variável tempo em separado, modifica-se a Lagrangeana dada por (62), como segue

$$L(t; q, \dot{q}, F(q)) = \frac{1}{2} M\dot{q}^2 - \left\{ \frac{1}{2} EF^2(q) + q \int_0^1 f(\lambda q) d\lambda \right\} \tag{64}$$

cujo a equação de Euler-Lagrange, no caso de f depender somente de q será:

$$M\ddot{q} + F_q^* [EF(q)] + f(q) = 0 \tag{65}$$

No que segue considera-se a Lagrangeana dada por (64) sem perda de generalidade, quando for conveniente, pode-se considerar $f(q) = 0$ nas expressões acima.

Equação de Euler –Lagrange Generalizada

$$\frac{\delta L}{\delta u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{u}^i} \right) = 0 \quad (66)$$

esta equação difere da equação tradicional, devido a presença da derivada variacional.

definição 8.1

O conjunto $\{E_i(L)\}_{1 \leq i \leq m}$, onde $\{E_i(L)\} = \frac{\delta L}{\delta u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{u}^i} \right)$ denomina-se vetor de Euler –Lagrange Generalizado.

Teorema 8.2

Se L é uma lagrangeana generalizada, então $\{E_i(L)\} = 0$, no subespaço das variações $U_\infty^k \left(\delta u^i \in U_\infty^k \right)$.

9. Referências

- Arnold, V. I., 1987, Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica. Moscou, mir, Moscou.
 Goldstein, H., 1959, Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London.
 Lanczos, C., 1970, The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press, Canadá.
 Leech, J. W., 1965, Classical Mechanics. London, butler and tanner.
 Liepmann, H. W. and Roshko, A., 1967, Elements of Gasdynamics. John Wiley and Sons, Inc, New York.
 Oliveira, A. M., 1986, The Adjoint of a Non-Linear Operator and the Inverse Problem of the Calculus of Variations, BMAC, Rio de Janeiro, campus ltda.
 Olver, P. J., 1979, Euler Operators and Conservation Laws of the BBM Equation, volume 85. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Cambridge.
 Reddy, J. N., 1965, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, Mc Graw-Hill, New York.
 Riezz, F. and Nagy, B. S. Z., 1972, Functional Analysis. F. Ungar Publishing Co. New York.
 Tonti, E., 1969, Variational Formulations of Nonlinear Differential Equations. Part I and Part II. Bulletin de L'Academie Royal del Belgique, Bruxelles.
 Vainberg, M. M., 1964, Variational Methods for the Study of Non-Linear Operators. Holden-Day, San Francisco.
 Whittaker, E. T., 1964, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge University Press, New York.

The invariants of the mechanics of continuous and generalization of the Hamilton's equations

Professor Engineer Antonio Carlos Tonini

University of Taubaté, Dpt Enginnering Mechanical – Rua Daniel Danelli s/n, CEP 12060-440 – Taubaté – SP
 e-mail antonio-carlos.tonini@power.alstom.com

Professor Enginner Dr. Antonio Marmo de Oliveira

University de Taubaté, Rectory – Rua 4 de Março nº 432, CEP12020-270 – Taubaté – SP
 e-mail amarmo@terra.com.br e marmo@unitau.br

Abstract - This work has the objective of generalize the canonical formulation of Hamilton, foreseen the mechanics of continuous system, which kinetic and potencial energies or their lagrangeans are described by higher order derivatives, with relation to space parameters of the field and velocity variables, in the perspective to obtain conservation laws and its invariance with respect to group of canonicals transformation of the field variables, it will also show exemples of continuum mechanics in aplication in real problem.

key words: Hamilton, continuous, invariance, conservation, canonicals

DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES AO LONGO DO EIXO LONGITUDINAL DE UMA CANTONEIRA SOB TRAÇÃO E COMPRESSÃO

Denis Henrique Bianchi Scaldaferrri

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
dhbs@urano.cdtm.br

Emerson Giovani Rabello

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
egr@urano.cdtm.br

Paulo de Tarso Vida Gomes

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
gomespt@urano.cdtm.br

Tanius Rodrigues Mansur

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
tanius@urano.cdtm.br

Nilton da Silva Maia

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/CEFET-MG
Rua Monte Santo, nº 319 - Bairro Santo Antônio, Divinópolis, MG, Brasil
nilton@div.cefetmg.br

Resumo. *Uma cantoneira usada na construção de torre de eletrificação foi instrumentada com diversos extensômetros elétricos (strain gages) ao longo do eixo longitudinal de suas abas. A cantoneira foi então submetida a carregamentos controlados de tração e compressão, aplicado separadamente em cada uma de suas abas e no centro de gravidade de sua seção transversal. A partir dos dados obtidos, foi traçado um perfil da distribuição de tensões ao longo do comprimento da cantoneira. Baseando-se nos resultados obtidos, discute-se o uso destas cantoneiras na construção de torres de eletrificação.*

1. Introdução

As torres utilizadas em eletrificação, em geral, têm suas treliças construídas com cantoneiras de abas iguais, as quais são fixadas entre si por meio de parafusos, em apenas uma de suas abas (Fig. 1).

Essa configuração na fixação das cantoneiras leva a uma distribuição de esforços diferente para cada aba.

O conhecimento do perfil dos esforços atuantes ao longo de cada aba pode dar aos projetistas, informações com relação a distribuição do carregamento real, propiciando a discussão de formas alternativas de fixação (de preferência no eixo neutro da cantoneira) ou a adoção de cantoneiras de abas desiguais que poderiam levar a uma economia de peso, uma vez que esse é um problema bastante significativo para a montagem das torres no campo além de influir decisivamente no seu custo final.

Por outro lado, conhecendo-se melhor a distribuição real dos carregamentos nas abas, mantendo-se a mesma forma de fixação e cantoneiras de abas iguais, pode-se aproveitar melhor estas estruturas afim de vencer maiores vãos ou até mesmo a aplicação de carregamentos mais severos que propiciariam o mesmo coeficiente de segurança e a mesma confiabilidade.

Nesse trabalho são apresentados apenas os resultados obtidos para cantoneiras de abas iguais. Estudo com outros perfis estão sendo desenvolvidos.



Figura 1. Detalhes da fixação das cantoneiras na construção da torre.

2. Metodologia

Uma cantoneira de aço carbono com dimensões 700 x 65 x 5 mm foi instrumentada com 28 extensômetros elétricos distribuídos longitudinalmente em ambos os lados de suas abas. Os extensômetros foram posicionados com seu eixo de medição alinhado com o eixo longitudinal de cada aba (Fig. 2). A ligação dos mesmos foi feita a 3 fios, em $\frac{1}{4}$ de ponte de Wheatstone.

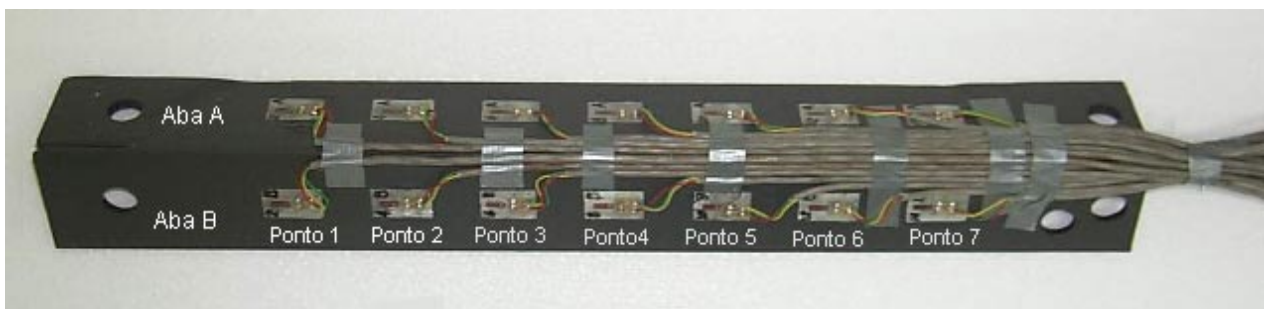


Figura 2. Posicionamento dos extensômetros na cantoneira.

As abas foram identificadas como aba A e aba B. Em cada lado de cada uma das abas foram colados 7 extensômetros igualmente distribuídos ao longo do comprimento da cantoneira. Depois de instrumentada a cantoneira foi submetida a carregamentos controlados de tração e compressão, do seguinte modo:

- tração e compressão no eixo longitudinal da aba A;
- tração e compressão no eixo longitudinal da aba B;
- tração e compressão no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira.

Foram feitos carregamentos repetidos de tração com forças variando entre 0 e 30000 N e de compressão variando entre 0 e 5000 N. Os valores médios destes ensaios repetidos foram tomados para análise.

3. Cálculos realizados

Obedecendo as equações da resistência dos materiais (Beer and Johnston, 1982) e as correlações extensométricas (Hannah and Reed, 1992), foram calculadas as deformações longitudinais em cada aba, as quais foram convertidas em tensões e, posteriormente, convertidas em força atuante em cada aba.

4. Materiais e equipamentos

Os extensômetros usados foram do tipo KFC-C1-11 de fabricação da Kyowa. Para fazer os carregamentos controlados utilizou-se a máquina universal de ensaios mecânicos, marca Instron com capacidade para 100 kN. A Figura 4 mostra sistema de aquisição de dados utilizado.

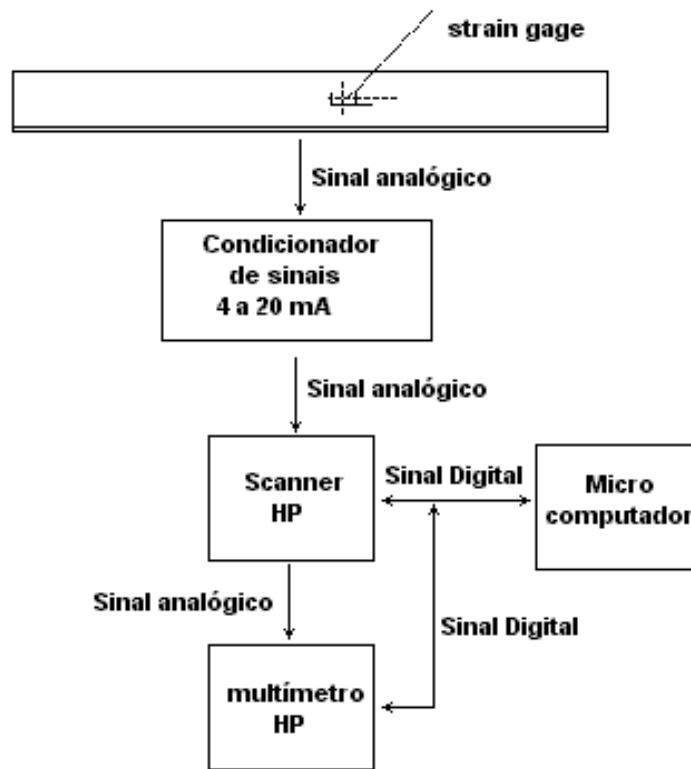


Figura 3. Sistema de aquisição de dados.

5. Resultados experimentais

As Figuras 4 e 5 mostram os valores experimentais de forças obtidos durante o carregamento de tração nas abas A e B, respectivamente.

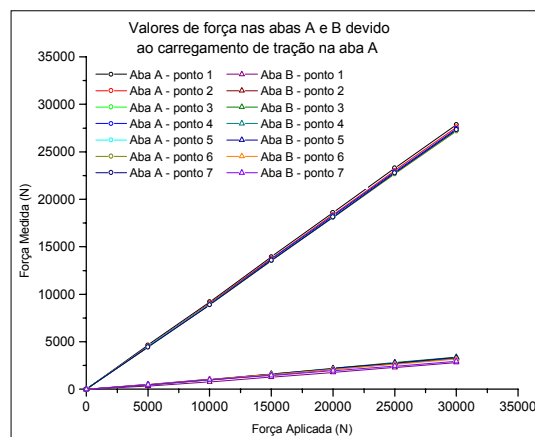


Figura 4. Valores de forças nas abas A e B devido carregamento de tração na aba A.

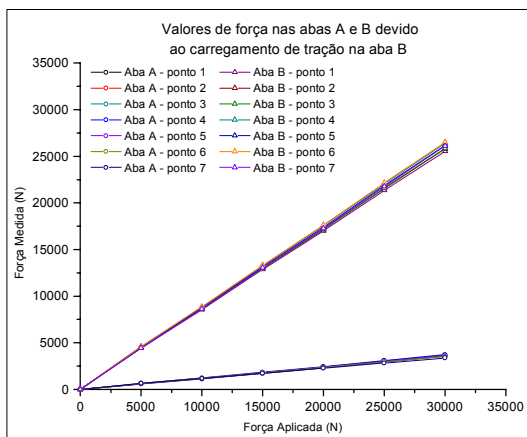


Figura 5. Valores de forças nas abas A e B devido carregamento de tração na aba B.

As Figuras 6 e 7 mostram o somatório das forças durante o carregamento de tração nas abas A e B, respectivamente.

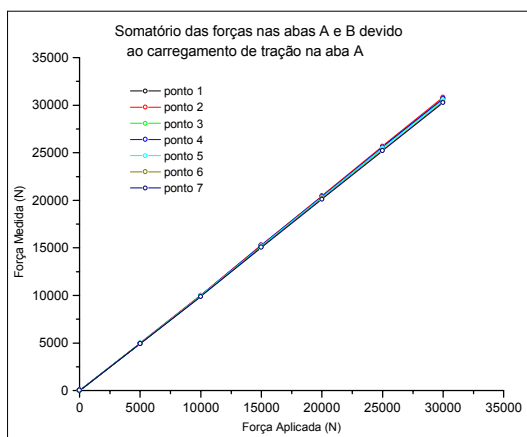


Figura 6. Somatório das forças nas abas A e B devido carregamento de tração na aba A.

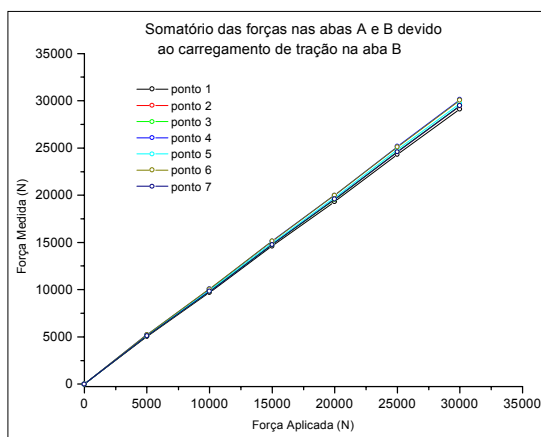


Figura 7. Somatório das forças nas abas A e B devido carregamento de tração na aba B.

A Figura 8 mostra os valores experimentais de forças obtidos durante o carregamento de compressão na aba A. A Figura 9 mostra somatório das forças nas abas A e B, durante o carregamento de compressão na aba A.

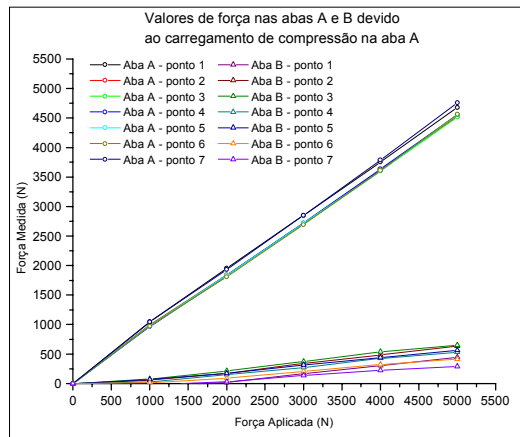


Figura 8. Valores de forças nas abas A e B devido carregamento de compressão na aba A.

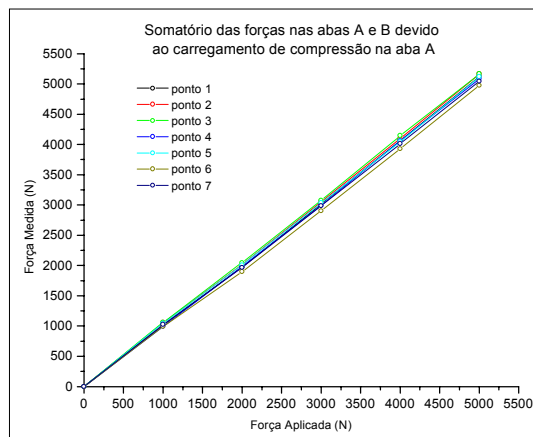


Figura 9. Somatório das forças nas abas A e B devido carregamento de compressão na aba A.

As Figuras 10 e 11 mostram os valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de tração e compressão no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira.

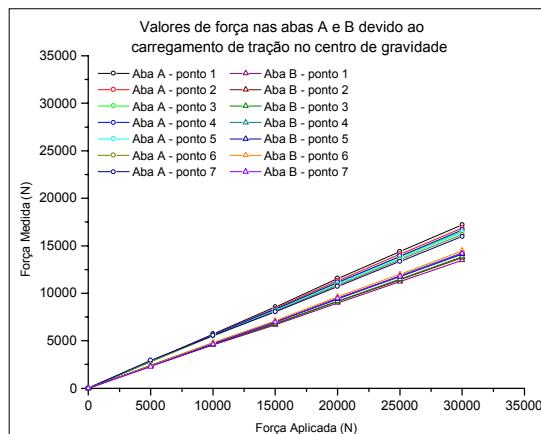


Figura 10. Valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de tração no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, nas abas A e B.

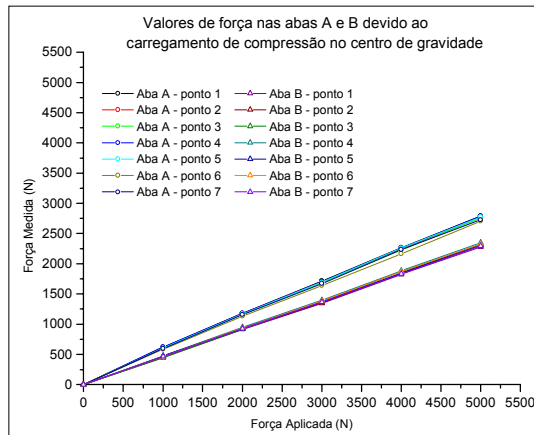


Figura 11. Valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de compressão no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, nas abas A e B.

As Figuras 12 e 13 mostram o somatório dos valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de tração e compressão no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, nas abas A e B, respectivamente.

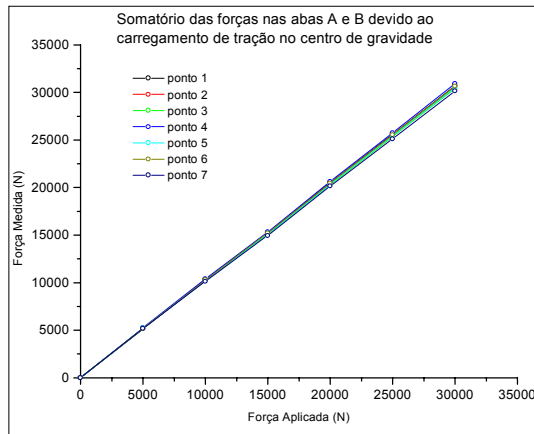


Figura 12. Somatório dos valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de tração no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, nas abas A e B.

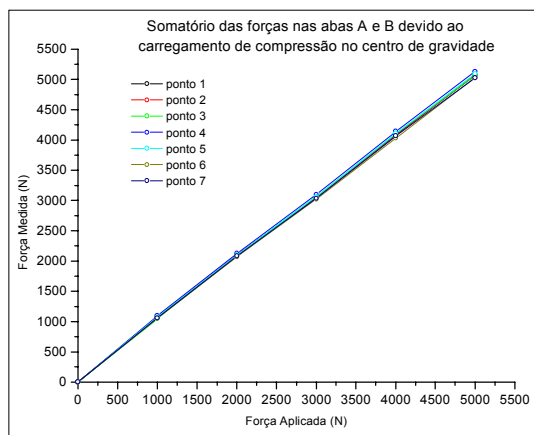


Figura 13. Somatório dos valores experimentais de forças obtidos durante os carregamentos de compressão no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, nas abas A e B.

6. Discussão dos resultados

- No caso de tração e compressão em apenas uma aba, observa-se nas Fig. 4, 5 e 8 que aproximadamente 90% da força aplicada vai para a aba que está sendo solicitada diretamente e apenas 10% da força vai para a outra.
- Observa-se nas Fig. 6, 7 e 9 que a soma das forças suportadas pelas abas A e B é igual à força aplicada em uma das abas, tanto para tração quanto para compressão.
- Quando a força é aplicada no centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, observa-se nas Fig. 10 e 11 que cada aba fica submetida a aproximadamente 50% da força total aplicada.
- Observa-se também nas Fig. 12 e 13 que a soma das forças nas duas abas é igual à força total aplicada.

7. Conclusões

- A fixação de cantoneiras apenas por uma aba, como utilizado nas construções de torres de eletrificação, não é adequada para transmissão uniforme de cargas.
- Esta fixação deveria ser feita através de um dispositivo que transmita toda a carga ao centro de gravidade da seção transversal da cantoneira, de modo a permitir uma transmissão uniforme de cargas.
- Os usuários destas torres deveriam promover um amplo estudo a respeito da segurança e uso destas estruturas.

8. Referências

- Beer, F. P. and Johnston, E. R., “Resistência dos Materiais”, São Paulo, SP, McGrall-Hill, 1982.
 Hannah, R. L. and Reed, S. E., “Strain Gage User’s Handbook”, Betherl, USA, Elsevier Science Publishers Ltda. and Society of Experimental Mechanics, 1992.

STRESS DISTRIBUTION ON THE LONGITUDINAL AXIS OF A CORNER SHELF UNDER TENSION AND COMPRESSION

Denis Henrique Bianchi Scaldaferrri

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
 Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
 dhbs@urano.cdtm.br

Emerson Giovani Rabello

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
 Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
 egr@urano.cdtm.br

Paulo de Tarso Vida Gomes

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
 Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
 gomespt@urano.cdtm.br

Tanius Rodrigues Mansur

Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN/CNEN
 Rua Prof. Mário Werneck, s/n - Pampulha - Caixa Postal 941 - 30123-970, Belo Horizonte, MG, Brasil
 tanius@urano.cdtm.br

Nilton da Silva Maia

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/CEFET-MG
 Rua Monte Santo, nº 319 – Bairro Santo Antônio, Divinópolis, MG, Brasil
 nilton@div.cefetmg.br

Summary. *A corner shelf used in the electrification tower construction, was instrumented with several strain gages, along the longitudinal axes of your brims. The corner shelf was then submitted to compression and tension loading, applied separately in each one of your brims and in the center of gravity of your transverse section.*

From the obtained dates, a stress distribution profile was traced in the whole length of the corner shelf.

Supporting on the obtained results, discuss the use of these corner shelf on the electrification tower construction.

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS E PÓRTICOS COM RESTRIÇÕES DE FLAMBAGEM E FLEXIBILIDADE

Guilherme, Carlos Eduardo Marcos, guilherme@koiter.mecanica.ufrgs.br
Fonseca, Jun Sérgio Ono, jun@ufrgs.br

Resumo. O trabalho apresenta a otimização estrutural de treliças e pórticos em 2D. A estrutura é discretizada em elementos de barra e viga. A função a ser minimizada é o volume, tendo como restrições de flexibilidade ou flambagem. A variável de projeto adotada é a seção transversal de cada elemento, sendo permitido que a mesma varie dentro de uma faixa estabelecida. Os gradientes de flexibilidade e flambagem para autovalores simples e duplos são determinados através do método analítico e diferenças finitas. Neste problema são utilizados quatro tipos de malhas, sendo de primeira à quarta ordem de vizinhança, onde se busca a ótima conectividade entre todos os elementos. A programação matemática é utilizada para a resolução do problema de otimização, onde os valores das variáveis de projeto são encontradas através da programação linear seqüencial (SLP) com uma estratégia heurística para a escolha dos limites móveis.

Palavras chave: otimização topológica, flambagem, flexibilidade.

Palavras chave: otimização topológica, flambagem, flexibilidade.)

1. Introdução

O estudo da otimização estrutural teve início com Maxwell (Cardoso 2000), que elaborou a primeira teoria para obter o mínimo volume em estruturas uniaxiais sujeitas a um dado carregamento e material. Michell, em 1904 (Bendsoe, 1995) criou uma teoria do ótimo layout de treliças para o menor peso. O assunto voltou a despertar o interesse dos pesquisadores nas últimas quatro décadas. A partir do trabalho publicado por Dorn et al, 1964, voltou-se a estudar o layout ótimo de um universo de barras.

De acordo com Kirsch, 1989, o progresso recente nesta área é o resultado do desenvolvimento na análise estrutural, métodos de otimização e computadores mais eficientes. A otimização estrutural combinada com a matemática e a engenharia tem-se tornado uma área com múltiplas aplicações, como aeronáutica, mecânica e civil, nuclear e naval. A pesquisa nesta área tem sido motivada pela competição tecnológica e no desafio que vários problemas apresentam à sua solução.

A otimização de uma estrutura é realizada através de mudanças nos valores de algumas variáveis que descrevem as características da estrutura, as variáveis de projeto. Os problemas de otimização estrutural são classificados conforme a natureza das variáveis de projeto em três diferentes tipos: otimização dimensional, de forma e topológica, conforme se reprojete algumas dimensões específicas, uma parte da fronteira externa da peça ou a existência ou não de material em cada ponto da estrutura.

Este trabalho apresenta a otimização topológica de estruturas compostas por vigas e barras. O objetivo neste trabalho é minimizar o volume da estrutura, com restrições impostas de flexibilidade e estabilidade estrutural. As variáveis de projeto adotadas neste trabalho são as seções transversais de cada elemento.

Este artigo apresenta a análise de sensibilidade da função objetivo (volume) e das restrições de flexibilidade e flambagem. Um ponto importante deste trabalho é a dedução da derivada dos autovalores, pois existe a necessidade de distinguir entre autovalores simples e repetidos, sob pena de se haver instabilidade na convergência do problema. Os gradientes são obtidos utilizando-se um método analítico ou por diferenças finitas à frente.

2. Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade objetiva obter as derivadas de características da estrutura em relação às variáveis de projeto. Estes gradientes permitem o uso de eficientes algoritmos de programação matemática para a otimização. O primeiro passo na análise de uma estrutura complexa é a discretização espacial da estrutura através de uma técnica de elementos finitos, diferença finitas ou outro modelo matemático. A análise do problema então requer a caracterização do comportamento mecânico da estrutura através da solução algébrica de um sistema de equações que representam a condição de equilíbrio. Para a resposta estática, o problema discretizado é representado por

$$Ku = f \quad (1)$$

onde K é a matriz de rigidez, u o vetor de deslocamento e f o vetor força, e para o problema de flambagem por autovalores,

$$\left(K - \lambda K_g \right) = u \quad (2)$$

onde K_g é a matriz de rigidez geométrica e λ o autovalor, que neste problema corresponde a carga crítica.

Este artigo apresenta as sensibilidades da função objetivo, flambagem e flexibilidade pelo método analítico e diferenças finitas à frente.

2.1. Determinação da derivada da função objetivo

A função objetivo, volume, é uma função direta da variável de projeto e não apresenta maiores dificuldades (Haftka, 1996). O objetivo é representado pela relação convexa

$$V = \sum_i^{ne} v_i l_i \quad (3)$$

onde V é o volume, l comprimento e v variável de projeto, tem derivada

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = l_i \quad (4)$$

onde V é o volume, l o comprimento e v é a variável de projeto, e neste trabalho representa a área.

2.2. Determinação do gradiente para flexibilidade

A derivada do trabalho externo (Haftka, 1996) é obtida diretamente do conceito de trabalho da forças externas, ou seja:

$$F = f^t u \quad (5)$$

onde F é o trabalho externo. Utilizando-se da regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f^t}{\partial v} u + f^t \frac{\partial u}{\partial v} \quad (6)$$

A derivada da força em relação à variável de projeto depende da natureza da força. Se não forem consideradas forças de corpo, estas derivadas se anulam. Por outro lado, se forem consideradas apenas a força peso, na forma

$$f = v \lg \gamma \quad (7)$$

onde g é aceleração gravitacional e γ é a densidade, então a derivada é:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lg \gamma \quad (8)$$

A derivada do deslocamento em relação à variável de projeto é um pouco mais difícil de se obter, pois a relação entre os deslocamentos e as densidades não é direta, pois ambos estão relacionados pela equação de equilíbrio. Assim, derivando a expressão

$$u = k^{-1} f \quad (9)$$

Obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial k^{-1}}{\partial v} f + k^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (10)$$

A derivada da matriz inversa pode ser obtida pela derivada da relação

$$k k^{-1} = I \quad (11)$$

pela aplicação da regra da cadeia

$$\frac{\partial k}{\partial v} k^{-1} + k \frac{\partial k^{-1}}{\partial v} = 0 \quad (12)$$

Lembrando que a matriz identidade não depende da variável de projeto. Isolando a derivada de interesse e substituindo na equação da derivada do deslocamento (equação 8), obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -k \frac{\partial k^{-1}}{\partial v} u + k^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (13)$$

Substituindo a expressão da derivada do deslocamento em relação à variável de projeto na expressão de interesse obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 2 \frac{\partial f^t}{\partial v} u + u^t \frac{\partial k}{\partial v} u \quad (14)$$

2.3. Determinação do gradiente para flambagem

Neste item é apresentada a formulação geral para análise de sensibilidade para problemas que apresentam singularidade, onde é governada por uma equação linear de autovalores. O problema de autovalores poderá estar sujeito a restrições lineares ou não lineares. A determinação do gradiente de autovalores será demonstrado para autovalores simples e duplos, para estruturas sujeitas a restrição de estabilidade estrutural.

2.2.3 Determinação da sensibilidade para autovalores simples

Considerando-se o problema generalizado de autovalores:

$$Ax = \lambda Bx \quad (15)$$

Exemplos de determinação das derivadas de autovalor e autovetor, para autovalores não repetidos, foram realizadas por Fox e Kapoor, 1968, usando estruturas discretizadas, para problemas de frequência natural.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{x^t \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) x}{x^t Bx} \quad (16)$$

Em relação a equação (14), pode-se normalizar o denominador para que seja um valor unitário:

$$u^t B u = 1 \quad (17)$$

e o segundo termo no numerador pode ser desprezado, pois o seu valor comparado com o primeiro termo é muito menor, então a equação 14 pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = x^t \left(\frac{\partial A}{\partial v} \right) x \quad (18)$$

Choi et al (1983), partindo da equação 15, obtiveram a equação de derivada para autovalores simples, isto sendo para primeira parte do problema, expressa pela equação 16. Este cálculo da derivada de autovalores foi utilizado para otimização de estruturas, sujeitas tanto à restrição de flambagem como de frequência, onde a matriz A é a matriz de rigidez e a B é a matriz de rigidez geométrica ou de massa.

O cálculo da derivada de autovalores relacionadas à estabilidade estrutural considera como aproximação inicial a existência de apenas um autovalor, juntamente com seu autovetor, desconsiderando a possibilidade de existir autovalores duplos, que correpondem ao mesmo modo de flambagem ou não. Para o caso de autovalores repetidos, onde são bem conhecidos e surgem em problemas de otimização estrutural, a teoria demonstra que os autovalores duplos não são diferenciáveis em relação à variável de projeto, mas somente diferenciável direcionalmente. Essa condição de autovalores repetidos causa instabilidade no problema, como pode ser confirmado na seção de resultados.

2.2.3 Determinação da sensibilidade para autovalores repetidos

A obtenção do gradiente dos autovalores com relação aos parâmetros de projeto é extremamente importante, pois através desses torna-se possível a modificação do projeto. A situação de autovalores repetidos ou idênticos com diferentes modos ocorre em muitas situações físicas. Para este caso, o estudo somente teve início na década passada.

Entre os pesquisadores que se destacaram no estudo de autovalores pode-se citar Ojalvo, 1988, baseando-se no método de Nelson, dando continuidade Dailey em 1989. Hou e Kenny, 1992, apresentaram um método para análise aproximada de autovalores e autovetores.

Nos casos em que os autovalores são repetidos, normalmente é difícil diferenciá-los, esta afirmativa pode ser melhor explicado pela investigação das diferenças entre um problema de autovalores simples e repetidos

- a primeira e fundamental diferença é que a combinação linear dos autovetores, também será um autovetor;
- a segunda diferença é relacionada com a deficiência da matriz $(A - \lambda B)$, se autovalores repetidos ocorrem com uma frequência m , então a matriz estará deficiente de m linhas e colunas, onde A é a matriz de rigidez e B a matriz de massa e ou rigidez geométrica.

Neste trabalho o gradiente da sensibilidade para autovalores duplos foi baseado no estudo realizado por Pedersen, 2000. Para autovalores idênticos, existem dois autovetores diferentes, para a determinação do gradiente é necessário determinar uma região, sendo representada por um plano, onde busca-se o máximo e o mínimo valor da derivada.

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad (19)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (20)$$

Tanto u_1 , u_2 e u devem satisfazer a condição:

$$u^t B u = 1 \quad (21)$$

$$u^t A u = \lambda \quad (22)$$

Considerando a condição de singularidade do problema do problema de autovalores, a expressão pode ser reduzida, ficando da seguinte forma:

$$\left(\alpha u_1^t + \beta u_2^t \right) \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad (23)$$

Expandindo a equação e considerando que:

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad (24)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (25)$$

Realizando as devidas manipulações matemáticas e considerando a singularidade do problema de autovalores, obtém-se:

$$\left(\alpha u_1^t + \beta u_2^t \right) \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} B - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0 \quad (26)$$

Expandindo a equação (28) e considerando-se que:

$$g_{nm} = u_n^t \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \lambda \frac{\partial B}{\partial v} \right) u_m \quad (27)$$

Simplificando-se a equação (28) e sendo os vetores u_1 e u_2 ortogonais entre si, obtém-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\alpha\beta g_{12} \tag{28}$$

A equação (30) é derivada em relação as suas constantes α e β , reduzindo a uma equação homogênea da forma:

$$\begin{aligned} 2\alpha g_{11} + 2\beta g_{12} &= 0 \\ 2\beta g_{22} + 2\alpha g_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

A equação (29) na forma matricial, é obtido os autovalores, que corresponderão aos gradientes de um problema de autovalores repetidos.

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tag{30}$$

2.2. Diferenças finitas à frente

Uma técnica simples para o cálculo da derivada de autovalores em relação a uma variável de projeto é aproximação por uma diferença finita, (Haftka e Gürdal, 1992). Este tipo de procedimento é computacionalmente caro, mas de fácil implementação e por isso muito popular. Conforme Aldeman e Haftka, 1986, a análise de sensibilidade para respostas estáticas, o método por diferenças finitas quase sempre é inferior ao método analítico. Para os casos no qual calcula-se a derivada para respostas transientes, isto nem sempre ocorrerá. Quando métodos explícitos são usados para integrar a equação diferencial, a linearidade das equações de sensibilidade não constitui uma vantagem computacional. Para os casos de integração explícita, aproximação por diferença finita é freqüentemente superior computacionalmente do que método direto. Quando técnicas de integração implícita são utilizadas, a aproximação por diferenças finitas é menos atrativo computacionalmente mas de fácil implementação do que aproximação direta.

Falhas neste tipo de processo ocorrem devido ao tamanho do passo a ser selecionado. No caso do tamanho do passo ser grande, ocorrerá erros devido ao truncamento. Esse tipo de erro normalmente aparece quando termos na expansão da série de Taylor são negligenciados, isto é, utilizando somente os termos de baixa ordem. Se o passo selecionado for pequeno, ocorrerá erro devido ao condicionamento, isto é, a diferença entre o cálculo numérico da função e o seu valor exato devido ao arredondamento das operações numéricas. O gradiente para autovalores apresenta-se da seguinte forma utilizando diferenças finitas:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \approx \frac{\Delta \lambda}{\Delta \nu} = \frac{\lambda(\nu + \Delta \nu) - \lambda(\nu)}{\Delta \nu} \tag{31}$$

A expressão acima obtida por diferenças finitas à frente.

3. Formulação do Problema

De acordo com Bendsoe e Kikuchi, 1992, o universo de elementos é dado por n pontos nodais e m possíveis conectividades. Partindo desta estrutura formada por elementos discretizados, busca-se a solução que satisfaça a solução ótima. Neste trabalho busca-se obter o mínimo valor da função objetivo, na qual esta função será representada pelo volume, sendo que as restrições são flexibilidade e flambagem. Este problema poderá ser formulado de duas formas diferentes (Haftka e Gürdal, 1996, Bendsoe, 1995, Cheng, 1992), sendo a primeira forma considera a minimização do volume com restrição de flexibilidade, tendo como valores limites para área.

$$\begin{aligned} \text{mínimo} & \quad \sum_{i=1}^m \nu_i l_i \\ \text{sujeito} & \quad \sum_{i=1}^m f_i^k u_i^k \leq F_{\text{limite}}^k \\ & \quad \text{área}_{\text{inf}} \leq \sum_{i=1}^m \nu_i \leq \text{área}_{\text{sup}} \end{aligned} \tag{32}$$

onde k se refere ao caso de carregamento em questão. A Segunda forma busca o mínimo volume tendo como restrição a estabilidade estrutural e valores limites para seção transversal

$$\begin{aligned}
 \text{mínimo} & \quad \sum_{i=1}^m v_i l_i & (32) \\
 \text{sujeito} & \quad \lambda_i^k \leq P_{\text{crítico}} \\
 & \quad \text{área}_{\text{inf}} \leq \sum_{i=1}^m v_i \leq \text{área}_{\text{sup}}
 \end{aligned}$$

o valor de λ é determinado através de um problema de autovalores, onde o menor valor em módulo corresponderá ao primeiro valor de carga crítica.

As funções de restrição, tanto a restrição de flambagem como a de flexibilidade, são aproximadas utilizando-se as derivadas de primeira ordem das restrições impostas. Woo, 1987, utilizou aproximação das restrições por um método generalizado híbrido, onde este é mais conservativo do que a série de Taylor, mas este trabalho utilizará a expansão na série de Taylor. Esta expansão é necessária para tornar-se a função na forma linear, então posteriormente utilizar a programação linear seqüencial. As funções das restrições expandidas na forma de Taylor apresentam-se da seguinte forma:

- Flambagem

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} (v - v_0) \tag{33}$$

- Flexibilidade

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial v} (v - v_0) \tag{34}$$

4. Definição do universo de barras

De acordo com Rozvany, 1995, no projeto topológico, os elementos deveriam poder ser adicionados ou removidos durante o processo e conseqüentemente o modelo de elementos finitos e as variáveis de projeto mudariam. Esse tipo de fenômeno torna-se complexo no processo e pode influenciar na análise; e outra dificuldade encontrada se refere-se ao número de elementos, podendo aumentar drasticamente, tornando-se uma estrutura de análise impraticável.

O estudo realizado por Beckers e Fleury, 1997 e Rozvany, 1995, a otimização topológica é baseada inicialmente em um universo de elementos, onde obtém-se a ótima conectividade dos elementos, isto é, com todos os possíveis nós. Este tipo de estrutura é uma aproximação discretizada de um universo de barras na busca da solução exata. De acordo com este estudo, as áreas dos elementos poderão tender para zero, e conseqüentemente poderão ser removidas automaticamente da estrutura, de maneira a melhorar a eficiência computacional, isto poderia ser considerado como uma vantagem. No problema prático de otimização topológica, a estrutura discretizada é caracterizada pelo fato que o modelo de elementos finitos não é modificado durante o processo de otimização. As variáveis de projeto estarão limitadas por um limite superior e outro inferior, sendo que nenhum elemento poderá atingir o valor zero para seção transversal.

Dorn et. al., 1964, foram os primeiros a utilizar estrutura discretizada contendo um universo de barras. Eles estabeleceram os pontos nodais, onde os elementos gerados poderiam se conectar com alguns pontos ou com todos os pontos possíveis.

A conectividade somente com os primeiros nós vizinhos torna-se muito restrita a solução. Outros graus de vizinhanças podem definir o universo de elementos, consistindo esta conectividade não somente do primeiro grau de vizinhança. Três tipos de vizinhança foram relatados por Beckers e Fleury, 1997: segunda ordem de vizinhança, terceira ordem de vizinhança e quarta ordem de vizinhança.

5. Programação Matemática Linear Seqüencial

A programação matemática é uma importante ferramenta na área de engenharia para solucionar problemas. O método da programação linear (Arora, 1989) é a solução matemática para encontrar os valores mínimos ou máximos para uma função objetivo, sujeita às restrições. Tanto a função custo, como as restrições podem ser funções não-lineares, então utiliza-se do artifício da linearização da função, no qual os termos das funções podem ser expandidos na série de Taylor (Haftka e Gürdal, 1996 e Tada e Minami, 1993).

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & f(x_o) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{oi}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_o} \\
 & g_j(x_o) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{oi}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_o} \geq 0 \\
 & h_j(x_o) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{oi}) \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right)_{x_o} = 0 \\
 & a_{\text{inf}} \leq (x_i - x_{oi}) \leq a_{\text{sup}}
 \end{aligned} \tag{35}$$

onde n é o número de variáveis do projeto. A última restrição é conhecida como limites móveis, garantindo desta forma que a variação das variáveis de projeto não sejam excessivamente grandes, de maneira a garantir a linearização do problema. Este tipo de restrição é importante para convergência do problema.

A resolução do problema apresentado pela equação (36), fornece os valores das variáveis de projeto ($x_i, i=1 \dots n$). Estes valores são utilizados para resolver o problema de otimização, que é um processo iterativo, até o momento em que a função objetivo atinja um máximo ou mínimo. A este tipo de problema onde as funções são linearizadas, damos o nome de programação linear seqüencial (SLP) (Haftka e Gürdal, 1996 e Cheng, 1992).

Um dos problemas associado à programação linear seqüencial está ligado na escolha dos limites móveis, pois a escolha errada do mesmo poderá causar a não convergência do problema. A escolha do tamanho dos limites móveis dependerá do valor do gradiente, para valores pequenos de gradientes pode-se partir com limites altos, caso contrário os mesmos deverão ser baixos, pois certamente qualquer violação destas regras causará a falha do program, isto é, o problema não terá uma convergência. A escolha de limites móveis pequenos de mais poderá causar a parada prematura do problema. Para se considerar um limite móvel baixo ou alto, dependerá do valor do gradiente, isto é, para o caso onde a restrição do problema é a flexibilidade, o valor do gradiente para esta restrição é baixo, então pode-se partir com limites altos, já para o caso onde a restrição é a flambagem, os valores das derivadas são altos, então os valores devem ser baixos. Durante o processo de otimização, os limites podem aumentar ou diminuir, conforme a convergência do problema. Esses valores são modificados conforme o sinal da variável nas três últimas iterações (Pedersen, 1973). Se o sinal da variável nas três últimas iterações for positivo ou negativo, o valor do limite móvel será diminuído, conforme critério adotado, neste caso foi de 0.8, mas quando a variável de projeto apresenta uma variação do sinal nas três últimas iterações, isto significa que o problema ainda não começou apresentar convergência, então os limites móveis serão aumentados, sendo este aumento de 1.20.

Uma característica interessante dos problemas de programação matemática linear é a de que as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto são constantes, não necessariamente nulas. Isto significa que o ponto extremo se encontra na fronteira e não no interior do domínio admissível. Sendo as restrições também lineares, o ponto de ótimo deve ser encontrar na intersecção de duas ou mais restrições.

Apesar de se Ter aptado pelo SLP, os autores reconhecem que há outros bons algoritmos para a otimização com grande número de variáveis, como por exemplo o MMA.

6. Resultados

Elemento de viga

O exemplo apresentado na Fig. (1) considerou um caso com múltiplas forças aplicadas, todas de valor unitário. O valor inicial da carga crítica é de 11426, correspondendo para cada valor de força aplicada e deseja-se que a estrutura suporte o valor de 30000. A função objetivo deste problema é otimizar o volume com a restrição de flambagem. Os modos de flambagem são mostrados na Fig.(2), e seus respectivos autovalores coincidiram com os obtidos no programa implementado. Este resultado apresentou uma perfeita convergência, pois o terceiro autovalor não coincidiu com os dois primeiros. O resultado obtido pode ser considerado como a ótima solução para o problema, mas lembrando que este resultado corresponde ao mínimo local, pois a restrição de flambagem é uma função não convexa.

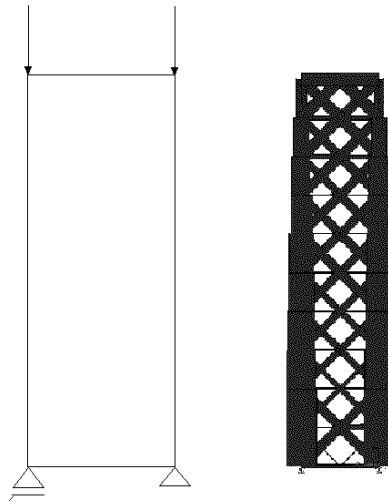


Figura 1. Representação da malha (elemento de viga - 10x2 m) à esquerda e à direita estrutura otimizada.

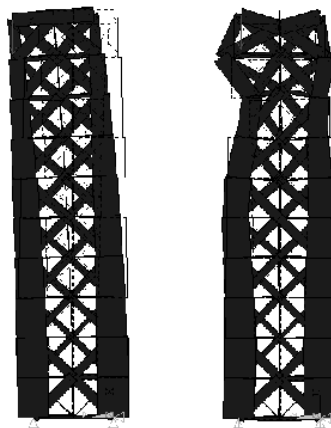


Figura 2. Representação do primeiro e segundo modo de flambagem.

As soluções dos problemas apresentados nas Fig.(4), representam a minimização do volume com restrição à flexibilidade. O tamanho da estrutura utilizado é o mesmo para todos os resultados citados, mas tendo somente a diferença na quantidade de elementos utilizados dentro dessas malhas. Esse tipo de malha é classificado de acordo com a vizinhança utilizada, são respectivamente: Primeira vizinhança com 173 elementos, segunda vizinhança com 307 elementos, terceira vizinhança com 505 elementos e quarta vizinhança com 641 elementos. Conforme o aumento da ordem da vizinhança pode-se perceber que seu formado aproxima-se do contínuo e existe uma redução do volume, apesar de aumentar o número de elementos, conforme mostrado na Fig.(3).

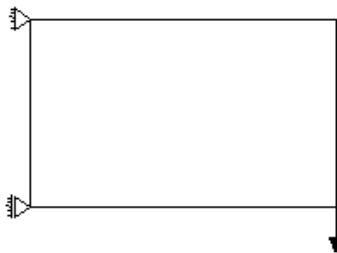


Figura 3. Representação da malha (elemento de viga - 8x5 m).

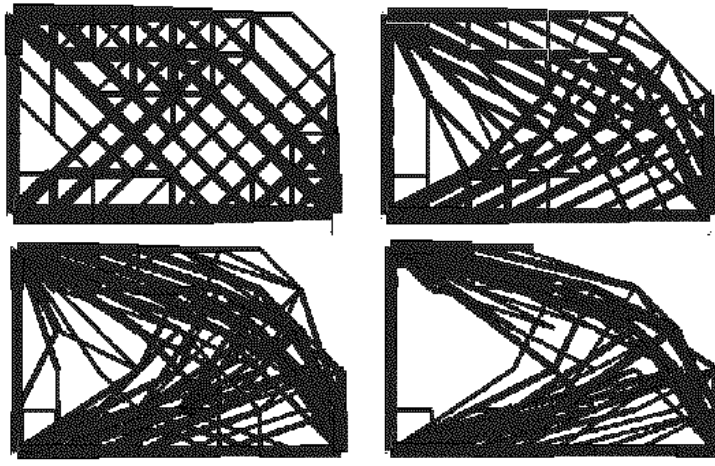


Figura 4. Estrutura otimizada sujeito à restrição de flexibilidade com quatro tipos de ordem de vizinhanças.

Elemento de barra

A solução do problema de treliça, Fig. (5), considera múltiplos casos de carregamento e o resultado apresentado refere-se à minimização de volume, tendo como restrição a flexibilidade. O volume inicial da estrutura é de 46.35, e após a otimização obtém-se 11.79.

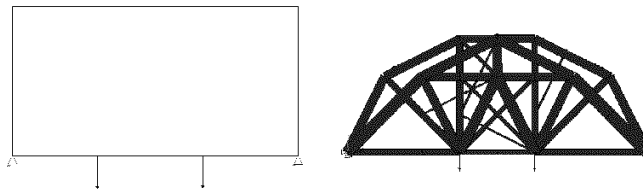


Figura 5. Representação da malha (elemento de barra - 8x5 m) à esquerda e estrutura otimizada sujeito a múltiplos carregamentos.

7. Conclusões

O estudo tratou da otimização estrutural de treliça e pórticos no plano, tendo como função objetivo o volume sujeita às restrições de estabilidade estrutural e flexibilidade. Um dos objetivos do trabalho foi a análise de sensibilidade deste tipo de problema, com um enfoque especial para a sensibilidade de autovalor, utilizado para resolver problema de estabilidade estrutural.

Recentemente começou a apresentar um estudo sobre autovalores repetidos, pois este tipo de situação causa instabilidade na solução. Foi desenvolvida uma expressão analítica para o gradiente de autovalores duplos, mas para o caso onde o terceiro autovalor coincidir com os dois primeiros esta formulação perde sua validade, sendo necessário ter sido considerado a existência de três autovalores repetidos. Os autovalores foram considerados numericamente idênticos quando a diferença entre o primeiro e o segundo e o primeiro e o terceiro não fosse maior do que cinco por cento.

A utilização do método da programação matemática facilita a implementação de novas formulações quando comparado com o método do critério de ótimo. Neste trabalho foi utilizada a programação linear seqüencial com limites móveis variáveis que é um método bem estabelecido e satisfatório que apresentou-se eficiente para resolução dos problemas.

8. Referências

Arora, S., J., 1989, Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, New York.
 Beekers, M. e Fleury, C., 1997. "A Primal-Dual Approach in Truss Topology Optimization", An International Journal Computers & Structures, Vol.64, pp. 77-78.
 Bendsoe, M. P., 1995. "Optimization of structural topology, shape and material", Springer-Verlag, New York.

- Bendsoe, M. P. e Kikuchi, N., 1988, "Generation Optimal Topologies in Structure Design Using Homogenization Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 71, pp. 197 - 224.
- Cheng, G., 1992. "Introduction to structural optimization - Theory, methods and solutions", Lecture Notes, Technical University of Denmark.
- Choi K. K.,Haug, E. J., Seong, H. G., em 1983. An Iterative Method for Finite Dimensional Structural Optimization Problems With Repeated Eigenvalues, International Journal For Numerical Methods in Engineering, vol. 19, pp. 93 -112
- Dailley, R. L., 1989. "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues", AIAA, vol. 27, pp. 486 -491.
- Dorn, W. S., Gomory, R. E., e Greenberg, H. J., em 1964. Automatic design of optimal structures, J. Mec., vol. 3, pp. 25 - 52.
- Fox, R. L., Kapoor, M. P., 1968. Structural Optimization in the Dynamics Response Regime: A Computational Approach, AIAA Journal, vol. 8, pp. 1798 - 1804.
- Haftka, R. T., Gürdal, Z., 1996, "Elements of structures optimization",Kluwer Academic Publishers, London.
- Hou, G. J. W., Kenny, S. P., em 1992. Eigenvalue and Eigenvector Approximate Analysis for Repeated Eigenvalue Problems, AIAA Journal, vol. 30, pp. 2317 - 2324.
- Kirsch, U., em 1989. Optimal Topologies of Structures, Apply Mechanic Rev, vol. 42, pp. 223 - 238.
- Ojalvo, I. U., 1988. Efficient Computation of Modal Sensitivities for System with Repeated Frequencies, AIAA, vol. 26, pp. 361 - 366.
- Pedersen, N. L., 1973. "Optimal Joint Positions fo Space Trusses", Journal of the Structural Divison, ST12.
- Pedersen, N. L., 2000. "Maximization of eigenvalues using topology optimization", Structural Optimization. To appear.
- Rozvany, G. I. N., em 1995. Layout Optimization of Structures, Appl. Mech. Rev., vol. 48, No.2, pp. 41 - 119.
- Tada, Y., Minami E., em 1993. Optimum Design of 3-D Truss Structure and Its Effect on Control. JSME International Journal, vol. 36, pp. 90 - 96.
- Woo, T. H., em 1987. Space Frame Optimization Subject to Frequency Constraints, AIAA Journal, vol. 25, pp. 1396 - 1404.

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF TRUSSES AND FRAMES WITH COMPLIANCE AND BUCKLING CONSTRAINTS

Abstract. This work presents a topology optimization formulation for 2D trusses and frames. Structures are discretized by trusses or beam elements. The function to be minimized is the total volume of the structure, with compliance and buckling constraints. The design variables are the cross sectional areas, chosen within proper bounds. Sensitivities for the objective function and compliance constraint are determined analytically. Sensitivities for the buckling constraint are computed by finite differences or by a newly developed analytical method for single and double eigenvalues. Four different types of ground structures are used, from first to fourth order neighborhood connectivity. Mathematical programming is used to solve the optimization problem, using a sequential linear programming technique with heuristics driven moving bounds strategy.

Keywords. *Topology optimization, buckling, compliance.*

A TENTATIVE OBJECT-ORIENTED IMPLEMENTATION FOR A UNIFIED FEM AND BEM PROGRAMMING FRAMEWORK

Rogério José Marczak

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Rua Sarmento Leite, 425 - Porto Alegre - RS - Brasil
90050-170
e-mail rato@mecanica.ufrgs.br

Abstract. *This work presents an extension of a previously published object-oriented architecture to be used as a general numerical framework for the development of computer programs based on either the boundary element method (BEM) or the finite element method (FEM). The proposed design provides a set of special classes developed to handle those entities or procedures most commonly found in solution algorithms based on boundary or finite elements. The underlying idea of this tentative implementation is to enable the analyst to "assemble" a customized code accordingly to the type of problem to be solved and the method to be used. Some code fragments are presented to show the level of extensibility and reusability achieved by the present proposal.*

Palavras chave: *finite element method, boundary element method, object-oriented programming.*

1. Introduction

During the last decade the use of object-oriented programming (OOP) has become a common practice in most software development fields. The diffusion of the use of OO languages in engineering is intimately related to the software development cycle and its corresponding cost. The constant need for updating computer programs developed under structured programming has led to a demand for *extensibility* and *reusability* of the codes (or part of them) without demanding the costs associated to the development of new software or due to unwanted changes in source codes successfully tested and used. This demand is relatively old, but only the appearance of object-oriented programming languages has been leading to an adequate solution.

One of the engineering fields more heavily impacted by OOP is the computational mechanics, specially the development of finite element codes. A review of the literature reveals many conceptually different possibilities available to develop FEM computer programs using OO philosophy (Archer, 1996; Hedegal, 1994; McKenna, 1997). In the BEM context, the published works are much more scarce (Marczak, 1999).

This work presents an object-oriented architecture to be used as a general numerical framework for the development of computer programs based on boundary elements or finite elements. The main goal of the present proposal is to unlink the storage classes (those containing elements, nodes etc.) from the analysis classes (linear, non-linear, static, transient etc.), so that the inherent characteristics of each method is preserved in the class hierarchy. The starting point of the present design is the mcBEM library developed for boundary elements (Marczak., 2000). By increasing the level of abstraction of the mcBEM classes it became clear that the same class organization could be used for other discretization-based methods like the FEM.

2. A simple organization for classes commonly found in FEM/BEM software

The basic structure of most OO engineering analysis software is composed by objects that can be grouped in three levels of hierarchy: *auxiliary objects*, *model objects* and *analysis objects*. This conceptual division will be used throughout this work because it allows a general view of the level of abstraction employed in each level.

Whatever is the class hierarchy used, the essential part of any FEM/BEM software is the solution algorithms of the discretized problem. This is generally provided by a set of classes that *govern the flow* of the available data during the solution. Because of the responsibility that these classes have on the solution of the problem, it is expected a higher level of abstraction in their design, and we refer to them in this work as *analysis classes*. It is in this level that one or more objects solve the problem from the governing equation point of view. This is accomplished by using and controlling the information generated by objects in the auxiliary and model levels. For example, a single mesh object can be used to solve a static linear problem and a dynamic transient problem during the same job. In essence, both problems differ only in the way the analysis objects will manipulate the data provided by the model objects, using the tools provided by the auxiliary objects.

The model objects are necessary to store and manage the problem data. They *provide the data* of the numerical model to the analysis objects. These data are responsible for the relationship between mathematical problem and physical problem or, in other words, the model classes store the computational model of the problem. For instance, it is in this level that one can find FEM/BEM objects like material property, geometry, mesh, numerical integration, boundary condition, superelements and loading.

Classes to handle special entities like basic linear algebra objects (vectors, matrices, etc.) are also necessary. Their objects *perform auxiliary* (but not less important) *tasks* requested by the analysis and model objects, or help to build higher level objects as an aggregation of them. Although matrix objects are the most common case, other examples of

auxiliary objects are mathematical functions, dictionaries, linear systems, arrays, lists, strings, geometric primitives, memory management, etc.

This proposed classification does not mean, for example, that a matrix class actually has a low level of abstraction. But calling it an auxiliary class means (in the context of the present work) that there is not much more that a matrix object could do other than matrix operations. An analysis class, by its turn, can span from a simple linear steady state analysis to a fluid-structure optimization analysis.

3. The mcBEM library

The development of the mcBEM library started as a research project focusing on applying OO programming to develop flexible, modular, and reusable software components for solving differential equations by the BEM. The underlying idea in its design is that different applications share a common mathematical and numerical structure, and more importantly, storage (model) classes do not perform any solution step. In the form of a compiled library, mcBEM provides a complete set of auxiliary and model classes, as well as a basic set of analysis classes. To create an application code, the analyst assembles the code collecting the objects necessary to perform the solution. The programmer's work is limited to implement the new analysis classes (in case they are not provided), deriving them from any of the existing ones. The objective of this section is to present the basic hierarchy layout of mcBEM main classes and its extension to support finite elements.

3.1. mcBEM model classes

The mcBEM model classes are mostly formed by a set of classes derived from a super class called `mcEntity`. They were designed to compose a bulk of entities commonly found in a discrete PDE solution model, like FEM and BEM. The most important model class of the proposed design is the `mcDomain` class. `McDomain` acts as a container class for the analysis, storing all `mcEntity` objects necessary to describe the problem such as geometry, mesh, loads and boundary conditions. The objects are stored in list objects (`mcList`) especially designed for mcBEM, reducing by a significant amount the overhead generated by the use of general purpose standard lists (like the STL - Standard Template Library Programmer's Guide, 1999). Figure 1 depicts the basic hierarchy of mcBEM model classes. Some of them will be shortly described in the sequel:

- `mcPoint`: Implements a coordinate point in \mathcal{R}^3 space. It can be attached to a user-defined coordinate system, if desired.
- `mcNode`: Derived from `mcPoint` class, a `mcNode` object represents a point which has degrees of freedom (DOF), i.e. a space location that holds part of the discrete solution for a given mesh.
- `mcCoordSys`: Enable the analyst to use special coordinate systems throughout the solution.
- `mcMaterial`: A class to implement general material properties.
- `mcGeometry`: Implements geometric properties for special applications (like areas in spars, thickness in plates, etc.)
- `mcBESubregion`: Implements a BEM subregion of the solution domain. This can be used to handle problems composed by different materials, geometric properties etc. The `mcBESubregion` class also encapsulates information about the type of the differential equation which is being solved, so that it knows how many DOF's each `mcNode` have, or what are these DOF's. In addition, a `mcBESubregion` object can access the fundamental solution of the problem, and determine whether a DOF is a primal or a dual one. This is necessary to implement compatibility conditions on the interface shared by two or more subregions, as well as to impose the boundary conditions. A similar class - the `mcFESubregion` can be used to implement superelements in a finite element analysis.
- `mcLoad`: This class is used to create general loads to be applied on the domain. In BEM applications, the boundary conditions are implemented as a special case of loads.

Since the BEM requires only the discretization of the boundary of the domain (for most linear problems), the computational mesh handles differently BEM and FEM partitions. In a BEM analysis `mcBEElement` objects are used to discretize the boundary with several types of boundary elements, while `mcDCell` objects are used to discretize the interior with domain cells, if necessary. The domain cells are needed only on the areas where some physical variable is to be integrated, and their mesh is not required to be compatible. For FEM analysis, `mcFEElement` objects compose the mesh. Similar classes can be used for control volumes, finite volumes, and finite difference schemes.

What `mcBEElement`, `mcFEElement`, and `mcDCell` have in common is that they are all domain partitions generated by aggregating two super classes: `mcPhysicalPartition` and `mcGeometricPartition`. This allows the geometric description of the partition be dissociated from its physical description (Devloo, 1997). For instance, a linear geometric partition (two points) can be used along with a linear (two node) or a quadratic (three nodes) physical partition, so that the p -enrichment of the partition can be controlled (Figure 2).

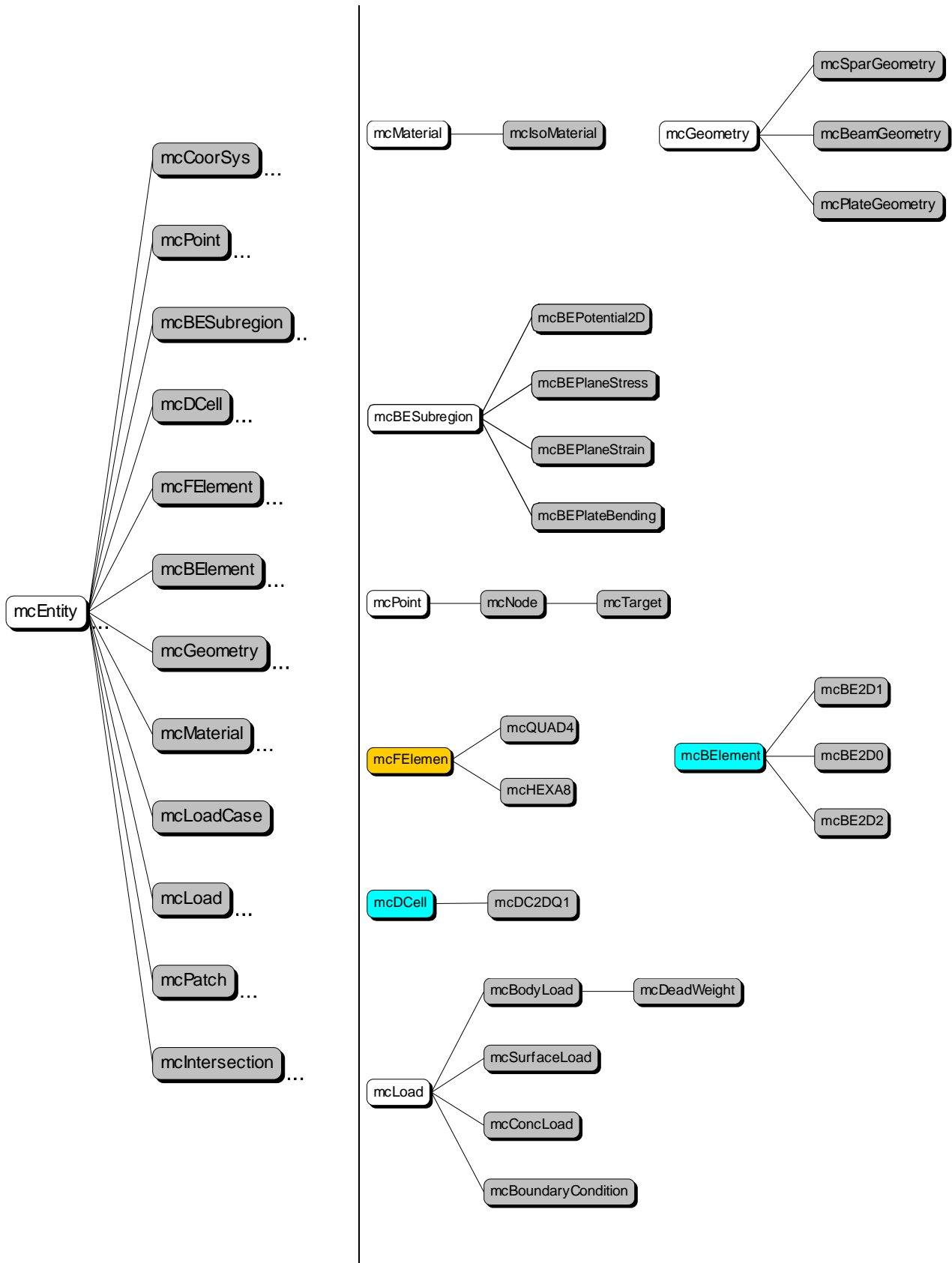


Figure 1. Basic mcEntity class hierarchy.

The mcDomain class aggregates and manages all mcEntity objects for a given solution domain. It represents the computational model of the problem, and is used by the analysis classes to access all necessary information to solve the

discretized problem. Since mcDomain objects perform no analysis step, the analyst can solve different domains during the solution phase, or solve the same domain with different types of analysis.

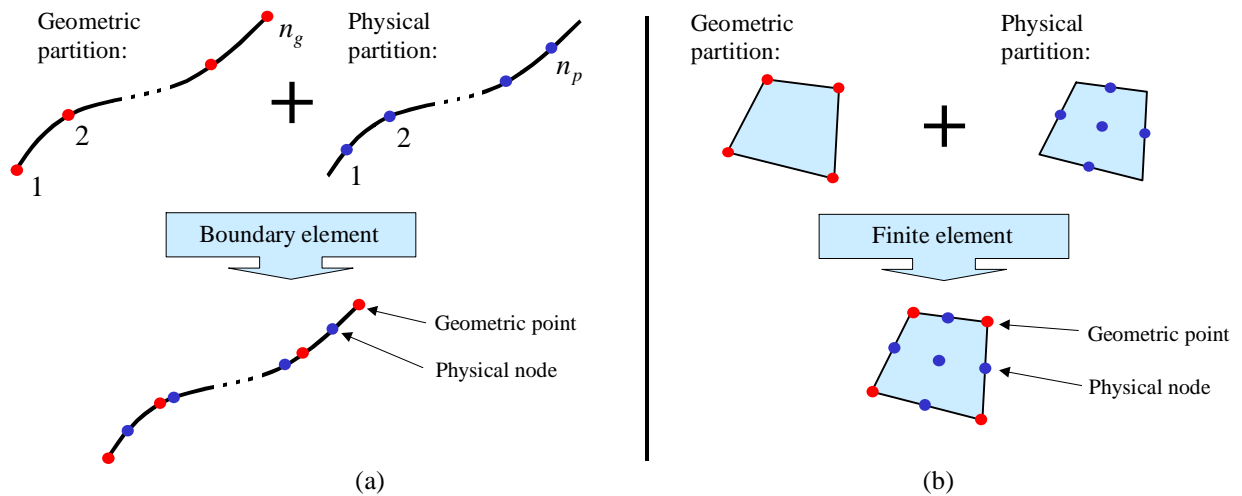


Figure 2. Illustration of the composition of two-dimensional domain partitions using geometric and physical partitions.

3.2. mcBEM model classes

The analysis of the problem is performed by a set of five super classes aggregated by the analyst, depending on the type of the problem and solution desired. Some of the ideas adopted here were adapted from the work of McKenna, 1997. This approach adds flexibility by enabling the user to *slot* each one of these five major classes according to the specific needs of each application. If necessary, one can implement a new class by deriving it from any of these super classes and limiting the coding task to those analysis steps not provided. The analysis classes currently implemented in this work are summarized below:

- **mcSolutionAlgorithm:** The mcSolutionAlgorithm objects orchestrate the major steps in the analysis. Typical tasks of these objects are: form the left-hand side and the right-hand side of the linear system, and trigger the solution of the linear system. In case of linear problems this is generally done only once, but for non-linear problems the steps are repeated until convergence is reached. Currently, three major subclasses are derived from this class: mcEquilibriumSolAlgo, mcTransientSolAlgo and mcEigenvalueSolAlgo. Both can be particularized for special cases, as illustrated in Figure 3.
- **mcAssembler:** The mcAssembler objects provide methods necessary to form the system of equations. It is responsible for accessing each boundary element, domain cell, or finite element and adding its contributions to the global system of equations. Two major subclasses are currently derived from mcAssembler class: they are the mcIncrementalAssembler class, which generates derived classes like mcStaticAssembler (for linear static problems), mcTransientAssembler (for transient problems) and mcEigenvalueAssembler (for eigenvalue problems). Figure 4 shows the basic hierarchy.
- **mcModelHandler:** The model handler objects are responsible for providing access to the objects in mcDomain during the solution phase, so that no object in the analysis aggregation needs to access the domain directly. Any object in the domain can be reached by mcModelHandler methods. Iterators are provided to access and loop over nodes, elements, material properties etc. Figure 5.a illustrates the basic hierarchy.
- **mcConstraintHandler:** The mcConstraintHandler super class implements methods to apply constraints on the system of equations. Prescribed displacements or tractions are handled here. mcConstraintHandler objects also handle the imposition of compatibility conditions on the interface shared by two or more subregions. Other examples of tasks performed here are DOF numbering and Lagrange multipliers handling. In case of the BEM, the mcConstraintHandler object is also responsible for creating the nodes of the boundary elements and domain cells automatically (Figure 5.b).
- **mcAnalysis:** This is the analysis aggregation itself. A mcAnalysis object receives all other component objects as arguments. It checks for validity of the aggregation and links them by pointers. A single virtual method: analyze() triggers the analysis start up. mcAnalysis objects also knows whether the solution domain changed so that is necessary a new analysis (like in adaptive or nonlinear problems) or not. Figure 6 illustrates the subclasses implemented in this work.

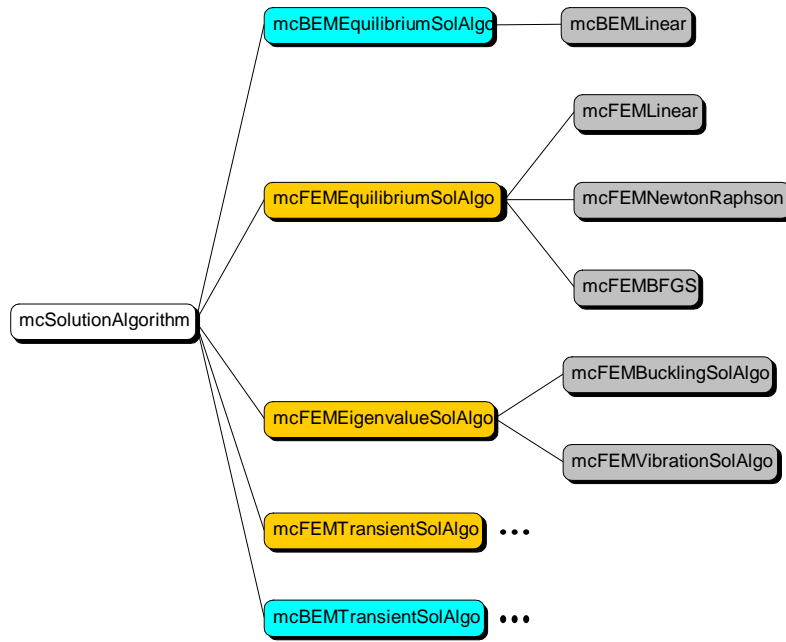


Figure 3. Typical mcSolutionAlgorithm hierarchy.

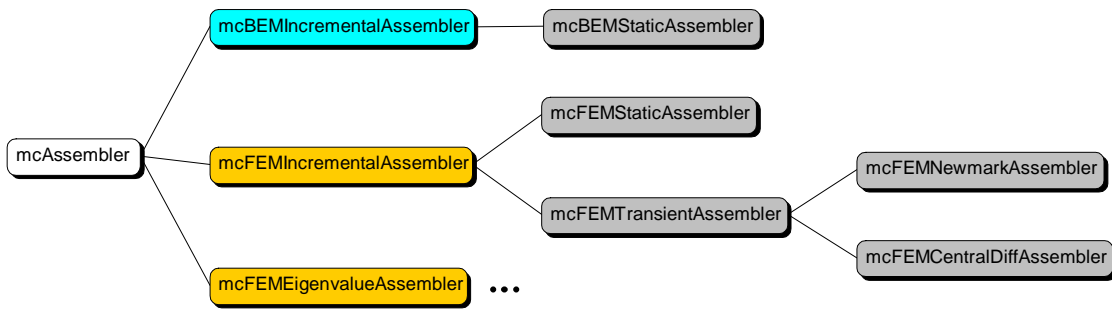


Figure 4. Typical mcAssembler hierarchy.

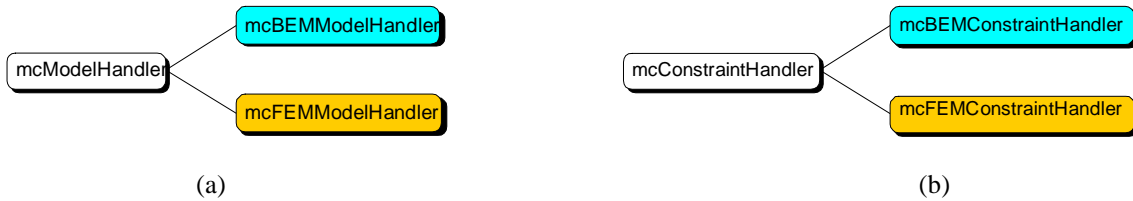


Figure 5. (a) Typical mcModelHandler hierarchy. (b) Typical mcConstraintHandler hierarchy.

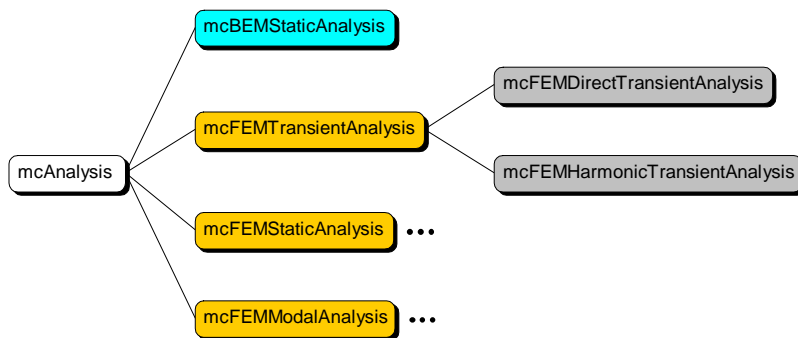


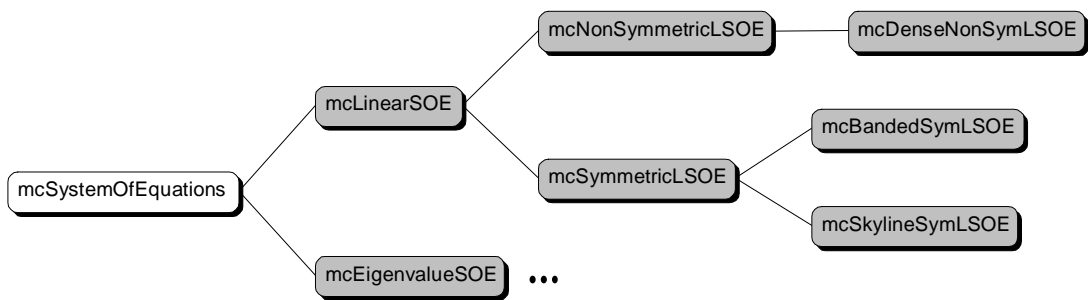
Figure 6. Typical mcAnalysis hierarchy.

3.3. mcBEM auxiliary classes

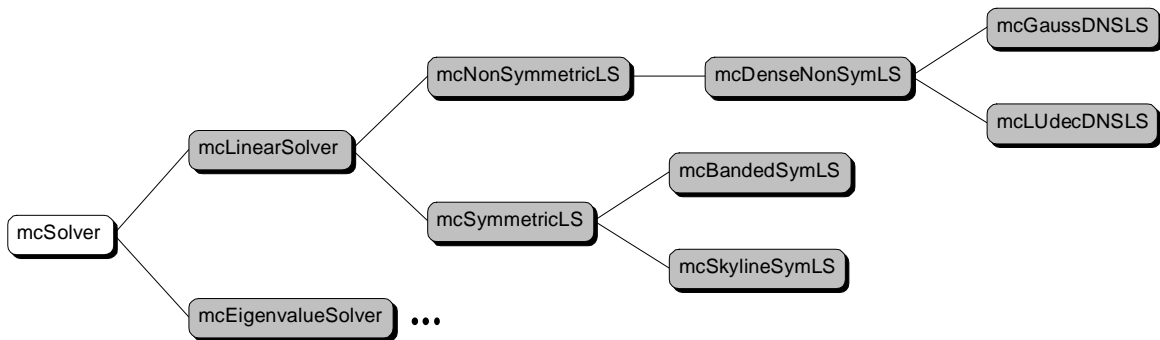
The mcBEM library provides a large number of classes encapsulating many features found in computational mechanics. A few examples are: lists, dictionaries, identifiers, iterators, error handlers, file handlers, DOF sets, fundamental solutions and numeric integrators.

Of particular importance in the efficiency of a numerical solution is the storage and manipulation of the system matrices that generate the solution of the problem. The present implementation of mcBEM provides two major super classes to accomplish this task (see Figure 7):

- mcSystemOfEquations: It is responsible for storing the system matrices. It also provides methods to perform the assembly of element sub-matrices as well as rearranging rows and columns to eliminate/add DOF's etc. Some types of storage schemes are provided to accommodate the types of matrices generated by the different methods (banded, full, symmetric, non-symmetric, etc.). The mcSystemOfEquations objects do not perform the solution of the system.
- mcSolver: This is the super class that actually solves the system of equations. Because it is disconnected from the mcSystemOfEquations, a mcSolver object can be linked with well-known Fortran solvers or other numerical libraries (Zeglinski *et al.*, 1997).



(a)



(b)

Figure 7. (a) Typical mcSystemOfEquations hierarchy. (b) Typical mcSolver hierarchy.

For BEM applications, the type of differential equation being solved is encapsulated in a mcFundSolution superclass. The nature and the number of degrees of freedom used, the fundamental solutions tensors and other important properties are stored in this class. Examples of derived instances of mcFundSolution objects are the mcPotential2D, mcPotential3D, mcElast2D, and mcElast3D and mcPlate2D objects.

The mcBEM library uses a mcDOFSet object attached to each node of the mesh. A mcDOFSet object is a set of mcDOF objects, whose identifier is assigned to a given fundamental solution. Therefore, the user can create its own DOF sets according to the problem to be solved.

Some of the auxiliary classes are template based. Of particular interest is the mcQuadrature class, developed to allow the use of numerical integration schemes without explicit loopings over the sampling points. Since it is a template class, it can be used to integrate matrices, vectors or functions in a single code statement. The class supports up to three-dimensional integrations and handle singular integrals (common in most BEM formulations). It also enables the user to employ different types of quadrature in each direction of the integration domain. The public members are heavily


```

// Matrix integrator - 2x2 Gauss rule:
1: mcQuadrature<Matrix> Mat(2,2,1);

// Get the finite elements iterator:
2: fe = ModelHandler->getFElementsUsingMaterial("Steel");

// Loop over the elements:
3: while (fe) {
    // Evaluate the stiffness and mass matrices:
4:   Ke = Mat.Integrate(fe.current->Stiffness);
5:   Me = Mat.Integrate(fe.current->Mass);

    // Assemble:
6:   SysOfEq->AssembleK(Ke, ModelHandler->mapDOF(fe.current) );
7:   SysOfEq->AssembleM(Me, ModelHandler->mapDOF(fe.current) );

8:   fe++;
9: }

```

Figure 10. Using mcIterators and mcQuadrature objects to form global stiffness and mass matrices.

4. Coding applications - extensibility and reusability

The main goal of the OO design proposed in this work is to enable the analyst to write a few programming lines to customize the code for a given application, regardless it is a FEM or BEM code. This is accomplished by assembling an appropriate aggregation of objects. The aggregation is centered in a mcAnalysis object, which knows a mcDomain and has a minimum group of the following objects: mcSolutionAlgorithm, mcAssembler, mcModelHandler, mcConstraintHandler, and mcSystemOfEquations (which knows a mcSolver). Such composition is illustrated in Figure 11.

After checking if all objects in the aggregation are valid, the user trigger the analysis start by invoking the analyze() member function of mcAnalysis class.

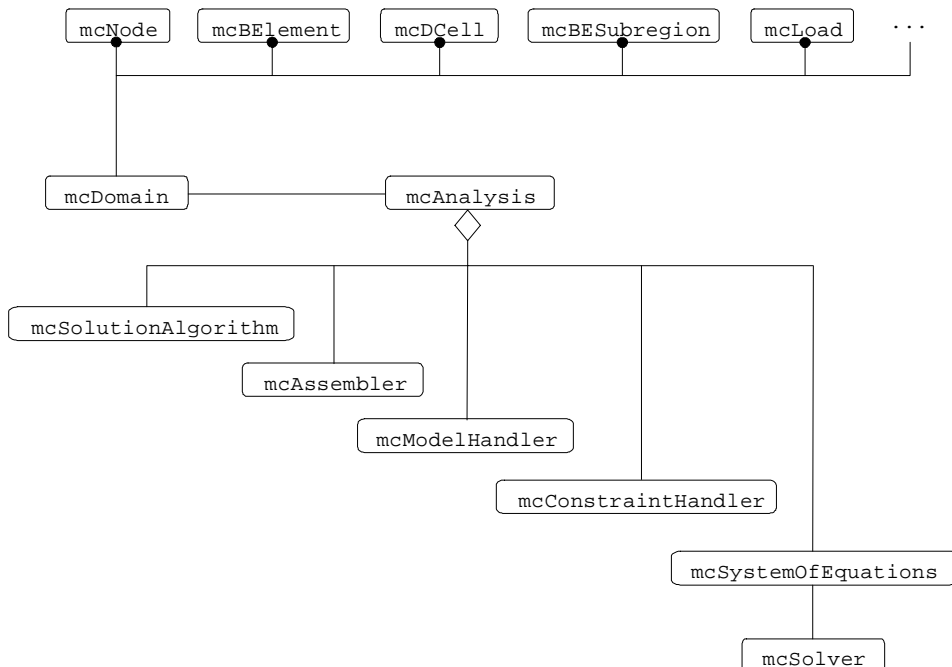


Figure 11. The analysis aggregation.

A simple analysis like the one shown in Figure 11 would be straightforward reusing the relevant objects. Figure 7 shows a possibility. For instance, the solution of a linear static plate-bending problem would use the same code that a steady state head conduction problem (the inherent differences would be hidden in subregion objects defined properly).

```

1: mcDomain                part_959;

2: domain.ReadInputFile("part959.dat");
3: domain.setCurrentLoadCase(domain.getDefaultLoadCase());

4: mcBEMLinear             theAlgorithm;
5: mcBEMStaticAssembler   theAssembler;
6: mcBEMModelHandler      theModel;
7: mcBEMConstraintHandler theConstraint;
8: mcDenseNonSymLS        theSolver;
9: mcDenseNSLSOE          theSOE(theSolver);
10: mcBEMStaticAnalysis   theProblem(part_959, theAlgorithm, theAssembler,
                                     theModel, theConstraint, theSOE);
11: theProblem.analyse();

```

Figure 12: A mcBEM driver code for a linear static analysis by the BEM.

```

1: mcDomain                part_959;

2: domain.ReadInputFile("part959.dat");
3: domain.setCurrentLoadCase(domain.getDefaultLoadCase());

4: mcFEMLinear             theAlgorithm;
5: mcFEMStaticAssembler   theAssembler;
6: mcFEMModelHandler      theModel;
7: mcFEMConstraintHandler theConstraint;
8: mcSkylineSymLS         theSolver;
9: mcSkylineSLSOE         theSOE(theSolver);
10: mcFEMStaticAnalysis   theProblem(part_959, theAlgorithm, theAssembler,
                                     theModel, theConstraint, theSOE);
11: theProblem.analyse();

```

Figure 13: A mcBEM driver code for a linear static analysis by the FEM.

If the user is interested in solving the same problem depicted in the code of Figure 13 in transient regime using a Newmark scheme, it would be necessary to derive a mcNewmarkSolAlgo class (if not provided yet) from mcFEMTransientSolAlgo (see Figure 3) and simply change lines 4, 5 and 10 of the code in Figure 13 according to Figure 14.

```

1: mcDomain                part_959;

2: domain.ReadInputFile("part959.dat");
3: domain.setCurrentLoadCase(domain.getDefaultLoadCase());

4: mcFEMNewmarkSolAlgo    theAlgorithm;
5: mcFEMTransientAssembler theAssembler;
6: mcFEMModelHandler      theModel;
7: mcFEMConstraintHandler theConstraint;
8: mcSkylineSymLS         theSolver;
9: mcSkylineSLSOE         theSOE(theSolver);
10: mcFEMTransientAnalysis theProblem(part_959, theAlgorithm, theAssembler,
                                     theModel, theConstraint, theSOE);
11: theProblem.analyse();

```

Figure 14: A mcBEM driver code for a transient dynamic analysis by the FEM.

5. Conclusions

This work presented a modular, reusable and extensible OO design for numerical solution of general problems using either the BEM or the FEM. The main super classes of the proposed architecture were presented, showing the independent role that storage and solution classes play. The particular characteristics of each solution strategy are

hidden in the hierarchy level of the corresponding classes, enabling the use of the same driver code for a variety of problems. This enable the user to customize the code for a given application by modifying only a few lines of the driver program, thus reducing drastically the development cycle of new engineering analysis codes. The next step in this development is to couple both methods in a single analysis to make use of the best properties of each one.

6. References

- Archer, G.C., 1996, "Object-Oriented Finite Element Analysis". PhD thesis, University of California at Berkeley.
- Beck, R., Erdmann, B. & Roitzsch, R., 1995, "Kaskade 3.0 - An Object-oriented Adaptive Finite Element Code". Technical report, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, TR95-4.
- Besson, J., Foerch, R., Cailletaut, G., Aazizou, K. & F. Hourlier, F., 1997, "Large Scale Object Oriented Finite Element Code Design". Preprint.
- Devloo, P.R.B., 1997, "PZ: An Object Oriented Environment for Scientific Programming". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 150, pp. 133-153.
- Dubois-Pèlerin, Y. & Zimmermann, T., 1993, "Object-oriented Finite Element Programming: III. An Efficient Implementation in C++". *Comput. Methods App. Mech. Engrg.*, Vol. 108, pp. 165-183.
- Feijóo, R.A., Guimarães A.C.S. & Fancello, E.A., 1991, "Some Experiences With Object-oriented Programming and Their Applications in the Finite Element Method" (in Spanish). LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica - Brazil, Report 015/91.
- Forde, B.W.R., Foschi, R.O. & Steimer, S.F., 1990, "Object-oriented Finite Element Analysis". *Computers & Structures*, Vol. 34(3), pp. 355-374.
- Hedegal, O., 1994, "Object-Oriented Structuring of Finite Elements". PhD thesis, Aalborg University.
- Kong, X.A. & Chen, D.P., 1995, "An Object-oriented Design of FEM Programs". *Computers & Structures*, Vol. 57(1), pp. 157-166.
- Langtangen, H.P., 1996, "Details of Finite Element Programming in Diffpack". Technical report, Department of Mathematics, University of Oslo.
- Lu, J., White, D.W., Chen, W.F. & Dunsmore, H.E., 1995, "A Matrix Class Library in C++ for Structural Engineering Computing". *Computers & Structures*, Vol. 55(1), pp. 95-111.
- Mackie, R.I., 1992, "Object Oriented Programming of the Finite Element Method". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 35, pp. 425-436.
- Marczak, R.J., 1999, "A Partial Review of Object-oriented Architectures for Finite Element Programs" (in Portuguese), in: Proc. 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil.
- McKenna, F.T., 1997, "Object-Oriented Finite Element Programming: Frameworks for Analysis, Algorithms and Parallel Computing". PhD thesis, University of California at Berkeley.
- Menétrey, P. & Zimmermann, T., 1993, "Object-oriented Non-linear Finite Element Analysis: Application to J2 plasticity". *Computers & Structures*, Vol. 49(5), pp. 767-777.
- Miller, G.R., 1991, "An Object-oriented Approach to Structural Analysis and Design". *Computers & Structures*, Vol. 40(1), pp. 75-82.
- Olsson, A., 1998, "An Object-oriented Implementation of Structural Path-following". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 161, pp. 19-47.
- Pidaparti, R.M.V. & Hudli, A.V., 1993, "Dynamic Analysis of Structures Using Object-oriented Techniques". *Computers & Structures*, Vol. 49(1), pp. 149-156.
- Rumbaugh, J., Blaha, M., Premerhani, W., Eddy, F. & W. Lorensen, W., 1991, "Object-Oriented Modeling and Design". Prentice-Hall.
- Scholz, S.P., 1992, "Elements of an Object-oriented FEM++ Program in C++". *Computers & Structures*, Vol. 43(3), pp. 517-529.
- Standard Template Library Programmer's Guide, 1999, Silicon Graphics Computer Systems, Inc.
- Zeglinski, G.W., Han, R.P.S. & Aitchison, P., 1994, "Object-oriented Matrix Classes for Use in a Finite Element Code Using C++". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 37, pp. 3921-3937.
- Zimmermann, T. & Dubois-Pèlerin, Y. & Bomme, P., 1992, "Object-oriented Finite Element Programming: I. Governing Principles". *Comput. Methods App. Mech. Engrg.*, Vol. 98, pp. 291-303.

ON THE STRESS INDUCED MOTION OF PHASE INTERFACES

Alberto Pinheiro Dantas

Exército Brasileiro, Departamento Logístico, 70630-901, Brasília, DF, Brasil
e-mail: adantas@tba.com.br

Álvaro Pinto Correia

Exército Brasileiro, Diretoria de Fabricação e Recuperação, 70673-901, Brasília, DF, Brasil
e-mail: msjcorreia@ig.com.br

Edgar Nobuo Mamiya

Universidade de Brasília, ENM-FT, 70910-900 Brasília, DF, Brasil
e-mail: mamiya@unb.br

Abstract: *Stress induced phase transformations constitute the basic mechanism associated with the shape memory effect. At the mesoscopic level, many authors have devoted their attention to the study of the motion of phase interfaces, trying to describe their positions, orientations and evolution rules. The goal of the present study is to relate, in a very simple one-dimensional setting, the macroscopic behavior of pseudoelastic materials to non-convex stored energy potentials.*

Keywords: *stress induced phase transformations, pseudoelasticity, hysteresis.*

1. Introduction

Martensitic stress induced phase transformations can be observed in a class of materials, which include Ni-Ti and Cu-Zn-Al alloys, known as shape memory materials. Such materials exhibit the interesting ability to recover very large apparently plastic deformations upon raising their temperatures above specific levels. From the theoretical point of view, many authors have reported their studies on stress induced phase transformations, including Ericksen (1975), Falk (1980), Abeyaratne and Knowles (1988), Fu, Huo and Müller (1994), amongst others. From the kinematic point of view, phase transformations can be characterized by discrete changes in the strain levels of the material. As a consequence, phase interfaces can be described as placements of strain discontinuities. Mechanical models considered by Ericksen (1975) and Falk, for instance, consider nonmonotonous stress-strain curves, as illustrated in Fig. 2, in order to allow the coexistence of distinct strain levels associated with the same stress level. Although nonmonotonous stress-strain curves constitute a very convenient way to describe coexisting phases, they are not observed in practice. Experimental stress-strain curves for this class of materials usually shown the pattern illustrated in Fig. 4, exhibiting hysteresis loops when the material is subjected to loading-unloading conditions. The link between the nonmonotonous stress-strain curves and the ones exhibiting hysteresis loops is not difficult to establish but has been neglected in the literature. In this sense, the goal of this paper is to relate, in a very simple one-dimensional setting, the macroscopic behavior of pseudoelastic materials to non-convex stored energy potentials.

An outline of the paper is as follows: in section 2, we present some preliminary definitions. In section 3 we present a simple one-dimensional model which allows the description of coexisting phases within the medium. This is accomplished by considering a non-convex stored energy density function, which leads to a nonmonotonous stress-strain relation. For the sake of completeness, the section 4 reproduces an analysis performed by Abeyaratne and Knowles (1988) on the admissibility of phase transformations, where we make the necessary adaptations to our particular model. In section 5, we rewrite the model in terms of the mean strain, making the meso-macro link which justifies the difference between the mesoscopic nonmonotonous stress-strain relation and the macroscopic stress-strain curve without discontinuities. The model is complemented in section 6 so as to allow the description of the hysteresis loops observed in experiments.

2. Preliminary definitions

Let the one-dimensional medium of interest be represented by the interval $[0, L] \subset \mathbb{R}$. For the sake of simplicity, let us suppose that the area A of the cross section of the medium is unitary along $[0, L]$. The *deformation* of the medium can be characterized by a mapping $\kappa : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ such that:

$$\kappa(X) = X + u(X), \quad X \in [0, L], \quad u(0) = 0, \quad u(L) = \bar{u}. \quad (1)$$

where $u(X)$ is the *displacement* of the material at position $X \in [0, L]$ and \bar{u} is the displacement at the right-hand end of the medium. The corresponding *strain field* $\varepsilon : [0, L] \rightarrow]-1, +\infty[$ is given by:

$$\varepsilon(X) := \partial_X u(X), \quad X \in [0, L]. \quad (2)$$

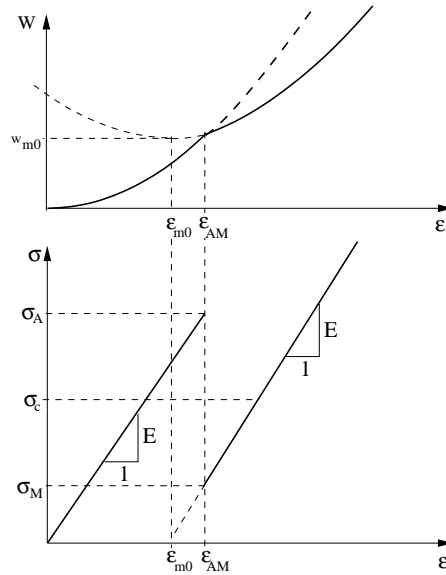


Figure 1: Stored energy function and stress-strain relation for the mechanical model.

Since the cross section of the medium is constant along $[0, L]$, the equilibrium condition can be stated simply as:

$$\sigma(X) = \text{constant} \quad \forall X \in [0, L], \quad (3)$$

where $\sigma(X)$ denotes the *stress* at the material point X .

3. Stored energy function and coexistence of phases

It is supposed that there exists a *stored energy density function* $W(\varepsilon)$ such that the stress response function $\sigma(\varepsilon)$ is given by:

$$\sigma(\varepsilon) = \partial_\varepsilon W(\varepsilon), \quad \varepsilon \in]-1, +\infty[. \quad (4)$$

The specific form of the stored energy function considered in this paper is given by the piecewise quadratic function:

$$W(\varepsilon) := \min \left(\frac{E}{2} \varepsilon^2, \frac{E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{m0})^2 + w_{m0} \right). \quad (5)$$

where E , ε_{m0} and w_{m0} are scalar material parameters. The quadratic potentials in (5) intersect to each other at:

$$\varepsilon_{am} = \frac{1}{E \varepsilon_{m0}} \left(\frac{E}{2} \varepsilon_{m0}^2 + w_{m0} \right). \quad (6)$$

Thus, the stored energy density function (5) can be rewritten as:

$$W(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{E}{2} \varepsilon^2 & \text{if } \varepsilon \in]-1, \varepsilon_{am}], \\ \frac{E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{m0})^2 + w_{m0} & \text{if } \varepsilon \in [\varepsilon_{am}, +\infty[. \end{cases} \quad (7)$$

The derivative of (7) with respect to the strain ε gives the piecewise linear, non-monotonous *stress response function*:

$$\sigma = \begin{cases} E \varepsilon & \text{if } \varepsilon \in]-1, \varepsilon_{am}], \\ E (\varepsilon - \varepsilon_{m0}) & \text{if } \varepsilon \in [\varepsilon_{am}, +\infty[. \end{cases} \quad (8)$$

As is illustrated in Fig. 1, the stress-strain curve experiences a jump at the strain level ε_{am} . For convenience, let us define the following bounds for each of the branches of the stress-strain curve:

$$\sigma_A = \sigma_c + \frac{E}{2} \varepsilon_{m0} \quad \text{and} \quad \sigma_M = \sigma_c - \frac{E}{2} \varepsilon_{m0}, \quad (9)$$

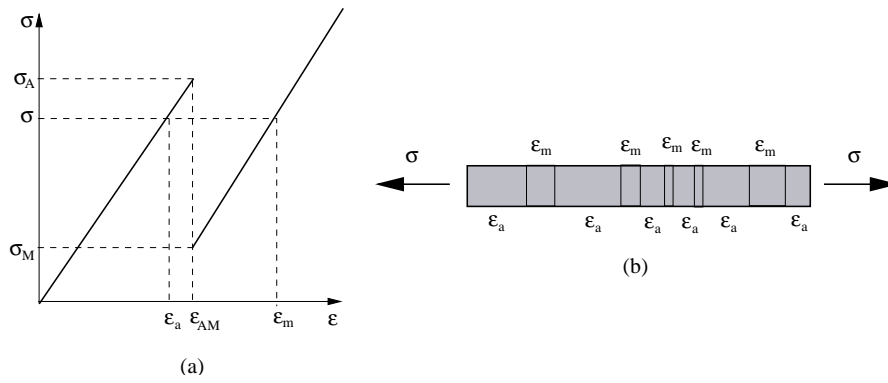


Figure 2: (a) Coexisting strain levels of strains ϵ_a and ϵ_m for the same stress level $\sigma \in [\sigma_M, \sigma_A]$; (b) Mixture of phases in the one-dimensional medium under traction.

where $\sigma_c = w_{m0}/\epsilon_{m0}$ is known as the *Maxwell stress* of the material (see Gurtin (1983) for details). Strain levels below ϵ_{am} are associated with the *austenitic phase* of the material, while strain levels above ϵ_{am} are associated with the *martensitic phase*.

Figure 2.a illustrates the fact that, for stress levels below σ_M , only austenite can be present in the material, while for stress levels above σ_A , only martensite is allowed to exist. On the other hand, for stress levels $\sigma \in [\sigma_M, \sigma_A]$, two strain levels, say ϵ_a and ϵ_m (associated with the austenitic and the martensitic phases, respectively) correspond to the same stress level σ . As a consequence, a mixture of phases can be observed in the medium, exhibiting a discontinuous pattern strain field, as illustrated in Fig. 2.b. Phase interfaces can be characterized by the placements of strain discontinuities in the mixture, and, in this setting, phase transformations can be described as motions of such placements of strain discontinuities.

4. Admissibility of phase transformations

In the present context, phase transformations will be characterized by motions of phase interfaces. In this sense, we start this section by presenting an analysis of admissibility of phase transformations, based on results reported by Abeyaratne and Knowles (1988). Let us assume that there exists a phase interface at a point $S(t) \in]0, L[$ of the medium, where t accounts for the time instant. Let the material be in its martensitic phase along $[0, S(t)[$ and in its austenitic phase along $]S(t), L]$, as illustrated in Fig. 3.

The total stored energy of the system is given by:

$$V_{int} = \int_0^L W(\epsilon(x, t)) dx = \int_0^{S(t)} W(\epsilon(x, t)) dx + \int_{S(t)}^L W(\epsilon(x, t)) dx \tag{10}$$

As long as the phase interface moves with velocity $\dot{S}(t) > 0$, material particles flow across the interface, undergoing transformation from austenite to martensite. Making use of Reynolds Transport Theorem, together with the equilibrium condition (3) and the constitutive assumption (4), the derivative of V_{int} with respect to time can be written as:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{int} &= \int_0^{S(t)} \partial_\epsilon W(\epsilon(x, t)) \partial_t \epsilon(x, t) dx + W(\epsilon(S^-(t))) \dot{S}(t) \\ &+ \int_{S(t)}^L \partial_\epsilon W(\epsilon(x, t)) \partial_t \epsilon(x, t) dx - W(\epsilon(S^+(t))) \dot{S}(t) \\ &= \sigma(t) [v(S^-(t), t) - v(0, t)] + W(\epsilon(S^-(t))) \dot{S}(t) \\ &+ \sigma(t) [v(L, t) - v(S^+(t), t)] - W(\epsilon(S^+(t))) \dot{S}(t) \end{aligned} \tag{11}$$

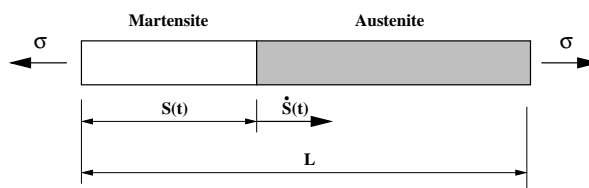


Figure 3: Motion of phase interface.

where $v(x)$ accounts for the velocity of the particle at x . Further, since the continuity of u at $S(t)$ imposes the condition:

$$[[v(S(t), t)]] = -[[\varepsilon(S(t), t)]] \dot{S}(t), \quad (12)$$

where $[[g]] := g(S^+) - g(S^-)$, it follows that the expression (11) for \dot{V}_{int} can be rewritten as:

$$\dot{V}_{int} = \sigma(t) [v(L, t) - v(0, t)] - [[\mathcal{E}(\sigma)]] \dot{S}(t), \quad (13)$$

where:

$$\mathcal{E}(\sigma) := W(\varepsilon(\sigma)) - \sigma\varepsilon(\sigma) \quad (14)$$

is the *Eshelby (1975) force*. The *dissipation* $D(t)$ of the system is then given by:

$$D(t) = \sigma(t) [v(L, t) - v(0, t)] - \dot{V}_{int} = [[\mathcal{E}(\sigma)]] \dot{S}(t) \geq 0, \quad (15)$$

which implies that the jump in the Eshelby force must be positive (since we are assuming $\dot{S}(t) > 0$):

$$[[\mathcal{E}(\sigma)]] \geq 0. \quad (16)$$

In the specific case of our study, from (8) we have, for a given stress level σ ,

$$\varepsilon(S^+(t), t) = \frac{\sigma}{E} \quad \text{and} \quad \varepsilon(S^-(t), t) = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{m0}. \quad (17)$$

and, as a consequence, the jump in the Eshelby force, at the phase interface, is given by:

$$\begin{aligned} [[\mathcal{E}(\sigma)]] &= W(\varepsilon(S^+(t), t)) - \sigma\varepsilon(S^+(t), t) - W(\varepsilon(S^-(t), t)) + \sigma\varepsilon(S^-(t), t) \\ &= \frac{E}{2} \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 - \sigma \left(\frac{\sigma}{E}\right) - \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\sigma}{E}\right) + \varepsilon_{m0}\right]^2 + w_{m0} + \sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{m0}\right) \\ &= \sigma\varepsilon_{m0} - w_{m0} \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

or:

$$\sigma \geq \frac{w_{m0}}{\varepsilon_{m0}} = \sigma_c. \quad (19)$$

Therefore, phase transformation from austenite to martensite is admissible only if the stress is at or above the Maxwell stress level. Of course, the relative position of martensite with respect to austenite does not change the result. A completely analogous reasoning leads to the conclusion that the inverse transformation, from martensite back to austenite, is possible only if the stress level is at or below the Maxwell stress σ_c . In summary, we have:

$$\text{Transformation from austenite to martensite is admissible} \Leftrightarrow \sigma \geq \sigma_c, \quad (20)$$

$$\text{Transformation from martensite to austenite is admissible} \Leftrightarrow \sigma \leq \sigma_c. \quad (21)$$

5. The stress-strain curve in terms of mean strains

The stress response function (8), defined at meso-scale level, allow the description of coexisting phases. Nevertheless, it does not agree qualitatively with stress-strain curves observed experimentally since, rather

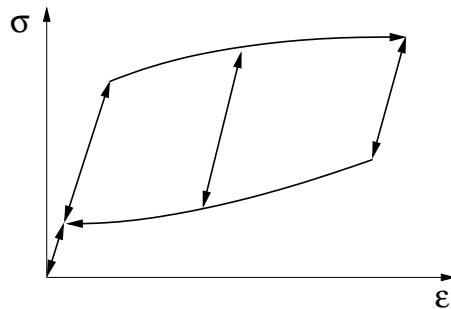


Figure 4. Stress-mean strain curve: macroscopic mechanical behavior in the presence of stress-induced phase transformation.

than exhibiting discontinuities, such stress-strain curves describe hysteresis loops during loading-unloading procedures, as illustrated schematically in Fig. 4. In order to establish an association between the stress-strain curves of Figs. 2.a and 4, we have to restate the mechanical response (8) in terms of the mean strain $\bar{\varepsilon}$, defined simply as:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u(L) - u(0)}{L}. \quad (22)$$

Given a stress level $\sigma \in [\sigma_M, \sigma_A]$, the corresponding strains ε_a and ε_m for the austenitic and the martensitic phases are given respectively by:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma}{E} \quad \text{and} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{m0}. \quad (23)$$

If $\theta_m \in [0, 1]$ is the volume fraction of the martensite in the medium, then:

$$u(L) - u(0) = \left(\int_{\theta_m L} \varepsilon_m dx + \int_{(1-\theta_m)L} \varepsilon_a dx \right) = \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{m0} \right) \theta_m L + \frac{\sigma}{E} (1 - \theta_m) L$$

and hence:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \theta_m \varepsilon_{m0}. \quad (24)$$

As a consequence, we can write the *stress-mean strain relation* as:

$$\sigma = E (\bar{\varepsilon} - \theta_m \varepsilon_{m0}), \quad \theta_m \in [0, 1]. \quad (25)$$

Now let us consider a tensile test with prescribed mean strain $\bar{\varepsilon}$, starting at $\bar{\varepsilon} = 0$, assuming that the material is initially at its austenitic phase ($\theta_m = 0$). The admissibility condition (20) precludes phase transformation from occurring while $\sigma < \sigma_c$. When the stress σ attains the value σ_c , then phase transformation becomes admissible but not mandatory: phase transformation could occur, but increase in the stress level without phase transformation also satisfies the admissibility condition. In order to overcome this multiplicity of possibilities at the stress level $\sigma = \sigma_c$, we build rules for actual phase transformations based on the following argument: “*At bifurcation points of configuration paths, a system undergoing quasi-static changes in its thermomechanical state always follows the path of minimum internal energy*”. In the specific case of our mechanical system, this argument applies as follows: the internal energy is given by:

$$\begin{aligned} V_{int} &= \int_{\theta_m L} \left[\frac{E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{m0})^2 + w_{m0} \right] dx + \int_{(1-\theta_m)L} \frac{E}{2} \varepsilon^2 dx \\ &= \frac{E}{2} \varepsilon_a^2 \theta_m L + w_{m0} \theta_m L + \frac{E}{2} \varepsilon_a^2 (1 - \theta_m) L \\ &= \frac{E}{2} \varepsilon_a^2 L + w_{m0} \theta_m L, \end{aligned} \quad (26)$$

but, since $\varepsilon_a = \sigma/E$, we can rewrite (26) as:

$$V_{int}(\sigma, \theta_m) = \left(\frac{\sigma^2}{2E} + w_{m0} \theta_m \right) L. \quad (27)$$

At a given mechanical state (σ, θ_m) , let us compute the rate of change \dot{V}_{int} in the internal energy corresponding to a rate of change $\dot{\bar{\varepsilon}}$ in the mean strain. If such a rate of change is performed under the assumption that $\dot{\theta}_m = 0$, i.e., no phase transformation occurs, then it follows from (27), together with (25), that:

$$\dot{V}_{int}(\sigma, \theta_m)_{\dot{\theta}_m=0} = \frac{\partial V_{int}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} L E \dot{\bar{\varepsilon}} = \sigma L \dot{\bar{\varepsilon}}. \quad (28)$$

On the other hand, if the rate of change in the internal energy takes place under the assumption that phase transformation occurs (at a constant stress level), then:

$$\dot{V}_{int}(\sigma, \theta_m)_{\dot{\sigma}=0} = \frac{\partial V_{int}}{\partial \theta_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{\varepsilon}} \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{w_{m0}}{\varepsilon_{m0}} L \dot{\bar{\varepsilon}} = \sigma_c L \dot{\bar{\varepsilon}}, \quad (29)$$

During loading ($\dot{\bar{\varepsilon}} > 0$), while $\sigma < \sigma_c$, the rate of change in the internal energy given by (28) is smaller than the corresponding rate given by (29). Thus, if we apply the argument of minimum energy path, the system

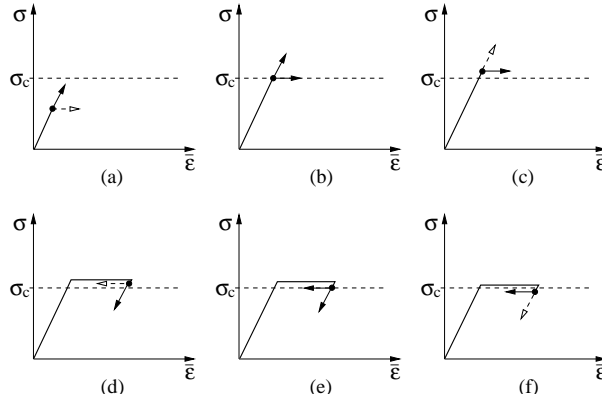


Figure 5. Path followed by the stress-strain curve, based upon the minimum internal energy criterion: (a) increase in stress, (b) direct phase transformation (from austenite to martensite) or increase in stress, (c) direct phase transformation, (d) decrease in stress, (e) inverse phase transformation (from martensite back to austenite) or decrease in stress, (f) inverse phase transformation.

will experience an increase in its stress level without undergoing any phase transformation, as is illustrated in Fig. 5.a. This is consistent with the thermodynamic admissibility condition (20). When the system attains the stress level σ_c , then both expressions (28) and (29) exhibit the same value $\sigma_c L \dot{\varepsilon}$ (Fig. 5.b). Any small increase in the stress above σ_c makes $\dot{V}_{int}|_{\dot{\sigma}=0} < \dot{V}_{int}|_{\dot{\theta}_m=0}$ and, as a consequence, the system follows the path of transformation from austenite to martensite, rather than continuing to increase the stress (Fig. 5.c). During unloading ($\dot{\varepsilon} < 0$), while $\sigma > \sigma_c$ (Fig. 5.d) we have $\dot{V}_{int}|_{\dot{\theta}_m=0} < \dot{V}_{int}|_{\dot{\sigma}=0} \leq 0$, meaning that a decrease in the stress level without phase transformation is expected since it leads to a faster decrease in the internal energy of the system. When the stress attains the value σ_c (Fig. 5.e), we have $\dot{V}_{int}|_{\dot{\theta}_m=0} = \dot{V}_{int}|_{\dot{\sigma}=0} \leq 0$ and hence both decrease in stress or transformation from martensite back to austenite are possible. For any stress level lower than σ_c (Fig. 5.f), the inequality $\dot{V}_{int}|_{\dot{\theta}_m=0} > \dot{V}_{int}|_{\dot{\sigma}=0} \leq 0$ imposes a phase transformation rather than a decrease in stress, so as to promote a faster decrease in the internal energy.

6. Hysteresis loops

If no further constraint is imposed on the mechanical model, the resulting stress-strain curve obtained during loading-unloading conditions (see Fig. 6.a) does not exhibit the hysteresis loops reported in the literature. In order to incorporate such dissipative behavior into our model, a constraint on the evolution of θ_m has to be imposed: even if $\dot{V}_{int}|_{\dot{\sigma}=0} < \dot{V}_{int}|_{\dot{\theta}_m=0}$, phase transformation cannot occur unless $|\sigma - \sigma_c| = R$, where R is a material parameter indicating the radius of the hysteresis domain. By considering a formalism usually adopted for the description of flow rules in classical plasticity, this constraint can be stated as:

$$\dot{\theta}_m = \lambda \frac{\sigma - \sigma_c}{|\sigma - \sigma_c|}, \quad (30)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (31)$$

$$f(\sigma) := |\sigma - \sigma_c| - R \leq 0, \quad (32)$$

$$\lambda f(\sigma) = 0. \quad (33)$$

meaning that phase transformation takes place whenever the quantity $\sigma - \sigma_c$ attains, in absolute value, the

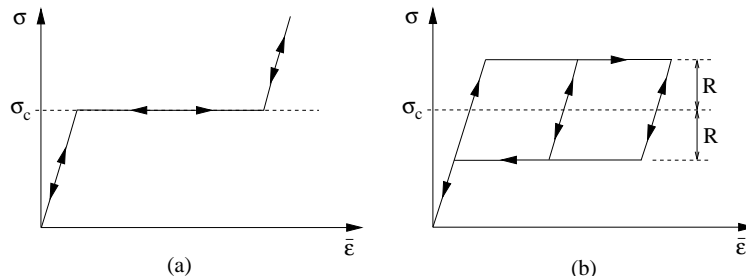


Figure 6. Stress-mean strain curve: (a) with no dissipation and (b) after consideration of constraint upon the evolution of the volume fraction of martensite.

level R . It is interesting to notice that, in the specific case of our model, the quantity $\sigma - \sigma_c$ is proportional to the Eshelby force observed at the phase interfaces:

$$[[\mathcal{E}(\sigma)]] = \sigma \varepsilon_{m0} - w_{m0} = (\sigma - \sigma_c) \varepsilon_{m0}, \quad (34)$$

which is the thermodynamic force corresponding to \dot{S} in expression (15) for the mechanical dissipation. The resulting stress-mean strain curve is illustrated in Fig. 6.b.

7. Concluding Remarks

We presented, in a very simple one-dimensional setting, a study on the mechanical behavior of materials undergoing stress-induced phase transformations, establishing a link between a nonmonotonous stress-strain curve (defined at a mesoscopic level) and the macroscopic stress response exhibiting hysteresis loops. Admissibility conditions, as stated by Abeyaratne and Knowles (1988), are not sufficient to explain the phase transformation processes. Assumptions on minimum internal energy paths, together with constraints on the phase transformations have to be taken into account.

8. Acknowledgments

This project was supported by CNPq under projects 520564/96-0 and 465046/00-2. These supports are gratefully acknowledged.

9. References

- Abeyaratne, R. & Knowles, J. K., 1988. "On the dissipative response due to discontinuous strains in bars of unstable elastic material", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 24, pp. 1021–1044.
- Duering T. W., Melton K. N., Stockel D., Wayman C. M. (eds), 1990, "Engineering Aspects of Shape-Memory Alloys", Butterworth-Heinemann, London.
- Ericksen, J. L., (1975), "Equilibrium of bars", *J. Elasticity*, Vol. 5, pp. 191–201.
- Eshelby, J. D., 1975. "The elastic energy-momentum tensor", *J. Elasticity*, Vol. 5, pp. 321–335.
- Falk, F., 1980. "Model Free Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys". *Acta Metall. Mater.* Vol. 28, pp. 1773–1780.
- Fu, S., Huo, Y. & Müller, I., 1994. "Thermodynamics of Pseudoelasticity — an Analytical Approach". *Acta Mech.* Vol. 99, pp. 1–19.
- Govindjee, S. & Hall, G. J., 1999. "A Computational Model for Shape Memory Alloys. *Int. J. Solids Struct.* Vol. 37, pp. 735–760.
- Gurtin, M. E., 1983. "Two-Phase Deformations of Elastic Solids". *Arch. Rat. Mech. Analysis*, Vol. 84, pp. 1–29.

PREFORM OPTIMIZATION OF 2D FORGED COMPONENTS USING SEQUENTIAL CONVEX PROGRAMMING

Pablo Andrés Muñoz-Rojas

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade do Estado de Santa Catarina
Campus Universitário Avelino Marcante
89223-100, Bom Retiro, Joinville – SC
dem2pmr@joinville.udesc.br

Jun Sérgio Ono Fonseca and Guillermo Juan Creus

PROMECA - Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Rua Sarmento Leite, 425
90050-170, Porto Alegre, RS
jun@ufrgs.br/creus@vortex.ufrgs.br

Abstract. This work presents a methodology for optimizing 2D forged components considering an elastic-plastic approach. The procedure is based on the integration of a general purpose preprocessor, a finite element nonlinear analysis code and a convex approximation optimization algorithm. A new objective function, developed by the authors, is described. The boundary to be optimized is parameterized by NURBS whose control points are taken as design variables. In order to obtain the optimum values for the design variables, the Globally Convergent Method of Moving Asymptotes (GCMMA) is adopted. Numerical results are presented showing the efficiency of the proposed methodology.

Keywords: metal forming, optimization, sequential convex programming

1. Introduction

Preform and die-shape optimization in metal forming has received much attention in latest years due to its potential direct impact on reducing manufacturing costs. Since the pioneering work of Park et al.(1983) there have been many attempts to develop a reliable and efficient procedure. Park and his colleagues proposed the “backward deformation simulation”, which tried to obtain the optimum initial die-shapes based on an heuristic backward analysis. In the 90’s, mathematical programming techniques started to take the place of heuristics and more complex problems became tractable. Two approaches can be distinguished in this regard: application of combinatorial and gradient based methods.

In combinatorial methods, independent situations are tested and the best one is retained. While this technique always converges to the global optimum, in nonlinear problems with many design variables its computational cost becomes unreasonably high. Nevertheless, in a near future, massive parallel computing may turn this approach competitive. Gradient based methods have the disadvantage of getting trapped in local minima; however, in nonlinear problems with many design variables, they give good results in a tolerable amount of time. For this reason, most real engineering problems are still being solved by this technique.

Grandhi, Chenot, Zabarar and Kobayashi lead research groups that have reported major contributions in gradient based metal forming optimization. More recently, Kleineremann (2000) analysed the convergence rate of different first order mathematical programming algorithms for preform and die-shape optimization.

2. Objective functions and design variables

In order to pose the preform optimization problem it is necessary to choose an objective function to be minimized and the associated design variables. For this purpose, Chenot et al. (1996), Wright and Grandhi (1999) and Badrinarayanan and Zabarar (1996) adopt variations of the following objective function, which is related to Fig. (1):

$$\Psi = \sum_{i=1}^N A_i^2 = \sum_{i=1}^N [(x_i - x_{0i})^2 + (y_i - y_{0i})^2] [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2] \quad (1)$$

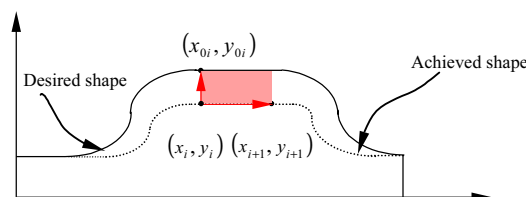


Figure 1. Objective function proposed by Chenot, Grandhi and Zabarar.

In Eq. (1) and Fig. (1), (x_i, y_i) are the coordinates of the i -th boundary node after deformation and (x_{0i}, y_{0i}) indicate the coordinates of the projection of this node on the desired boundary following the normal to the latest. To minimize the objective function given by Eq. (1), the boundary of the component is described by parameterized curves and the parameters are taken as design variables. If splines are adopted for parameterization, either control points or keypoints may be these parameters, as shown in Fig. (2).

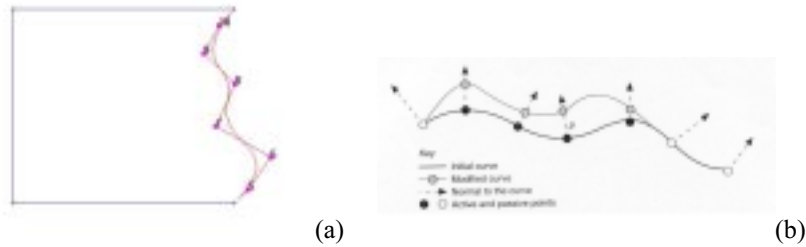


Figure 2. Boundary parameterization: (a) by control points; (b) by keypoints [extracted from Chenot (1996)].

After defining the shape and the boundary conditions on the geometric model, a finite element mesh is generated and the boundary conditions must be transferred to the discretized model. A finite element analysis may then be performed, allowing the evaluation of the objective function, as shown in Fig. (3). Figs. (3a) and (3b) show the initial trial preform before and after the forging process. In Fig. (3b) the desired final geometry is indicated and Fig. (3c) depicts the exact area that Eq. (1) approximates and should be minimized [it is easy to relate Fig. (3b) to Fig. (1)].

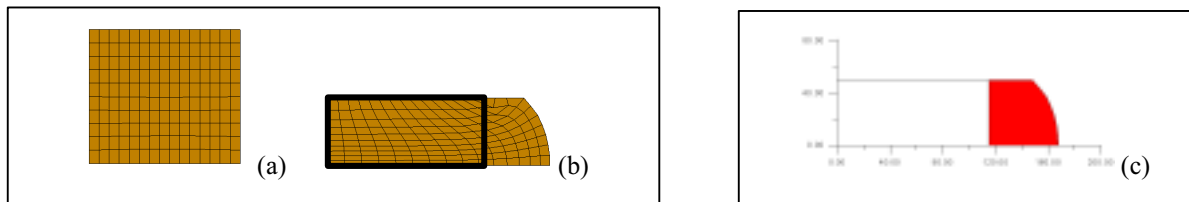


Figure 3. Objective function evaluation.

Kleinermann and Ponthot (1999) propose, as an alternative, to take as the objective function $S(\mathbf{x})$ the sum of the gaps defined by the distance between the nodes on the surface to be optimized after deformation and their projection on the desired shape boundary, as depicted in Fig. (4).

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)^T \text{ so that} \\
 & S(\mathbf{x}^*) = \sqrt{\frac{w_i}{n} \sum_{i=1}^n (gap_i(\mathbf{x}))^2} \text{ minimum}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

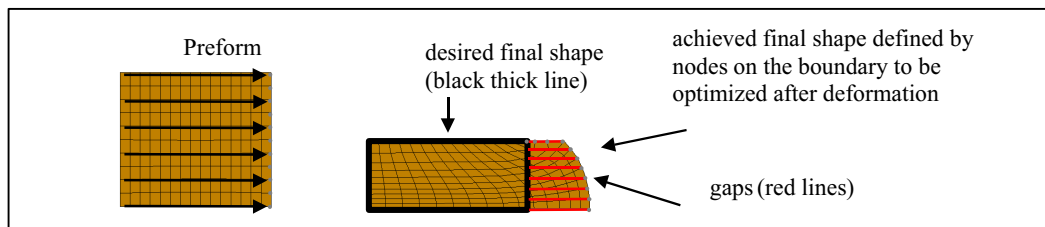


Figure 4. Objective function proposed by Kleinermann.

In Eq.(2) w_i is a user defined weight which may be applied to privilege the match of the geometries in a desired neighborhood and n is the total number of gaps considered. Nodal coordinates are taken directly as design variables.

Both objective functions, defined by Eqs. (1) and (2) have been used successfully in numerical applications. Nevertheless, Fig. (5) shows that in some cases it might not be possible to compute the proper projection of the nodes on the desired surface. The first problem is that there may be various orthogonal projections for the considered node. An improper choice can break down the procedure. This is illustrated in Fig. (5a) in which the shortest projection is the wrong one. The second problem is that even if the “right” projection is chosen, as in Fig. (5b), a zero objective function can be obtained in situations where there can still exist a considerable area that is far from the desired shape. This is shown in Fig. (5c).

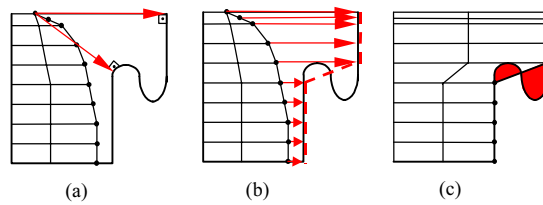


Figure 5. Drawback of the existing objective functions presented.

2.1. Proposed objective function and design variables

In order to address the problems of the objective functions presented, a different one was proposed by the authors (Muñoz-Rojas, 2000). It is essentially another way of evaluating the area approximated by Eq. (1). Firstly the boundary of the desired shape is approximated by a sequence of straight lines forming a polygon. The boundary of the deformed mesh also defines a polygon. Then, it is possible to perform an *exclusive or* boolean operation – the union minus the intersection - between these two polygons to obtain a third polygon. The proposed objective function is the square of the area of the third polygon, which will be called *xor area* in this text. Fig. (6) shows the effect of an *exclusive or* (*xor*) boolean operation. This procedure may be applied to evaluate accurately the area to be minimized in Fig. (3c).

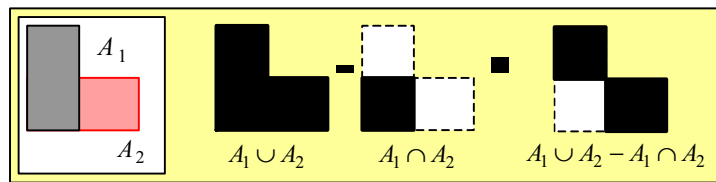


Figure 6. *Exclusive or* boolean operation.

The design variables are taken to be the control points of the splines as illustrated in Fig. (2a). This choice eases the introduction of tangent continuity constraints between two spline segments. Figure (7), extracted from Wang et al. (1999), shows that if D_n^1 is the last point of the first segment and D_0^2 is the first point of the second segment, the tangent continuity is assured if D_{n-1}^1 , $D_n^1 = D_0^2$ and D_1^2 are collinear. This defines a linear equality constraint.

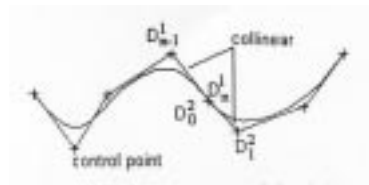


Figure 7. Tangent continuity by control points colinearity.

3. Proposed procedure of optimization

The present optimization procedure is composed of three main modules: the preprocessor, the finite element analysis code and the mathematical programming algorithm. These three modules are integrated by a managing code which has auxiliary routines to perform specific tasks such as, for instance, evaluating the objective function, constraints and necessary gradients. Each of these modules will be described below.

3.1. Module I: Preprocessor

The general purpose preprocessor GiD, developed at the Universidad Politécnic de Catalunya, is used to generate the geometric and finite element models. This software has the attractive feature to be easily customizable to prepare input data files for any external solver. GiD allows to define the shape of the component to be analyzed by NURBS, accepts the definition of boundary conditions on the geometric model, generates the finite element mesh and automatically transfers the required information. All the commands can be given in a batch file. Details about GiD’s customization are found in Muñoz-Rojas et al. (2000). The academic version of the program is available in internet at the address <http://gid.cimne.upc.es>.

3.2. Module II: Finite Element Analysis

In order to develop the analysis calculations, an elastic-plastic incremental finite element code called METAFOR is employed. This code was developed at the University of Liège by Hogge and co-workers (Ponthot and Hogge, 1991),

and is available at UFRGS by a cooperation agreement. The program may use either a Lagrangian or an Arbitrary Lagrangian Eulerian description, allows the consideration of different material and contact laws, thermo-mechanical coupling and damage, among other features. Furthermore, it was especially developed for 2D and 3D metal forming simulation. GiD's customization allows a direct generation of all the data necessary for METAFOR.

3.3. Module III: Mathematical Programming Algorithm

The third module consists of an appropriate mathematical programming algorithm which should be efficient and reliable. In early times, during the 60's and 70's, sequential linear programming (SLP) was widely used for structural optimization. Although this approach worked well in many cases, it used to generate intermediate unfeasible designs. Moreover, due to the linearization its convergence rate was frequently low and heuristic strategies had to be adopted to define proper move limits for the design variables. A previous work by the authors (Muñoz-Rojas et al., 2000) applied SLP together with the procedure presented in this paper for preform optimization. Convergence was achieved but the mentioned difficulties showed up, motivating the search for a better mathematical programming algorithm.

Fleury and Braibant (1986) recommend that in structural optimization the algorithm should be conservative, meaning that intermediate designs should tend to stay inside the feasible region. Based on this idea they presented the CONLIN – convex linearization algorithm. In this approach, the method decides if the linearization is developed with respect to direct or reciprocal variables in order to obtain a conservative convex and separable approximation. Later on, Svanberg (1987) proposed the first version of the Method of Moving Asymptotes (MMA), which was followed by the its globally convergent versions (GCMMA) [Svanberg, 1995; Zillober, 1995 and Svanberg, 1999a,b]. These methods may be seen as extensions of CONLIN and also all use convex and separable approximations for the objective function and constraints. This allows to map the optimization problem to its dual space by means of explicit expressions. In the dual space there are only lateral constraints and the number of design variables is defined by the number of active constraints in the primal problem. Hence, in many structural cases it is very favorable.

In this paper, Svanberg's 1999 version of the GCMMA is adopted. Nevertheless, in order to introduce the convex approximation algorithms, a brief description of CONLIN, MMA and GCMMA will be presented based on the review made by Bruyneel and Vermaut (1998).

3.3.1. CONLIN – Convex Linearization

Let the direct and the reciprocal design variables be defined as x_i and $y_i = 1/x_i$ respectively. The function to be approximated, $g(x)$ is expanded in a Taylor series, as follows. The sum \sum_+ concentrates all the terms that contain a positive $\partial g/\partial x_i$ derivative. Accordingly, the sum \sum_- concentrates the terms in which this derivative is negative. Hence, an approximation to $g(x)$ centered in the k-th analysis point is given by

$$\tilde{g}(x) = g(x^k) + \sum_+ \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} (x_i - x_i^k) + \sum_- \frac{\partial g(x^k)}{\partial y_i} (y_i - y_i^k) \tag{3}$$

Developing the expression for $\partial g/\partial y_i$ one finds

$$\tilde{g}(x) = g(x^k) + \sum_+ \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} (x_i - x_i^k) - \sum_- (x_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^k} \right) \tag{4}$$

The choice of linearizing each term with respect to direct or reciprocal design based on the signal of $\partial g/\partial x_i$ is justified by the search of a conservative (more convex) approximation. A convex function must have positive second derivatives. It is easily observed that the first and second derivatives of $\tilde{g}(x)$ are given by

$$\frac{\partial \tilde{g}(x)}{\partial x_i} = \sum_+ \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} + \sum_- (x_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i^2} \right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \tilde{g}(x)}{\partial x_i^2} = -2 \sum_- (x_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i^3} \right). \tag{5-6}$$

Hence, for a convex approximation of $\tilde{g}(x)$ it is necessary that $\partial g(x^k)/\partial x_i$ be negative. If $\partial g(x^k)/\partial x_i$ is positive, the corresponding term in $\tilde{g}(x)$ will be concave, decreasing the approximation's conservativity. In this case, the term is linearized with respect to direct variables yielding a linear approximation, whose second derivative is null.

CONLIN's approximation greater conservativity with respect to the usual linear approximation employed in SLP is shown in Fig. (8). It is clear that CONLIN generates solutions more likely to be inside the feasible region.

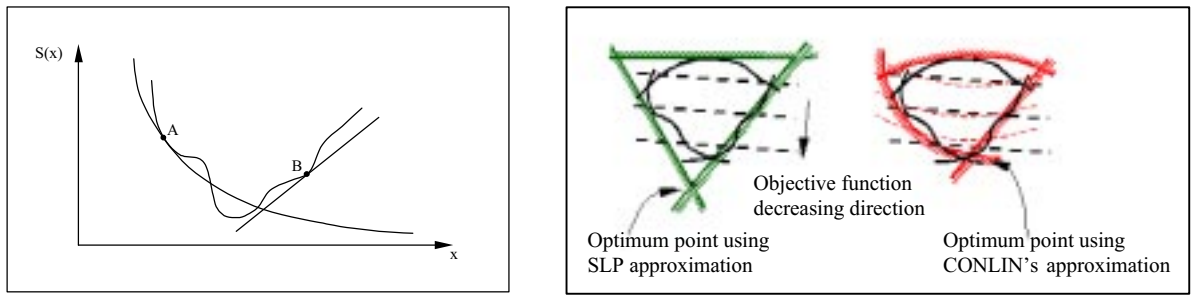


Figure 8. (a) CONLIN's function approximations at points A and B; (b) Conservativity: SLP × CONLIN.

One of the drawbacks of CONLIN is that although the functions approximations contain curvature, this is fixed. It would be desirable that the curvature approximations could be modified by the algorithm so as to fit more precisely the curvature of the original function. This consideration motivated the development of the Method of Moving Asymptotes.

3.3.2. MMA – Method of Moving Asymptotes

This method is an extension of CONLIN and also consists in a separable convex approximation. However, now intermediate variables are used for linearization which are given by $z_i = 1/(U_i - x_i)$ e $y_i = 1/(x_i - L_i)$. The original function $g(x)$ is thus linearized with respect to z_i for $\partial g(x^k)/\partial x_i > 0$ and to y_i for $\partial g(x^k)/\partial x_i < 0$. Hence,

$$\tilde{g}(x) = g(x^k) + \sum_+ \frac{\partial g(x^k)}{\partial z_i} (z_i - z_i^k) + \sum_- \frac{\partial g(x^k)}{\partial y_i} (y_i - y_i^k) \tag{7}$$

This time, developing the expressions for $\partial g/\partial z_i$ and $\partial g/\partial y_i$ one gets

$$\tilde{g}(x) = g(x^k) + \sum_+ (U_i^k - x_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{U_i - x_i} - \frac{1}{U_i^k - x_i^k} \right) - \sum_- (x_i^k - L_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i - L_i} - \frac{1}{x_i^k - L_i^k} \right) \tag{8}$$

or, in its more usual form,

$$\tilde{g}(x) = g(x^k) + \sum_+ p_i^k \left(\frac{1}{U_i - x_i} - \frac{1}{U_i^k - x_i^k} \right) + \sum_- q_i^k \left(\frac{1}{x_i - L_i} - \frac{1}{x_i^k - L_i^k} \right) \tag{9}$$

where

$$p_i^k = (U_i^k - x_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \quad \text{and} \quad q_i^k = -(x_i^k - L_i^k)^2 \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} \tag{10-11}$$

L_i and U_i are two parameters called *moving asymptotes*. They are mathematically constrained by the inequality $L_i^k < x_i^k < U_i^k$, so that a convex approximation is assured. If $L_i = 0$ and $U_i = +\infty$, the approximation particularizes to CONLIN. On the other hand, if $L_i = -\infty$ and $U_i = +\infty$, one gets the usual linear approximation used in SLP. A graphical representation of the MMA approximation is given in Fig. (9).

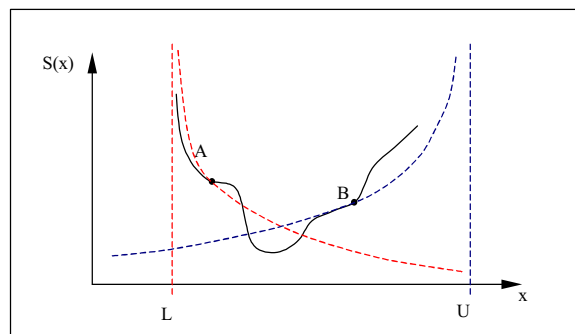


Figure 9. MMA convex approximation.

The most important feature of the MMA is that through the values given to L_i and U_i it is possible to increase or decrease the approximation's curvature. This is equivalent to having control over the convexity degree and conservativity of the approximation.

In order to obtain a stable and fast convergence, an appropriate rule for updating the moving asymptotes values is necessary. Svanberg (1987) proposes that during the first two iterations

$$L_i^k = x_i^k - s_0(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \text{ and } U_i^k = x_i^k + s_0(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \quad (12-13)$$

where \bar{x}_i and \underline{x}_i are the upper and lower limits of the i -th design variable and s_0 is a user defined parameter.

In the following iterations, if the optimization results oscillate, the asymptotes are relocated closer to the analysis point x^k , in order to stabilize the procedure. So, if the signals of $(x_i^k - x_i^{k-1})$ and $(x_i^{k-1} - x_i^{k-2})$ are different, then

$$L_i^k = x_i^k - s_1(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \text{ and } U_i^k = x_i^k + s_1(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) \quad (14-15)$$

On the other hand, if the convergence rate is slow and monotonic, the procedure may be relaxed by putting the asymptotes farther from the analysis point, x^k . Hence, if the signals of $(x_i^k - x_i^{k-1})$ and $(x_i^{k-1} - x_i^{k-2})$ are equal, then

$$L_i^k = x_i^k - s_2(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \text{ and } U_i^k = x_i^k + s_2(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) \quad (16-17)$$

where the values of s_0 , s_1 e s_2 are fixed, for instance, in 0.5, 0.7 e 1.2, as recommended by Svanberg. Clearly, other updating rules can be proposed.

3.3.3. GCMMA – Globally Convergent Method of Moving Asymptotes: Svanberg's 1995 version.

The original version of the MMA is not globally convergent. In some pathological situations this fact may lead to difficulties in its convergence. To cope with this problem, Zillober (1993) and Svanberg (1995, 1999a,b) presented modified versions of the MMA which show global convergence of the approximate problem.

The strategy presented by Svanberg in 1995 is simpler than the one proposed by Zillober and consists solely in a modification in the definition of the coefficients p_i and q_i of Eq. (9).

For an approximation centered in point x^k , one has

$$\text{if } \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} > 0, \quad \begin{cases} p_i^k = (U_i^k - x_i^k)^2 \left(\frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} + \frac{r_i^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \\ q_i^k = (x_i^k - L_i^k)^2 \frac{r_i^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{if } \frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} < 0, \quad \begin{cases} p_i^k = (U_i^k - x_i^k)^2 \frac{r_i^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \\ q_i^k = (x_i^k - L_i^k)^2 \left(-\frac{\partial g(x^k)}{\partial x_i} + \frac{r_i^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \end{cases} \quad (19)$$

where r_i^k are strictly positive parameters which are updated together with the asymptotes L_i and U_i . These terms create a second asymptote, yielding an approximation with a global minimum as depicted in Fig. (11).

The initial value for the parameter r_i may be calculated by

$$r_i^0 = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n \frac{|\partial g(x^0)/\partial x_i|}{\bar{x}_i - \underline{x}_i} \quad (20)$$

where n is the number of design variables.

According to Svanberg, the parameters r_i^k should be updated by

$$r_i^k = 2r_i^{k-1} \quad \text{if } g_i^{k-1}(x^k) < g_i(x^k) \quad \text{and} \quad r_i^k = r_i^{k-1} \quad \text{if } g_i^{k-1}(x^k) \geq g_i(x^k) \quad (21)$$

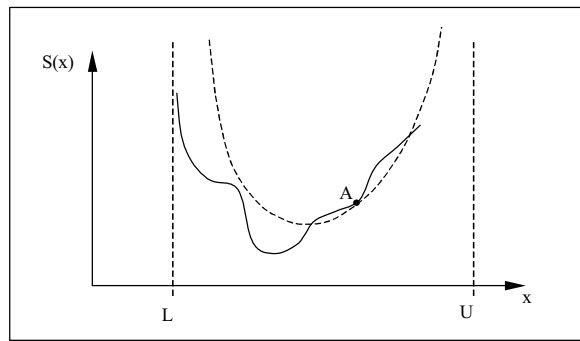


Figure 10. Convex approximation of the GCMMA.

3.3.4. GCMMA – Globally Convergent Method of Moving Asymptotes: Svanberg’s 1999 version.

Although the 1995 version worked well for a large number of structural problems, in some cases its performance did not show satisfactory because of slow convergence. Due to this, Svanberg (1999a) modified the algorithm defining an outer and an inner loop. At each outer loop iteration, the function values and their gradients are evaluated and the minimum of the approximated problem is found. If the approximated values of the objective function and constraints evaluated at the solution point are lower than the real ones, the solution is considered to be conservative enough and no inner iterations are needed. Conversely, if either the approximated objective function or a constraint have greater values than the real functions at the solution point, an iteration in the inner loop takes place. In this loop, the algorithm goes back to the last converged point in the outer iteration and heuristically decreases the curvature of the function that failed conservativity. In each inner iteration it is necessary to perform a finite element analysis at the solution point in order to check if the conservativity criteria has been achieved. No gradients are necessary in this stage. Usually a few inner iterations are necessary for convergence. With these modifications, the GCMMA became more efficient than the 1995 version. Mathematical convergence of the method can be proved as detailed in Svanberg (1999b).

3.3.5. Sequential Quadratic Programming (SQP)

One of the most popular algorithms for nonlinear programming for structural optimization is SQP. Although modern implementations of this method based in quasi-Newton procedures such as BFGS or DFP are very efficient, it has two main disadvantages when compared to the MMA. The first one is that for large optimization problems the memory necessary for the storage of the Hessian matrix may increase vastly. The second and most important one is that unless the Hessian is diagonal, the quadratic approximation of the objective function is not separable. This fact denies the possibility of obtaining an explicit relation between the primal and dual formulations (Duysinx et al., 2000). Although for problems with few design variables this does not represent a problem, it is a major disadvantage when the number of design variables increases, as for instance in topology optimization. Considering the characteristics of the problem presented in this work, SQP would be suitable. Nevertheless, the aim is to analyze the behavior of the GCMMA because of its greater range of applicability.

3.4. Managing code

A managing code was developed which calls modules I, II or III as needed. It is also composed of auxiliary routines that evaluate the objective function, constraints and gradients. The objective function is calculated with the aid of a 2-D boolean operations library developed by Alan Murta and available in internet at the address <http://www.cs.man.ac.uk/aig/staff/alan/alan-murta.html>. At the present stage, the sensitivity analysis is evaluated by forward finite differences. The perturbation on the design variables is taken as 10^{-3} times the length of the spline. A semi-analytical procedure for sensitivity evaluation is currently under development and will be the subject of a forthcoming article.

4. Numerical results

Three numerical examples are considered in this paper. All of them correspond to the upsetting of an axisymmetrical component. The examples include the cases of 20% and 50% height reduction with sticking and sliding friction. In all the cases, the initial shape of the optimum preform is defined to be 100 mm height while its radius is variable and unknown. To determine the optimal radius distribution, the boundary of the longitudinal section’s upper right quadrant is parameterized using 3 straight line segments and one spline. The spline is a NURBS of degree 3 defined by 7 control points which are taken as design variables. The initial trial design is set as a perfect cylinder of height 100 mm and radius 115 mm. The discretized model is made of a structured mesh containing 10×15 bilinear elements. This may be observed in Fig. (11), keeping in mind that the mesh is mirrored. In all the examples analyzed the effective plastic strain field is shown in the deformed meshes.

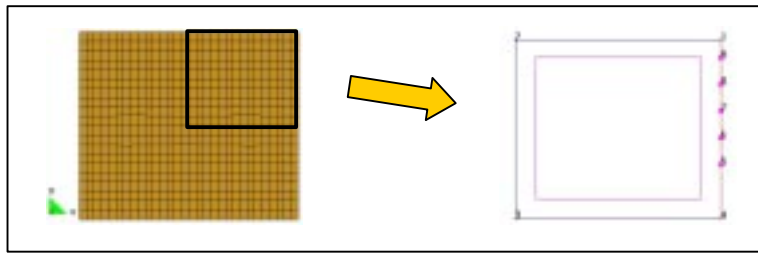


Figure 11. Initial trial preform before forging and parameterization of upper right quadrant.

4.1. Example 1.

This example considers a friction coefficient of 0.3 and 20% height reduction, that is, the desired final shape of the component is a perfect cylinder of height 80 mm and radius 115 mm. The shapes of the trial preform before and after forging are shown in Fig. (12).

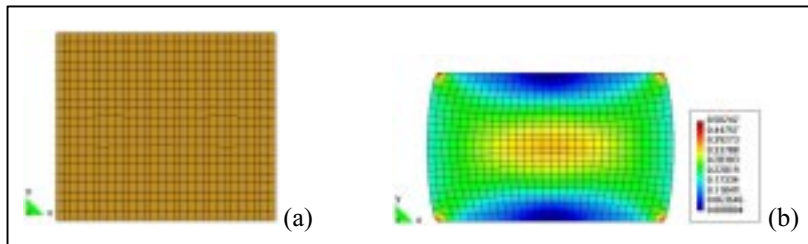


Figure 12. Initial trial preform: (a) before forging, (b) after forging.

In the optimization problem, a 0.1 mm minimum distance between successive control points was imposed as the only constraint. The average number of the internal loop iterations of the GCMMA was 4.72. Figure (13) presents the optimized preform, the corresponding forged shape of the component and the xor area convergence graph.

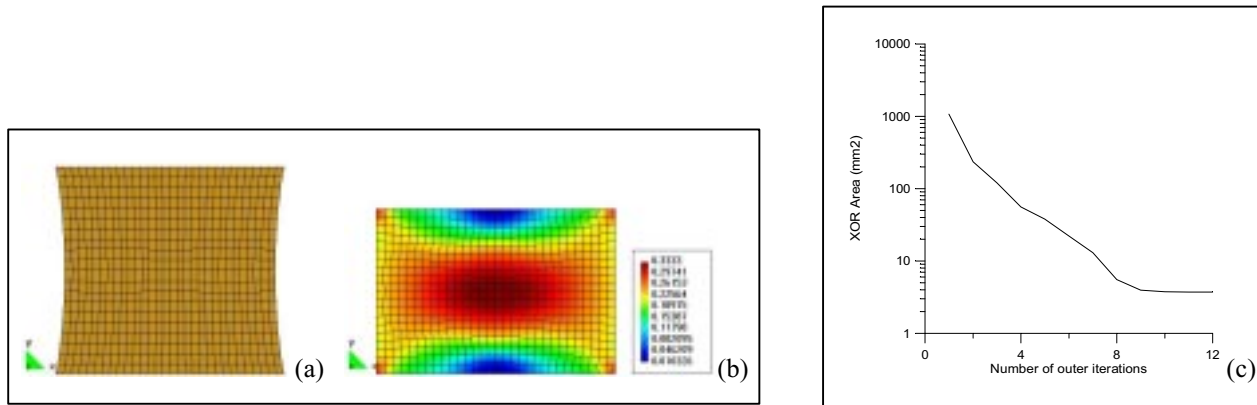


Figure 13. Optimized preform: (a) before forging, (b) after forging, (c) xor area convergence .

4.2. Example 2.

This example considers a 20% height reduction and sticking contact. The shapes of the trial preform before and after forging are shown in Fig. (14). The dashed lines illustrate the desired final shape.

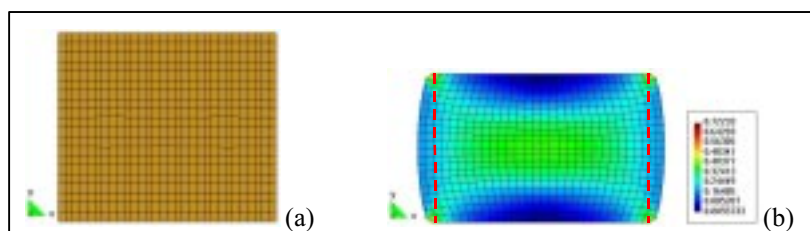


Figure 14. Initial trial preform: (a) before forging, (b) after forging.

The same constraints of Example 1 were imposed and the average number of the internal loop iterations of the GCMMA was 3.44. Figure (15) presents the optimized preform, the corresponding forged shape of the component and the xor area convergence graph.

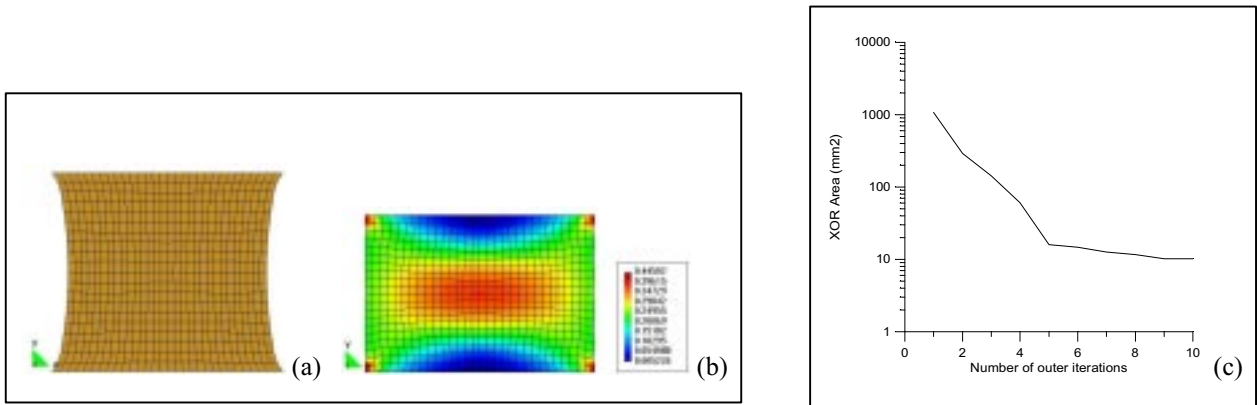


Figure 15. Optimized preform: (a) before forging, (b) after forging, (c) xor area convergence.

4.3. Example 3.

This example considers sticking contact and 50% height reduction. The desired final shape of the cylinder is thus 50 mm height and 115 mm radius. The shapes of the trial preform before and after forging are shown in Fig. (16). The desired final shape is also shown in the Figure.

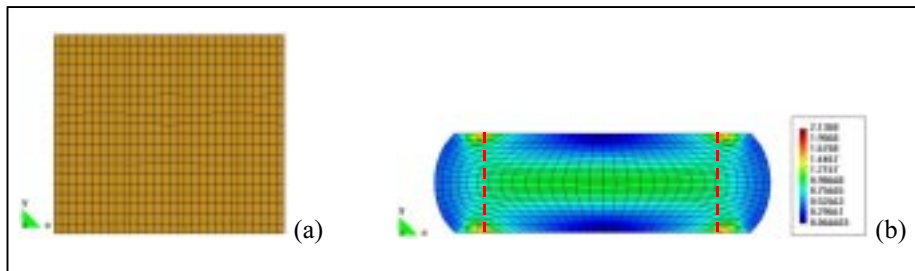


Figure 16. Initial trial preform: (a) before forging, (b) after forging.

The same constraints of Examples 1 and 2 were imposed and the average number of the internal loop iterations of the GCMMA was 5.77. Figure (17) presents the optimized preform, the corresponding forged shape of the component and the xor area convergence graph.

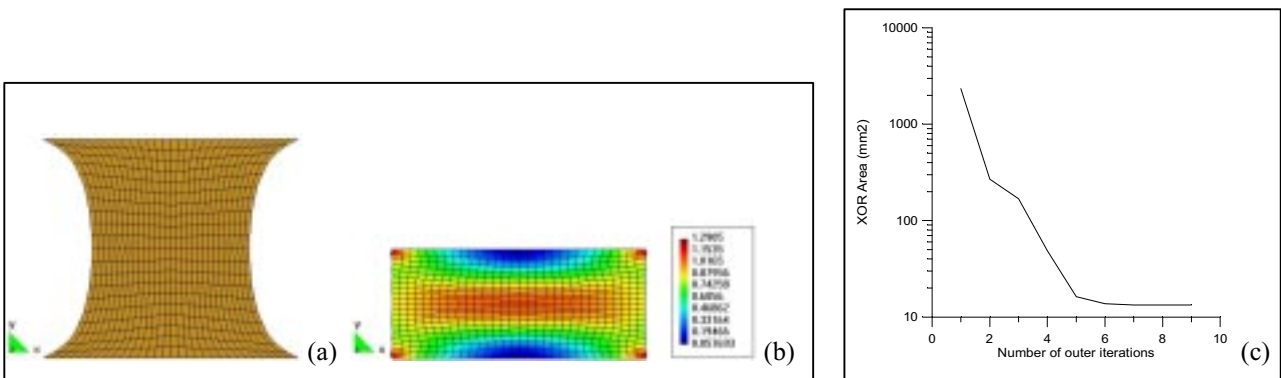


Figure 17. Optimized preform: (a) before forging, (b) after forging, (c) xor area convergence .

5. Concluding remarks

A successful procedure for optimizing 2D preforms in metal forming processes was developed using existent software and a managing program. The methodology uses a general purpose preprocessor (GiD), a finite element

nonlinear code (METAFOR) and a convex optimization algorithm (GCMMA) as independent modules. A new objective function based on an “*exclusive or*” boolean operation was proposed and successfully applied. Three numerical examples show the practicability of the approach. The efficiency of every optimization procedure is dictated by the gradients evaluation cost. In this work, the necessary gradients are calculated by finite differences but their evaluation by a general semi-analytical approach is currently under development.

6. Acknowledgements

CNPq and CAPES gave financial support to this work. Dr. Krister Svanberg, from The Royal Institute of Technology, Sweden, allowed the use of his GCMMA code and for provided related documentation. The first author thanks UDESC for the waving of his lecture duties while developing his doctoral studies. The contributions given by Dr. J.P. Kleinermann and Dr. P. Duysinx, from the University of Liège, Belgium, who supplied valuable research reports are also acknowledged.

7. References

- Badrinarayanan, S. and Zabarar, N., 1996, “A Sensitivity Analysis for Optimal Design of Metal-Forming Processes”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 129, pp. 319-348.
- Bruyneel, M. and Vermaut, O., 1998, “Approximation Concepts Approach in Structural Optimization: A Review”, Report OA-48, Aerospace Laboratory, LTAS, Université de Liège, Belgium.
- Chenot, J.L., Massoni, E. and Fourment, L., 1996, “Inverse Problems in Finite Element Simulation of Metal Forming Processes”, *Engineering Computations*, vol. 13, n° 2/3/4, pp. 190-225.
- Duysinx, P., Bruyneel, M. and Fleury, C., 2000, “Solution of Topology Optimizaton Problems with Sequential Convex Programming”, Lecture Notes, DCAMM.
- Fleury, C. and Braibant, V., 1986, “Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 23, pp. 409-428.
- Ponthot, J.P. and Hogge, M., 1991, “The Use of the Euler Lagrange Finite Element Method in Metal Forming Including Contact and Adaptive Mesh”, in: *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting*, Atlanta, USA.
- Kleinermann, J.P., 2000, “Identification Parametrique et Optimisation des Procèdes de Mise a Forme par Problemes Inverses”, Ph.D. Thesis, Université de Liège, Belgium.
- Kleinermann, J.P. and Ponthot, J.P., 1999, “Optimization Methods for Inverse Problems in Large Strain Plasticity”, Canadian Conference on Non-Linear Solid Mechanics – CanCNSM, Canada.
- Muñoz-Rojas, P.A.; Bittencourt, E.; Fonseca, J.S.O. and Creus, G.J., 2000, “Preform Optimization of 2D Forged Components Using Sequential Linear Programming”, CILAMCE2000, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Park, J.J., Rebelo, N. and Kobayashi, S., 1983, “A New Approach to Preform Design with Finite Element Method”, *International Journal for Machine Tool Design Research*, vol. 23, pp. 71-79.
- Svanberg, K., 1987, “Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 24, n° 2, pp. 359-373.
- Svanberg, K., 1995, “A Globally Convergent Version of the MMA without Linesearch”, First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization – WCSMO1, Goslar, Germany.
- Svanberg, K., 1999a, “The MMA for Modeling and Solving Optimization Problems”, Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization – WCSMO3, Niagara Falls/Amherst, New York, USA.
- Svanberg, K., 1999b, “A New Globally Convergent Version of the Method of Moving Asymptotes”, Internal Report, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- Zillober, C., 1993, “A Globally Convergent Version of the Method of Moving Asymptotes”, *Structural Optimization*, 6, pp. 166-174.
- Wang, X., Zhou, J. and Hu, Y., 1999, “A Physics-Based Parameterization Method for Shape Optimization”, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175, pp. 41-51.
- Wright, E. and Grandhi, R.V., 1999, “Integrated Process and Shape Design in Metal Forming with Finite Element Sensitivity Analysis”, *Design Optimization: International Journal for Product and Process Improvement*, vol. 1, no 1, pp. 55-78.

MEDIÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS EM JUNTAS SOLDADAS POR
FRICÇÃO RADIAL

Rosa Irene Terra Pinto

rosa@demet.ufrgs.br

UFRGS – Av. Osvaldo Aranha, 99 – Sala 610 - Porto Alegre, RS, Brasil

Alexandre Meirelles Pope

apope@cenpes.petrobras.com.br

Petrobras / CENPES – Quadra 7 – Ilha do Fundão - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Telmo Roberto Strohaecker

telmo@demet.ufrgs.br

UFRGS – Av. Osvaldo Aranha, 99 – Sala 610 - Porto Alegre, RS, Brasil

Resumo Um processo de soldagem não convencional e pouco explorado vem sendo proposto como o de risers rígidos em aço API 5L X80: é o processo de soldagem radial por fricção. O nível de tensões residuais remanescentes após a fabricação de juntas tubulares soldadas por fricção. Isto porque o comportamento mecânico de componentes e equipamentos pode ser afetado por tensões residuais originadas nos processos de fabricação. Isso faz com que o conhecimento das mesmas seja essencial para a realização de análises de integridade estrutural. As medições foram feitas nas faces interna e externa de duas juntas soldadas u

1 Introdução

Há alguns anos a indústria da prospecção de óleo e gás detectou a necessidade de desenvolver alternativas aos risers flexíveis devido ao crescente aumento das profundidades de operação [11]. Além disso, as linhas flexíveis são complexas do ponto de vista construtivo, o que dificulta a previsão do seu comportamento dinâmico [8]. O comportamento dinâmico de uma linha flexível é particularmente importante durante a instalação, quando podem ocorrer problemas que comprometem a linha inteira, uma vez que estes componentes são fabricados em peça única, enrolados em carretéis e lançados ao mar. Outro aspecto importante é o maior custo dos dutos flexíveis em relação aos rígidos.

Portanto, a alternativa mais econômica é o emprego de risers rígidos em aço [11], o que implica na necessidade de utilizar aços de média a alta resistência que, no entanto, apresentam baixa soldabilidade. A viabilização da construção de dutos submarinos em aço para águas profundas e ultra-profundas impõe algumas restrições:

- o processo de soldagem deve ser confiável, seguro e econômico;
- o duto submarino deve resistir aos esforços de lançamento.

Os esforços de instalação ou de lançamento de um duto ao mar são de dois tipos: esforço de tração devido ao peso próprio e esforços devido ao dobramento imposto aos dutos pelos métodos de transporte e de instalação ou lançamento. Geralmente os dutos são soldados em terra, enrolados em carretéis e conduzidos até o local de de instalação, onde são desenrolados e retificados antes do lançamento [9]. Os dutos também podem ser soldados no local mas, ainda assim, o posicionamento para o lançamento impõe dobramento nos mesmos [2] [5]. As técnicas mais utilizadas para lançamento são conhecidas como J-lay e S-lay, na qual a forma assumida pelo duto enquanto está posicionado para ser lançado é semelhante a um J e a um S, respectivamente. Tanto na etapa de transporte em carretéis quanto na etapa do lançamento propriamente dito, ocorre a deformação além do limite elástico por flexão nos dutos, induzindo tensões residuais.

Dentro deste quadro os processos de soldagem por fricção, bem conhecidos desde a década de 60 [3][4][6][7] pela facilidade de executar juntas de qualidade, inclusive quando se trata de soldar materiais dissimilares, apresentam-se como uma opção interessante.

As características básicas deste processo de soldagem são:

- o calor é gerado por atrito, devido ao movimento relativo entre as partes, as quais se encontram sob pressão;
- a soldagem é executada no estado sólido, excluindo a possibilidade da geração de quaisquer defeitos oriundos da solidificação ou pela ação de hidrogênio;
- a temperatura máxima é baixa em relação aos processos que envolvem fusão, não favorecendo o crescimento dos grãos;
- a alta taxa de deformação associada a temperatura elevada promove a ocorrência de um processo de recristalização dinâmica, gerando uma microestrutura de grãos finos.

A Figura 1 apresenta um esquema de uma solda por fricção radial. Neste processo, estabelece-se a união de três partes, dois tubos e um anel. Os tubos são mantidos fixos e o anel é quem recebe o movimento de rotação e o de avanço. Isto possibilita soldar elementos longos e obter dutos em qualquer comprimento desejado. Um mandril de sustentação, para impedir o colapso dos tubos devido a compressão aplicada radialmente, é posicionado dentro dos tubos durante a soldagem.

O calor é gerado pelo atrito entre o anel e os tubos. Conforme o calor flui através do material, este tem as suas propriedades mecânicas diminuídas e deforma-se sob compressão. Uma fina camada que se mantém na temperatura máxima do processo é constantemente expulsa, formando a rebarba. A macrografia da Fig. 2 mostra as linhas de deformação, demonstrando a intensa deformação plástica associada ao processo.

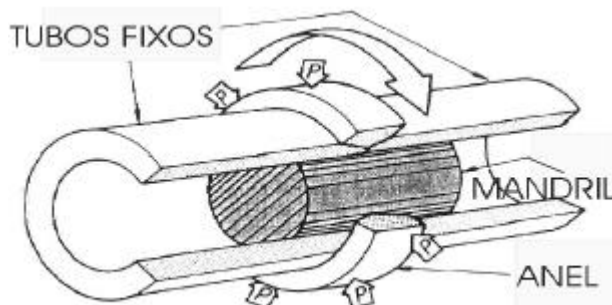


Figura 1 – Esquema da montagem dos tubos, anel e mandril de sustentação para soldagem por fricção radial.

Nesta condição, o comportamento do material é dependente da taxa de deformação, uma vez que a plastificação está associada ao fluxo plástico que, por sua vez, está associado ao gradiente térmico. Esta associação entre deformação e temperatura caracteriza o processo de soldagem por fricção como um processo termo-mecânico totalmente acoplado e faz com que a sua análise seja complexa.

Uma vez que o interesse é empregar tubos soldados por fricção radial na construção de risers, uma aplicação de extrema responsabilidade, é necessário reunir a maior quantidade de informações possíveis sobre as juntas soldadas.

A análise metalográfica das juntas soldadas por fricção radial mostra as linhas de deformação indicando um intenso fluxo de material e que não há a formação de nenhum tipo de defeito. O tamanho de grão original do material dos tubos é fino e mantém-se relativamente fino após a soldagem tanto junto às linhas de ligação entre os tubos e o anel quanto nas zonas afetadas pelo calor (ZAC).

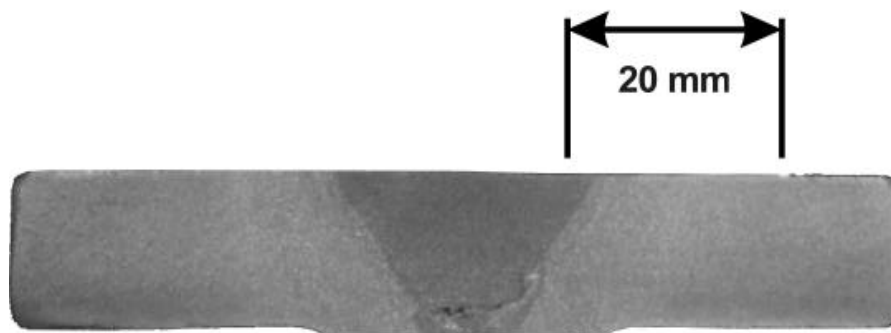


Figura 2 – Macrografia de uma junta soldada por fricção radial (ataque 25% de HNO₃ em água).

A importância de se avaliar as tensões residuais destas juntas está associada à natureza pouco convencional do processo de soldagem e a necessidade de estabelecer parâmetros que possibilitem controlar e melhorar o processo e o posterior tratamento térmico de alívio de tensões. Para isso, foram programados ensaios para medir as tensões residuais em duas amostras recebidas, denominadas PB-11 e PB-18.

Existem, portanto, duas formas de investigar tais processos:

- análise experimental, por meio da medição das tensões residuais após a soldagem;
- análise numérica, na qual é feita a simulação da seqüência de eventos executados até que a solda seja efetuada.

Neste trabalho é apresentado o resultado de medições das tensões residuais realizadas em duas juntas soldadas por fricção radial.

2 Materiais e Métodos

As amostras foram soldadas como descrito anteriormente, usinadas para retirar o excesso de material do anel e as rebarbas e tratadas termicamente. O tratamento térmico empregado consistiu de um aquecimento até 920°C seguido de um resfriamento em água e de um tratamento de revenido a 600°C por 3 minutos. Uma das amostras ainda foi deformada e retificada por esforço de flexão para simular o processo de lançamento destes dutos ao mar, o dobramento foi feito sobre uma forma com 7,83m de raio e a retificação foi feita sobre uma forma com 20m de raio.

O método empregado para medir as deformações residuais foi o método do furo cego, utilizando o equipamento específico para fazer os furos e o equipamento para adquirir os dados (deformações fornecidas pelas rosetas de extensômetros tipo KFG-1.5-120-D28-11).

Em cada uma das amostras foram realizadas medições externa e internamente. O esquema da Fig. 3a mostra as posições de medição ao longo do eixo longitudinal da junta soldada, as quais correspondem ao centro do anel (interno e externo), a linha de ligação entre o anel e os tubos (somente externo) e a ZAC (somente externo), e na Fig. 3b estão mostradas as posições dos pontos de medida ao longo da circunferência das juntas. Estas coincidiram com as marcações feitas durante a execução das soldas, 0°, 90°, 180° e 270°.

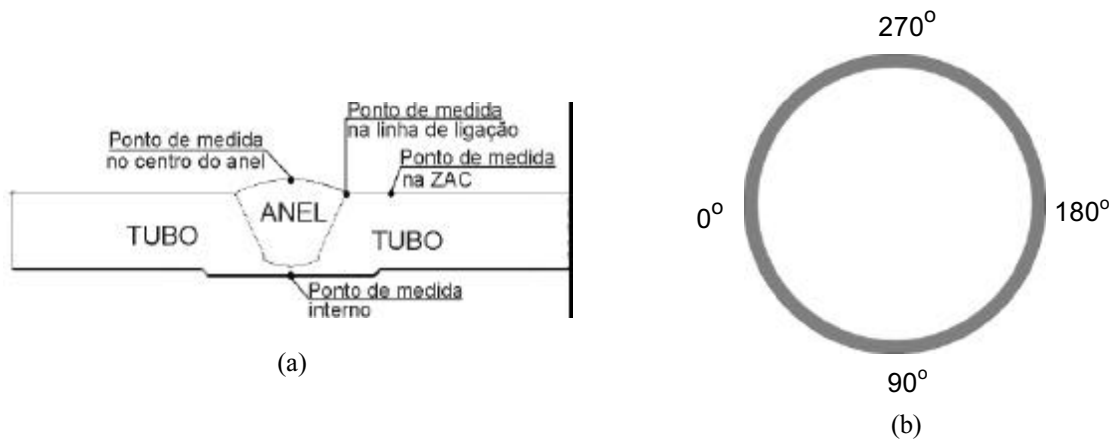


Figura 3 – Esquema das posições em que as tensões residuais foram medidas: (a) pontos de medida ao longo do eixo da junta soldada e (b) posições ao longo da circunferência das peças.

As amostras analisadas foram denominadas PB-11 e PB-18. A mostra PB-11 foi soldada, tratada termicamente após a solda e deformada para simular a operação de lançamento dos dutos submarinos e a amostra PB-18 foi apenas soldada e tratada termicamente após a soldagem.

A montagem de um ensaio é mostrada na Fig. 4. Na Figura 5 é apresentado o detalhe de uma medição realizada na superfície interna da junta.



Figura 4 – Montagem do ensaio para medição interna e do sistema de aquisição de dados.

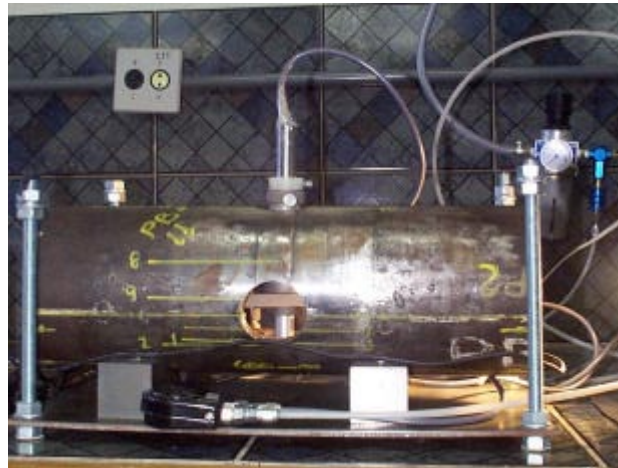


Figura 5 – Montagem do ensaio para medição interna: o Drill Hole posicionado dentro do tubo.

3 Resultados

Os resultados dos ensaios de tensões residuais estão apresentados nas figuras 6 a 10, onde estão indicados os valores de tensão residual principal máxima (σ_{max}) e mínima (σ_{min}) na sua posição. A direção das tensões principais máximas obtidas nestes ensaios corresponde, aproximadamente, a direção longitudinal e a direção das tensões principais mínimas corresponde, aproximadamente, com a direção das tensões residuais circunferenciais. O ângulo de defasagem entre as direções principais e as direções circunferencial e longitudinal das juntas soldadas está em torno de 6° .

A Figura 6 mostra os valores de tensões residuais medidos interna e externamente no centro do anel da amostra não deformada PB-18. A Figura 7 dá os valores de tensões residuais obtidos sobre a linha de ligação entre o anel e o tubo e a Fig. 8 mostra as tensões residuais obtidas na ZAC.

Os resultados obtidos nos ensaios da amostra PB-11, tubo deformado, são apresentados nas figuras 9 e 10. A Figura 9 refere-se as tensões residuais obtidas interna e externamente sobre a linha média do anel e a Fig. 10 mostra as tensões obtidas na zona afetada pelo calor desta amostra.

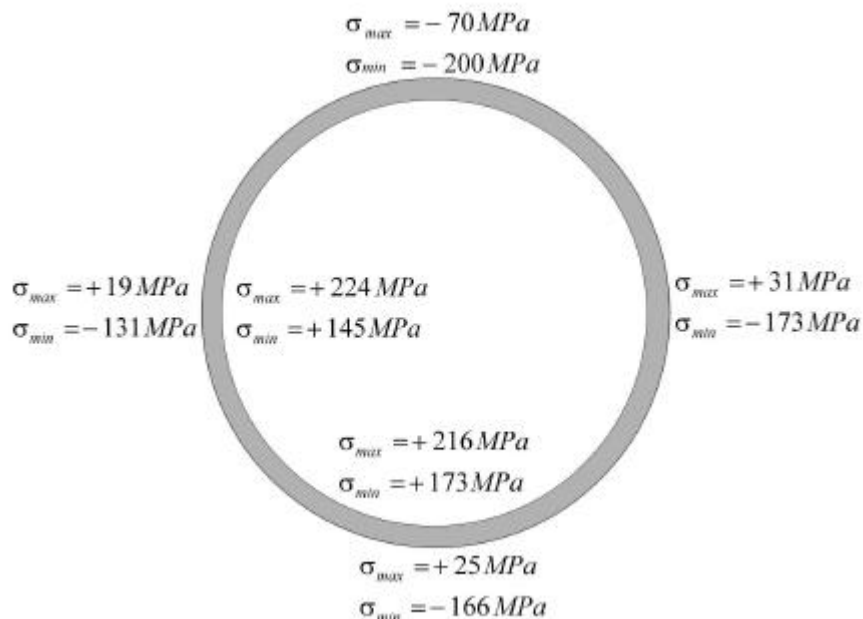


Figura 6 – Tensões residuais obtidas nas circunferências interna e externa sobre o anel da amostra PB-18 (não deformada).

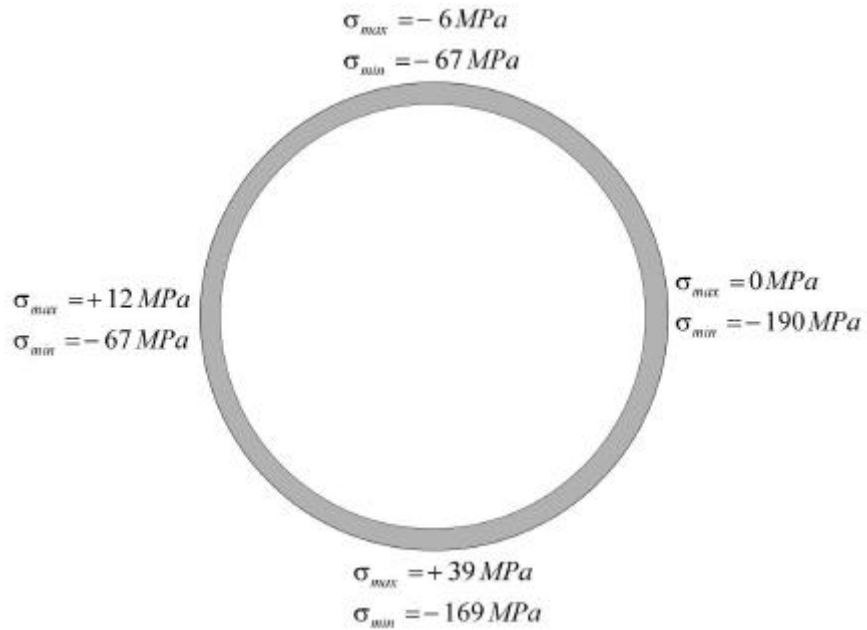


Figura 7 – Tensões residuais externas obtidas sobre a linha de solda da amostra PB-18 (não deformada).

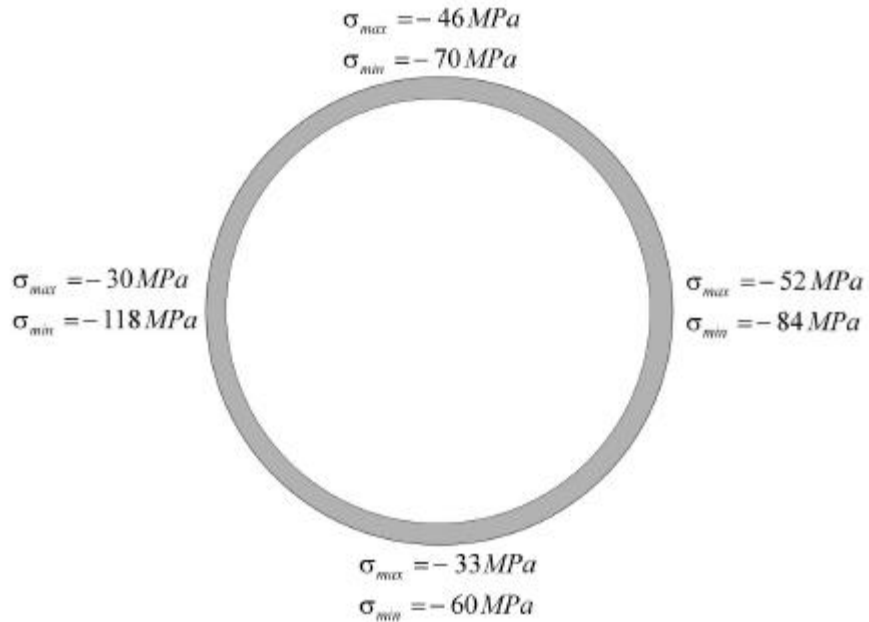


Figura 8 – Tensões residuais externas obtidas na zona afetada pelo calor da amostra PB-18 (não deformada).

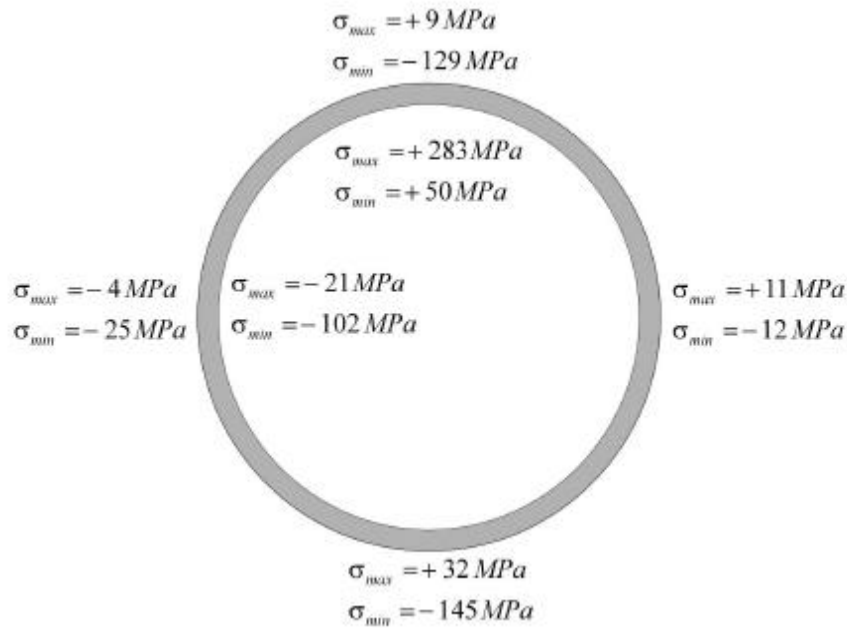


Figura 9 – Tensões residuais obtidas nas circunferências interna e externa sobre o anel da amostra PB-11 (deformada).

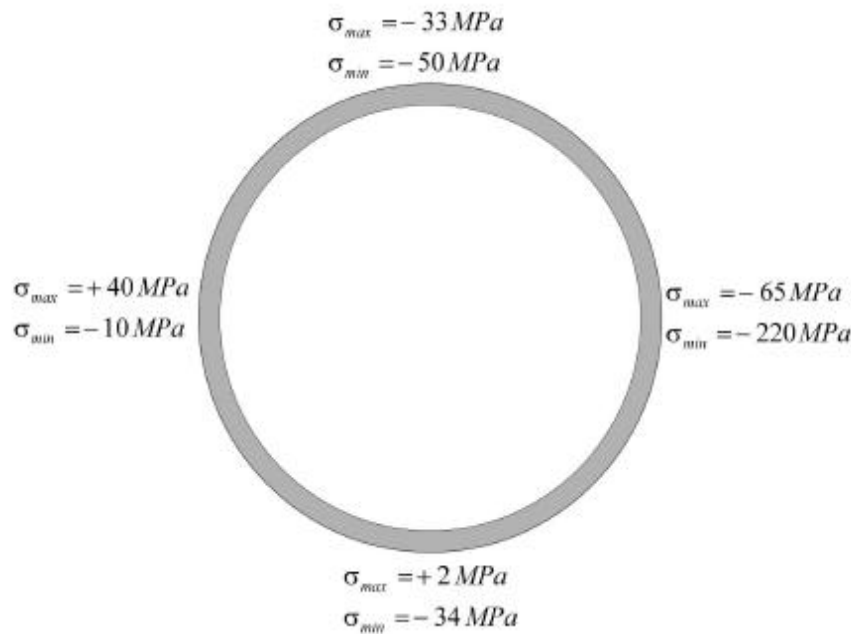


Figura 10 – Tensões residuais externas obtidas na zona afetada pelo calor da amostra PB-11 (deformada).

4 Discussão

Inicialmente é importante lembrar que a direção das tensões principais máximas corresponde, aproximadamente, a direção longitudinal e a direção das tensões principais mínimas corresponde aproximadamente a direção das tensões circunferenciais, apresentando um ângulo de defasagem em torno de 6° entre elas.

A análise dos resultados dos ensaios de tensões residuais permite concluir e confirmar alguns pontos.

A simetria em torno do eixo longitudinal da junta, ou seja, simetria axial foi detectada pelos ensaios na amostra PB-18 (não deformada). Os resultados apresentados nas Figura 6, 7 e 8 demonstram esta tendência, sendo a diferença entre eles justificada pelo desalinhamento axial entre os tubos da junta. A tensão principal máxima resultou trativa e com valores entre 19 e 31MPa no centro do anel. O valor negativo para a posição superior (270°) externa deve-se, provavelmente, a algum esforço de impacto sofrido pela amostra durante transporte. A tensão principal mínima resultou compressiva, variando entre trativa -131 e -173 MPa. A tendência a axi-simetria é confirmada também pelos resultados nos pontos internos de medida, os quais resultaram tensões residuais trativas.

Sobre a linha de ligação foram encontrados valores compressivos de tensão residual (Fig. 7), o que dificulta a propagação de defeitos. Uma vez que a ligação entre as partes se dá em um plano, esta é a região da junta soldada com maior probabilidade de apresentar defeitos. Logo, se as tensões residuais são compressivas na superfície externa deste plano de ligação, a propagação de eventuais defeitos será dificultada ou impedida. De qualquer forma, há uma diferença nos resultados das quatro posições. Isto se deve, principalmente, ao posicionamento dos extensômetros, uma vez que o objetivo era fazer os furos sobre a linha de solda, a qual, além de não estar bem definida, ainda apresentava irregularidades devido a usinagem para retirada do excesso de material do anel e da rebarba.

As tensões calculadas a partir dos ensaios realizados sobre uma circunferência na ZAC estão mostrados na Figura 8. As tensões principais são baixas, compressivas e variam entre extremos próximos em cada ensaio. Há uma oscilação maior nos valores das tensões principais mínimas. Estas variações ocorrem, provavelmente, em função do posicionamento dos extensômetros, os quais são direcionais e, portanto, sensíveis à posição.

A amostra PB-11 foi deformada e retificada após a operação de soldagem, como descrito anteriormente. Como a deformação foi imposta por um esforço de flexão, esperava-se detectar pelos resultados das tensões residuais qual foi o plano de flexão e qual é a influência deste procedimento nas tensões residuais.

A análise dos resultados referentes à circunferência na linha média externa do anel, Figura 9, mostra que o efeito da simetria axial foi comprometido, uma vez que não há uma mesma tendência em todas as posições. Pela comparação dos resultados ponto a ponto entre as duas amostras, é possível determinar que o plano neutro ao dobramento foi o plano que passa pelas posições 90° e 270°. Pode-se ainda determinar que o tubo foi dobrado no sentido de 180° para 0° e retificado em sentido inverso, pois as tensões residuais calculadas para a posição 0° resultaram compressivas e para 180°, trativas, indicando que o esforço sofrido tinha o sinal oposto. As tensões resultantes dos ensaios na superfície interna da junta na posição sobre o plano neutro ao dobramento apresentam-se semelhantes as medidas na amostra não deformada (PB-18), enquanto na posição 0° houve a inversão do sinal e uma redução considerável em seu módulo.

As mesmas observações podem ser feitas pela análise dos resultados referentes à circunferência na ZAC, na qual há uma inversão no comportamento da tensão principal máxima em 0° de compressiva na amostra não deformada PB-18 (Fig. 8) para trativa na amostra deformada PB-11 (Fig. 10). Nas demais posições as tensões mantiveram-se compressivas.

A consideração das tensões residuais em projeto ou verificação de integridade estrutural é feita pela composição das tensões, isto é, pela soma algébrica das tensões residuais e das tensões devido aos esforços externos. A tensão equivalente resultante desta composição é então comparada com a tensão de escoamento indicando o nível de segurança do componente.

5 Conclusões

A partir dos resultados dos ensaios realizados foi possível concluir que o nível de tensões imposto pelo processo de soldagem radial por fricção é baixo e, especificamente sobre a linha de ligação entre o anel e os tubos, é favorável por apresentar tensões compressivas tanto na direção longitudinal quanto na direção circunferencial.

Além disso, a análise dos resultados obtidos nos ensaios feitos na amostra previamente deformada pela simulação do processo de lançamento permitiu observar que as deformações permanentes impostas pela flexão das juntas soldadas alteram a distribuição de tensões residuais. No entanto, as tensões residuais resultantes após o dobramento permanecem favoráveis, isto é, em qualquer ponto de medição não foram obtidas tensões residuais trativas consideráveis, isto é, as máximas tensões residuais trativas obtidas são inferiores a 10% do limite de escoamento do material dos tubos.

A presença de tensões residuais compressivas na direção longitudinal é favorável, pois geralmente este é o sentido da abertura das trincas que surgem em *rises* em operação, já que o principal carregamento imposto nestes componentes é tração longitudinal.

Finalmente, segundo recomendações internacionais [10], as tensões residuais obtidas podem ser consideradas em análises de integridade estrutural posteriores e, sendo os valores das tensões trativas baixos, pode-se afirmar que o processo de soldagem por fricção radial atende aos requisitos para a fabricação de dutos submarinos, inclusive de *rises* rígidos neste item.

6 Sugestões

Na parte de análise experimental é recomendável realizar ensaios de tensões residuais sobre a linha de ligação entre o anel e os tubos de uma amostra deformada, os quais não foram feitos na amostra PB-11 devido à condição inadequada da superfície nesta posição.

Por outro lado, é possível completar a análise do processo de soldagem radial por fricção através da simulação do processo pelo método de elementos finitos, obtendo-se a distribuição de tensões residuais geradas e até mesmo variar parâmetros de processo a fim de melhorar as juntas fabricadas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio logístico da Petrobras, Stolt Offshore e GKSS sem o qual não seria possível realizar este trabalho.

Referências:

1. Manteghi, S. Some Fatigue Tests on Friction Welded Steel Bars. TWI Ref. 7210.01/93/759.3.
2. Dunkerton, S.B., Johansen, A., Frich, S. Radial Friction Welding for Offshore Pipelines. *Welding of Pipelines*, Vol. 2, Novembro, 1986.
3. Nicholas, E.D. Fabrication by Friction. *Engineering*, Abril, 1985.
4. Nicholas, E.D. Radial Friction Welding. *Welding Journal*. Julho, 1983.
5. Dunkerton, S.B., Johansen, A., Frich, S. Radial Friction Welding for Offshore Pipelines. *Welding Journal*. Julho, 1987.
6. Hazlett, T.H. Fundamentals of Friction Welding. *Metals Engineering*. Fevereiro, 1967.
7. Cellier, J. Soudage par Friction Radiale de Profiles Creux. *Machine Moderne*. Maio, 1979.
8. Narzul, P., Dumay, J.M., Rigaud, J. Contribution of Flexible Pipes and Riser Systems to the Development of Subsea Hydrocarbon Resources, Offshore Technology Conference, EUA, 1997.
9. Vines, M.J., Brownrigg, A., Langfield, G. Pipe Reeling – Effect on the Properties of Welded Pipe. *Welding and Performance Pipelines*. Vol. 1, pp. 18-21, Londres, UK, 1986.
10. Stacey, A., Barthelemy, J.Y. Incorporation of Residual Stresses into the SINTAP Defect Assessment Procedure. *Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 1998.
11. Ishikawa, N. et al, High Performance Steel Pipes for Offshore Structures. *Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 1998.

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE NOVOS ESQUEMAS DE AVANÇO NO TEMPO EM PROBLEMAS DE ELASTODINÂMICA FORMULADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM DUPLA RECIPROCIDADE

Gustavo Adolfo Velázquez Castillo

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil
velaznet@bol.com.br

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil

Resumo. A formulação com Dupla Reciprocidade é uma das mais importantes técnicas de modelagem do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Apesar do bom desempenho em termos gerais, particularmente no caso dos difíceis problemas de propagação de ondas sob cargas de impacto, o controle dos altos modos demanda ainda grande atenção. Devido à formulação mista, os deslocamentos são calculados simultaneamente com as tensões e a influência de altos modos mal representados pode distorcer bastante a resposta numérica. A saída mais comum tem sido usar esquemas de avanço no tempo com amortecimento fictício fazendo o controle da taxa de dissipação exclusivamente pela magnitude do passo de integração. Com a finalidade de aprimorar a resposta das tensões, o presente trabalho apresenta os resultados obtidos com três esquemas portadores de controle paramétrico de amortecimento: o conhecido esquema Wilson θ , método HHT α e o recente esquema de autoria de Chung-Lee. Avaliou-se a qualidade da resposta através da simulação de dois exemplos da dinâmica escalar que possuem solução analítica. Foram examinados a influência do refinamento da malha, do valor do passo de integração e o efeito da variação de diversos parâmetros pertinentes aos esquemas citados.

Palavras chave: Elastodinâmica escalar, Métodos Numéricos, Método dos Elementos de Contorno, Dupla Reciprocidade

1. Introdução

A Dupla Reciprocidade, uma técnica do MEC inicialmente idealizada para a resolução de problemas de vibração livre (Nardini e Brebbia, 1982), motivou numerosos trabalhos de pesquisa que objetivam criar modelos capazes de gerar resultados satisfatórios no estudo de problemas dinâmicos e desta maneira fornecer novas alternativas nesta importante classe de problemas.

A utilização da Dupla Reciprocidade permite a obtenção de um sistema de equações matriciais de forma análoga à resultante da aplicação do MEF, com a diferença de que nenhuma integração no domínio é efetuada. Por outro lado, o avanço temporal no MEC exige a utilização de esquemas portadores de amortecimento fictício, capazes de filtrar a presença de modos elevados mal caracterizados. Nos casos mais comuns da dinâmica estrutural, os modos mais altos não participam da solução e sua eliminação em nada prejudica a resposta. O problema passa a ser crítico quando a resposta de fato possui um conteúdo modal mais elevado, como os casos transientes relacionados ao impacto e à propagação de ondas (Loeffler et al, 1991), pois a inclusão de amortecimento geralmente acarreta diminuição na precisão das respostas.

Neste trabalho serão apresentados os resultados concernentes a dois problemas escalares bidimensionais submetidos a carga de impacto. A escolha deste tipo de solicitação é importante para avaliação do desempenho do método, pois a resposta do carregamento é de difícil representação, especialmente na avaliação das forças de superfície.

2. Equações básicas

Considere a equação que governa a propagação de ondas em meios elásticos homogêneos, dada por:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

Onde u é o deslocamento e c é a velocidade de propagação da onda. Os sistemas são constituídos de um domínio Ω (X), onde X representa as variáveis espaciais do campo, definido por um contorno Γ (X), sujeito às seguintes condições:

$$u(X, t) = \bar{u}(X, t) \quad \text{em } \Gamma_u(X) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(X, t)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}(X, t)}{\partial n} \quad \text{em } \Gamma_q(X) \quad (3)$$

De modo geral, $\Gamma_u(X)$ é a parte do contorno pertencente a $\Gamma(X)$ onde são prescritas as condições de contorno essenciais (deslocamentos); de forma complementar $\Gamma_q(X)$ representa as regiões onde são conhecidas as condições de contorno naturais (forças de superfície). A característica dinâmica do problema requer condições iniciais em $\Omega(x)$ do tipo:

$$u(x,0) = u_0(x); \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x) \tag{4}$$

3. Formulação integral básica do MEC

Inicialmente, escreve-se a equação (1) na forma integral, ponderada pela solução fundamental $u^*(\xi;x)$. Então, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \tag{5}$$

Por conveniência, utilizou-se a notação indicial e omitiram-se os argumentos. O lado esquerdo da equação (5) tem um desenvolvimento analítico bem conhecido na literatura (Loeffler,1988), que transforma a integral de domínio em integrais de contorno. A função $u^*(\xi;x)$, denominada solução fundamental, é a solução em um domínio infinito de uma equação de Poisson com termo fonte concentrado, representado por uma função delta de Dirac em $X=\xi$. Para problemas bidimensionais:

$$u^*(x; X) = -\frac{1}{2p} \ln r(x; X) \tag{6}$$

Sendo $r(\xi; X)$ a distância euclidiana entre o ponto ξ de aplicação de carga, denominado ponto forte, e um ponto X genérico do domínio, chamado ponto campo. Integrando-se por partes o lado esquerdo da equação (5), aplicando-se o Teorema da Divergência e utilizando-se as propriedades da função delta de Dirac, chega-se à seguinte expressão:

$$C(x) u(x) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \tag{7}$$

Mais detalhes em relação ao procedimento matemático utilizado, pode ser obtido nas referências tradicionais sobre o MEC, tais como (Brebbia, 1978) e (Brebbia et al,1984).

4. Aplicação da Dupla Reciprocidade

A integral de domínio do lado direito da equação (7) pode ser aproximada através de integrais de contorno utilizando o método da Dupla Reciprocidade (Partridge et al, 1992). Primeiramente, representa-se o deslocamento u por uma soma finita de funções, na forma:

$$\ddot{u}(X,t) \cong \ddot{a}^j(t) F^j(X), \quad j=1, 2, \dots, m \tag{8}$$

Tal procedimento assemelha-se a uma separação de variáveis, onde as funções F^j são arbitrárias. Uma opção adequada consiste na distância euclidiana entre dois pontos comumente denominada função radial simples. Conseqüentemente, a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{a}^j \int_{\Omega} F^j u^* d\Omega \tag{9}$$

Introduzindo-se funções $\psi^j(X)$, que são primitivas de $F^j(X)$, tais que:

$$Y_{,ji}^j = F^j \tag{10}$$

e substituindo-se a equação (10) na equação (9), pode-se efetuar operações análogas àquelas realizadas anteriormente para a equação de Laplace. Assim, após elaborado procedimento matemático:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{a}^j \left[-C(x) Y^j(x) - \int_{\Gamma} Y^j q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} h^j u^* d\Gamma \right] \tag{11}$$

$$\text{Onde } h^j = Y^j, n_i = \frac{\partial Y^j}{\partial n} \tag{12}$$

Finalmente tem-se a forma integral completa da equação de governo escrita em termos de integrais de contorno:

$$C(x)u(x) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = \left[C(x)Y^j(x) + \int_{\Gamma} Y^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} h^j u^* d\Gamma \right] \frac{\ddot{a}(t)}{c^2} \tag{13}$$

No seguinte passo efetua-se a divisão do contorno $\Gamma(x)$ em elementos discretos, em cada um dos quais os parâmetros do problema são considerados constantes, lineares ou quadráticos. Aqui será considerada apenas a formulação para elementos constantes. Ressalta-se que além dos deslocamentos u e as forças de superfície q serem considerados constantes ao longo de cada elemento, o mesmo ocorre com as funções Y^j e h^j , por simplicidade, pois poderiam ser calculados exatamente. Assim, a equação (13) pode ser escrita para cada elemento do contorno gerando um conjunto de equações que, utilizando a notação matricial, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$[H] [u] - [G] [q] = \frac{1}{c^2} \left\{ [H] [Y] - [G] [h] \right\} [\ddot{a}] \tag{14}$$

Escolhendo-se um número de funções F^j igual ao número de nós de discretização, a função \ddot{a} pode ser substituída e escrita em termos de \ddot{u} , de acordo com a equação (8):

$$[\ddot{a}] = [F]^{-1} [\ddot{u}] \tag{15}$$

Definindo-se:

$$[M] = \frac{1}{c^2} \left\{ [G] [h] - [H] [Y] \right\} [F]^{-1} \tag{16}$$

Finalmente obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$[M] [\ddot{u}] + [H] [u] = [G] [q] \tag{17}$$

5. Discretização temporal

A discretização temporal e o posterior avanço no tempo são feitos numa etapa posterior à discretização espacial, através de métodos de integração direta. Estes métodos buscam definir uma relação adequada, que permita calcular valores futuros a partir de resultados anteriores de uma forma consistente. Assim, enquanto a solução exata satisfaz a equação diferencial em qualquer instante $t \in [0, t_f]$, para a solução aproximada deseja-se satisfazer essa equação em instantes discretos, $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_f$ (Loula et al, 1982). O intervalo de tempo Δt é denominado passo de integração. Neste artigo estudou-se três operadores de aproximação, cujos algoritmos são mostrados a seguir:

5.1. Algoritmo de Wilson α

A idealização deste esquema teve por objetivo transformar o operador de aceleração linear em outro incondicionalmente estável. Para tanto considera-se que a aceleração varia linearmente num intervalo estendido de cálculo $\Delta s = \theta \Delta t$. No MEF, valores de $\theta > 1,37$ tornam o esquema incondicionalmente estável. Este esquema propõe o seguinte (Bathe, 1982):

$$u_S = u_n + \Delta s \dot{u}_n + \frac{\Delta s^2}{3} \ddot{u}_n + \frac{\Delta s^2}{6} \ddot{u}_S \tag{18}$$

$$\dot{u}_S = \dot{u}_n + \Delta s \ddot{u}_n + \frac{\Delta s}{2} \ddot{u}_S \tag{19}$$

O sistema matricial final para o avanço no tempo fica:

$$\left[H + \frac{6}{\Delta t^2} M \right] u_S = G q_S - M \left[\frac{6}{\Delta t^2} u_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_n + 2 \ddot{u}_n \right] \quad (20)$$

Obtido \ddot{u}_S , a aceleração no final do passo de integração Δt é obtida por interpolação linear entre o valor de \ddot{u}_s e \ddot{u}_n , considerando o intervalo definido por θ . Com esse valor da aceleração e usando-se expressões semelhantes a (18) e (19) com o intervalo Δt , determinam-se u_{n+1} e \dot{u}_{n+1} , que serão usados como condição inicial para o novo instante de cálculo.

5.2. Algoritmo de Chung - Lee

O método de Chung-Lee, também conhecido como CHL- β , é um esquema que aproxima o deslocamento e a velocidade da seguinte maneira (Chung e Lee, 1994):

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1} \right] \quad (21)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \left[\frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} \right] \quad (22)$$

Substituindo (21) e (22) na equação de equilíbrio dinâmico obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2 \beta} M + H \right] u_{n+1} = M \left[\frac{1}{\Delta t^2 \beta} u_n + \frac{1}{\Delta t \beta} \dot{u}_n + \frac{\left(\frac{1}{2} - \beta \right)}{\Delta t^2 \beta} \ddot{u}_n \right] + G q_{n+1} \quad (23)$$

Demonstra-se para o MEF que o algoritmo é estável para $1 \leq \beta \leq 28/27$ e quanto maior for o valor de β , maior será o amortecimento introduzido no sistema. As simulações mostrarão que para o MEC a variação de β é muito mais ampla.

5.3. Método HHT- a

Este método é uma adaptação do método de Newmark, de acordo com as expressões apresentadas a seguir (Hughes, 1987):

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{u}_n + 2\beta \ddot{u}_{n+1} \right] \quad (24)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1} \right] \quad (25)$$

$$[M] \{ \ddot{u} \}_{n+1} + (1 + a) [H] \{ u \}_{n+1} - a [H] \{ u \}_n = (1 + a) [G] \{ q \}_{n+1} - a [G] \{ q \}_n \quad (26)$$

Pode-se mostrar que para $-1/3 \leq a \leq 0$, $\gamma = (1 - 2a)/2$ e $\beta = (1 - a)^2/4$ o algoritmo torna-se incondicionalmente estável quando utilizado junto à correspondente formulação do MEF. Combinando-se convenientemente as equações (24) e (26) obtém-se a equação matricial (27), que juntamente com a equação (25), faz o avanço da solução no tempo:

$$[aM + cH] \{ u \}_{n+1} = [aM + aH] \{ u \}_n + [M] \{ a\Delta t \{ \dot{u} \}_n + b \{ \ddot{u} \}_n \} + (1 + a) [G] \{ q \}_{n+1} - a [G] \{ q \}_n \quad (27)$$

$$\text{Onde: } a = 1/\Delta t^2 \beta, \quad b = 1 - 2\beta/2\beta \text{ e } c = 1 - a \quad (28)$$

6. Exemplos numéricos

O desempenho dos esquemas junto ao MEC é estudado a partir da simulação da resposta dinâmica de duas barras, a primeira de seção uniforme e outra de seção linearmente variável, solicitadas axialmente por uma carga de impacto constante, na qual a mesma é aplicada e deixada permanentemente ao longo do tempo.

6.1. Barra de seção constante

As características geométricas são apresentadas na Fig. (1). Embora aparentemente simples, a solução numérica deste problema é difícil, pois há participação de todos os modos de vibração (Loeffler, 1988). Nas simulações numéricas, o contorno foi discretizado através de 18, 36 e 72 elementos. Foi analisada, também, a influência da inclusão de pólos (pontos internos de interpolação) na precisão dos resultados. Esta mesma figura mostra algumas das malhas utilizadas nas simulações. Outras discretizações além das mostradas sempre seguiram o mesmo padrão de regularidade.

Primeiramente apresentam-se os resultados obtidos através do conhecido método Wilson θ . Este esquema gerou respostas bastante semelhantes àquelas obtidas através do esquema de Houbolt, mas o controle paramétrico do amortecimento permite ao esquema de Wilson θ maior flexibilidade na escolha do passo, especialmente nas malhas mais refinadas. Os deslocamentos, calculados no ponto A, são de mais fácil solução, razão pela qual concentraram-se maiores esforços no estudo das tensões, calculadas no ponto B.

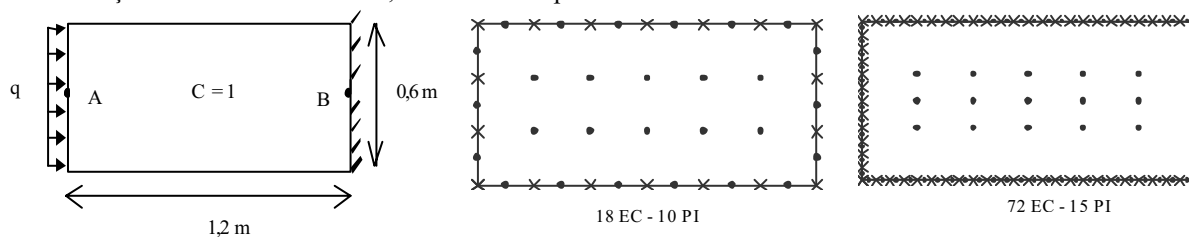


Figura 1. Características geométricas e algumas das malhas utilizadas para discretização.

Na Fig. (2) pode-se observar a representação do deslocamento através do Esquema de Wilson θ utilizando-se malhas de 18 e 72 EC. Pode-se observar boa concordância entre os resultados numérico e analítico. A malha de 18 EC apresenta maiores erros no período. Na malha de 72 EC, estes erros são bastante reduzidos, pelo menos nos primeiros dois ciclos e pode-se observar também pequena melhora no erro da amplitude, ligada à quantidade de amortecimento fictício.

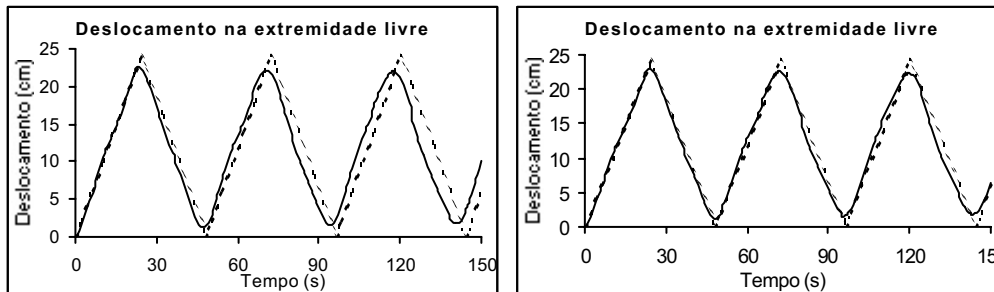


Figura 2. Efeito do refino da malha no cálculo dos deslocamentos. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI e com $\Delta t = 0,7$ s e $\theta = 2$.

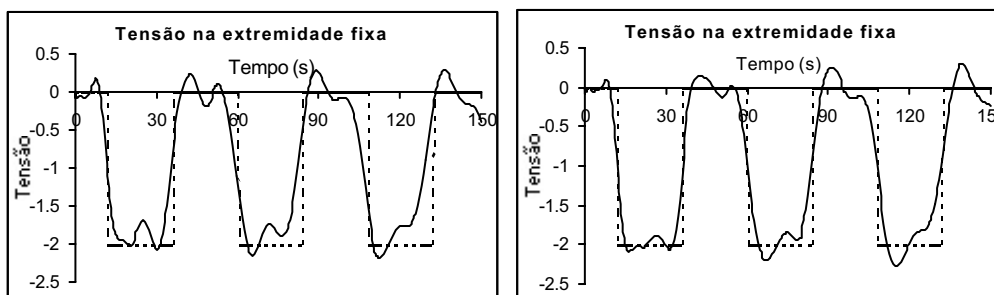


Figura 3. Efeito do refino da malha no cálculo das forças. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI e com $\Delta t = 0,7$ s e $\theta = 2$.

No caso das forças de superfície, a representação numérica oferece maior dificuldade e o refino da malha, apesar de melhorar consideravelmente a resposta, gera resultados apenas razoáveis conforme mostrado na Fig. (3). Um fator que auxilia positivamente a qualidade dos resultados é a inclusão de pontos internos interpolantes. A Fig. (4) apresenta resultados para tensão utilizando malhas de 18 e 72 EC com 21 internos e $\Delta t = 0,3$ s. Um outro fator importante é a escolha apropriada do passo de integração Δt . As simulações mostraram que devido ao controle paramétrico do amortecimento fictício, através de θ , pode-se utilizar passos menores do que aqueles utilizados no algoritmo de

Houbolt, especialmente para malhas mais refinadas. Apesar deste procedimento incrementar o custo da solução, é importante notar a significativa melhora dos resultados.

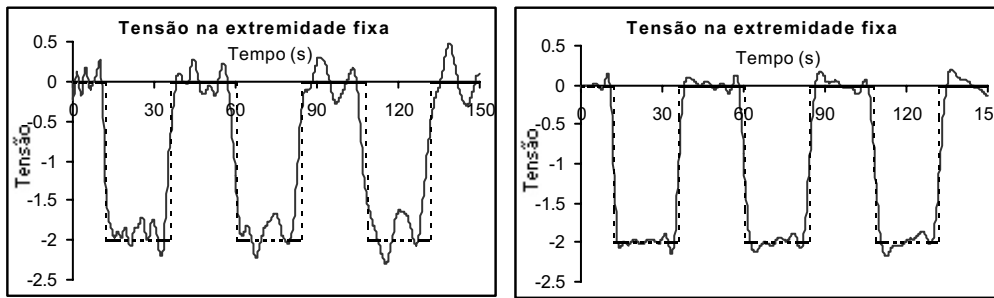


Figura 4. Efeito da inclusão de pólos e otimização do passo. Malhas de 18 e 72 EC, $\Delta t = 0,3$ s., $\theta = 2$ e 21PI.

O segundo esquema utilizado é o algoritmo de Chung – Lee, caracterizado pelas elevadas taxas de amortecimento fictício. Este esquema também possui controle paramétrico do amortecimento, podendo ser regulado através do passo de integração e do parâmetro β . A representação dos deslocamentos, como no caso anterior, apresenta menos dificuldade mas observa-se que as elevadas taxas de amortecimento degeneram rapidamente os resultados, especialmente na faixa de valores de β proposto para a utilização junto à formulação do MEF. A Fig. (5) mostra o efeito do refino da malha para o cálculo do deslocamento utilizando-se malhas de 18 e 72 EC, pode-se observar que com o refino da malha melhora-se o erro no período, mas o erro na amplitude somente apresentou uma pequena melhora no primeiro ciclo. A Fig. (6) mostra este mesmo efeito para as tensões e nota-se que mesmo no primeiro ciclo da malha mais refinada os erros são mais grosseiros.

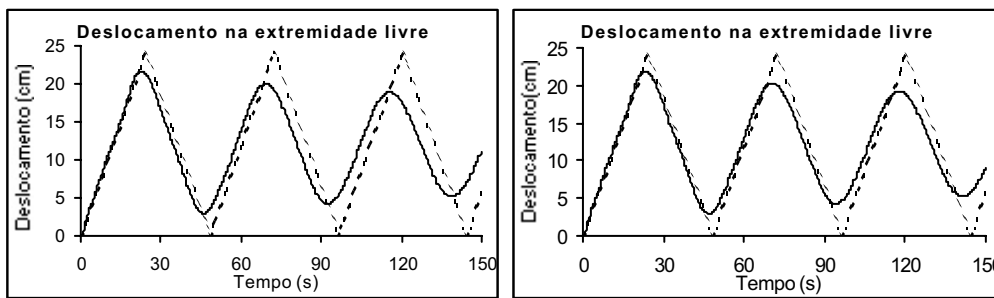


Figura 5. Refino da malha no cálculo dos deslocamentos. Malha de 18 e 72 EC, sem PI, $\Delta t = 0,3$ s e $\beta = 1$.

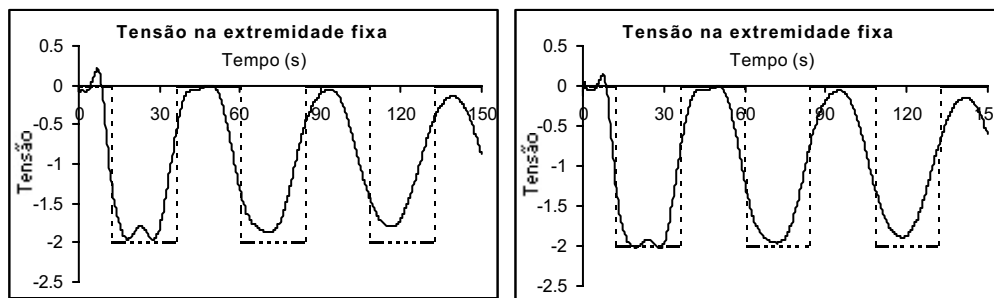


Figura 6. Efeito do refino da malha no cálculo das forças. Malha de 18 e 72 EC, sem PI, $\Delta t = 0,3$ s e $\beta = 1$.

A alternativa para melhorar a solução consiste na escolha adequada dos parâmetros que regulam o amortecimento. Para uma malha de 36 EC, 21 PI e $\beta = 1$ observa-se uma pequena melhora na representação com a utilização de passos menores, conforme pode-se observar na Fig. (7). O efeito da variação de β estudou-se numa malha de 72 EC e verificou-se que é possível utilizar uma ampla faixa de valores para β , contrariando a estreita faixa estipulada por Chung-Lee para a aplicação do esquema junto ao MEF. Com o refinamento da malha o valor mínimo de β aumenta, mas o valor máximo continua muito além da faixa estipulada, especialmente para pequenos valores do passo de integração, conforme mostrado na Fig. (8).

O último algoritmo utilizado é o Método HHT- α . Este esquema caracteriza-se por admitir a utilização, sem perda na precisão, de passos bem maiores do que aqueles permitidos nos outros algoritmos utilizados neste trabalho, permitindo assim considerável economia no tempo da solução. A Fig. (9) apresenta resultados para deslocamento mostrando a influência do refino da malha e na Fig. (10) pode-se observar este efeito para o caso das tensões.

Através da inclusão de PI pode-se melhorar significativamente a representação das tensões. A Fig. (11) mostra resultados para malhas de 36 EC com inclusão de 6 e 10 PI respectivamente e $\Delta t = 0,9$ s. Para malhas de 72 EC não foi

possível obter resultados satisfatórios, pois apesar de apresentar boa precisão no primeiro ciclo, a resposta degenera-se rapidamente nos ciclos seguintes.

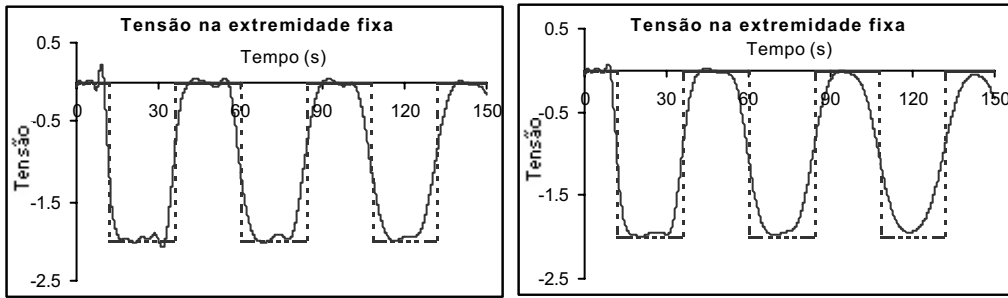


Figura 7. Efeito da variação do passo no cálculo das tensões. Malha de 36 EC, 21 PI, $\beta = 1$ e $\Delta t = 0,1$ e $0,2$ s

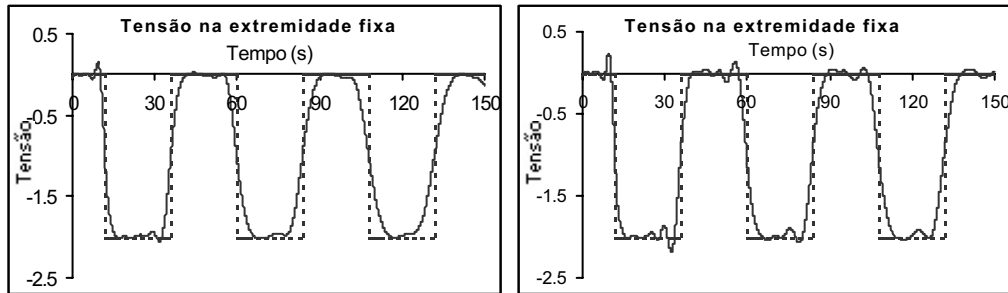


Figura 8. Variação de β no cálculo das tensões. Malhas de 72 EC, 21 PI, $\Delta t = 0,1$, e $0,05$ s; e $\beta = 0,1$ e 10

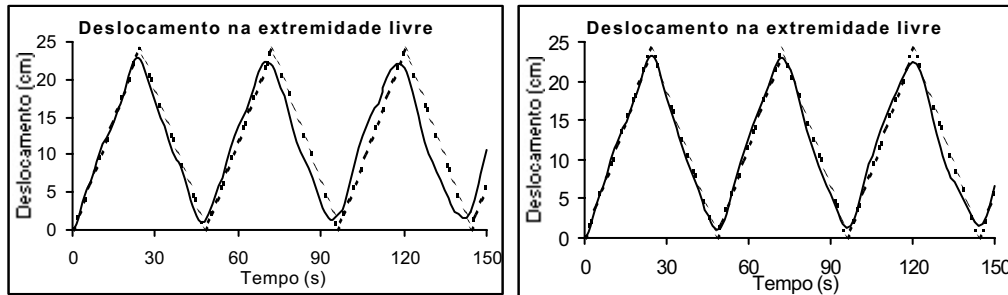


Figura 9. Refino da malha no cálculo dos deslocamentos. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI, $\Delta t = 1,5$ s e $\alpha = -0,3$.

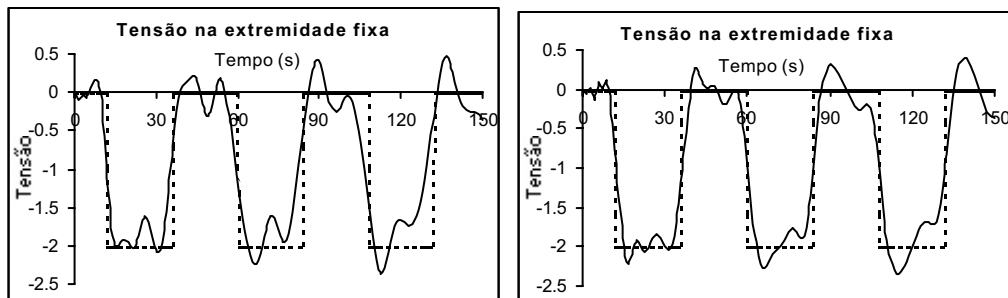


Figura 10. Refino da malha no cálculo das tensões. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI, $\Delta t = 1,5$ s e $\alpha = -0,3$.

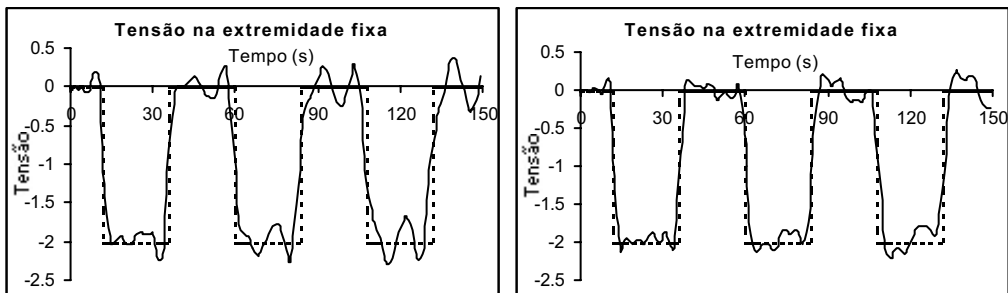


Figura 11. Influência da inclusão de PI. Malhas 36 EC, $\Delta t = 0,9$ s, $\alpha = -0,3$ e 6 e 10PI.

6.2) Barra de seção linearmente variável

O último problema simulado consiste de uma barra de seção linearmente variável cujas características geométricas são mostradas na Fig. (12). Nesta mesma figura são apresentadas duas das malhas utilizadas, com 58 e 117 EC e inclusão de 38 PI.

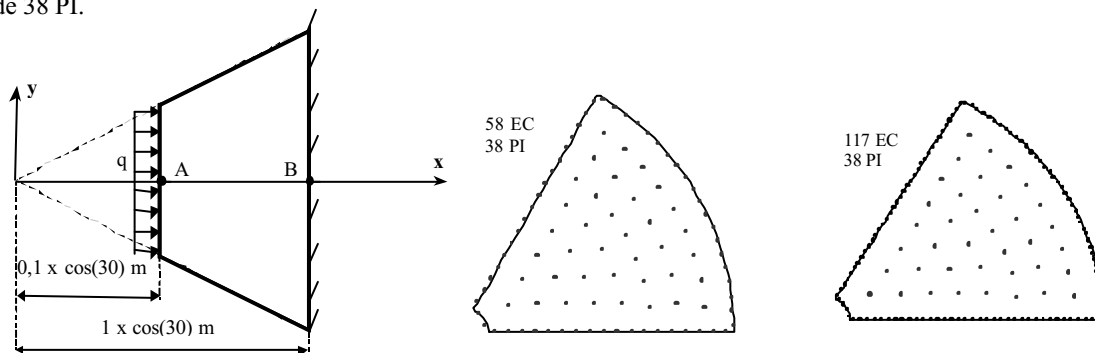


Figura 12. Características geométricas da barra de seção linearmente variável e malhas utilizadas

Nos gráficos mostrados a seguir a solução analítica foi retirada de (Loeffler, 1993) e é representada pela linha pontilhada, enquanto a solução numérica é apresentada pela linha cheia.

Utilizando-se o esquema de Wilson θ , o valor de θ capaz de gerar uma resposta estável varia consideravelmente em relação ao caso da barra de seção constante. Por exemplo, para uma malha de 58 EC com 38 PI e $\Delta t = 0,2$ s obteve-se resultados estáveis, mostrados na Fig. (13), somente a partir de $\theta = 7,5$. O melhor resultado para deslocamento nestas condições foi obtido para $\theta = 10$.

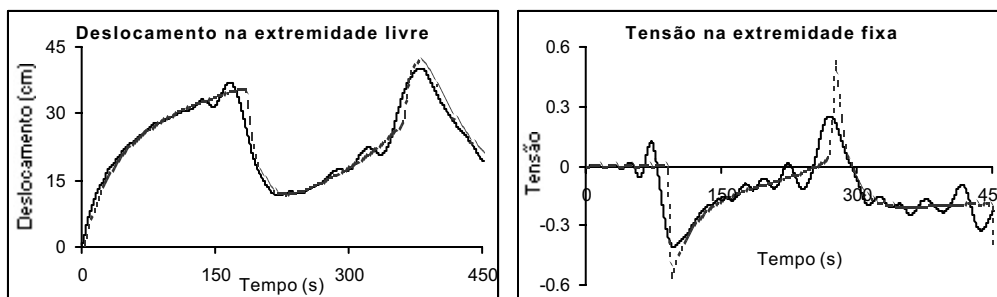


Figura 13. Deslocamento e tensão para uma barra de seção variável. Malha de 58EC com 38 PI, $\Delta t = 0,2$ s e $\theta = 7,5$

Aumentando-se o valor do passo é possível melhorar a representação das forças, mas o resultado continua apresentando arredondamentos ainda excessivos, que distorcem o resultado numérico em relação ao analítico, conforme pode-se observar na Fig. (14), na resposta para $\Delta t = 0,5$ s. Nesta mesma figura pode-se notar que utilização de malhas mais refinadas não é um recurso válido para reverter esta situação pois para uma malha de 117 EC não é possível observar melhoras significativas.

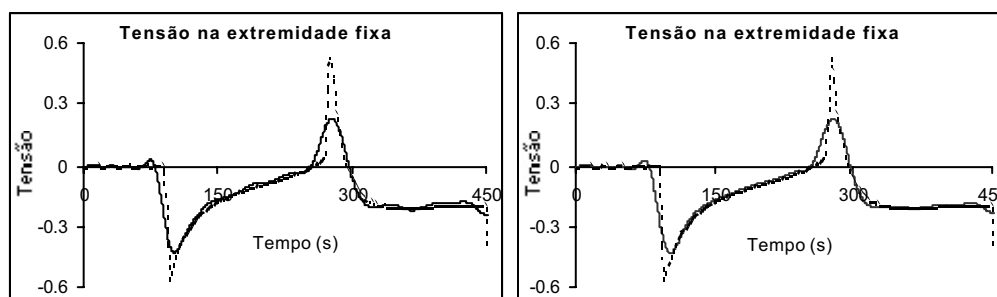


Figura 14. Tensões no ponto B da barra.. Malhas de 58 e 117 EC, respectivamente com 38 PI, $\Delta t = 0,5$ s e $\theta = 7,5$

No esquema de Chung-Lee, a faixa de valores para β está muito além daquela estipulada para o MEF. Para uma malha de 58EC com 38PI e $\Delta t = 0,2$ s, por exemplo é possível efetuar a integração somente a partir de $\beta = 7,5$. A Fig. (15) mostra a representação do deslocamento e da forças nestas condições. Observa-se boa concordância entre os resultados numérico e analítico para o caso do deslocamento mas para o caso da tensão, da mesma forma que no

algoritmo anterior, observa-se excessivo arredondamento na solução numérica. Com o aumento de Δt é possível utilizar valores para β cada vez menores. Para $\Delta t = 5$ s, por exemplo, pode-se utilizar valores de $\beta = 2$ na malha de 58 EC (Fig. 16). Para malhas mais refinadas o valor mínimo para β é maior do que para malhas mais pobres mas não contribui significativamente no aprimoramento da solução conforme pode-se observar na Fig. (16).

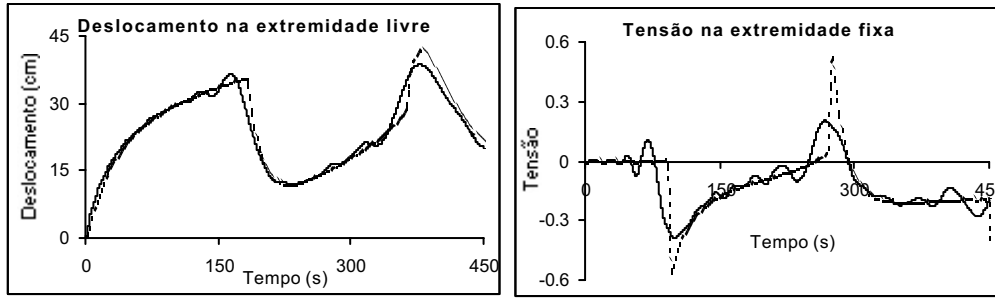


Figura 15. Representação do deslocamento e da força através de uma malha de 58 EC, 38 PI, $\Delta t = 0,2$ s e $\beta = 7,5$.

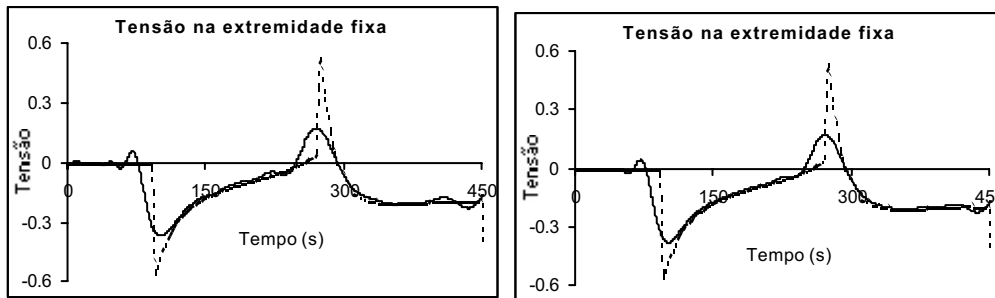


Figura 16. Representação da tensão. Malhas de 58 e 117 EC com 38 PI, $\Delta t = 0,5$ s e $\beta = 2$ e $7,5$ respectivamente.

O Método HHT- α é bastante interessante devido à possibilidade de utilizar passos grandes, apesar de que na representação da tensão não é possível obter melhorias muito significativas. Par uma malha de 58EC, 38 PI e $\alpha = -0,3$ é possível efetuar a integração a partir de $\Delta t = 4$ s e nota-se, na Fig. (17), que nestas condições a representação do deslocamento é bastante precisa, mas a tensão, apesar de apresentar alguma melhoria em relação aos outros métodos, continua sofrendo arredondamentos excessivos.

O refino da malha pode ser utilizado para melhorar a representação da força. Observa-se que o valor do passo mínimo para obter um algoritmo estável varia e para malhas de 117 e 289 somente é possível efetuar a integração a partir de $\Delta t = 5$ s, conforme mostrado na Fig. (18). Não foi possível obter solução numérica capaz de representar satisfatoriamente os picos apresentados na solução analítica. Estes erros na amplitude crescem consideravelmente a partir do segundo ciclo.

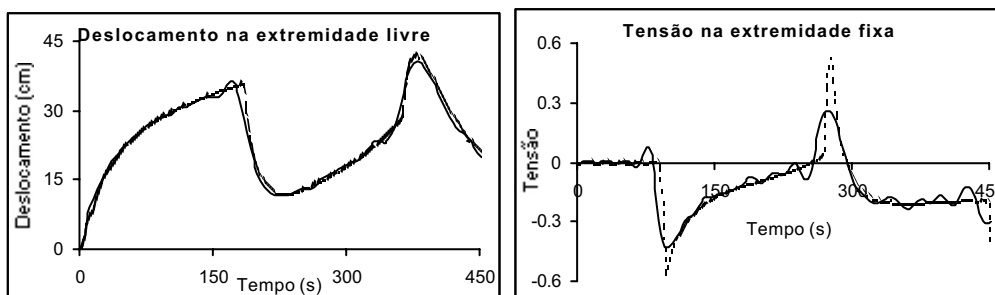


Figura 17. Deslocamento e tensão calculados através de uma malha de 58 EC, 38 PI, $\Delta t = 4$ s e $\alpha = -0,3$.

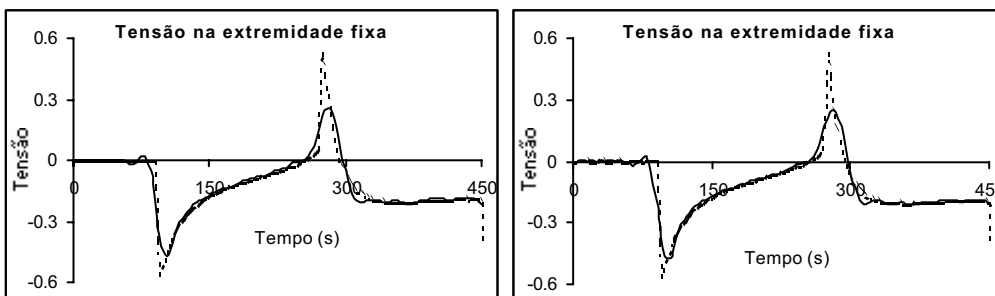


Figura 18. Efeito nas tensões do refinamento da malhas, de 117 e 289 EC, com 38 PI, $\Delta t = 5$ s e $\alpha = -0,3$.

7. Conclusões

Em todos os casos a representação precisa dos deslocamentos foi obtida sem muitas dificuldades, mas para o cálculo das tensões é preciso escolher com muito cuidado os parâmetros envolvidos, especialmente aqueles que regulam o amortecimento fictício. Os esquemas testados permitem a inserção de amortecimento através de outros parâmetros, além do passo da integração, produzindo melhores resultados junto ao MEC, devido a maior flexibilidade.

No esquema Wilson θ , a dosagem adequada de amortecimento permite a inclusão de maior número de pólos, melhorando as condições de integração em relação ao esquema de Houbolt. As simulações mostraram que ambos esquemas produzem resultados bastante similares, mas a flexibilidade maior na inclusão de amortecimento permite obter melhores resultados no esquema de Wilson θ , especialmente na integração com passos menores.

O esquema de Chung-Lee apresenta as maiores taxas de amortecimento. Seus resultados foram animadores no ciclo primordial, mas sua utilização deve ser cuidadosa, pois a quantidade de amortecimento varia sensivelmente com pequenas variações do passo e a faixa de variação de β varia consideravelmente em relação à estreita gama de valores propostos na utilização junto ao MEF. É possível obter resultados de precisão considerável através da utilização de grandes valores de β combinados com pequenos valores de Δt .

O último algoritmo apresentado neste trabalho, Método HHT α , mostrou-se interessante pela possibilidade de utilizar passos muito maiores para obter resultados de precisão compatíveis com os outros métodos, o que implica na diminuição do custo de computação. No problema da barra de seção variável, este método melhora a representação das tensões, apesar da solução continuar apresentando excessivos arredondamentos.

8. Referencias bibliográficas

- Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Ed. Prentice-Hall, USA.
- Brebbia C. A., 1978, "The Boundary Element Method for Engineers". Ed. Pentech Press, London, UK.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques", Ed. Springer-Verlag, Berlin, DR.
- Chung J., Lee J. M., 1994, "A New Family of Explicit Time Integration Methods for Linear and Non-Linear Structural Dynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, p. 3961 – 3976, march.
- Hughes, T. J. R., 1987 "The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Ed. Prentice-Hall, USA.
- Loeffler, C. F., 1988, "Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.
- Loeffler, C. F., 1993, "Solução Analítica do Problema de Impacto em Barras de Seção Linearmente Variável", Tese de Professor Titular, Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica, Niterói, RJ.
- Loeffler, C. F., Nogueira, F. C., 1991 "Resposta Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno Utilizando Superposição Modal", Revista Militar de Ciência e Tecnologia, vol. 8, nº 1, pp. 36 – 49, Jan/Mar.
- Loula, A. F., Galeão, A. C., 1982, "Dinâmica e Estabilidade em Mecânica – Métodos Qualitativos e Quantitativos", III Escola de Matemática – Laboratório de Computação Científica – CNPq, Jan./Fev.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., Wrobel, L. C., 1992, "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Ed. CMP, USA.

PERFORMANCE EVALUATION OF SOME NEW TIME INTEGRATION METHODS IN ELASTODYNAMIC PROBLEMS FORMULATED BY DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD

Gustavo Adolfo Velázquez Castillo

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil

Abstract. Dual Reciprocity formulation is one of the most important techniques for modelling of the Boundary Elements Method. In spite of the general good performance, the wave propagation problems demand still greater attention in controlling of the higher modes, especially under impact loading. Due to the mixed formulation, displacements and tractions are calculated simultaneously and the influence of higher modes badly represented can disturb greatly the numerical response. The most common solution has been to use time integration methods with fictitious damping. So, the numerical dissipation control is done exclusively for the time step size. With the purpose to improve the traction response, this work presents the results obtained with three time integration methods with parametric control of dissipation: the well-known Wilson θ scheme, the HHT α method, and the recently devised CHL- β method. The quality of the response was evaluated through the simulation of two dynamic scalar examples that have analytic solution. It was examined the influence of the mesh refinement, of the time step size and the variation of several pertinent parameters to the mentioned methods.

Keywords. Scalar Wave Propagation, Numerical Methods, Boundary Elements Method, Dual Reciprocity.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA O ELEMENTO FINITO DE CASCA QUADRILATERAL QUADRÁTICO COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

Amarildo Tabone Paschoalini

tabone@dem.feis.unesp.br

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP

Loir Afonso Moreira

loir@fem.unicamp.br

UNICAMP – FEM – Departamento de Projeto Mecânico

Silmara Cassola

cassola@sc.usp.br

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica

Resumo. Este trabalho apresenta um elemento subparamétrico hierárquico baseado na versão p do método dos elementos finitos para a análise de placas e cascas. O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento finito quadrilateral quadrático de nove nós da família Lagrangeana, baseado na degeneração de um elemento sólido tridimensional e na formulação de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação, sucessivos refinamentos hierárquicos são usados, objetivando remover a característica de rigidez excessiva do elemento na análise de placas e cascas finas. Tal formulação é aplicada na análise estática e dinâmica de placas e cascas. O objetivo deste trabalho é a análise do número de pontos de integração numérica nos refinamentos hierárquicos de 3°, 4° e 5° graus. Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação. Os resultados numéricos obtidos nos exemplos de aplicação são comparados com soluções analíticas e outras técnicas numéricas, disponíveis na literatura.

Palavras chave: elementos finitos, versão p hierárquica, integração numérica, casca.

1. Introdução

Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos já se estenda por mais de três décadas, o estabelecimento de um modelo que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas) ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores. Bathe *et al.* (1985 e 1986) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

1. o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência (Zienkiewics, 1977);
2. o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
3. o elemento deve ser simples, barato e utilizar, considerando a análise de cascas, cinco ou seis graus de liberdade por nó;
4. o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo espúrio, e deve estar livre do efeito de bloqueio;
5. o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
6. o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
7. o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura (Ahmad *et al.*, 1970) tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana (Fig. 1) tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas que o elemento de oito nós (Cook, 1981 e Verheghe *et al.*, 1986) e, para o caso geral de flexão de placas o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadrilaterais lineares, quadráticos e cúbicos (Pugh *et al.*, 1978). Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução, e onde a geometria é curva (Park *et al.*, 1986).

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências (Oñate, 1992). A integração exata do elemento quadrilateral quadrático de nove nós exige 3x3 pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e 3x3 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante

(*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* (2x2 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos espúrios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, que distorcem a solução.

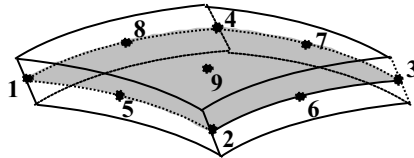


Figura 1. Elemento finito de casca quadrilateral quadrático da família Lagrangeana.

No processo de refinamento *h* a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Neste processo o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento permanecem fixos. A utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise (novos nós e elementos têm de ser gerados) e produzir erros associados à subdivisão excessiva da malha de discretização.

Ao contrário, no processo de refinamento *p* hierárquico o número e a distribuição de nós e elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, no entanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente. As matrizes de rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas. A qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão *p* hierárquica de refinamento oferece em relação à versão *h*.

Um aspecto essencial na busca de alta performance para a versão *p* do Método dos Elementos Finitos diz respeito às propriedades de bom condicionamento e esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais associadas ao elemento de referência (Babuska *et al.*, 1989). Em particular, o bom condicionamento dessas matrizes garante que os problemas de álgebra linear resultantes da discretização por elementos finitos (sistemas lineares e problemas de autovalor) podem ser resolvidos usando-se uma aritmética de precisão finita (Carnevali *et al.*, 1993). Isto demonstra-se particularmente importante quando se empregam aproximações de alta ordem e/ou métodos iterativos na solução de sistemas lineares oriundos da formulação pelo Método dos Elementos Finitos.

Os padrões de esparsidade e condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais são determinados pela definição das funções de forma e indiretamente influenciam os padrões de esparsidade e condicionamento das matrizes globais (Carnevali *et al.*, 1993). Padrões apreciáveis de esparsidade são caracterizados por estruturas em banda e um pequeno número de elementos não-nulos. O bom condicionamento das matrizes locais é decisivo na utilização de métodos iterativos, pois resulta na redução do número de iterações. Da mesma maneira, a esparsidade dessas matrizes resulta num menor custo por operação (Carnevali *et al.*, 1993). As funções hierárquicas clássicas para elementos quadrilaterais propostas em Szabó *et al.* (1991) apresentam boas características quanto à esparsidade (Edgar *et al.*, 1996). Tais características decorrem diretamente das propriedades de ortogonalidade das integrais dos polinômios de Legendre.

Banerjee *et al.* (1992) apresentaram uma detalhada análise da integração numérica para a versão *p* do método dos elementos finitos. A análise concluiu que *p-1* números de pontos de integração são exigidos para integrar um polinômio de grau *p* utilizando o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* em uma dimensão. O estudo mostrou também que o número de pontos para integrar um polinômio de grau *p* em duas dimensões pode ser relaxado para *p* e propôs diversos esquemas de números de pontos de integração para os acoplamentos entre o sistema isoparamétrico e o refinamento de grau *p*, bem como esquemas para os acoplamentos entre refinamentos de grau *p* diferentes.

Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação *p*. O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas. São analisados, a partir dos resultados numéricos e das propriedades de condicionamento local, os diversos esquemas de números de pontos de integração utilizados nos refinamentos de grau *p*, propostos por Banerjee *et al.* (1992). São apresentados exemplos numéricos para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação, e os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.

2. Formulação

De acordo com Zienkiewicz *et al.* (1971), o campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\mathbf{x}, h, z) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, h) \bar{\mathbf{d}}_i + z \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, h) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{1i} \cdot \mathbf{a}_i - z \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, h) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{2i} \cdot \mathbf{b}_i \quad (1)$$

na qual o deslocamento $\vec{\Delta}(x,h,z)$ é um vetor coluna de componentes u, v e w , nas direções X, Y e Z, respectivamente, de um sistema de referência global associado ao elemento e , da mesma maneira u_i, v_i e w_i , as componentes do deslocamento \vec{d}_i . Neste trabalho o campo de deslocamento do elemento de casca será interpolado a partir das funções de forma $N_i(x,h)$ quadrilaterais quadráticas de nove nós da família Lagrangeana, portanto $n=9$.

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq. (1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi,\eta)$ de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções $M_{pk}(\xi,\eta)$ são polinômios de grau p associados a cada um dos lados do elemento ($k = 1, 2, 3$ e 4) ou são polinômios de grau p , do tipo bolha, associados ao elemento ($k = 5, 6, 7, \dots$). Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática foi feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus. As funções de forma utilizadas foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre (Szabo *et al.*, 1991), conforme mostra a Tab. (1).

Tabela 1. Funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$p = 3$						
$p = 4$						
$p = 5$						

Desta forma o deslocamento $\vec{\Delta}$ dado pela Eq. (1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\vec{\Delta}(x,h,z) = \sum_{i=1}^9 N_i(x,h) \vec{d}_i + z \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(x,h) \cdot \frac{t_i}{2} \vec{v}_{1i} \cdot \vec{a}_i - z \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(x,h) \cdot \frac{t_i}{2} \vec{v}_{2i} \cdot \vec{b}_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(x,h) \vec{d}_{pk} \tag{2}$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão \vec{d}_{pk} , de componentes a_{pk}, b_{pk} e c_{pk} segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos. As funções $M_{pk}(\xi,\eta)$ quando inseridas na Eq. (1) não modificam o nível de aproximação do elemento, no entanto, a incógnita \vec{d}_{pk} deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de \vec{d}_{pk} são parâmetros dependentes das incógnitas nodais \vec{d}_i, a_i e b_i . De uma maneira compacta, a Eq. (2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \tag{3}$$

na qual $\{u\}$ é uma matriz constituída dos deslocamentos $u(\xi,\eta,\zeta), v(\xi,\eta,\zeta)$ e $w(\xi,\eta,\zeta)$, $[N]$ é uma matriz constituída das funções de forma $N_i(\xi,\eta)$ e $M_{pk}(\xi,\eta)$, e $\{a\}$ é uma matriz constituída dos deslocamentos nodais u_i, v_i, w_i, a_i e b_i e dos parâmetros hierárquicos a_{pk}, b_{pk} e c_{pk} .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da solicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ g_{x'y'} \\ g_{y'z'} \\ g_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-y'^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-y'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-z'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-y'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-z'^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \tag{4}$$

ou ainda,

$$\{e'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

na qual, $\{u'\}$ corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e $[L]$ é o operador linear. Os deslocamentos $\{u'\}$ podem ser dados em função dos deslocamentos globais $\{u\}$ de acordo com a seguinte expressão:

$$\{u'\} = [Q]^T \cdot \{u\} \quad (6)$$

sendo que $[Q]$ é uma matriz (3x3) constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Pode-se escrever a Eq. (6) como:

$$\{e'\} = [L] \cdot [Q]^T \cdot \{u\} = [L] \cdot [Q]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (7)$$

Definindo-se como $[B]$ a matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos e as rotações nodais, tem-se que:

$$[B] = [L] \cdot [Q]^T \cdot [N] \quad (8)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{e'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (9)$$

na qual $\{e'\}$ é uma matriz coluna (5x1), constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local, $[B]$ uma matriz (5x87) constituída das derivadas das funções de forma e $\{a\}$ uma matriz coluna (87x1) constituída dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos.

Aplicando o *Princípio do Trabalho Virtual* e o *Princípio de D'Alembert*, chega-se à determinação das matrizes de rigidez e de massa do elemento, e do seu vetor de carga:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(x,h)| \cdot dx \cdot dn \cdot dz \quad (10)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(x,h)| \cdot dx \cdot dn \cdot dz \quad (11)$$

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{b\} \cdot |J(x,h)| \cdot dx \cdot dn \cdot dz \quad (12)$$

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{q\} \cdot r_3(x,h) \cdot dx \cdot dn \quad (13)$$

na qual, $[D']$ é uma matriz quadrada (5x5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material, $|J(x,h)|$, o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local, $r_3(x,h)$, o módulo do vetor $\vec{r}_3(x,h)$ normal à superfície média. De uma forma compacta, pode-se escrever a equação que representa o equilíbrio do sistema:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} + \{f_r^e\} \quad (14)$$

na qual $[M^e]$ é a matriz de massa do elemento, $\{\ddot{a}\}$ é um vetor coluna constituído das acelerações nodais e dos parâmetros hierárquicos, $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento, $\{a\}$ é um vetor coluna constituído dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos, $\{f_q^e\}$ é o vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento, $\{f_b^e\}$ é o vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo e $\{f_r^e\}$ o vetor de carga correspondente às cargas concentradas. A Equação (10) e a Equação (11) uma vez resolvidas, levam às matrizes de massa e rigidez do elemento, respectivamente:

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M_{ij}] & [M_{i,mm}] \\ [M_{kl,j}] & [M_{kl,mm}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{ij}] & [K_{i,mm}] \\ [K_{kl,j}] & [K_{kl,mm}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

As submatrizes $[K_{ij}]$ e $[M_{ij}]$ estão relacionadas com os nós i e j , sendo que tanto i quanto j variam de 1 a 9; e caracteriza o elemento isoparamétrico. As submatrizes $[K_{i,mm}]$ e $[M_{i,mm}]$ estão relacionadas com o nó i , o grau m e o lado ou elemento n , sendo que i varia de 1 a 9, m de 3 a 5 e n de 1 a 6; e caracteriza o acoplamento entre o elemento

isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos. As submatrizes $[K_{kl,mm}]$ e $[M_{kl,mm}]$ estão relacionadas com o grau k , o lado ou elemento l , o grau m e o lado ou elemento n , sendo que k e m variam de 3 a 5 e l e n variam de 1 a 6; e caracteriza o elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos. As submatrizes $[K_{kl,j}]$ e $[M_{kl,j}]$ estão relacionadas com o nó j , o grau k e o lado ou elemento l , sendo que j varia de 1 a 9, k de 3 a 5 e l de 1 a 6; e caracteriza o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos e o elemento isoparamétrico.

Na obtenção dos vetores de carga, e das matrizes de rigidez e massa foi realizada a integração numérica nas direções, ξ e η , utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* (Zienkiewicz *et al.*, 1989) com diferentes números de pontos de integração dependendo do grau das funções de forma.

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. O processo de resolução do sistema linear consiste na obtenção dos deslocamentos $\{a\}$. Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \tag{17}$$

na qual $[K_{iso}]$ é a matriz de rigidez global do sistema, $\{a_{iso}\}$ é o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e $\{f_{iso}\}$ é o vetor de carga global do sistema, correspondentes ao sistema isoparamétrico.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] & [K_{iso,h5}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] & [K_{h3,h5}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] & [K_{h4,h5}] \\ [K_{h5,iso}] & [K_{h5,h3}] & [K_{h5,h4}] & [K_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \\ \{a_{h5}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \\ \{f_{h5}\} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

na qual $[K_{h3}]$, $[K_{h4}]$ e $[K_{h5}]$, são matrizes de rigidez globais do sistema, $\{a_{h3}\}$, $\{a_{h4}\}$ e $\{a_{h5}\}$, são os vetores relacionados com os parâmetros hierárquicos e $\{f_{h3}\}$, $\{f_{h4}\}$ e $\{f_{h5}\}$, são os vetores de carga globais do sistema, correspondentes aos sistemas hierárquico para a primeira reanálise (3º grau), para a segunda reanálise (4º grau) e para a terceira reanálise (5º grau), respectivamente.

O processo de resolução do problema de autovalor generalizado consiste na obtenção da matriz diagonal $[\Lambda]$ que contém os n autovalores λ_i e na obtenção da matriz $[\Phi]$ que contém os n autovetores $\{\phi_i\}$. Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \tag{19}$$

De maneira análoga à análise estática, pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus.

3. Exemplos numéricos

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento finito hierárquico proposto para placas e cascas com algumas configurações de condições de contorno e relações entre espessura e dimensão característica. Procurou-se avaliar a característica do elemento quanto à convergência com o refinamento da malha de discretização. Foi feito, ainda, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ($p=2$) e hierárquica de 3º ($p=3$), 4º ($p=4$) e 5º graus ($p=5$), a comparação com os resultados obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura. Foram analisados diversos esquemas de números de pontos utilizados na integração numérica (Fig. 3) das matrizes de rigidez e massa do elemento (Fig. 2). São apresentados, também, resultados sobre o condicionamento das matrizes de rigidez locais para cada esquema de números de pontos de integração.

O grau de esparsidade das matrizes de rigidez locais não foi calculado, uma vez que as funções de forma hierárquicas utilizadas neste trabalho foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre que apresentam boas características quanto à esparsidade (Edgar *et al.*, 1996).

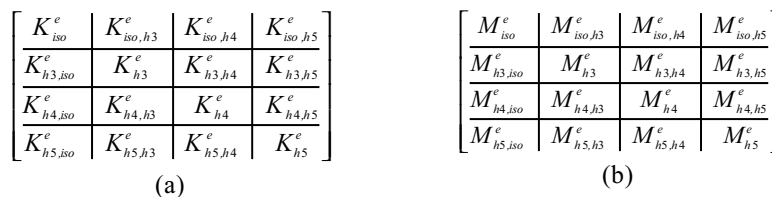


Figura 2. Matriz de rigidez (a) e matriz de massa (b) do elemento com refinamento de 3º, 4º e 5º graus.

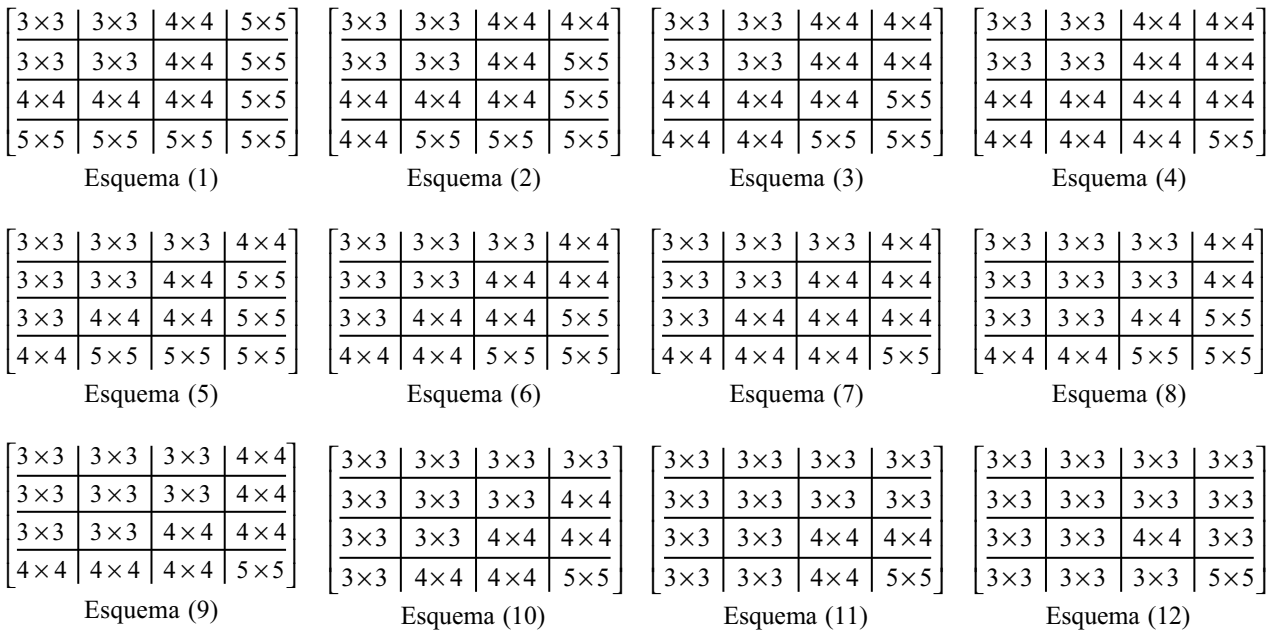


Figura 3. Esquemas de números de pontos utilizados na integração numérica.

3.1 Cilindro puncionado com carga concentrada unitária

O problema do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades (Fig. 4) representa um teste severo para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana) e tensão de flexão. Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um oitavo do cilindro, utilizando malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 e 8x8 elementos. A Figura (5) apresenta as curvas de convergência para os deslocamentos normalizados w_A do ponto A para os diversos esquemas de número de pontos de integração. Na Figura (5) os gráficos têm na ordenada o deslocamento normalizado (Flügge, 1962) e na abscissa o número de graus de liberdade correspondente a cada malha de discretização.

A Figura (6) apresenta os resultados considerando o condicionamento das matrizes das matrizes de rigidez locais para os diferentes tipos de esquemas de pontos de integração considerados (Fig. 3). Calcula-se o número de condição das matrizes locais através da relação $((max m) / (min m, 0))$, na qual $max m$ e $min m$ são os maiores e os menores valores singulares diferentes de zero dessas matrizes, respectivamente (Zumbusch, 1995). Esse modo de avaliação equivale a calcular o número de condição a partir da sua definição considerando a norma euclidiana (norma-2). Na Figura (6) os gráficos têm na ordenada o número de condição e na abscissa as malhas de discretização.

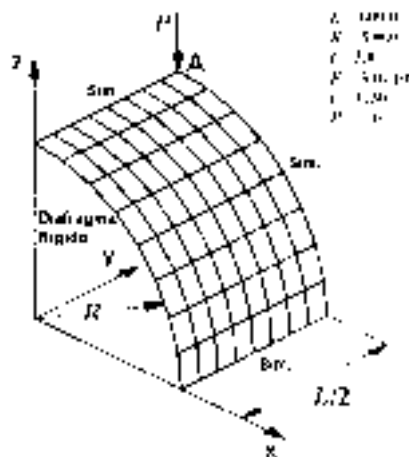


Figura 4. Cilindro puncionado suportado por diafragmas com carga concentrada unitária.

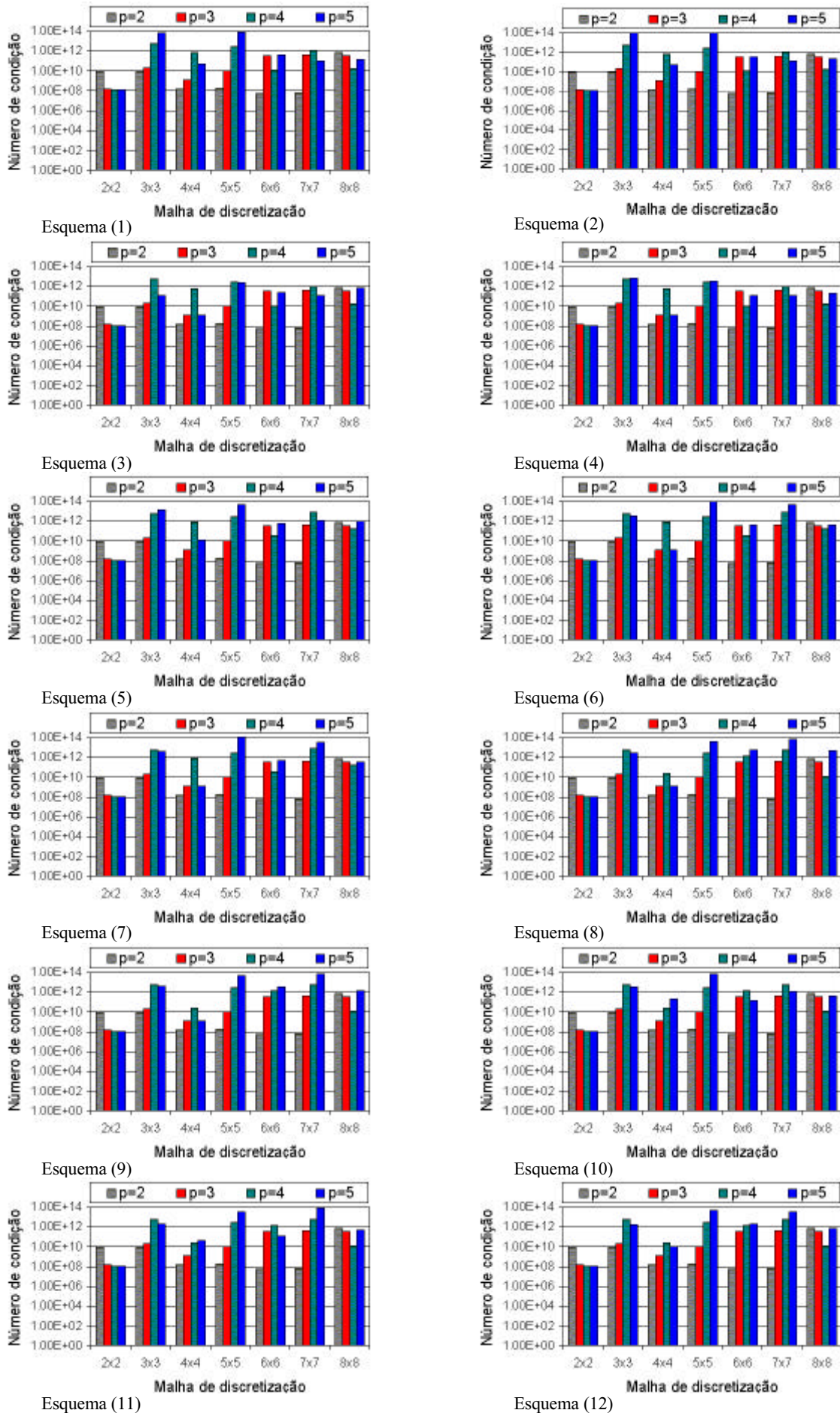


Figura 6. Condicionamento das matrizes de rigidez do elemento.

3.2. Placa circular engastada nas extremidades

Para verificar se o elemento finito com refinamento hierárquico gera elementos com modos espúrios propagáveis em toda malha e se existe o problema de bloqueio na análise de placas finas foi feito um teste clássico proposto na literatura: a placa circular engastada nas extremidades com várias relações t/a (Leissa, 1969).

A seguir são apresentados os resultados numéricos da placa circular engastada nas extremidades, considerando a análise dinâmica (problema de autovalor generalizado: obtenção das frequências naturais e dos modos de vibrar do sistema), utilizando o Esquema (12), mostrado na Fig. (3), de números de pontos utilizados na integração numérica.

Em função da geometria modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização de 12 elementos (Fig. 7) para várias relações entre espessura e dimensão característica (no caso o raio R): $t/a=10^{-1}$ (placa moderadamente grossa) e $t/a=10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ e 10^{-6} (placa fina).

A Figura (8) apresenta as seis primeiras frequências naturais simétricas normalizadas através da Teoria de Placas Finas de Kirchhoff (Leissa, 1969) para cada relação t/a e o número de graus de liberdade envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos.

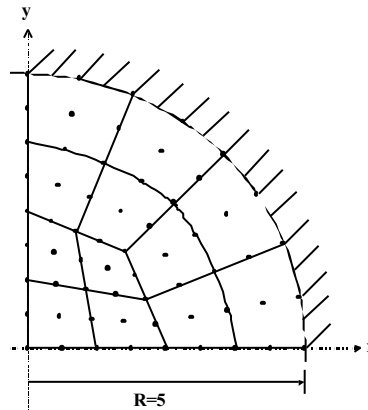


Figura 7. Placa circular engastada nas extremidades com malha de discretização 12 elementos.

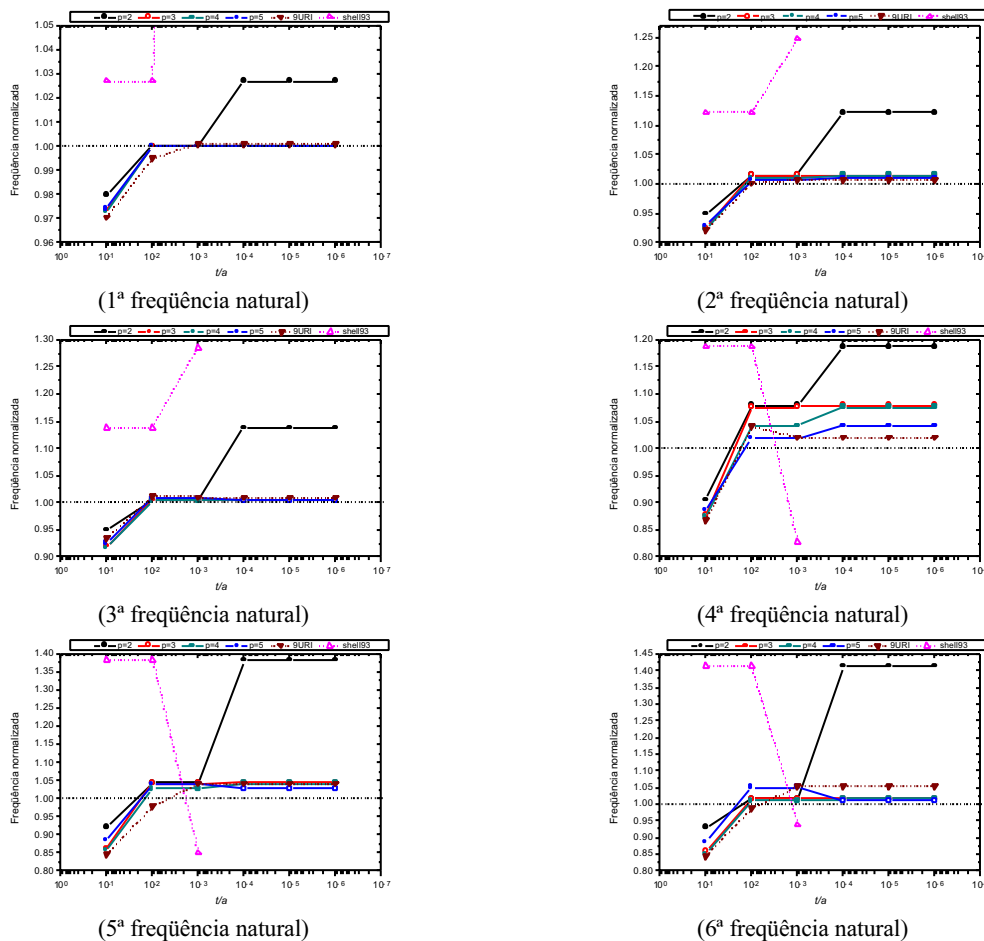


Figura 8. Frequências naturais simétricas normalizadas para a placa circular engastada nas extremidades.

Na Figura (8) foi feita, ainda, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ($p=2$) e hierárquica de 3º grau ($p=3$), 4º grau ($p=4$) e 5º grau ($p=5$), a comparação dos resultados obtidos com os elementos finitos **9URI**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós com integração totalmente reduzida (que é o mesmo elemento finito proposto, mas com integração numérica reduzida e somente análise isoparamétrica), e **Shell93**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de oito nós com integração totalmente reduzida (Ahmad *et al.*, 1970, Cook, 1981) disponível no "software" comercial ANSYS 5.4.

A Tabela (2) ilustra os seis primeiros modos de vibrar simétricos da placa circular engastada nas extremidades, obtidos a partir do elemento finito proposto com refinamento de 5º grau ($p = 5$) e do elemento Shell93 do ANSYS, com malha de discretização de 7×7 elementos e $t/a=10^{-3}$. A análise da placa com o elemento finito Shell93 para as relações $t/a = 10^{-4}$, 10^{-5} e 10^{-6} , não foram concluídas e o programa apresentou a seguinte mensagem de erro: "*Probably initial shift greater than first mode or Final Mode(s) is in a cluster*", que significa que ocorreu o problema de bloqueio na análise de placas finas ocasionando dificuldades numéricas na solução do problema de autovalor generalizado. E por esta razão, estes resultados não aparecem na Fig. (8).

Tabela 2. Modos de vibrar simétricos para a placa circular engastada nas extremidades.

	1º MODO SIM.	2º MODO SIM.	3º MODO SIM.	4º MODO SIM.	5º MODO SIM.	6º MODO SIM.
"EXATO"						
HIERÁRQUICO						
ANSYS						

4. Conclusões

A partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico, através da introdução de polinômios de terceiro ($p=3$), quarto ($p=4$) e quinto ($p=5$) graus, apresenta excelentes resultados.

Comparando os resultados obtidos considerando os vários esquemas de números de pontos utilizados na integração numérica, pode-se dizer que todos os esquemas apresentaram bons resultados relativos ao condicionamento, mas o Esquema (12) apresentou o melhor resultado relativo à convergência com o refinamento da malha.

Pode-se observar também que a convergência com o refinamento da malha é muito boa, apresentando resultados semelhantes para $p=3$, 4 e 5. Os resultados obtidos mostram que o novo elemento não apresenta o problema de bloqueio e modos espúrios.

5. Referências

- Ahmad, S., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C., 1970, "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.3, p.419-451.
- Babuska, I., Szabo, B.A. & Katz, I.N., 1981, "The p-version of the finite element method", SIAM J. Num. Anal., Vol.21, No.6, pp.1180-1207.
- Babuska, I., Griebel, M., Pitkaranta, J., 1989, "The problem of selecting the shape functions for p-type finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.28, pp.1891-1908.
- Banerjee, U., Suri, M., 1992, "The effect of numerical quadrature in the p-version of the finite element method", Math. Comput., Vol.59, No.199, pp.1-20.
- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1985, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.21, pp.367-383.

- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1986, "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.22, pp.697-722.
- Carnevali, P., Morris, R.B., Tsuji, Y., Taylor, G., 1993, "New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, pp.3759-3779.
- Cook, W.A., 1981, "The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements", CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computational Aspects of the FEM, Paris.
- Edgar, N.B., Surana, K.S., 1996, "On the conditioning number and the selection criteria for p-version approximation functions", Computers and Structures, Vol.60, No.4, pp.521-530.
- Flügge, N., 1962, "Stresses in shells", Springer-Verlag.
- Leissa, A.W., 1969, "Vibration of plates", NASA SP-160.
- Oñate, E., 1992, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal", CIMNE, Barcelona.
- Park, K.C. & Stanley, G.M., 1986, "A curved C⁰ shell element based on assumed natural-coordinate strains", J. Appl. Mech., Vol.53, pp.278-290.
- Pugh, E., Hinton, E., Zienkiewicz, O.C., 1978, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.12, pp.1959-1979.
- Szabó, B.A. and Babuska, I., 1991, "Finite Element Analysis", Wiley-Interscience, New York.
- Timoshenko, P. & Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of plates and shells", 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill.
- Verhegghe, B. & Powell, 1986, "Control of zero-energy in 9-node plane element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.23, pp.863-869.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor R.L., 1989, "The finite element method", 4ed., London: McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, "The finite element method", 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O. C., Too J. & Taylor R. L., 1971, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.3, pp.375-390.
- Zumbusch, G., 1995, "Simultaneous h-p adaption in multileve finite elements", PhD thesis, Freien Universitat Berlin, Berlin.

NUMERICAL INTEGRATION OF HIERARCHICAL QUADRILATERAL QUADRATIC SHELL FINITE ELEMENT

Amarildo Tabone Paschoalini

tabone@dem.feis.unesp.br

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP

Loir Afonso Moreira

loir@fem.unicamp.br

UNICAMP – FEM – Departamento de Projeto Mecânico

Silmara Cassola

cassola@sc.usp.br

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica

Summary. The paper presents a subparametric hierarchical finite element based on the p-version concept for the analysis of plates and shells. The first level of approximation for the solution is obtained through the isoparametric quadrilateral quadratic nine-node Lagrangean shell finite element, based on the degeneration of three-dimensional solid element and the Reissner-Mindlin's formulation, with consistent numerical integration. For other approximation levels, successive hierarchical refinements are used, aiming to remove the characteristic of excessive rigidity of the isoparametric element in the analysis of thin plates and shells. Such formulation is applied to static and dynamic analysis of plates and shells. Numerical examples are presented to show the accuracy, efficiency and advantages of present formulation. The objective of this work is the analysis of the number of points of numeric integration in the hierarchical refinements of 3rd, 4th and 5th degrees. Numerical results obtained for the application examples are compared with analytical solutions and other numerical techniques, available in the open literature.

Keywords: finite element, hierarchical p-version, numerical integration, shells

TREFFTZ – MLGFM

Renato Barbieri

Faculdade de Engenharia de Joinville – FEJ
Departamento de Engenharia Mecânica – DEM
Campus Universitário s/n
89.223-100 Joinville SC
e-mail: dem2rb@dcc.fej.udesc.br

Resumo. O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) é uma técnica integral que tem sido utilizada para resolver diversos problemas da mecânica do contínuo. Este Método pode ser entendido como sendo uma extensão do Galerkin-BEM e sua principal característica é o uso de projeções da Função de Green sem o seu conhecimento explícito. Em todas as aplicações realizadas na última década as projeções da Função de Green foram calculadas utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF). Neste trabalho utiliza-se, pela primeira vez, o Método de Trefftz Modificado para avaliar estas projeções. As aplicações numéricas mostram resultados comparativos com o MEF, BEM e MLGFM com as aproximações convencionais obtidas com o MEF.

Palavras chave: MLGFM, Trefftz, BEM, Função de Green.

1.Introdução

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) teve suas origens na década de 1970 quando o prof. Dorning (University of Illinois at Urbana) e colaboradores propuseram e utilizaram o *Partial Current Balance Method* (PCBM) para a solução do problema da difusão de neutrons, Burns & Dorning (1973,1974,1975), Burns (1975). Após estes trabalhos, surge o *Local Green's Function Method* (LGFM) utilizado para a solução de problemas de condução de calor e escoamento de fluidos, Horak (1980a), Dorning (1981), Horak (1980b) e Horak & Dorning (1981).

Esta mesma técnica foi adotada por Lawrence & Horak (1978a,b), Horak (1980a), Dorning (1981), Horak (1980b) e Horak & Dorning (1981). Mudaram apenas as aplicações do método e o nome que passa ser denominado de LGFM. Entretanto, de acordo com as formulações utilizadas por estes pesquisadores, para implementação do LGFM é necessário o uso de um operador auxiliar no contorno do subdomínio (célula de cálculo, ou elemento), *prescrito pelo usuário*. Este operador auxiliar sempre foi prescrito no contorno do elemento como sendo $N^* = k_o$. Assim, as condições de contorno para cálculo das Funções de Green a nível de elemento passam a ser

$$(N^* + N^*)G(p, Q) = 0 \quad \forall p \in \Gamma_{\text{elemento}}, Q \in \Omega_{\text{elemento}} \quad (1)$$

onde N^* é o operador de Neumann para o problema adjunto, N' é o operador auxiliar prescrito pelo usuário e G é a função de Green. Esta idealização pode ser vista na Fig.1.

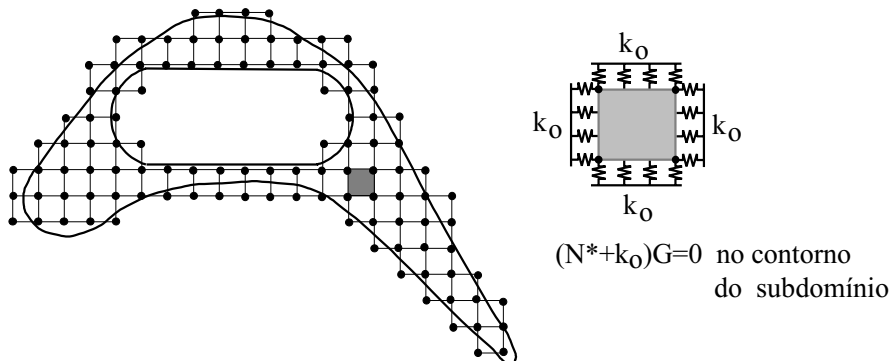


Fig.1-Discretização com Diferenças Finitas e operador Auxiliar, k_o , Burns & Dorning (1973,1974,1975).

Nestas últimas aplicações dois fatos são marcantes:

1-Usando mesma malha, o LGFM mostrou uma eficiência *milhares* de vezes superior ao método de Diferenças Finitas (FDM) e algumas *dezenas (centenas)* superior ao Método de Elementos Finitos (MEF). A eficiência é entendida em termos de tempo de computação para obter a mesma convergência. Este comportamento é atribuído ao uso de funções de Green Locais previamente conhecidas e utilizadas na relação de reciprocidade, e

2-Embora o LGFM tenha propriedades de convergência comprovadamente boas, nestes trabalhos verificou-se dependência do operador auxiliar, *ko*, especificado pelo usuário. A convergência é dependente de *ko* e este talvez tenha sido motivo para desencorajar futuros trabalhos e o desenvolvimento do método.

Tendo em vista estes resultados, especialmente o valor *nodal de trações e deslocamentos*, o prof. Silva sob a orientação do prof. Barcellos, DEM-UFSC, usa as idéias do LGFM para o desenvolvimento do Modified Local Green's Function Method (MLGFM) em sua tese de doutorado no ano de 1988. Na tese de doutorado do Prof. Barbieri (1992) constata-se claramente que a nova metodologia de cálculo desenvolvida não é influenciada pelo valor do operador auxiliar.

Na última década o MLGFM foi utilizado para análise de diversos problemas do contínuo. As principais aplicações foram para problemas de potencial, Silva & Barcellos (1987); potencial, hastes e vigas, Silva (1988); potenciais singulares, Barcellos & Barbieri (1991); placa de Mindlin, Barbieri & Barcellos (1991), Munõz R. & Barcellos (1994); potenciais não homogêneos, elasticidade bidimensional, mecânica da fratura bidimensional, elasticidade tridimensional, placa de Mindlin e análise de convergências *h e p*, Barbieri (1992); membranas e cavidades acústicas, Filippin et. al. (1992); flexão de placas ortotrópicas laminadas, Machado (1992), Machado et. al. (1992); cascas semi-espessas, Barbieri et. al. (1993); formulações com bases Lagrangeanas Hierarquicas para problemas da elasticidade tridimensional, Meira Jr. (1994), formulações para subestruturas, Barbieri et. al. (1994); e problemas condutivos e fortemente convectivos, Barbieri (1999a-b). Resultados ainda não publicados mostram a aplicação do MLGFM para problemas incrementais no tempo, Barbieri (2001).

Nestes anos todos as projeções da Função de Green sempre foram calculadas com uso do MEF. Verificou-se que a grande aplicação do MLGFM é para o cálculo de *esforços precisos* no contorno. Para esforços, o MLGFM também é menos sensível à distorção da malha do que o MEF e a razão *precisão de fluxo · tempo de processamento* é extremamente vantajosa para o MLGFM em comparação com o MEF, Barbieri & Munõz (1998a,b).

Neste trabalho é feita uma revisão das principais etapas necessárias para a implementação numérica do MLGFM. Estes procedimentos serão discutido nos próximos itens, assim como esta nova proposta para cálculo aproximado das projeções da Função de Green.

2. Formulação Matemática

A solução $u(Q)$ para problemas lineares bem postos do tipo

$$A u(Q) = b(Q) \quad \forall Q \in \Omega \tag{2}$$

com condições de contorno devidamente prescritas, pode ser obtida com a equação integral:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega + \int_{\Gamma} [N^* G(p, Q)]^t u(p) d\Gamma - \int_{\Gamma} G(p, Q)^t [Nu(p)] d\Gamma \tag{3}$$

onde (P, Q) são pontos pertencentes ao domínio Ω ; (p, q) são pontos pertencentes ao contorno Γ ; N e N^* são operadores de Neumann associados ao operador linear A e ao seu adjunto A^* ; $b(P)$ é a força de corpo de $G(P, Q)$ é uma função de Green associada ao problema.

Mesmo conhecendo $G(P, Q)$ explicitamente, normalmente existem dificuldades numéricas para o cálculo das integrais que aparecem na Eq.(3) devido à singularidade presente na Função de Green. Estas singularidades serão eliminadas com o procedimento descrito em seguida.

Somando e subtraindo a quantidade,

$$G(p, Q)^t [N' u(p)] \equiv [N' G(p, Q)]^t u(p) \tag{4}$$

na expressão para cálculo de $u(Q)$, Eq.(3), resulta:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega - \int_{\Gamma} [(N^* + N') G(p, Q)]^t u(p) d\Gamma + \int_{\Gamma} G(p, Q)^t [(N + N') u(p)] d\Gamma \tag{5}$$

Note que N' é um operador auxiliar no contorno e uma escolha apropriada (especificado pelo usuário) utilizada por diversos autores é $N' = k_o$, onde k_o é uma constante. Após Barbieri (1992) este operador passou a ser prescrito nas

parcelas do contorno com condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas. Este procedimento é adotada para evitar o pós-processamento da última parcela da equação anterior.

Assim, prescrevendo $(N+N')G(p,Q)=0$ como condição de contorno para o cálculo da (única) função de Green e utilizando a aproximação $F(p)=(N+N')u(p)$, a solução $u(Q)$ pode ser avaliada com mais facilidade por:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega + \int_{\Gamma} G(p, Q)^t F(p) d\Gamma \quad (6)$$

A avaliação numérica desta expressão é muito mais confortável do que a da expressão original para $u(Q)$. Nesta expressão não aparecem derivadas do tensor fundamental e/ou de $F(p)$. Ainda, utilizando a aproximação de $F(p)$ com as funções de interpolação do contorno (elementos de contorno) as possíveis singularidade na Eq.(6) são totalmente eliminadas. Tomando o traço de $u(Q)$ tem-se (para espaços de Hilbert com esta propriedade):

$$u(q) = \int_{\Omega} G(P, q)^t b(P) d\Omega + \int_{\Gamma} G(p, q)^t F(p) d\Gamma \quad (7)$$

e estas equações, Eqs.(5) e (7), formam o conjunto de equações integrais que definem completamente o problema em estudo.

3.As aproximações de Contorno e Domínio

As variáveis $u(Q)$, $u(q)$, $b(P)$ e $F(p)$ são aproximadas utilizando o processo convencional utilizado no MEF e/ou BEM. Com estas aproximações, o resíduo da Eq.(5) é ortogonalizado no domínio (Método de Galerkin) resultando:

$$\int_{\Omega} [\varphi]^t [\varphi] d\Omega \{u^D\} = \int_{\Omega} [\varphi]^t \int_{\Omega} G(P, Q)^t [\varphi] d\Omega d\Omega \{b\} + \int_{\Omega} [\varphi]^t \int_{\Gamma} G(p, Q)^t [\chi] d\Gamma d\Omega \{f\} \quad (8)$$

onde $u(Q)=[\varphi]\{u^D\}$, $b(P)=[\varphi]\{b\}$ e $F(p)=[\chi]\{f\}$ são as aproximações de elementos finitos e de elementos de contorno. $[\varphi]$ e $[\chi]$ representam o conjunto de funções de interpolação de domínio (MEF) e contorno (BEM), respectivamente. $\{u^D\}$, $\{b\}$ e $\{f\}$ representam os vetores com valores nodais de $u(Q)$, $b(P)$ e $F(p)$, respectivamente.

Esta equação também pode ser reescrita na forma:

$$\int_{\Omega} [\varphi]^t [\varphi] d\Omega \{u^D\} = \int_{\Omega} Gd(P)^t [\varphi] d\Omega \{b\} + \int_{\Gamma} Gd(p)^t [\chi] d\Gamma \{f\} \quad (9)$$

onde $Gd(.)$ é a projeção da função de Green no subespaço gerado pelas funções de interpolação de domínio (MEF) e vale:

$$Gd(P)^t = \int_{\Omega} [\varphi]^t G(P, Q)^t d\Omega \quad ; \quad Gd(p)^t = \int_{\Omega} [\varphi]^t G(p, Q)^t d\Omega \quad (10)$$

Repetindo procedimento semelhante para ortogonalizar o resíduo da Eq.(7) no contorno tem-se:

$$\int_{\Gamma} [\phi]^t [\phi] d\Gamma \{u^C\} = \int_{\Gamma} [\phi]^t \int_{\Omega} G(P, q)^t [\varphi] d\Omega d\Gamma \{b\} + \int_{\Gamma} [\phi]^t \int_{\Gamma} G(p, q)^t [\chi] d\Gamma d\Gamma \{f\} \quad (11)$$

onde os valores de contorno $u(q)$ foram interpolados com $u(q)=[\phi]\{u^C\}$, sendo que $[\phi]$ representa o conjunto das funções de interpolação de contorno (tomadas como sendo o traço de $[\varphi]$) e $\{u^C\}$ é o vetor dos valores nodais de $u(q)$. Note que $F(p)$ também é interpolado no contorno, porém o conjunto $[\chi]$ *pode* ser diferente de $[\varphi]$.

Novamente, esta equação também pode ser escrita na forma:

$$\int_{\Gamma} [\phi]^t [\phi] d\Gamma \{u^C\} = \int_{\Omega} Gc(P)^t [\varphi] d\Omega \{b\} + \int_{\Gamma} Gc(p)^t [\chi] d\Gamma \{f\} \quad (12)$$

onde $Gc(.)$ é a projeção da função de Green no subespaço gerado pelas funções de interpolação de contorno e vale:

$$\mathbf{Gc}(P)^t = \int_{\Gamma} [\phi]^t G(P, q)^t d\Gamma \quad ; \quad \mathbf{Gc}(p)^t = \int_{\Gamma} [\phi]^t G(p, q)^t d\Gamma \quad (13)$$

4.0 Cálculo das Projeções da Função de Green

As projeções $\mathbf{Gd}(\cdot)$ e $\mathbf{Gc}(\cdot)$ são calculadas resolvendo os dois problemas auxiliares descritos abaixo (para maiores detalhes veja Silva (1988) e/ou Barbieri (1992)):

Problema 1:

$$\begin{aligned} A^* \mathbf{Gd}(P) &= [\varphi(P)] \\ (N^* + N') \mathbf{Gd}(p) &= 0 \quad \forall p \in \Gamma, P \in \Omega \end{aligned} \quad (14.a)$$

Problema 2:

$$\begin{aligned} A^* \mathbf{Gc}(P) &= 0 \\ (N^* + N') \mathbf{Gc}(p) &= [\phi(p)] \quad \forall p \in \Gamma, P \in \Omega \end{aligned} \quad (14.b)$$

Todos os trabalhos após Silva (1988) utilizaram o MEF para resolver estes dois problemas associados, isto é, o cálculo das projeções da Função de Green *sempre* foram realizados com uso MEF. Neste trabalho as projeções da Função de Green foram calculadas com uso do Método de Trefftz Modificado, Petterson & Sheik (1988). Esta é a diferença deste trabalho com todos os outros realizados anteriormente com o MLGFM.

Para concluir a análise, após obter estas aproximações para as projeções da Função de Green os valores nodais para $u(Q)$ e $F(q)$ são calculados resolvendo conjuntamente as Eqs.(9) e (12).

5.Exemplos

Problema 1: Encontrar $u(x,y)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, 12) &= T_m \times \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 \\ u(x, y) &= 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 12\}$. As parcelas do contorno, Γ_1 e Γ_2 , estão ilustradas na Figs.2(a) e 2(b).

A solução analítica para este problema é:

$$u(x, y) = T_m \left[\sinh\left(\frac{\pi y}{\ell}\right) / \sinh\left(\frac{\pi b}{\ell}\right) \right] \times \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

onde o par $(b, 1)$ representam as dimensões dos lados do domínio retangular e T_m é uma constante. Nesta aplicação utilizou-se: $b=12, 1=6$ e $T_m=100$.

Devido à simetria do problema, apenas a metade do domínio foi discretizada impondo a condição de fluxo nulo na linha de simetria, Fig.2(b).

As aproximações com Elementos Finitos

Para as aproximações das projeções da função de Green o domínio foi discretizado com a malha de elementos finitos lineares ilustrada na Fig.3(a). Com esta discretização as aproximações para $\mathbf{Gd}(\cdot)$ são calculadas com o MEF, Eq.(14.a).

De maneira análoga, o contorno é discretizado com a malha de elementos de contorno ilustrada na Fig.2(b). Com esta discretização calcula-se a projeção da Função de Green \mathbf{Gc} , Eq.(14.b). Em pontos de descontinuidade da normal são previstos nós duplos na malha de elementos de contorno.

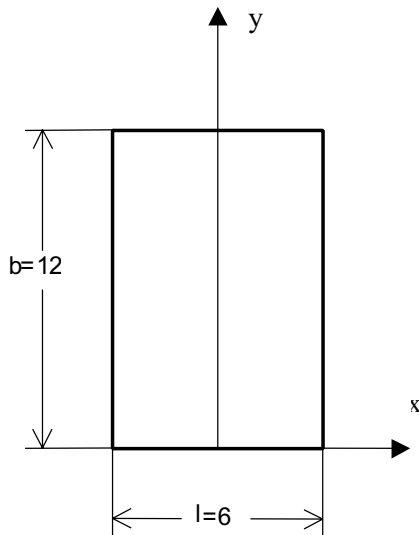


Fig.2(a)-Domínio.

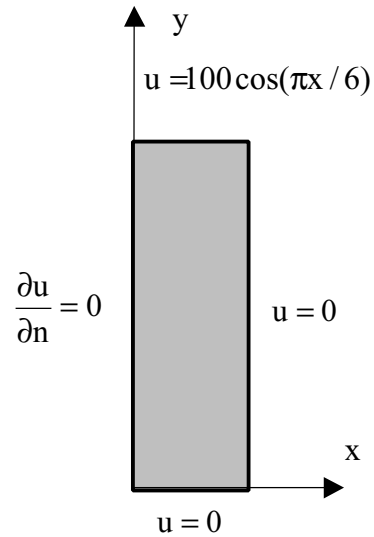


Fig.2(b)-Condições de Contorno.

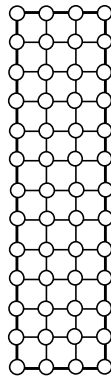


Fig.3(a)-Malha de Elementos Finitos Lineares.

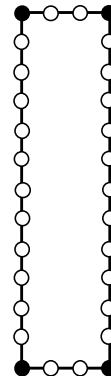


Fig.3(b)-Malha de Elementos de Contorno Lineares
(• = nó duplo).

As aproximações com o Método de Trefftz Modificado

Para o cálculo das aproximações das projeções da função de Green com o Método de Trefftz Modificado foram utilizados pontos de referência localizados na direção da normal ao elemento e ao dobro do seu comprimento. Para aproximar a projeção da Função de Green associada ao nó j os esquemas ilustrado nas Figs.4(a) e 4(c) foram utilizados. Para os nós ligados a dois elementos dois novos nós e pontos de referência são criados. Para os nós associados aos elementos nos cantos apenas um nó e um ponto de referência são criados. Este procedimento foi adotado para prescrever condição de contorno com o valor de 0,5 nestes nós adicionais do contorno, ou seja, para obter um carregamento mais próximo possível ao descrito pelas funções de interpolação de contorno, Eqs.(14.a) e (14.b).

Foram utilizadas duas malhas para cálculo. A malha homogênea com 10×6 elementos e a malha não homogênea com o mesmo número de elementos, porém com divisões do domínio executadas com retas paralelas em $y= 12, 11.625, 11.24, 10.50, 9.0, 6.0, 4.8, 3.6, 2.4, 1.2$ e 0. Os valores obtidos com estas duas malhas estão mostrados nas Tabs.(1) e (2).

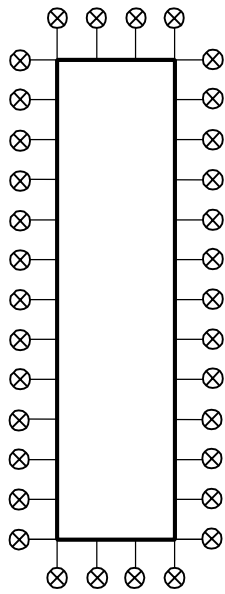


Fig.4(a)- Pontos de Referência para o Método de Trefftz Modificado.

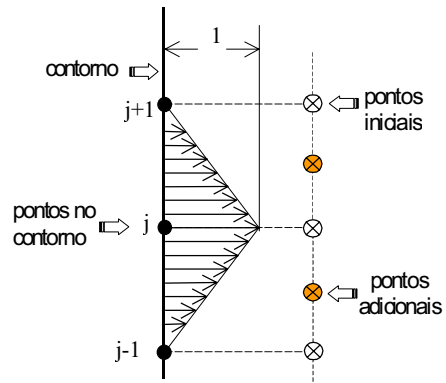


Fig.4(b)- Nós adicionais para o ponto j (sem descontinuidade da normal).

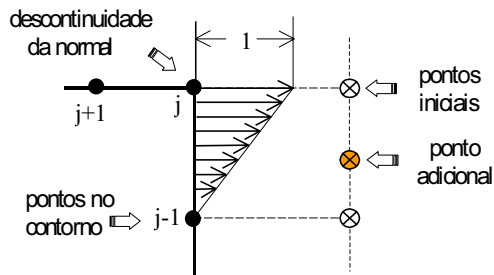


Fig.4(c)-Nó adicional para o ponto j (descontinuidade da normal).

Tabela 1- Comparação de Resultados para Potencial em $x=0$. Malha Homogênea.

y	Solução Analítica	BEM-Simétrico*		DBEM*	MLGFM Trefftz	MLGFM MEF
		Matriz Cheia	Matriz Superior			
10.80	53.348	50.534	50.537	52.933	53.306	52.674
9.60	28.460	27.504	27.523	28.144	28.414	27.745
8.40	15.181	14.580	14.586	14.926	15.143	14.613
7.20	8.096	7.791	7.796	7.890	8.068	7.695
6.00	4.313	4.148	4.151	4.151	4.294	4.048
4.80	2.290	2.203	2.164	2.164	2.278	2.123
3.60	1.202	1.156	1.106	1.106	1.194	1.101
2.40	0.603	0.580	0.534	0.534	0.599	0.547
1.20	0.250	0.241	0.240	0.207	0.248	0.225

* Kanarachos & Provatidis (1988).

Tabela 2- Comparação de Resultados para Potencial em $x=0$. Malha Não homogênea.

y	Solução Analítica	BEM-Simétrico*		DBEM*	MLGFM Trefftz	MLGFM MEF
		Matriz Cheia	Matriz Superior			
11,625	82.1724	81.318	81.375	81.841	82.144	81.925
11.250	67.5229	66.738	66.738	67.190	67.484	67.048
10.500	45.5932	44.112	44.244	45.265	45.535	44.707
9.000	20.7864	18.320	18.407	20.438	20.698	19.361
6.00	4.3133	3.199	3.130	4.010	4.309	3.3067
4.80	2.29029	2.302	2.327	2.037	2.283	1.7343
3.60	1.20156	1.102	1.104	1.002	1.196	0.8993
2.40	0.60299	0.570	0.574	0.457	0.600	0.4468
1.20	0.25041	0.234	0.231	0.160	0.249	0.1842

*Kanarachos & Provatidis (1988).

Tabela 3- MLGFM. Análise do Fluxo em $y=12$.

x	Solução Analítica	Malha Homogênea		Malha Não Homogênea	
		Trefftz	MEF	Trefftz	MEF
0.00	52.3602	53.2953	53.3714	52.7212	53.0572
0.50	50.5761	50.8051	51.5528	50.8037	51.2493
1.00	45.3453	45.5817	46.2210	45.5760	45.9489
1.50	37.0243	37.2333	37.7393	37.2357	37.5171
2.00	26.1801	26.3743	26.6857	26.3771	26.5286
2.50	13.5518	13.9475	13.8135	13.9488	13.7322

Problema 2: Encontrar $u(r,\theta)$ tal que:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u(r,\theta) &= 0 & \forall (r,\theta) \in \Omega \\
 u(0.1,\theta) &= 1000 \\
 u(0.4,\theta) &= 500
 \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0.1 \leq r \leq 0.4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Novamente, devido a simetria do problema, apenas a parcela do domínio definida por $0 \leq \theta \leq \pi/2$ foi discretizada para análise. A malha homogênea utilizada na análise foi composta por 12 elementos na direção r e 4 elementos na direção θ . Os pontos de referência para cálculo das projeções da Função de Green com o Método de Trefftz Modificado foram colocados na direção normal ao contorno e à distância de 2 vezes o comprimento do elemento.

Os resultados que aparecem na Tab.4 mostram a comparação dos valores obtidos com o BEM, MEF-MLGFM e Trefftz-MLGFM.

Tabela 4 – Comparação BEM, MEF-MLGFM e Trefftz-MLGFM.

r	Analítica	BEM*	MEF-MLGFM**	Trefftz-MLGFM
0.15	853.76	854.00	854.23	853.36
0.20	750.00	750.00	750.12	750.06
0.25	669.52	669.40	669.65	670.39
0.30	603.76	603.60	603.81	603.90
0.35	548.16	548.00	548.20	545.41

*Skerget & Brebbia (1983)

**elementos quadráticos para aproximar projeções da Função de Green.

Conclusões

Os resultados numéricos vistos nas Tabs.(1) a (3) mostram que a implementação do MLGFM com cálculo das aproximações das projeções da Função de Green usando o Método de Trefftz Modificado foi bem sucedido. A dificuldade encontrada para uso desta nova técnica esta na colocação dos pontos de referência necessários para os cálculos do Método de Trefftz Modificado. Especial atenção deve ser dada a este fato. Técnicas adaptativas para obtenção da melhor colocação destes pontos é uma nova frente de pesquisa a ser estudada.

Como pode ser visto nas Tabs.(1),(2) e (3), os resultados do Trefftz-MLGFM são bastante precisos.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq (Proj. 300296/93-2) e a FEJ pelo suporte financeiro e disponibilidade de equipamentos para a execução deste projeto.

Referências

de Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M. (1987)

Elastic Membrane Solution by Modified Local Green's Function Method. Proc. of the Boundary Element Technology Conference, BETECH-87, pp. 151-161, RJ.

de Barcellos, C.S. and Barbieri, R. (1991)

Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), Proc.13th Boundary Element Method International Conference, pp.851-861, Tulsa, USA.

- Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1991)
 A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem, Proc. 13th Boundary Element Method International Conference, pp.405-417, Tulsa, USA.
- Barbieri, R. (1992)
 Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à Problemas da Mecânica do Contínuo, UFSC, Brasil, Tese de Doutorado.
- Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993a)
 Non Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.11, pp.9-15
- Barbieri, R.; Noel, A.T. & de Barcellos, C.S. (1993b)
 A Green's Function Method Approach to Shell Analysis. Proc. 15th Boundary Element Method International Conference, Worcester, USA, Vol.2, pp.179-194.
- Barbieri, R.; Machado, R.D.; Filippin, C.G. & de Barcellos, C.S. (1994)
 MLGFM - Uma Formulação para Subregiões. Proc. XV Cilance, pg.671-680
- Barbieri, R. (1995)
 Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para Cascas Semi-Espessas com Geometria e Carregamentos Genéricos. Relatório técnico Proj. CNPq. n^o 300296/93-2.
- Barbieri, R. & Muñoz, R. (1996)
 Análise de Fluxos para Problemas de Potencial com o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Anais do ENCIT/LATCYM 96.
- Barbieri, R. (1998)
 Desenvolvimento de Aplicativo e Formulação a Nível de Elemento para o MLGFM. Relatório técnico Proj. CNPq. n^o 300296/93-2.
- Barbieri, R., Muñoz, R. & Machado, R.D. (1998)
 Modified Local Green's Function Method (MLGFM). Part I – Mathematical Background and formulation. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.22, pg. 141-152.
- Barbieri, R., Muñoz, R.(1998)
 Modified Local Green's Function Method (MLGFM). Part II – Application for accurate flux and traction evaluation. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.22, pg.153-159.
- Barbieri, R. (1999).
 Análise de Problemas Dominantemente Convectivos com o MLGFM. Relatório Técnico proj. CNPq 300296/93-2
- Burns, T.J. & Dorning, J.J.(1973)
 A Partial Current Balance Method for Space and Energy-Dependent Reactor Calculations. Proc. Conf. Mathematical Models and Computations Techniques for Analysis of Nuclear Systems, Michigan, pg. 162-178.
- Burns, T.J. & Dorning, J.J.(1974)
 Approximate Generation of Coupling Parameters for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations. Trans. Am. Nuclear Soc., 19, pg.174-175.
- Burns, T.J. & Dorning, J.J. (1975)
 The Partial Current Balance Method: A New Computational Method for the Solution of Multidimension Neutron Diffusion Problems. Proc. Joint NEACRP/CSNI Specialists Meeting on new Developments in Three-Dimensional Neutron Kinetics and Benchmark Calculations, Lab. für Reaktorregelung und Anlagensicherung Garching (Munich), pg. 109-129.
- Burns, T.J. (1975)
 The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems. Urbana, Univ. Illinois (Ph.D. Thesis).
- Dorning, J.J. (1981)
 A Review of Green's Function Method in Computational Fluid Mechanics. Joint ANSENS International Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for Solution of Nuclear Engineering Problems, Munich.
- Filippin, C.G.; Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1992)
 Numerical results for h and p convergences for the Modified Local Green's Function Method. Proc. VII BETECH. Edited by C.A. Brebbia & M.S. Ingber, Computational Mechanics Publications, pp.887-904.
- Filippin, C.G. (1992)
 Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à Equação de Helmholtz. DEM/UFSC, Brasil, Dissertação de Mestrado.
- Horak, W.C. & Dorning, J.J.(1978a)
 A Local Green's Function Method for Initial-Value Problems in Heat Conduction and Fluid Flow. Trans. Am. Nuclear Soc., 30, pg.215-216.

- Horak, W.C. (1980)
Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems. Urbana, Univ. Illinois (Ph.D. Thesis).
- Horak, W.C. & Dorning, J.J. (1981)
A Coarse-Mesh Method for Heat Flow Analysis Based Upon the Use of Locally-Defined Green's Function. In Numerical Methods in Thermal Problems, Vol. II. Pineridge Press, Swansea, U.K.
- Lawrence, R.D. & Dorning, J.J. (1978)
Application of an Integral Coarse-Mesh Diffusion Method to Transients with Feedback. Trans. Am. Nuclear Soc., 30, pg.244-246.
- Kanarachos, A. & Provatidis, Ch. (1988)
On the Symmetrization of the BEM Formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71, pg. 151-165.
- Petterson, C. & Sheikh, M.A. (1988)
On the use of Fundamental Solutions in Trefftz Method for Potential and Elasticity Problems. Botech.
- Lawrence, R.D. & Dorning, J.J. (1978b)
A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations. Trans. Am. Nucl. Soc., 30, pg.248-249.
- Machado, R.D. & de Barcellos, C.S. (1992)
A First Modified Local Green's Function Method Approach to Orthotropic Laminated Plates, pp.405-417, Proc. 3rd International Conference in Computer Aided Design in Composite Material Technology, Delaware, USA.
- Machado, R.D. (1992)
Implementação do Método da Função de Green Local Modificado para a Solução de Placas Laminadas Compostas. UFSC, Brasil, Tese de Doutorado.
- Maldaner, M. (1993)
O Fator de Intensidade de Tensão Obtido pelo Método da Função de Green Local Modificado. DEM/UFSC, Brasil, Dissertação de Mestrado.
- de Meira Jr., A.D. (1994)
Desenvolvimentos na Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a Problemas da Elastoestática Tridimensional. DEM/UFSC, Brasil, Dissertação de Mestrado.
- Munõz R., P.A. (1994)
Desenvolvimentos na Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a problemas de Placa de Mindlin. DEM/UFSC, Brasil, Dissertação de Mestrado.
- Barbieri, R. (1999).
Solução de Problemas Condutivos-Convectivos com o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Anais do Cobem.
- Barbieri, R. (2001)
Relatório Proj. CNPq. 300296/93-2. A ser publicado.
- Skerget, P. & Brebbia, C.A. (1983)
Nonlinear Potential Problems. Cap.1 em Progress in Boundary Element Method Vol.2 (Ed. Brebbia, C.A.), Pentech-Press, London.

TREFFTZ-MLGFM

Renato Barbieri

Departamento de Engenharia Mecânica – DEM
Campus Universitário s/n
89.223-101 Joinville SC
e-mail: dem2rb@dcc.fej.udesc.br

Abstract. The Modified Local Green's Function Method (MLGFM) is an integral technique that has been used to solve several problems of continuum mechanics in the last decade. This method may be understood as an extension of the Galerkin Boundary Element Method, and its main feature is to make use of the properties of a Green's Function projection associated to the problem, without its explicit knowledge. This paper has the purpose of presenting (at first time) the determination of the Green's function projections using the Trefftz's method for MLGFM implementation.

keywords: *MLGFM, Trefftz, BEM, Green's Function.*

SIMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO TERMOMECÂNICO EM TRELIÇAS ELASTO-VISCOPLÁSTICAS COM DANO

José Maria Barbosa

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Engenharia Mecânica
Avenida Acad. Hélio Ramos s/n
50740-530, Recife- PE, Brasil
jmab@demec.ufpe.br

Anna Katarina do Nascimento Ávila

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Engenharia Mecânica
Avenida Acad. Hélio Ramos s/n
50740-530, Recife- PE, Brasil
katarina@demec.ufpe.br

Resumo. Este trabalho apresenta um modelo para estudar a influência do acoplamento termomecânico sobre o comportamento mecânico em estruturas treliçadas elasto-viscoplásticas considerando o efeito de Dano. O comportamento da estrutura foi estudado utilizando-se dois modelos baseados na teoria de variáveis internas: um modelo anisotérmico onde a influência da equação da energia é considerada e um modelo isotérmico onde esta influência é desprezada. Apesar de ser um problema não linear e acoplado pode-se mostrar que técnicas numéricas simples podem ser usadas se uma decomposição aditiva for aplicada. O método de decomposição do operador adotado no trabalho separa o problema original que é altamente acoplado em dois subproblemas desacoplados: um problema elástico resolvido através do Método dos Elementos Finitos e um problema termoplástico resolvido através de um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem. A solução destes dois problemas em seqüência permite uma aproximação para o problema global inicial. Foram realizadas simulações simples com carregamentos quase-estáticos monótonos e cíclicos considerando barras de aço 316L. Os resultados numéricos mostram que parte significativa do trabalho plástico é transformado em calor, resultando numa variação de temperatura que pode afetar tanto o comportamento mecânico como a vida útil do material.

Palavras chave: viscoplasticidade, acoplamento, termomecânico, Dano.

1. Introdução

A grande maioria dos modelos propostos para a simulação do comportamento de materiais metálicos sob regime elasto-viscoplástico ou elasto-plástico tratam os fenômenos mecânicos e térmicos isoladamente, supondo que não existam interações entre eles. Porém, pode-se observar que em certas situações que envolvam deformações inelásticas, se produz uma quantidade de calor substancial e o acoplamento entre os fenômenos térmicos e mecânicos devem ser considerados.

Este acoplamento vem incentivando estudos para a obtenção de equações constitutivas que permitam a inclusão de um acoplamento global que iremos chamá-lo de termomecânico (Pacheco, 1994; Barbosa et al, 1997), e procedimentos numéricos para tratar o sistema de equações acopladas do problema (Simo & Mihe, 1992; Pacheco, 1994; Stabler & Baker, 2000). Desta maneira é possível obter modelos que permitam previsões mais realistas sobre o comportamento dos materiais.

A teoria constitutiva apresentada possui um enfoque baseado na mecânica dos meios contínuos com variáveis internas (Lemaitre & Chaboche, 1990) onde realiza-se uma modelagem do comportamento mecânico de barras de aço 316L, inicialmente à temperatura ambiente, submetidas a carregamentos monótonos ou cíclicos.

O objetivo do presente trabalho é analisar, através de resultados numéricos, a importância da equação da energia, através dos seus termos de acoplamentos termomecânicos, no comportamento mecânico da estrutura utilizando um modelo de dano contínuo para simular o comportamento de um sistema de barras inelásticas. O modelo aqui desenvolvido será usado na simulação de uma treliça elasto-viscoplástica considerando todos os termos de acoplamento termomecânico.

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais desenvolve-se o sistema de equações não lineares para o problema de evolução quase-estática de uma treliça elasto-viscoplástica. Para a aproximação da solução do problema, propõe-se uma técnica numérica simples baseada nos Métodos de Decomposição do Operador (Operator Splitting Methods) e algoritmos seqüenciais associados (Carvalho, 1993; Armero & Simo, 1992). O Método consiste numa decomposição aditiva das equações elasto-viscoplásticas originando um algoritmo do tipo preditor e corretor. Este algoritmo implica, a cada passo, na solução de um problema elástico isotérmico, resolvido pelo Método dos Elementos finitos, seguido da aplicação de um algoritmo termoplástico consistindo na solução de equações diferenciais ordinárias cujo método de solução utilizado foi o de Runge-Kutta.

2. Equações Constitutivas com Dano

Para uma modelagem completa do material estudado, além dos princípios básicos que formam os princípios fundamentais da termomecânica são também necessárias informações adicionais que o caracterizem. Essas informações são dadas através de um conjunto de equações, de natureza empírica, chamadas de equações constitutivas. O grau de detalhamento da modelagem é função da escolha destas equações.

As equações constitutivas utilizadas para descrever o comportamento inelástico do material, assim como o modelo de dano, são derivados a partir de uma teoria constitutiva de variáveis internas com forte respaldo termodinâmico. A teoria constitutiva aqui apresentada, também abordada em Pacheco (1994) e em Costa Mattos (1988), permite descrever um grande número de comportamentos mecânicos inelásticos numa mesma estrutura matemática.

A Teoria será apresentada dentro do contexto termodinâmico unidimensional, associando-se variáveis de estado aos diferentes mecanismos que intervêm durante o processo de deformação. O conjunto de equações constitutivas do modelo são dadas por (Pacheco, 1994):

$$s = (1 - D)E[(e - e^p) - a(\alpha - \alpha_0)] \tag{1}$$

$$\dot{e}^p = \left\langle \frac{|s - X| - R - (1 - D)s_p}{k} \right\rangle^n \frac{s - X}{|s - X|} \tag{2}$$

$$\dot{p} = |\dot{e}^p| \tag{3}$$

$$\dot{c}_1 = \dot{e}^p - (2/3)(j_1/a_1) X_1 \dot{p} \tag{4}$$

$$\dot{c}_2 = \dot{e}^p - (2/3)(j_2/a_2) X_2 \dot{p} \tag{5}$$

$$\dot{D} = \frac{B^D}{S_0} \dot{p} \tag{6}$$

p e c são variáveis internas associadas respectivamente ao endurecimento isotrópico R e ao endurecimento cinemático X, e é deformação total, e^p a deformação plástica, θ a temperatura absoluta, D é a variável interna de dano relacionada com a degradação do material, e B^D é a “força termodinâmica” associada ao dano. As demais variáveis são coeficientes constitutivos considerados com tendo uma dependência linear com temperatura (Pacheco, 1993).

Considerando o caso adiabático, sem geração de calor e sem convecção a equação da energia pode ser escrita como:

$$r c_e \dot{\alpha} = d_1 + acpT \tag{7}$$

onde c_e representa o calor específico.

O acoplamento interno (d_1) e o acoplamento térmico (acpT) podem ser escritos respectivamente da seguinte forma,

$$d_1 = s\dot{e}^p - R\dot{p} - X\dot{c} + B^D \dot{D} \tag{8}$$

$$acpT = \alpha \left(\frac{\alpha s}{\alpha \alpha} (\dot{e} - \dot{e}^p) + \frac{\alpha R}{\alpha \alpha} \dot{p} + (2/3) \frac{\alpha X}{\alpha \alpha} \dot{c} - \frac{\alpha B^D}{\alpha \alpha} \dot{D} \right) \tag{9}$$

O acoplamento interno está associado a potência dissipada devido ao trabalho de deformação plástica e o acoplamento térmico está associado a dependência dos coeficientes constitutivos com a temperatura.

3. Treliça Elasto-viscoplástica com Dano

A estrutura considerada consiste em uma treliça elasto-viscoplástica composta por 3 barras com seção transversal constante e 4 nós. Onde se aplica uma força prescrita $F(t)$.

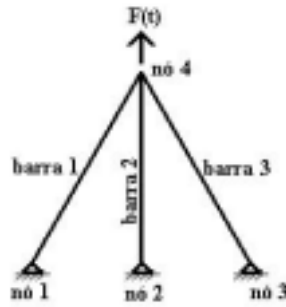


Figura 1. Treliça simples

Considerando as hipóteses de carregamentos quase-estáticos na treliça e deformações homogêneas em cada barra, é possível mostrar que o problema se reduz a encontrar, a cada instante t e em cada barra, os deslocamentos nodais, as deformações plásticas, a temperatura e um conjunto de variáveis internas $\beta = (p, c)$ de forma que as equações (1)-(5) sejam sempre satisfeitas. Utilizando-se como base para o Método dos Elementos Finitos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais e seguindo os mesmo desenvolvimento descrito em Carvalho, 1993, obtém-se o seguinte sistema algébrico a ser resolvido:

$$\underline{\underline{K}}\underline{U} = \underline{R} + \underline{R}^p + \underline{R}^q \tag{10}$$

Na equação (10) acima, \underline{U} é o vetor dos deslocamentos nodais e \underline{R} é o vetor dos esforços aplicados nos nós. Sendo \underline{R}^p os esforços provenientes da deformação plástica e \underline{R}^q os esforços provenientes do efeito causado pela variação de temperatura. $\underline{\underline{K}}$ é a matriz rigidez global de toda a estrutura.

A equação (6) juntamente com as equações constitutiva e equação da energia formam o problema de valor inicial a ser resolvido. As seguintes condições iniciais foram adotadas

$$\text{Para } t=0: \epsilon^p = s = b = e = p = X = Y = 0; q = 293K$$

4. Algoritmo Solução

Apesar da generalidade e sofisticação das equações constitutivas consideradas neste trabalho, técnicas numéricas relativamente simples podem ser utilizadas para se obter uma solução aproximada do problema descrito pelo conjunto de equações (1 - 7) e (10) conseguindo ainda uma boa estabilidade e precisão nos resultados obtidos.

Para a aproximação da solução dos problemas de evolução quase-estática, em treliças elasto-viscoplásticas, propõe-se uma técnica numérica simples baseada nos Métodos de Decomposição do Operador (MDO - Operator Splitting & Fractional Step Methods) e algoritmos seqüenciais associados (Product Formula Algorithm) (Carvalho, 1993; Armero, & Simo, 1992; Stabler & Backer, 2000). A idéia básica do método consiste numa decomposição aditiva das equações do problema original numa seqüência de outros mais simples do tipo preditor/elástico e corretor/termoplástico de forma que possam ser aplicados métodos numéricos clássicos dos quais se conheça bem o comportamento de estabilidade e convergência. Este algoritmo implica, a cada passo, na solução de um problema elástico isotérmico, resolvido pelo Método dos Elementos Finitos, onde se calcula o campo de deformação total e de tensão, considerando que as variáveis β , ϵ^p , θ e D não evoluem, seguido da aplicação de um algoritmo termoplástico consistindo na solução de equações diferenciais ordinárias cujo método de solução utilizado foi o de Runge-Kutta ou o de Euler onde neste passo processa-se a evolução das variáveis σ , β , ϵ^p , θ e D . O algoritmo global assim obtido permite uma aproximação do problema geral, e segundo alguns autores (Marchuck, 1983; Chorin et al, 1978; Ortiz & Taylor, 1983), possui propriedades de estabilidade e de consistência se cada algoritmo independente igualmente a possuir.

O algoritmo global com o esquema iterativo, está mostrado na logo abaixo. Foi considerado um valor crítico para o dano de 0,9, pois para valores acima deste, o material praticamente já atingiu seu limite de vida podendo ocorrer, caso se considere valores maiores de dano, problemas numéricos.

Algoritmo:

- i) $n = 1$; ϵ^p_0 , β_0 , θ_0 e D_0 são conhecidos em cada barra
- ii) Estimativa elástica
 $\epsilon^p_n = \epsilon^p_{n-1}$; $\beta_n = \beta_{n-1}$; $\theta_n = \theta_{n-1}$ e $D_n = D_{n-1}$
- iii) Cálculo da matriz rigidez $K(D_n) = K_n$
- iv) Cálculo de $F^p(\epsilon^p_n) = F^p_n$
- v) Cálculo de $F^\theta(\theta_n) = F^\theta_n$
- vi) Cálculo de U_n , solução do sistema pelo Método dos Elementos Finitos :

$$(K_n)(U_n) = F_n^p + (F_n) + (F_n^\theta)$$

K é uma matriz simétrica e positiva definida

- vii) Cálculo das deformações (ϵ_n^p) associadas aos deslocamentos nodais (U_n)
- x) Cálculo das forças termodinâmicas em cada barra (σ_n), (B_n^β) através das equações de estado.
- xi) Verificar para cada barra se

$$|\sigma - X| - Y - (1 - D)\sigma_p = F_n \leq 0$$

- 1.xi) sim \Rightarrow Processo Elástico:
 $\epsilon_n^p = \epsilon_{n-1}^p$; $\beta_n = \beta_{n-1}$, $\theta_n = \theta_{n-1}$ e $D_n = D_{n-1}$
 vá para xiii)

- 2.xi) não \Rightarrow Problema de Evolução viscoplástica:
 Cálculo das taxas das variáveis internas $\dot{\epsilon}_n^p$, $\dot{\beta}_n$, $\dot{\theta}_n$ e \dot{D}_n
 Cálculo de ϵ_n^p ; β_n ; θ_n e D_n (Método de Euler ou Runge-Kutta)

- xii) $D_n < D_{\text{crítico}}$?

- 1.xii) sim \Rightarrow continue

- 2.xii) não \Rightarrow Fim

- xiii) $n = n + 1$

- xiv) Critério de parada : $n >$ número máximo de passos ?

- 1.xiv) sim \Rightarrow Fim

- 2.xiv) não \Rightarrow volte para (ii)

Os algoritmos de solução foram implementados utilizando-se o software MATLAB (Hanselman & Littlefield, 1999) onde também foi desenvolvida uma interface gráfica para uma melhor interação com o usuário do programa.

5. Resultados Numéricos

Foram obtidos resultados numéricos de simulações com carregamentos em força prescrita aplicados na estrutura treliçada constituída de barras de aço austenítico 316L. O parâmetro constitutivo S_0 associado ao dano foi considerado constante em todas as simulações com valor igual a 30 GPa. Os demais coeficientes de constitutivos podem ser obtidos em Barbosa et al. (1997).

Com o objetivo de avaliar a influência do acoplamento termomecânico no comportamento das barras foram estudados os seguintes modelos:

1. *Anisotérmico* : onde a equação da energia é considerada no modelo.
2. *Isotérmico* : desconsideramos a equação da energia no modelo.

5.1 Carregamento Monótono

Para a simulação com carregamento monótono linear foi utilizado um coeficiente angular de 3.9×10^7 N.s. A força é prescrita no nó 4 da treliça conforme mostra a figura 1. Pela Devido a sua maior solitação as figuras a seguir são da barra 2.

Nas figuras 2 e 3 mostra-se a evolução da tensão e da deformação plástica acumulada (p), respectivamente, para o caso descrito monotonicamente. A variável (p) representa a história de deformação do material, logo quanto maior a deformação plástica acumulada mais comprometida estará a vida do material. Observa-se um amolecimento mais significativo para o modelo anisotérmico.

Na figura 4 mostra-se a evolução da temperatura. Observa-se um aumento de aproximadamente 250 K, valor bastante significativo ocorrido principalmente devido aos termos de acoplamento interno relacionados ao dano e à deformação plástica. O aumento de temperatura provocado pela deformação plástica promove uma diminuição da resistência mecânica do material que por sua vez promove uma maior deformação plástica gerando uma maior quantidade de calor. Este processo de retroalimentação é acelerado com a inclusão da variável de dano ao modelo.

A evolução da variável de dano até um valor final de 0,9 (associado a ruptura da barra) é mostrada na figura 5, observa-se que considerando o acoplamento termomecânico a degradação do material é acelerada.

Os gráficos apresentados tiveram um tempo de simulação até alcançarem o dano crítico de 14,3 segundos para o modelo anisotérmico e 15,7 segundos para o modelo isotérmico, ou seja, uma redução do tempo de vida com a presença do acoplamento de 1,4 segundos.

Através das variáveis de dano e de deformação plástica observa-se uma pequena diferença de comportamento para os casos com e sem a presença da equação de energia. Para o caso sem a consideração dos acoplamentos termomecânicos obteve um erro de previsão da vida do material de 8,9 %.

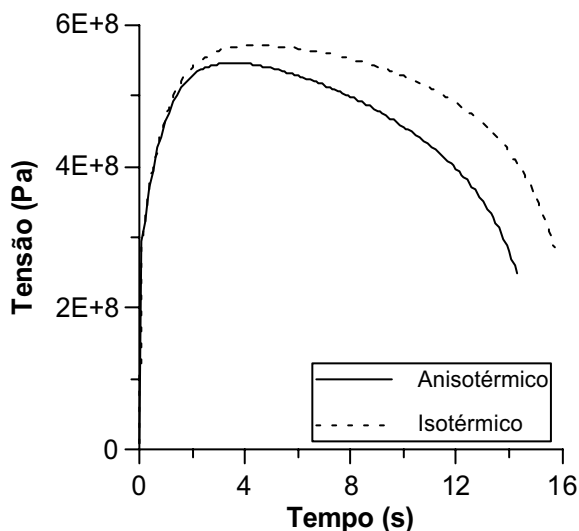


Figura 2. Variação temporal da tensão. Caso monótono

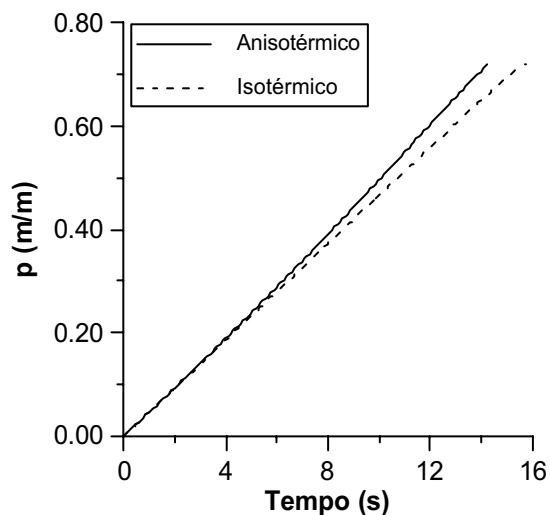


Figura 3. Variação temporal da deformação plástica acumulada. Caso monótono.

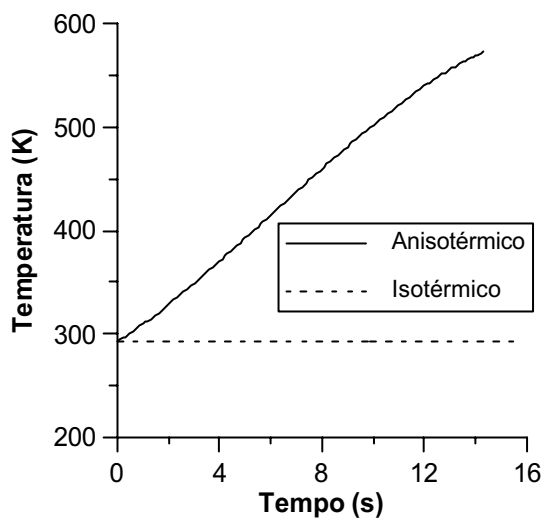


Figura 4. Variação temporal da temperatura. Caso monótono.

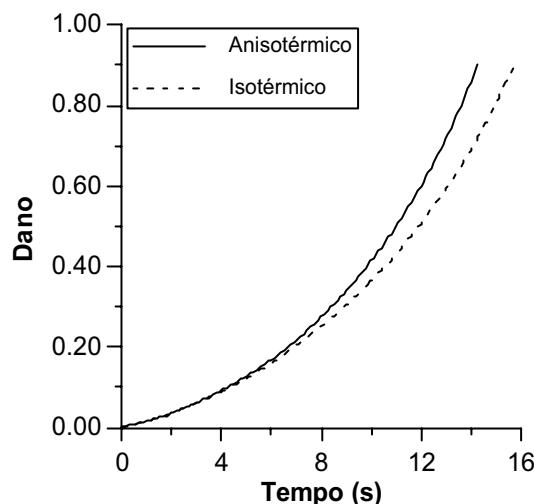


Figura 5. Variação temporal do dano. Caso monótono.

5.2 Carregamento Cíclico

Neste caso a treliça do caso anterior é submetida a carregamento cíclico do tipo triangular conforme mostra figura 6. O período do ciclo é de 0,5 segundos e a força máxima é de 4,9 MN.s que corresponde a 0,54% de deformação total na barra 2 no primeiro ciclo.

Na figura 7 mostra-se os gráficos da tensão com o tempo para os últimos ciclos de carregamento. Pode-se observar o efeito de amolecimento gerado pelo acréscimo da equação da energia ao modelo.

A figura 8 apresenta o comportamento global dos ciclos de tensão com o tempo para o modelo anisotérmico. Nota-se no início da simulação um aumento na amplitude da tensão que ocorre devido ao efeito de endurecimento ser predominante. Quando a evolução do dano torna-se significativa, a amplitude de tensão cai, estabilizando-se num patamar constante.

Na figura 9 é mostrada uma comparação entre o primeiro e último ciclo de simulação da curva tensão-deformação plástica. Pode-se notar que no último ciclo a barra não apresenta histerese plástica mostrando uma tendência do material estabilizar elástico para as condições de carregamento dado.

A evolução do dano para os casos anisotérmico e isotérmico para a barra 2 é visualizado na figura 10. Observa-se que para o caso cíclico prescrito em força, a diferença da variável de dano ente os casos foi insignificante.

A evolução da temperatura encontra-se na figura 11. Observa-se uma variação de temperatura de aproximadamente 70 graus devido principalmente ao termo de acoplamento interno associado a deformação plástica.

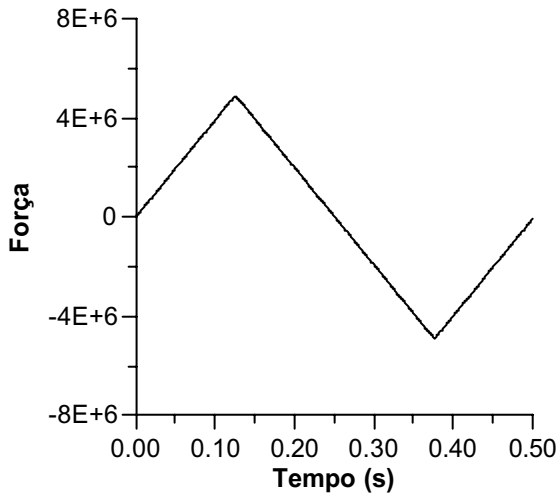


Figura 6. Função de carregamento cíclico.

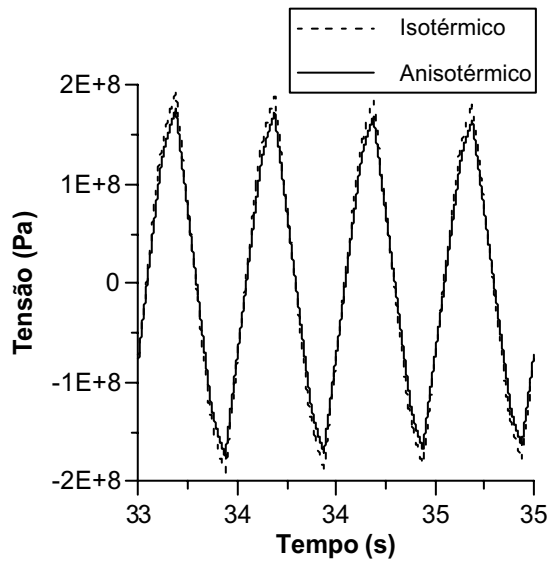


Figura 7. Variação temporal da tensão. Caso Cíclico.

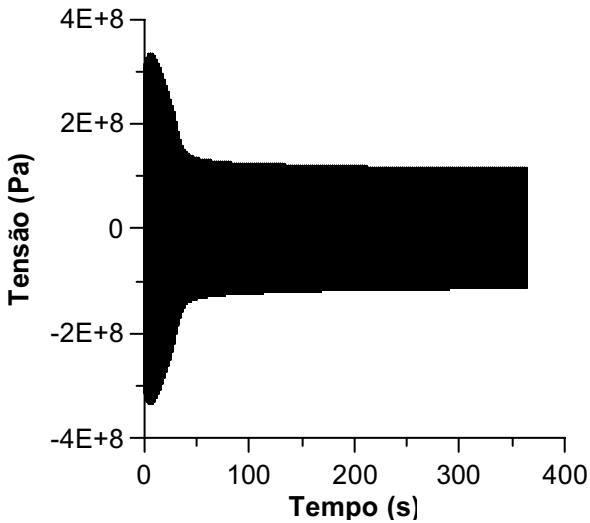


Figura 8. Variação temporal da tensão. Caso Cíclico. Modelo anisotérmico.

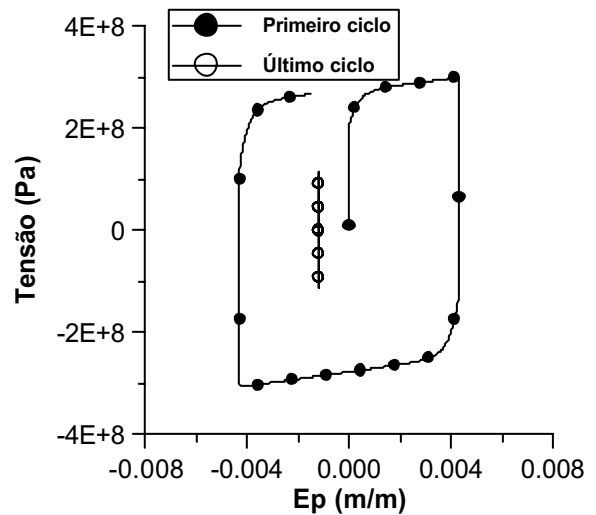


Figura 9. Curvas tensão-deformação. Modelo anisotérmico.

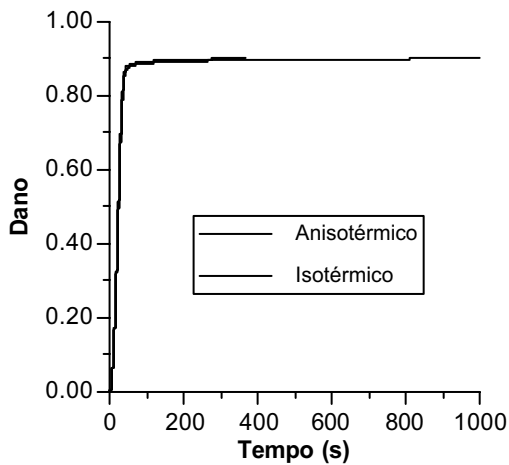


Figura 10. Variação temporal do dano. Caso Cíclico.

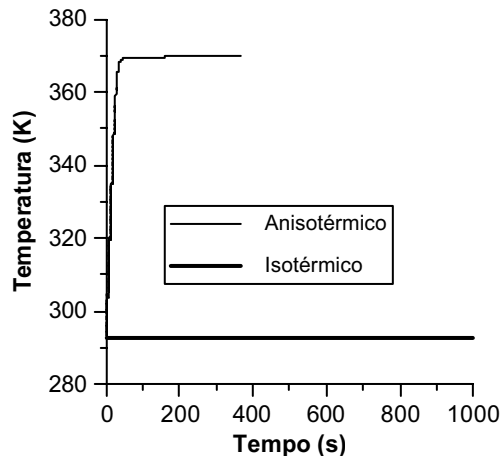


Figura 11. Variação temporal da temperatura. Caso Cíclico.

De um modo geral, verifica-se que para a simulação apresentada que os modelos com e sem a equação da energia apresentam tempo de vida diferentes: o caso anisotérmico para a barra 2 chegou ao dano crítico aos 363.726 segundos (727.452 ciclos) e o caso isotérmico chegou ao limite máximo de interações 1000 segundos (2000 ciclos) e não atingiu o dano crítico estabilizando-se sem apresentar ciclo de histerese plástica, ou seja, obtendo estimativa de vida infinita visto que o dano não iria aumentar. Apesar desta diferença na previsão de vida observa-se que a degradação para ambos os modelos foi praticamente idêntica.

É interessante notar também que as diferenças de comportamento foram observadas para uma amplitude muito pequena de deformação plástica.

6. Conclusões

Este trabalho utilizou um modelo baseado na teoria das variáveis internas para estudar o efeito do acoplamento termomecânico no comportamento de uma estrutura treliçada composta de barras de aço inox 316L, submetida a cargas cíclicas e monótonas.

Uma formulação constitutiva termodinamicamente consistente foi considerada através de um modelo de dano contínuo acoplado à lei de comportamento do material em estudo.

Apesar de ser um problema de difícil solução devido a sua complexidade e caráter altamente não-linear, mostrou-se que soluções numéricas podem ser facilmente obtidas, a partir de métodos clássicos, se a técnica de partição do operador for aplicada.

Nos exemplos apresentados no trabalho constatou-se um aumento de temperatura provocado pelo processo de deformação plástica que levou a uma diminuição da resistência mecânica do material, que por sua vez desenvolveu uma maior deformação plástica, gerando uma maior quantidade de calor reduzindo em 8% a vida útil do material para o caso monótono.

Para o caso cíclico prescrito em força foi obtido um tempo de vida do material, para o modelo anisotérmico, de 1/3 do tempo de vida para o modelo isotérmico. A consideração da equação da energia levou o material a antes de estabilizar-se elástico romper-se, o que não acontece para o caso isotérmico onde o material se estabiliza elástico antes do dano crítico ficando com tempo de vida infinito. Apesar desta diferença na previsão de vida observa-se que a degradação para ambos os modelos foi praticamente idêntica.

7. Referências

- Armero, F., Simo, F.C., 1992, "A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems", *Int. Journal Num. Method Eng.*, vol. 35, pp.737-766.
- Barbosa, J. M. A., Pacheco, P. M. C. L., Costa Mattos, H. S., 1997, "Sobre el Papel de la Temperatura en las Vibraciones Mecánicas de Barras Elasto-Viscoplásticas", *Revista Internacional de Informacion Tecnologica*, vol 8, n. 6.
- Carvalho, R. B., 1993, "Simulação Numérica do Amolecimento em Treliças Elasto-Vicoplásticas com Dano", *Dissertação de Mestrado, Depto. De Engenharia Mecânica, PUC- Rio*.
- Chorin, A. J., Hughes, M. F., McCracken, M. F. and Marsden, J. E., 1978, "Product Formulas and Numerical Algorithms", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 31, pp.205-256.
- Costa Mattos, H. S., 1988, "Uma Contribuição a Formulação Termodinâmica da Elasto-Plasticidade e da Elastoviscoplasticidade", *Tese de Doutorado, Depto. de Enga. Mecânica, PUC-Rio*.
- Hanselman, D., Littlefield, B., 1999, "Matlab 5, Versão Estudante - Guia do Usuário", *Makron Books*.
- Lemaitre, J., Chaboche, 1990, "Mechanics of Solid Materials", *Cambridge*.
- Marchuk, G.I., Shaidunov, V. V., 1983, "Difference Methods and their Extrapolations", *Application of Mathematics*, Vol. 19, Springer-Verlag.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. and Taylor, R.L., 1983, "Operator Split Methods for the Numerical Solution of the Elastoplastic Dynamic Problem", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 39, pp.137-157.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. and Taylor, R.L., 1983, "Unconditionally Stable Element-by-Element Algorithms for Dynamic Problems", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 36, pp.223-239.
- Pacheco, P. M. C. L., 1994, "Análise do Acoplamento Termomecânico em Materiais Elasto-Viscoplásticos", *Tese de Doutorado, Depto. de Eng. Mecânica, PUC-Rio*.
- Pacheco, P. M. C. L., Chimento, F. E.G. e Costa Mattos, H., 1993, "Sobre a Análise de Falha em Componentes Mecânicos, Usando a Mecânica do Dano Contínuo", *Anais do XII COBEM, Brasília, Dez.*, pp. 1451-1454.
- Simo, J.C. and Mihe, C., 1992, "Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains Formulations, Numerical Analysis and Implementation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol 98, pp 41-104.
- Stabler, J.; Baker, G., 2000, "Fractional step methods for thermo-mechanical damage analyses at transient elevated temperatures", *Int. Journal Num. Met. Eng.*, Vol. 48, No.5 pp. 761-785.

SIMULATION OF TERMOMECHANICAL COUPLING IN ELASTO-VISCOPLASTIC TRUSS WITH DAMAGE

Anna Katarina do Nascimento Ávila

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Engenharia Mecânica
Avenida Acadêmico Hélio Ramos s/n
50740-530, Recife- PE, Brasil
katarina@demec.ufpe.br

José Maria Barbosa

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Engenharia Mecânica
Avenida Acadêmico Hélio Ramos s/n
50740-530, Recife- PE, Brasil
jmab@demec.ufpe.br

Abstract. *A model with internal variables is presented to study the thermomechanical coupling effects on a metallic viscoplastic truss subjected to quasi-static loading. Metallic components submitted to cyclic loading, part of the plastic work is transformed into heat, resulting in a temperature rise, which affects the mechanical behavior of the material. In cyclic analysis of metallic structures, usually the hypothesis of isothermal process is adopted. A damage variable is introduced in the model to study the influence of the thermomechanical coupling in processes involving the degradation of the material. Simple numerical solutions are obtained when an Operator Splitting Technique is used. Numerical simulations of a 316 L stainless steel truss are presented and analyzed. The present work shows, through simple examples, that simplifying isothermal hypothesis can be inadequate when inelastic deformations are involved.*

Keywords. *viscoplasticity, coupling, termomechanical, Damage.*

PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM UM CORPO FRÁGIL, ESTUDO TEÓRICO EXPERIMENTAL

Hervandil Morosini Sant'Anna

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
herva@yahoo.com

Gilnei Reckziegel

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
reckiegel@hotmail.com

Ignacio Iturrioz

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
ignacio@mecanica.ufrgs.br

Resumo. A modelagem numérica da propagação de trincas é uma situação complexa que envolve dificuldades consideráveis, devido, entre outros problemas, às dificuldades na simulação da transição do meio contínuo ao descontínuo. Neste estudo se apresenta uma comparação entre resultados experimentais obtidos com um corpo de prova de vidro e o estudo com dois métodos numéricos essencialmente diferentes: o método dos elementos finitos, e o método dos elementos discretos. Conclusões são apresentadas sobre as vantagens e as desvantagens dos métodos empregados para realizar estas simulações.

Palavras chave: Frágil, Fratura, Propagação da Trinca, Fator de Intensidade de Tensões

1. Introdução

Muitos critérios tradicionais de dimensionamento são baseados em limitar a tensão máxima na seção crítica do componente ou estrutura ao valor da tensão de segurança, que é normalmente a tensão máxima admissível dividida por um coeficiente de segurança.

Entretanto, projetos de crescente sofisticação e razões de economia criaram a necessidade de melhor compreensão do comportamento dos materiais nas condições de serviço, e em particular dos problemas de fratura e fadiga.

O fenômeno da propagação instável de fissuras foi estudado pela primeira vez nos anos 20, com o trabalho de Griffith (1920) sobre o valor teórico e experimental da tensão de fratura de um sólido frágil.

A análise pela Mecânica da Fratura de estruturas fissuradas dá resposta ao problema da segurança operacional. Basicamente, o problema consiste na obtenção de uma estimativa quantificada do comportamento da fissura observada, ou de cuja existência se suspeita: ou esta permanece com dimensões inferiores às críticas durante o período de serviço seguinte, ainda que aumente estavelmente de dimensões durante esse período, ou se propaga instavelmente, e nesse caso é necessário tomar providências preventivas.

A motivação deste estudo é realizar a simulação numérica do caminho que percorrerá a trinca ao se propagar, informação de importância para poder evitar o colapso da estrutura.

Nesse trabalho analisou-se uma estrutura de vidro com uma geometria simples, bi-apoiada, submetida a um carregamento estático (aplicado lentamente) uniformemente distribuído e descentrado, comparando qualitativamente os resultados obtidos com o ensaio experimental realizado.

2. Propagação de trincas utilizando o método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos se baseia na idéia de dividir o contínuo em um número finito de pequenas regiões, denominadas elementos finitos, mas mantendo a idéia básica inicial de meio contínuo. Segundo apresentado por Carvalho et. Al. (1999), existem diversos métodos que permitem prever a direção de propagação de uma trinca, como a máxima tensão circunferencial ($\sigma_{\theta máx}$), a máxima taxa de liberação de energia potencial ($G_{\theta máx}$) ou a mínima densidade de energia de deformação ($S_{\theta máx}$). O método utilizado pelo programa é a máxima tensão circunferencial.

2.1 Teoria de propagação da trinca segundo a máxima tensão circunferencial

O critério da máxima tensão circunferencial é relativamente simples de ser deduzido, apresentando uma solução fechada.

As tensões na ponta da trinca para o modo I e II são dadas pela soma das tensões obtidas para cada modo separadamente (soluções de Westergaard). Como resultado são obtidas as seguintes equações em coordenadas polares. A representação física dos coeficientes das Eq. (1-3) é visualizada na Fig. (1):

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta - 2K_{II} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right\} \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \sin\theta + K_{II} (3 \cos\theta - 1) \right] \quad (3)$$

Onde:

r, θ : distância e ângulo no sentido anti-horário medidos da ponta da trinca ao ponto que se deseja analisar;

K_I : coeficiente de intensidade de tensões para o modo I;

K_{II} : coeficiente de intensidade de tensões para o modo II;

σ_r : tensão normal na direção radial;

σ_θ : tensão normal na direção circunferencial;

$\tau_{r\theta}$: tensão de cisalhamento.

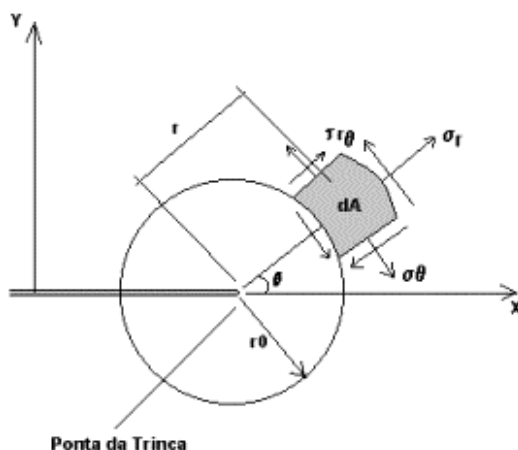


Figura 1. Tensões circunferenciais na ponta da trinca, Carvalho et. al. (1999).

O critério da máxima tensão circunferencial estabelece que:

- A extensão da fissura se iniciará na sua ponta, na direção radial;
- A extensão da fissura se iniciará em um plano perpendicular à direção onde $\sigma_{\theta\text{máx}}$ é máxima e logo, $\tau_{r\theta} = 0$;
- A extensão sem fadiga ocorrerá quando $\sigma_{\theta\text{máx}}$ atingir um valor crítico correspondente a uma constante do material.

(K_{IC} para o modo I).

Introduzindo as condições antes citadas nas expressões (1), (2) e (3) e resolvendo as mesmas é possível obter os seguintes limites superior e inferior, em módulo, do ângulo de propagação da trinca, bem como seus valores intermediários, dados respectivamente pelas expressões a seguir:

$$\theta = 0^\circ \quad (4)$$

$$\theta = \pm 70,5^\circ \quad (5)$$

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (6)$$

O sinal do ângulo nas expressões (5) e (6) é dependente do sinal de K_{II} . Se $K_{II} > 0 \rightarrow \theta < 0$. Por outro lado, se $K_{II} < 0 \rightarrow \theta > 0$. Maiores detalhes sobre a dedução dos limites apresentados nas expressões (4), (5) e (6) podem ser encontrados em Carvalho et. al. (1999)

O modelo de propagação da trinca descrito acima está implementado em um software que calcula as condições de equilíbrio do sistema utilizando o Método dos Elementos Finitos, FRANC2D (1999), desenvolvido na Universidade de Cornell. O mesmo permite simular processos bidimensionais de propagação de fissuras, baseado em uma estratégia de geração adaptativa de malhas de elementos finitos.

A metodologia de cálculo utilizada no software é relativamente simples, caracterizada por 6 passos básicos:

- Análise do modelo pelo método dos elementos finitos;
- Cálculo dos fatores de intensidade de tensão;
- Determinação da direção de propagação da trinca e a nova localização da ponta da fissura;
- Deleção da malha de elementos finitos adjacente à extensão da trinca;
- Atualização da geometria da trinca;
- Remalhamento automático.

Cada um desses passos é executado automaticamente. Cabe ao usuário entrar apenas a geometria, as condições de contorno, e o comando para se iniciarem os cálculos.

Para a análise estrutural é empregado o método padrão de elementos finitos, usando elementos isoparamétricos triangulares ou retangulares com funções de interpolação quadráticas. As equações da elasticidade linear infinitesimal são assumidas durante o processo de propagação. Essa hipótese é válida, pois é necessário fornecer também ao programa o incremento da trinca a cada iteração, que deve ser um valor pequeno (da ordem de milímetro) para se obter resultados coerentes. Assumindo um tamanho inicial da trinca, o programa pode calcular o fator de intensidade de tensões. Elementos do tipo “quarter-point” são usados para capturar o estado de tensão-deformação na ponta da trinca.

O fator de intensidade de tensões calculado é então empregado para determinar a próxima configuração no processo de propagação. Isto é feito em duas etapas:

- Inserindo o fator de intensidade de tensões na teoria de propagação, que prediz a mudança incremental no ângulo de propagação, e determina a estabilidade local;
- Se a trinca está instável, ou se a estabilidade não está sendo verificada, a localização da nova ponta de trinca é solicitada. Essa nova ponta deve ser verificada quanto a estabilidade, e os cálculos são refeitos pelo programa.

A modelagem da geometria resultante desses passos é executada eficientemente porque a estrutura de dados do programa usa a topologia de uma malha de elementos finitos para descrever a geometria do modelo. A “topologia” descreve as relações entre as diferentes entidades topológicas, como vértices, furos, etc. A capacidade de mudanças locais na malha em uma região ao longo do caminho de propagação da trinca possibilita traçar a evolução da trinca sem nenhuma perda de informação estrutural das demais regiões, tais como geometria, condições de contorno e propriedades de material.

Maiores detalhes sobre o processo de remalhamento utilizado pelo software podem ser verificados no trabalho de Bittencourt et al (1996).

3. Método dos elementos discretos

Este método é baseado na discretização espacial do contínuo, utilizando elementos de barra que formam uma treliça espacial, onde se faz uma equivalência mecânica entre o comportamento dessas barras e o meio contínuo que se deseja representar.

As equações de movimento resultantes são desacopladas (a matriz de massa é diagonal e o amortecimento é proporcional à massa) e são integradas no tempo, utilizando o Método das Diferenças Finitas Centrais.

Cada nó tem 3 graus de liberdade (deslocamentos nas 3 direções). As massas são unidas por elementos longitudinais e diagonais de comprimento L_c e $\sqrt{3} L_c / 2$ respectivamente. A treliça é formada por um conjunto de módulos cúbicos regulares mostrados na Fig. (2). Se o meio for isotrópico elástico e linear, o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,25$ e a área das barras longitudinais internas é calculada usando a Eq. (7).

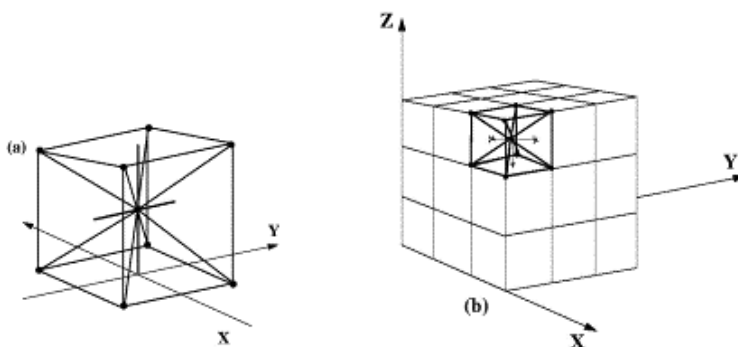


Figura 2. Arranjo cúbico: (a):módulo básico, (b) composição de prismas.

$$A_n = L_c \frac{9 + 8n}{18 + 24n} \quad (7)$$

Onde:

$n=8\nu(4-8\nu)$ sendo ν o módulo de Poisson. Para os elementos diagonais tem-se:

$$A_d = L_c \frac{2n(9 + 8n)}{\sqrt{3}(18 + 24n)} \quad (8)$$

No caso em que ν é diferente de 0.25 a equivalência entre o modelo sólido e o reticulado não é perfeita. Assim, pequenos erros são introduzidos no modelo.

No domínio temporal, se utiliza um esquema explícito de integração numérica. Em cada passo de integração, se resolve para cada nó uma equação de equilíbrio do tipo:

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} + c \frac{du_i}{dt} = f \quad (9)$$

Onde:

m: massas nodais;

c: coeficiente de amortecimento proporcional a massa;

u_i : são as componentes do vetor de coordenadas nodais em relação aos três eixos de referência X_i ;

f: componente das forças internas (aplicadas pelas barras que concorrem a um nó) e externas.

Este método tem sido aplicado com sucesso no estudo de materiais suscetíveis de fraturar, onde a hipótese dos meios contínuos, base dos métodos numéricos tradicionais (elementos finitos e de contorno) é violada.

3.1. Definição do critério de ruptura e da relação constitutiva elemental (RCE)

A relação constitutiva de cada barra tem a seguinte forma:

$$\text{Força} = \text{função}(\text{deformação da barra}) \quad (10)$$

Considerando que o material em estudo tem comportamento frágil, a mecânica linear da fratura pode ser aplicada. O fator intensidade de tensões (K_I), parâmetro de comparação da mecânica da fratura pode ser escrito como:

$$K_I = \chi \cdot f_i \cdot \sqrt{a} \quad (11)$$

Onde:

f_i : tensão de controle crítica;

χ : parâmetro que depende da geometria do problema;

a: comprimento da trinca.

Considerando o comportamento linear até a ruptura ($f_i = \epsilon_p \cdot E$) e considerando estado plano de deformações, verifica-se que pode ser escrita uma expressão para a deformação crítica, mostrada na Eq. (12):

$$\epsilon_p = R_f \cdot \left[\frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (12)$$

Onde:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (13)$$

e R_f é um “fator de falha” definido como:

$$R_f = \frac{1}{(\chi \cdot \sqrt{a})} \quad (14)$$

A partir dessas definições, pode-se adotar um diagrama bi-linear para a relação constitutiva elemental (RCE), ilustrado na Fig. (3):

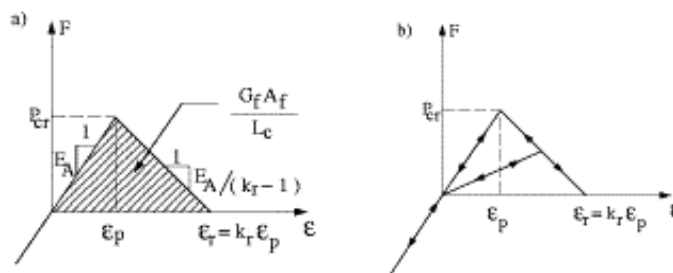


Figura 3. Relação constitutiva elementar das barras do reticulado: a) Diagrama constitutivo adotado com seus parâmetros de controle; b) Esquema para a carga e descarga (Rocha, 1989)

Os símbolos usados na Fig. (3) têm o seguinte significado:

F: força axial que atua na barra, função da deformação ϵ_p , sendo P_{cr} o valor dessa força associado à ϵ_p ;

E_A : rigidez axial pelo comprimento da barra, E_n ou E_d , conforme a topologia da barra (normal ou diagonal);

ϵ_p : deformação crítica de ruptura. É a deformação na qual o material começa a romper;

k_r [ductilidade]: trata-se de um parâmetro que permite calcular a deformação para a qual a barra não transmite mais esforços de tração ($\epsilon_r = k_r \cdot \epsilon_p$);

$$k_r = \frac{L_{cr}}{L_c} \tag{15}$$

L_{cr} : Comprimento crítico das barras, Eq. (16);

L_c : comprimento das barras normais;

A_f : área de influência da barra, ou seja, área de fratura associada a sua ruptura. Pode ser expressa na forma $A_f = c_A \cdot L_c^2$, onde c_A é um coeficiente geométrico próprio do modelo, com valor definido como 0,1385, para as barras normais, conforme Hayashi (1982);

G_f : Energia de fratura específica do material, mostrado na Eq. (13);

É importante observar que ϵ_p , E , P_{cr} e G_f são considerados propriedades exclusivas do material; A_f e L_c são propriedades exclusivas do modelo e os parâmetros k_r e E_A dependem tanto do modelo quanto do material.

Submetida à compressão, a barra tem um comportamento linear elástico, sendo que a ruptura do modelo global quando comprimido deverá ocorrer por tração indireta, causada pelo efeito de Poisson.

É importante destacar que a forma como se modela o efeito de abrandamento (“strain-softening”) é fundamental para uma correta representação do fenômeno de ruptura de um material frágil. O efeito de abrandamento presente no diagrama adotado tem como principal objetivo condicionar a quantidade de energia a ser consumida durante a ruptura do material.

Observa-se também que quando uma barra rompe, nem toda a energia elástica é consumida no processo de ruptura. Parte dessa se preserva sob a forma de energia cinética e elástica nas duas porções em que o elemento se divide. Como não é possível se ter esta subdivisão para o elemento isolado já que as massas estão concentradas nos nós, e não distribuídas no comprimento da barra, isto se traduz em uma limitação do comprimento L_c . Esta restrição se reflete no fato de que toda a energia elástica deve ser consumida pelo processo de fratura da barra. Para que isto se verifique, o fator de ductilidade k_r deve ser maior do que 1. Pode-se definir então um comprimento de barra crítico L_{cr} , Eq. (16) como sendo um limite máximo no nível de discretização para que o modelo computacional funcione corretamente, mostrado por Rocha (1989).

$$L_{cr} = \frac{2 \cdot c_A \cdot (1 - \nu^2)}{\alpha \cdot Rf^2} \tag{16}$$

Onde:

$$\alpha = \frac{(9 + 8\delta)}{(18 + 24\delta)} \tag{17}$$

$$\delta = \frac{9\nu}{(4 - 8\nu)} \tag{18}$$

Este método tem sido utilizado com sucesso na simulação do comportamento mecânico de materiais frágeis como concreto e concreto armado, assim como em solos. Maiores detalhes sobre o método e suas aplicações podem encontrar-se em (Hashasi, 1982; Rocha, 1989; Riera & Rocha, 1991 e Iturrioz, 1995), sendo que nestas referências podem encontrar-se os antecedentes do método e aplicações feitas por outros centros de pesquisa.

4. Descrição do ensaio realizado

Com o intuito de comparar a eficiência dos modelos numéricos apresentados neste trabalho na determinação do caminho seguido pela trinca, realizou-se um ensaio mecânico em um corpo de prova de vidro, cujas dimensões são apresentadas na Fig. (4), bem como as condições de apoio e de carregamento. Foram consideradas as seguintes constantes elásticas, extraídas do Núcleo de Design e Seleção de Materiais (NDSM/UFRGS 2000):

Módulo de Elasticidade (E): $6.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson (ν): 0.24, K_{IC} : 600000 a $760000 \text{ Nm}^{-3/2}$

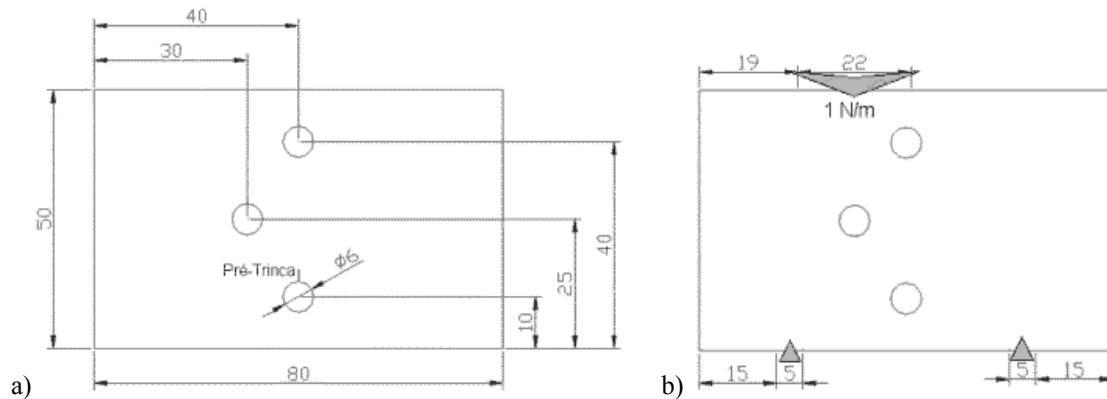


Figura 4: “layout” do corpo de prova ensaiado. a) descrição geométrica (espessura do corpo de prova: 10 mm), b) condição de carregamento e apoios.

O ensaio consistiu em aplicar lentamente uma carga monotonicamente crescente até a trinca induzida no corpo de prova propagar-se em forma instável; a pré-trinca induzida foi de 2 mm de comprimento.

Na Fig. (5) se apresenta a fotografia do corpo de prova antes de realizar o ensaio e o mesmo montado na prensa hidráulica.

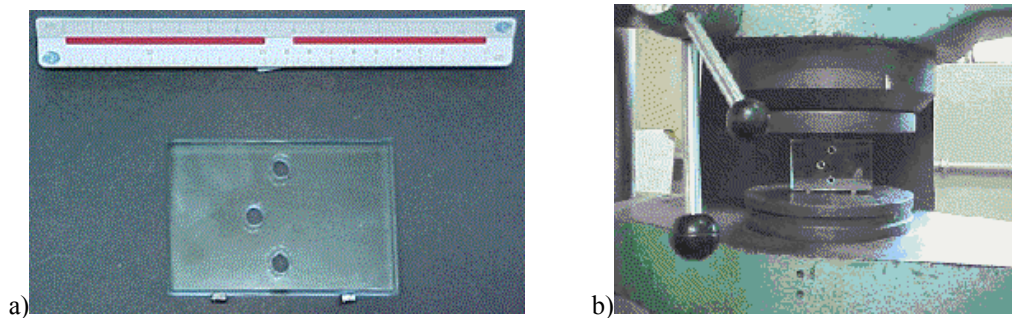


Figura 5. a) Fotografia do corpo de prova, b) amostra montada na prensa.

A carga de ruptura obtida foi de 8697N. Na Fig. (6) é mostrada a configuração final da placa após o ensaio.

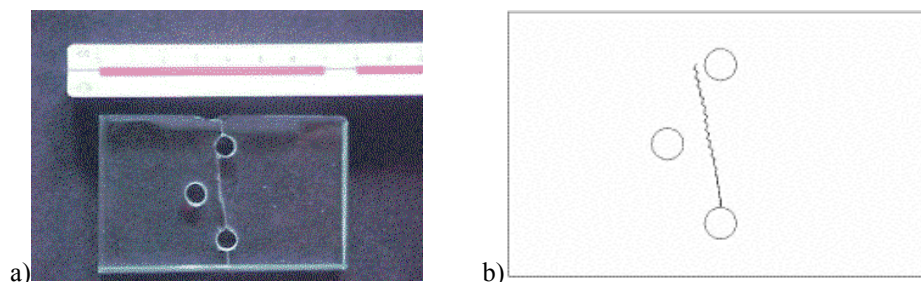


Figura 6. a) Corpo de prova após o ensaio; b) propagação da trinca no software FRANC2D.

Foram realizados dois ensaios sendo que um destes foi desconsiderado devido à excentricidade da carga aplicada, que modificou o mecanismo de ruptura do corpo de prova. Uma análise experimental mais completa seria necessária para a confirmação do padrão de ruptura obtido no único ensaio relevante.

5. Modelos numéricos implementados e comparação de resultados

5.1. Modelo com elementos finitos

Foi considerado um modelo de estado plano de deformações, utilizando elementos isoparamétricos quadráticos de 8 nós.

O programa utilizado FRANC2D é interativo e permite várias facilidades na análise do modelo. A malha de elementos finitos é gerada no software CASCA, distribuído no mesmo pacote. Todas as operações de ambos os programas são descritas com detalhes no manual do programa, distribuído eletronicamente juntamente com o software. Cabe salientar que o programa permite também medir a vida útil por fadiga do modelo, utilizando a regra de Paris.

O programa permite obter também o fator de intensidade de tensões para a carga de ruptura obtida experimentalmente ($P=8397N$); sendo o valor de fator de intensidade de tensões correspondente $K_I = 622141 \text{ Nm}^{-3/2}$, valor que está dentro da faixa de valores de K_{IC} obtidos como dados que caracterizam o material empregado (K_{IC} entre 600000 e $750000 \text{ Nm}^{-3/2}$).

Na Fig. (7) é apresentada uma vista do modelo discretizado (antes de iniciar-se o processo de propagação da trinca, e uma vista do estado tensional, em termos da 1ª tensão principal.

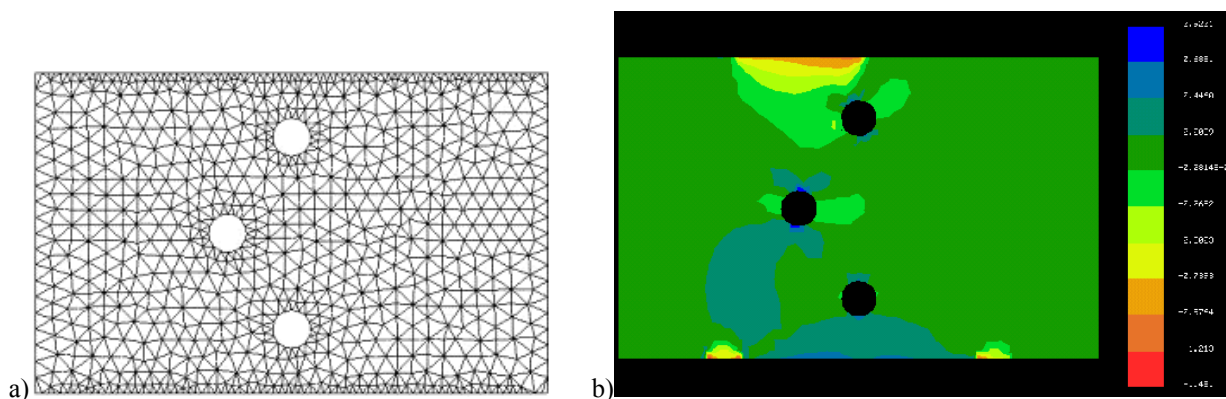


Figura 7. a) Vista do modelo discretizado utilizando o programa FRANC2D, b) vista do estado tensional em termos da 1ª tensão principal.

Na Fig. (8a) é apresentada a configuração final obtida com o FRANC2D, que comparada com os resultados obtidos experimentalmente, Fig. (6) e com os obtidos com o método dos elementos discretos, Fig. (8b) apresentam-se satisfatórios.

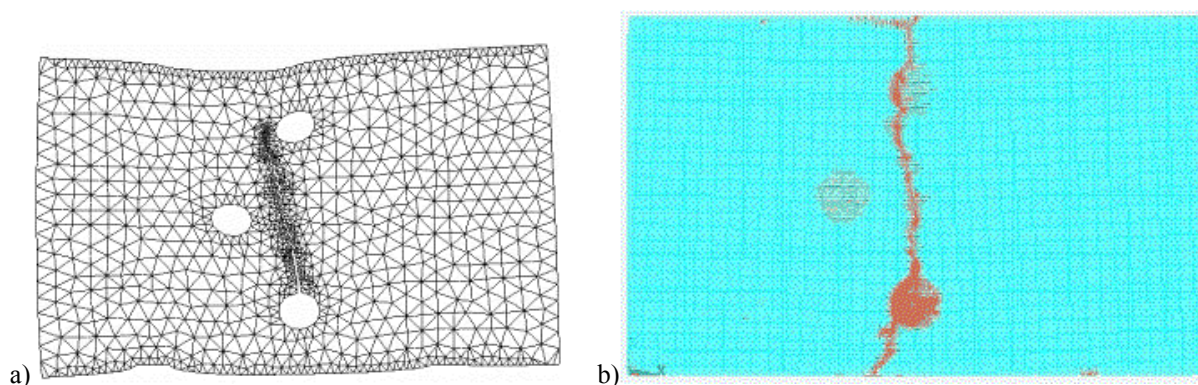


Figura 8. Comparação entre as configurações finais obtidas no ensaio experimental e nos modelos numéricos; a) Modelo obtido com elementos finitos (FRANC2D), b) modelo obtido com o método dos elementos discretos.

5.2. Modelo com o método dos elementos discretos

Nessa seção é descrito o método dos elementos discretos que foi implementado com intuito de simular o corpo de prova em questão. Devido ao fato de essa análise ser de caráter qualitativo, estando interessados na configuração final da placa fraturada, o corpo de prova foi modelado em escala, reduzindo-o com um fator de 10, mostrado na Fig. (8a).

Dessa forma, o modelo foi discretizado com uma malha de 80 por 50 módulos de comprimento 0.1 mm. Este é o máximo tamanho de módulo possível de empregar para este material como foi salientado em seção anterior, (ao quebrar uma barra toda a energia consumida deverá ser a energia de fratura dissipada ao produzir uma área fraturada equivalente a qual a barra representa). Isto implica que os valores dos parâmetros descritos devem ser os apresentados na Tab. (1). O modelo em escala real poderia ser construído, mas acarretaria em um considerável aumento do custo computacional.

Tabela 1. Principais dados de entrada do modelo da placa empregando o método dos elementos discretos.

Comprimento das barras normais, L_C	0,1mm
Módulo de elasticidade do vidro, E	$64 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poison, ν	0,24
Deformação crítica de ruptura, ϵ_p	$0,91 \times 10^{-3}$
Energia de fratura, G (calculada utilizando $K_I = 750000 \text{ Nm}^{-3/2}$, limite superior encontrado para o vidro, NDSM/UFRGS (2000))	8,28
Comprimento crítico das barras, L_{CR}	$0,1 \times 10^{-3} \text{ mm}$
Ductilidade, k_f	1,06
R_{FC}	78

Se o interesse fosse estudar a velocidade de propagação da fissura ou quantificar as energias envolvidas no processo, a simplificação utilizada (diminuir a escala do modelo) não seria válida. Na Fig. (9b) se apresenta um detalhe da configuração do modelo fraturado, e na Fig. (8b) é possível observar a configuração final obtida com este método, que comparada com o modelo experimental e com o modelo com elementos finitos mostra um bom desempenho.

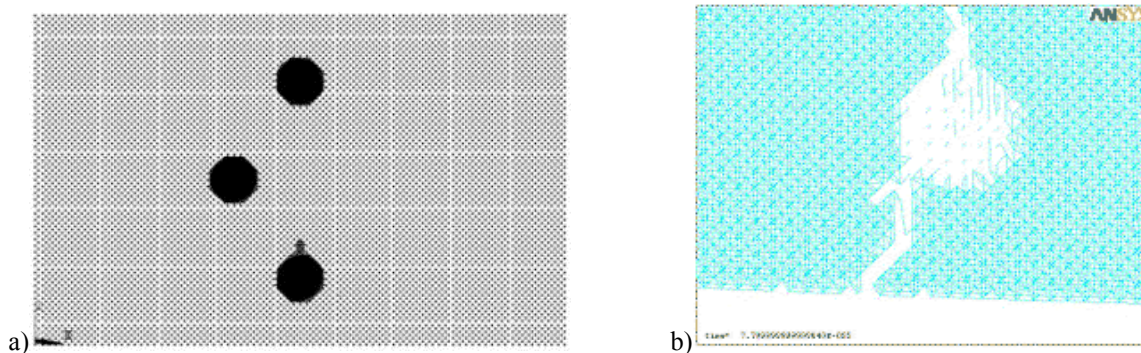


Figura 9. a) Modelo com elementos discretos, b) detalhe da configuração final obtida; as barras rompidas foram apagadas.

Finalmente na Fig. 10 é apresentado um balanço energético, que mostra em forma qualitativa como a energia externa ministrada ao sistema ao aplicar a carga se transforma e é dissipada durante o processo.

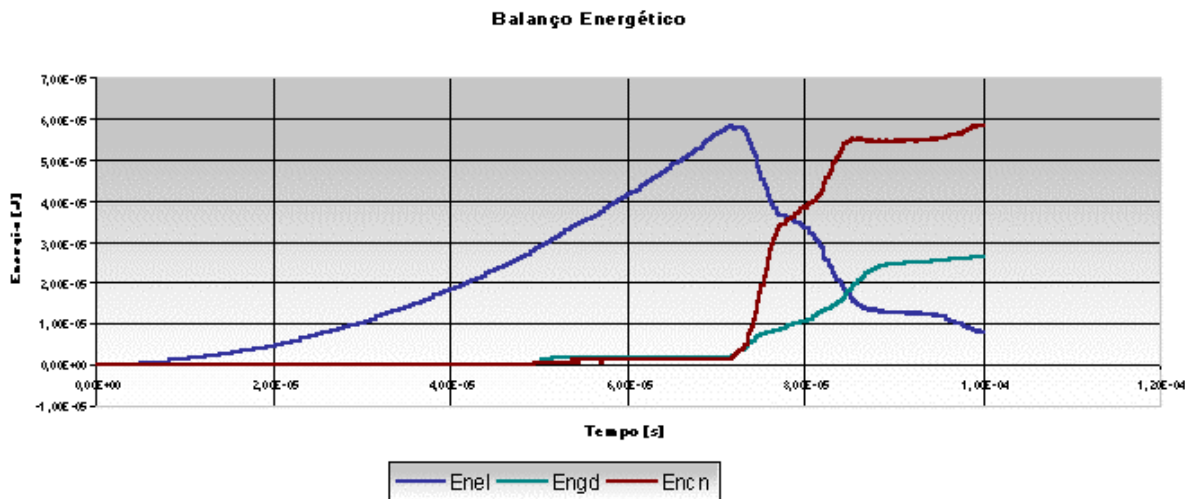


Figura 10: Balanço energético durante o processo de propagação da fissura, ENEX= Energia Externa, ENEL=Energia elástica de deformação, ENGD=Energia dissipada durante a fratura, ENCN=Energia cinética.

6. Conclusões

Neste trabalho se realizou o estudo da propagação de uma trinca num corpo de prova de material frágil utilizando duas metodologias diferentes (Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos Discretos) e validando os resultados através de um ensaio experimental. Desse estudo se obtém as seguintes conclusões:

- Ambas metodologias empregadas permitiram modelar corretamente o caminho de propagação da fissura para a configuração ensaiada experimentalmente;

- O método dos elementos finitos se apresentou mais flexível na etapa de se definir a geometria e permitir a realização de cálculos associados com esta propagação, como determinar a quantidade de ciclos para passar de um estágio a outro do modelo, ou determinar o fator de intensidade de tensões;

- O método dos elementos discretos apresenta maiores dificuldades na hora de modelar a geometria do corpo de prova, porém permite obter informações que neste trabalho não foram exploradas, como o balanço energético e a medição da velocidade de propagação da trinca na sua fase instável. Também seria possível avaliar a influência de diferentes taxas na aplicação do carregamento que, no caso de velocidades elevadas, pode mudar a configuração das trincas formadas. Um estudo exaustivo seria necessário para aproveitar as potencialidades aqui citadas, permitindo o mesmo calibrar as variáveis introduzidas como dados do modelo (ϵ_p , amortecimento, etc.). Outro aspecto não explorado neste trabalho foi a possibilidade de introduzir aleatoriedade no sistema simulado (considerar a tenacidade do material como um campo aleatório); todos estes temas potenciais de continuação desta pesquisa.

Para finalizar, é importante ressaltar que a simulação de fenômenos físicos com modelos que partem de hipóteses de trabalho diferentes resulta num saudável costume que condiz ao fato de enxergar diferentes aspectos do fenômeno estudado.

7. Agradecimentos

Agradecemos ao Centro Nacional de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CESUP/RS, pelos recursos que possibilitaram a execução deste trabalho.

8. Referências

- Bittencourt, T. N., Wawrzynek, P. A., Ingrassia, A. R. e Souza, J. L., 1996, "Quase-automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, No. 2, pp. 321-334.
- Carvalho, C. V., Araújo, T. D., Bittencourt, T. N. e Martha, L. F., 1999, "Simulação bidimensional adaptativa de processos de fraturamento por fadiga", Computational Methods in Engineering, pp. 204.1-204.20.
- Hayashi, Y., 1982, "Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear", Tese MSc., Porto Alegre, UFRGS.
- Iturrioz, I. 1995, "Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado", Tese de D.Sc, CPGEC Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Núcleo de Design e Seleção de Materiais - NDSM/UFRGS(2000) - www.ufrgs.br/ndsm.
- Riera, J. D. e Iturrioz, I., 1995, "Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells", Int. Conf and Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT11, Trans, Div J, Porto Alegre, Brasil.
- Rocha, M. M., 1989, "Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos", Tese M. Sc., CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

9. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

CRACK PROPAGATION IN A FRAGILE SPECIMEN, A THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY

Hervandil Morosini Sant'Anna

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
herva@yahoo.com

Gilnei Reckziegel

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
reckiegel@hotmail.com

Ignácio Iturrioz

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
R. Sarmiento Leite, 425
90050-170
ignacio@mecanica.ufrgs.br

Abstract. Numerical modeling of crack propagation is a very difficult problem to solve. One of the most complex problem is to simulate the transition phase that occurs from the continuum to non-continuum environment. In this study we present a comparison between experimental tests in a glass specimen and two different numerical methods: finite element method and discrete element method. Finally, we present conclusions concerning to advantages and disadvantages about these methods to solve this problem.

Keywords: Fragile, Crack, Crack Propagation, Fracture Toughness

MODELAGEM DA RIGIDEZ DE FLANGES APARAFUSADOS

Paulo Pedro Kenedi

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
e-mail: pkenedi@cefet-rj.br

Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
e-mail: calas@cefet-rj.br

Eduardo Motta Decnop Coelho

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
e-mail: edudecноп@ig.com.br

Gustavo de Souza Matoso

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil
e-mail: gmatoso@gmx.net

Resumo. Este trabalho discute alguns modelos analíticos, disponíveis na literatura, utilizados para estimar a rigidez de flanges aparafusados. Um modelo simplificado de elementos finitos que considera as tensões de contato entre os elementos da junta é desenvolvido. Um estudo da distribuição das tensões de contato e da identificação da região do flange que contribui efetivamente para a rigidez da junta é apresentado para diversas espessuras de flange. Os resultados dos modelos analíticos são comparados com os resultados obtidos nas simulações numéricas, fornecendo assim informações úteis para o projeto mecânico de flanges aparafusados.

Palavras chave: Rigidez de juntas, modelagem, simulação numérica, tensões de contato, elementos finitos

1. Introdução

A utilização de flanges aparafusados como elementos de junta é bastante comum nas mais diversas áreas, como a petroquímica e a nuclear. Estes elementos de conexão oferecem diversas vantagens sobre outros tipos de junção, como a rapidez de montagem e desmontagem. Apesar de sua ampla utilização, o projeto mecânico tradicional deste elemento conta com diversas simplificações o que eleva o grau de incerteza com relação à sua integridade mecânica, resultando, muitas vezes, na necessidade de se utilizar coeficientes de segurança elevados. Para aplicações corriqueiras que não apresentem um elevado grau de criticalidade, o projeto tradicional simplificado pode ser visto como uma solução adequada. No entanto, existem aplicações críticas, como na área nuclear e aeroespacial, onde um entendimento mais profundo sobre o comportamento da junta se faz necessário.

O projeto mecânico tradicional de flanges aparafusados, tanto para carregamento estático quanto de fadiga, emprega formulações analíticas simplificadas baseadas no parâmetro fator de junta C . Este parâmetro depende da rigidez do parafuso, k_b , e da rigidez dos flanges, k_m , além de outros elementos presentes na junta como arruelas e juntas de vedação. O valor de k_b normalmente é estimado supondo que o parafuso seja um cilindro submetido a um carregamento axial. Para estimativa do valor de k_m , existem na literatura diversos modelos analíticos. Utilizando geometrias simples como cilindros ou tronco de cones vazados, estes modelos procuram delimitar a região em torno de cada parafuso que efetivamente estaria contribuindo para a rigidez dos flanges (Osgood, 1970; Osman *et al.*, 1976; Ito *et al.*, 1977; Osgood, 1979; Juvinal, 1983; Jinsong & Zhaoyi, 1988; Shigley & Mischke, 1989). Estes modelos analíticos têm a vantagem de apresentar uma expressão explícita para o cálculo de k_m , com aplicabilidade limitada a determinadas configurações geométricas.

Existem ainda outras características importantes que influenciam a integridade mecânica de uma junta, como o valor da pré-carga imposto aos parafusos. Normalmente a pré-carga é obtida através da aplicação de um torque de aperto que acaba introduzindo tensões de cisalhamento nos parafusos, reduzindo a resistência mecânica da junta. Além disso, existe uma grande incerteza com relação ao valor da pré-carga que a junta efetivamente absorve (Blake & Kurtz, 1965; Juvinal, 1983; Dowling *et al.*, 1988). Alguns trabalhos atuais abordam este problema propondo soluções alternativas capazes de reduzir o grau de incerteza (Varga & Baratosy, 1995; La Cava *et al.*, 2000).

Neste trabalho, desenvolve-se um estudo da rigidez de flanges utilizando um modelo elástico simplificado de elementos finitos. Utiliza-se elementos de contato para representar o contato do parafuso com o flange e o contato entre os flanges. O objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre as principais formulações analíticas disponíveis na literatura para estimar a rigidez de uma junta e identificar as características principais e as limitações de cada uma.

Os resultados das simulações numérica são usados para analisar o desempenho das formulações analíticas disponíveis na literatura.

2. Formulações Analíticas

As formulações analíticas para o dimensionamento de flanges aparafusados, tanto para carregamento estático quanto de fadiga, empregam estimativas para as cargas nos parafusos e nos flanges baseadas no parâmetro fator de junta C . Este parâmetro depende da rigidez do parafuso, k_b , e da rigidez dos flanges (partes unidas), k_m , e é definido como:

$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} \quad (1)$$

onde o valor de k_b normalmente é estimado supondo que o parafuso seja um cilindro submetido a um carregamento axial. Através do valor de C é possível estimar a carga no parafuso, F_b , e na junta, F_m , da seguinte forma:

$$F_b = C P + F_i \quad (2)$$

$$F_m = (1 - C) P - F_i \quad (3)$$

onde F_i representa a pré-carga no parafuso que usualmente é estimada em 75% da carga de prova do parafuso (Juvinal, 1983; Dowling *et al.*, 1988; Shigley & Mischke, 1989) e P representa a carga externa. Dessa forma, o valor de k_m influencia significativamente o dimensionamento dos elementos de uma junta aparafusada.

As metodologias analíticas disponíveis na literatura para estimar o valor de k_m , procuram estabelecer uma geometria equivalente que efetivamente contribui para a rigidez das partes unidas. Essas metodologias utilizam geometrias simples, como cilindros ou tronco de cones vazados. Dessa forma, é possível estabelecer uma expressão explícita para o cálculo de k_m , com aplicabilidade limitada a determinadas configurações geométricas. A seguir apresentam-se alguns modelos analíticos utilizados para estimar-se o valor de k_m de flanges.

Todos os modelos estão baseados na geometria de um cilindro ou em um tronco de cone vazado equivalente cujo diâmetro interno é igual ao do furo do parafuso (d_f). O primeiro modelo, denominado *Cilindro_1*, considera um cilindro vazado, de comprimento igual ao comprimento do flange, com um diâmetro externo (d_{ext}) igual ao diâmetro externo médio de um tronco de cone de 45° e cujo diâmetro da base menor coincide com o diâmetro da cabeça do parafuso, ou seja (Osman *et al.*, 1976):

$$d_{ext}^{CIL-1} = d_c + \frac{L}{2} \quad (4)$$

onde $L/2$ representa a espessura do flange e d_c representa o diâmetro da cabeça do parafuso. Outro modelo, denominado *Cilindro_2*, que também usa o conceito de cilindro vazado, é baseado na observação experimental da distribuição da tensão nos flanges e considera que o diâmetro externo do cilindro é igual a (Jinsong & Zhaoyi, 1988):

$$d_{ext}^{CIL-2} = d_c + \frac{L}{10} \quad (5)$$

Para estes dois modelos, a rigidez de um flange, k_m^f , é considerada como sendo igual à dos cilindros vazados acima definidos, ou seja:

$$k_m^f = \frac{2E}{L} \left[\frac{\pi}{4} \left((d_{ext}^{CIL})^2 - (d_f)^2 \right) \right] \quad (6)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material do flange.

Para os modelos baseados na geometria de um cone vazado (Ito *et al.*, 1977; Osgood, 1970, Osgood, 1979, Shigley & Mischke, 1989) é possível estabelecer uma expressão geral para a rigidez do flange:

$$k_m^f = \frac{\pi E d_f \tan(\alpha)}{\ln \left[\frac{(d_c + L \tan(\alpha) - d_f) (d_c + d_f)}{(d_c + L \tan(\alpha) + d_f) (d_c - d_f)} \right]} \quad (7)$$

onde α representa o ângulo do cone. Assim como para os modelos anteriores, considera-se que o diâmetro da base menor do tronco de cone coincide com o diâmetro da cabeça do parafuso.

Para uma junta composta por dois flanges, a rigidez total da junta (k_m) é dada por:

$$k_m = \frac{k_m^{f(1)} k_m^{f(2)}}{k_m^{f(1)} + k_m^{f(2)}} \quad (8)$$

onde $k_m^{f(1)}$ e $k_m^{f(2)}$ representam a rigidez de cada um dos dois flanges.

No dimensionamento de juntas, um parâmetro importante é a carga externa máxima que não promove a separação dos flanges, F_{sep} :

$$F_{sep} = \frac{F_i}{(1 - C)} \quad (9)$$

3. Descrição da Junta Estudada

Neste trabalho, considera-se um flange padrão *DIN 2544* de aço carbono fundido, que é bastante utilizado na indústria petroquímica. A fixação dos flanges é feita através de 8 parafusos de cabeça sextavada, M16 x 2 e classe 5.8 (carga de prova de 59,7 kN). Os parafusos e as porcas utilizadas estão de acordo com a norma *DIN 7990* (DIN, 1989). A Figura (1) apresenta as características geométricas do flange em questão. Os parâmetros indicados na figura são os seguintes: $DN = 80$ mm, $D = 200$ mm, $B = 160$ mm, $L/2 = 26$ mm, $d_f = 18$ mm, $d_c = 24$ mm, $d_1 = 86,4$ mm, $s = 3,2$ mm, $r = 6$ mm.

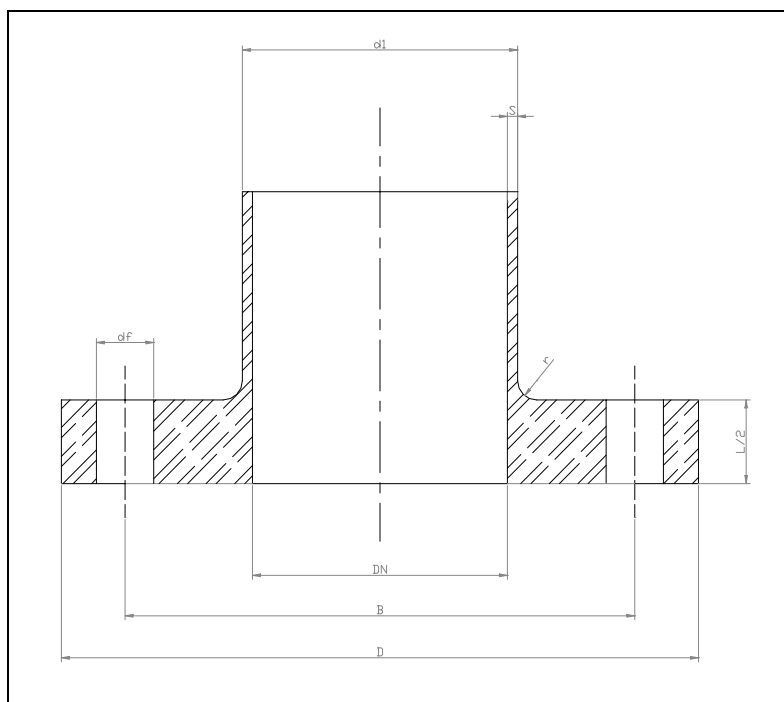


Figura 1 – Geometria do flange estudado.

4. Modelo Numérico

Desenvolve-se um estudo da rigidez de juntas utilizando um modelo elástico de elementos finitos. Adotou-se um modelo simplificado para a junta, considerando-se uma geometria que representa somente a região próxima ao parafuso. O modelo proposto é composto por dois discos que representam a região dos flanges próxima ao parafuso, um cilindro que representa o corpo do parafuso e dois cilindros que representam a cabeça do parafuso e a porca, conforme mostrado na Fig. (2). Neste estudo inicial, não são considerados elementos como arruelas e juntas de vedação. Os discos possuem um furo de diâmetro interno igual ao diâmetro dos furos do flange (d_f) e um diâmetro externo igual à distância entre a linha de centro dos parafusos e a face externa do flange ($D-B$). $L/2$ representa a espessura do flange. O cilindro que representa o parafuso possui um diâmetro d e os cilindros que representam a cabeça do parafuso e a porca têm um diâmetro $d_c = 1,5 d$. Além disso, supõe-se que o diâmetro dos furos do flange é igual ao diâmetro do parafuso.

Apesar da geometria deste modelo simplificado diferir da geometria do flange, ele é capaz de captar as características relevantes do processo de transferência do carregamento entre os elementos da junta. Nas análises desenvolvidas não se considera o atrito entre as partes, uma vez que este somente é importante na presença de cargas externas transversais ao parafuso, o que não ocorre nos casos estudados.

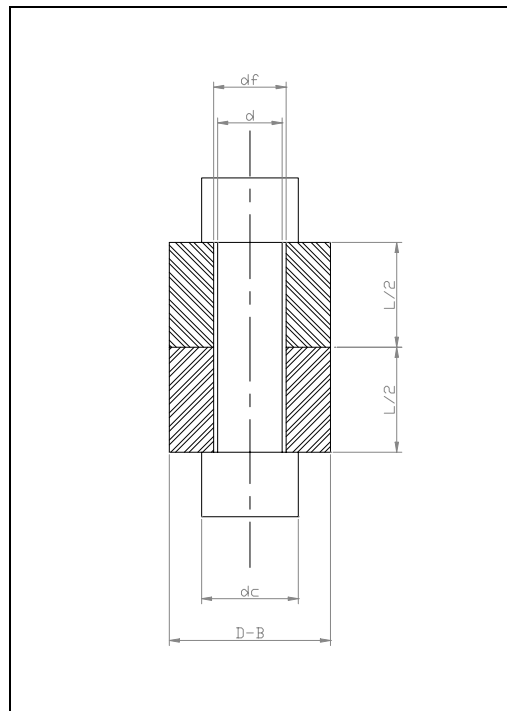


Figura 2 – Modelo de para o estudo da rigidez da junta.

Em função da geometria simplificada adotada foi possível desenvolver o estudo numérico utilizando um modelo plano axi-simétrico de elementos finitos. Utilizou-se na análise o pacote comercial de elementos finitos *ANSYS*, versão 5.6 (Ansys, 2000). A junção foi modelada através de elementos bi-dimensionais de 4 nós (*PLANE42*). Para representar o contato da cabeça do parafuso e da porca com os flanges, e entre os flanges, utiliza-se elementos de contato (*CONTAC48*). Além disso, foram utilizados elementos de pré-carga (*PRETS179*) para promover a pré-carga do parafuso. A Figura (3) apresenta a malha do modelo de elementos finitos, obtida após um estudo de convergência.

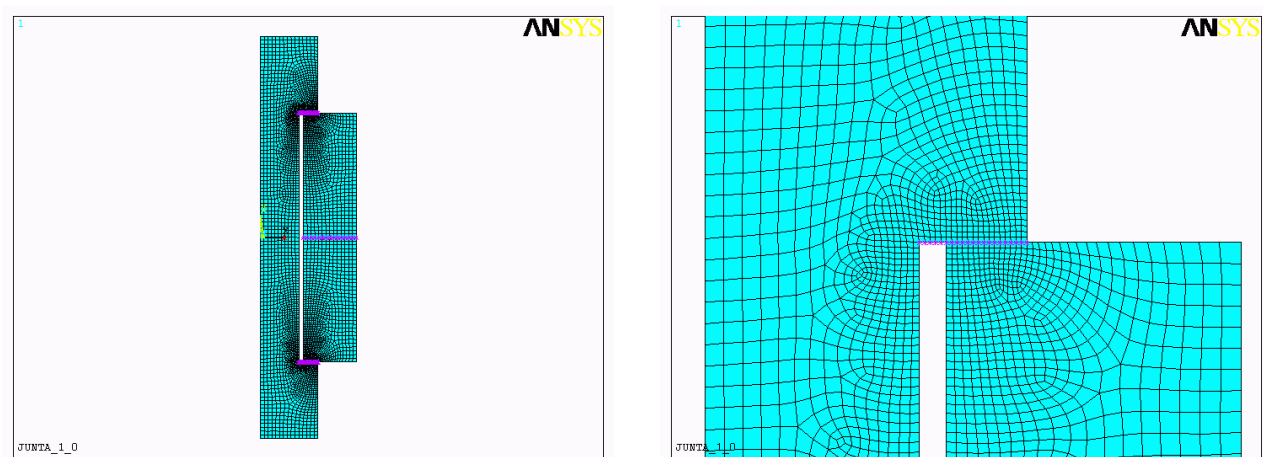


Figura 3 – Modelo de elementos finitos – Malha.

5. Simulações Numéricas

Considerando o flange apresentado na Fig. (1), algumas simulações numéricas são desenvolvidas. Adotou-se uma pré-carga de 44,8 kN que representa 75% da carga de prova do parafuso (Shigley & Mischke, 1989). Esta pré-carga foi aplicada através do posicionamento de elementos de pré-carga na seção média do corpo do parafuso. Os parafusos e os flanges são de aço, possuindo um módulo de elasticidade igual a 200 GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0,3. Considerando o comprimento livre do parafuso igual à espessura da junta (52 mm), a rigidez do parafuso (k_b) é igual a 773 MN/m.

Inicialmente desenvolve-se um estudo da rigidez para o conjunto, considerando apenas o carregamento de pré-carga. Os resultados das simulações numéricas mostraram, para esta configuração de carregamento, uma tensão na direção axial do parafuso (direção y) de 220 MPa. As Figuras (4-5) mostram as distribuições da tensão equivalente de *von Mises* e a da tensão na direção axial do parafuso (direção y).

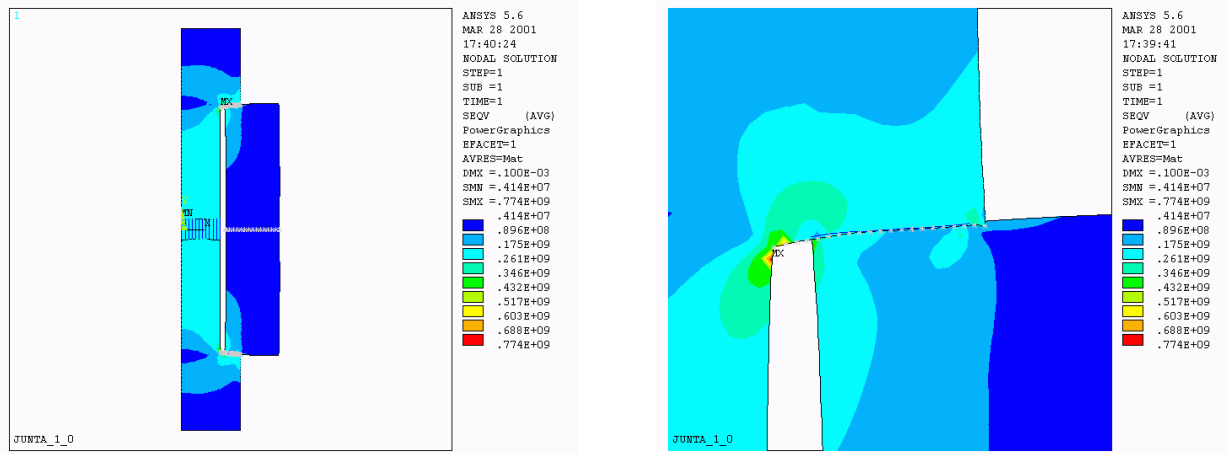


Figura 4 – Distribuição das tensões equivalentes de *von Mises* (em Pascal).

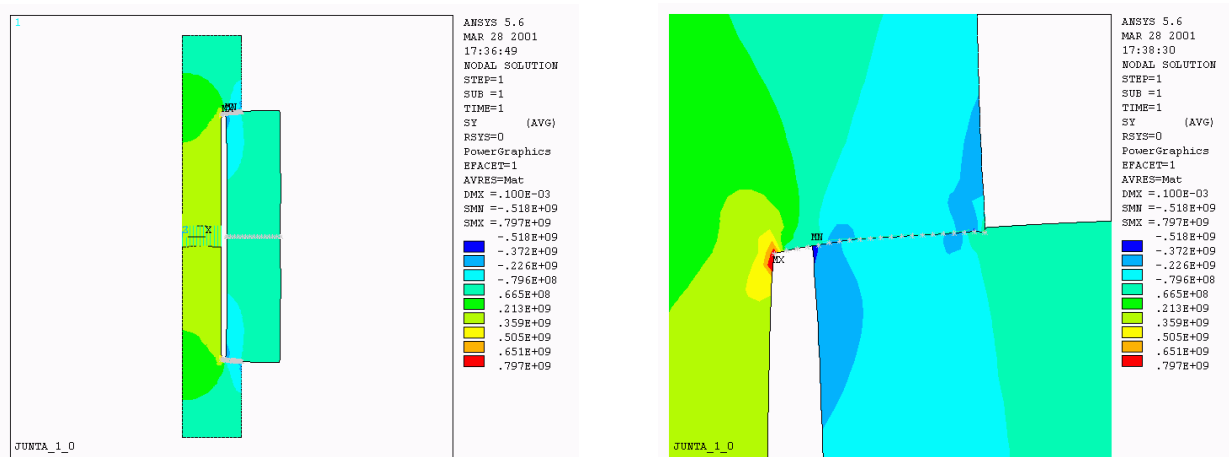


Figura 5 – Distribuição de tensões na direção axial do parafuso na direção y (em Pascal).

A Figura (6) mostra a variação da rigidez da junta em função da espessura do flange para as diversas metodologias. Neste estudo mantém-se todos os parâmetros constantes, a menos da espessura do flange, $L/2$. Os resultados são mostrados em relação à configuração original, mostrada na Fig. (1), onde $L/2 = L_0/2 = 26$ mm. Observa-se que as metodologias analíticas, a menos a denominada *Cilindro_2*, fornecem valores de rigidez bastante superiores (aproximadamente de 2 a 3 vezes) à obtida pelo método de elementos finitos. A metodologia *Cilindro_2* é baseada na observação experimental da distribuição da tensão nos flanges e apresenta uma boa concordância com os valores obtidos pelo método de elementos finitos. Cabe ressaltar que na análise pelo método de elementos finitos, a rigidez foi estimada calculando-se a razão entre a carga total aplicada nos flanges (de valor igual à pré-carga) e o deslocamento médio, na direção y, tomado na região de contato entre a cabeça do parafuso e a face do flange.

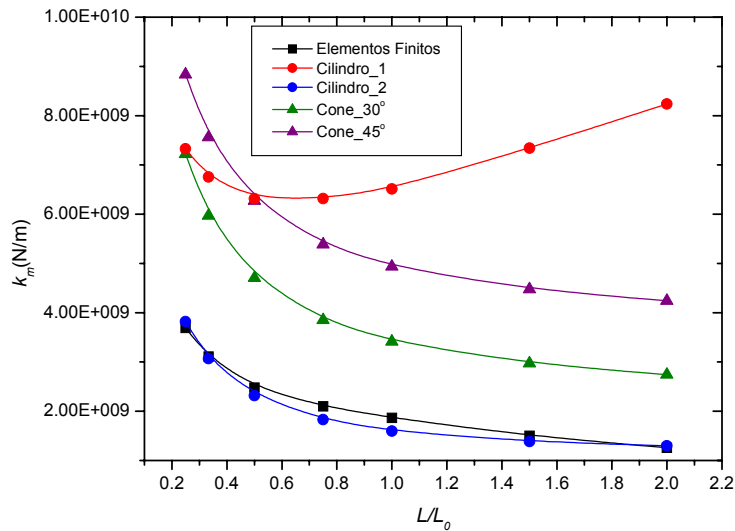


Figura 6 – Rigidez da junta em função da espessura do flange.

A Figura (7) mostra a distribuição da tensão de contato na região entre os flanges. Observa-se que em flanges de menor espessura, somente uma parte da superfície de contato entre os flanges efetivamente transmite o carregamento. Já para os flanges de maior espessura, observa-se uma distribuição mais homogênea, onde praticamente toda a superfície participa da transferência da carga.

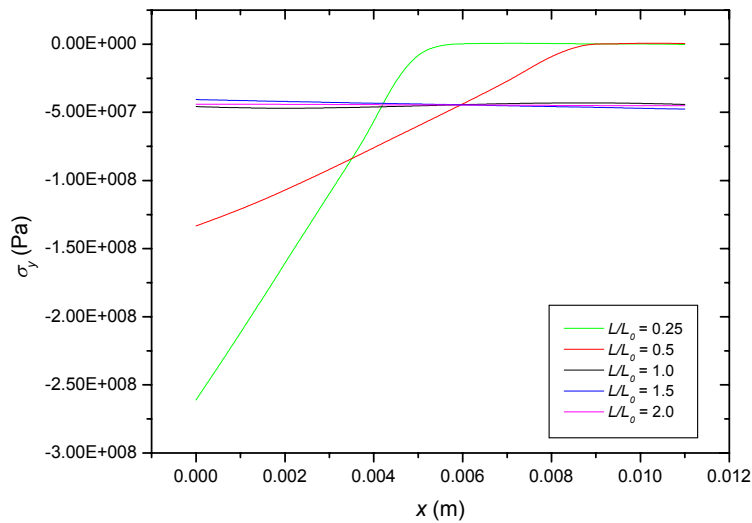


Figura 7 – Distribuição da tensão de contato na região da entre os flanges.

A Figura (8) apresenta a distribuição de tensões na direção axial do parafuso (direção y) para diferentes razões L/L_0 . A região cinza representa valores de tensão fora da faixa de interesse, definida por $\sigma_y^{min} \leq \sigma_y \leq 0.01(\sigma_y^{min})^*$, onde σ_y^{min} representa a tensão mínima em toda a peça (compressão na região de contato entre a cabeça do parafuso e a superfície do flange) e $(\sigma_y^{min})^*$ representa a tensão mínima na região de contato entre os flanges. Este último valor representa 1% da menor tensão (maior em módulo) na superfície de contato e fornece uma indicação da região da superfície de contato a partir da qual a carga não mais é transmitida entre os flanges. Dessa forma, pode-se considerar que a região contida no intervalo definido acima é a região do flange que efetivamente contribui para a rigidez da junta flangeada (k_m). A Figura (8) mostra que para as diferentes razões L/L_0 estudadas, a região que efetivamente contribui para a rigidez da junta flangeada apresenta uma forma aproximadamente cilíndrica.

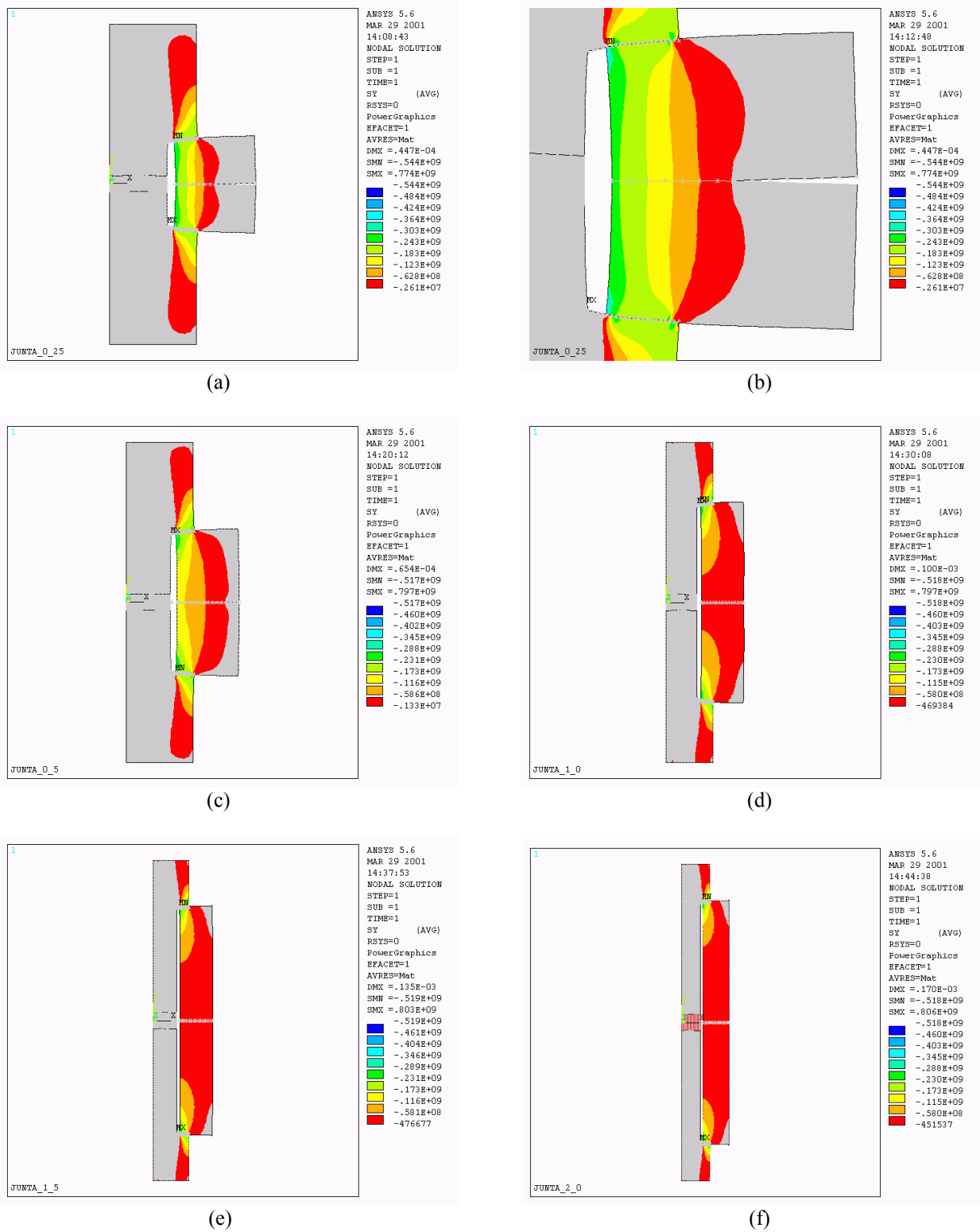


Figura 8 – Distribuição de tensões na direção axial do parafuso na direção y (em Pascal) indicando a região da junta que contribui efetivamente para a rigidez da junta. (a) $L/L_0 = 0,25$, (b) $L/L_0 = 0,25$ - detalhe, (c) $L/L_0 = 0,5$, (d) $L/L_0 = 1,0$, (e) $L/L_0 = 1,5$ e (f) $L/L_0 = 2,0$.

Desenvolveu-se também um estudo de modo a comparar as respostas, em termos de tensão axial no corpo do parafuso, obtidas através dos métodos analíticos e o método de elementos finitos para o caso envolvendo um carregamento externo gerado pela pressão interna. Adotou-se uma configuração onde foi aplicada pressão nas faces transversais dos dois flanges de modo a simular o efeito de uma carga de trabalho equivalente a 12,5 kN devida à pressão interna. A solução numérica foi desenvolvida em dois passos. No primeiro passo aplicou-se uma pré-carga de 44,8 kN na seção média do corpo do parafuso. No segundo, manteve-se o efeito da pré-carga e aplicou-se pressão nas faces externas dos dois flanges, na região onde não ocorre contato entre o flange e a cabeça do parafuso.

Os resultados da simulação numérica mostraram, para esta configuração de carregamento, uma tensão na direção axial do parafuso (direção y) de 227 MPa, o que corresponde a uma carga no parafuso de 45,6 kN. A Figura (9) mostra a distribuição de tensões na direção axial do parafuso (direção y).

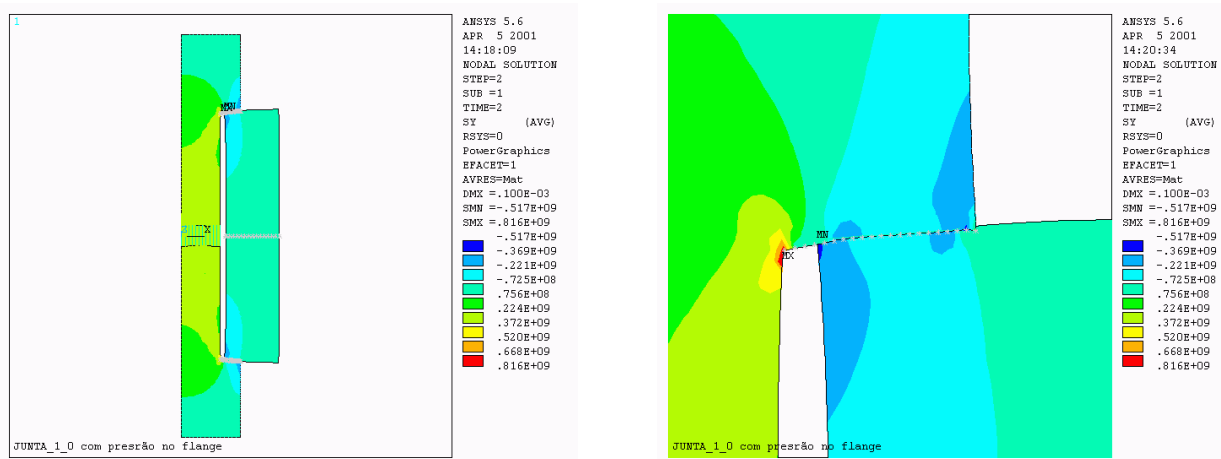


Figura 9 – Distribuição de tensões na direção axial do parafuso na direção y (em Pascal). Pré-carga combinada com carga externa.

A Tabela (1) mostra os valores estimados para a carga axial do parafuso e a carga de separação, obtidos através do método de elementos finitos, considerado como modelo de referência, e através de 4 modelos analíticos em conjunto com a Eq. (2) e a Eq. (9).

Tabela 1 – Carga no parafuso e carga de separação – Combinação da pré-carga com a carga externa.

MODELO	K_m (GN/m)	C (-)	F_b (kN)	F_{sep} (kN)
Elementos Finitos	1,9	0,29	45,6	50,0
<i>Cilindro 1</i>	6,6	0,11	46,2	50,1
<i>Cilindro 2</i>	1,6	0,33	48,9	66,4
<i>Cone 30°</i>	3,4	0,19	47,2	54,9
<i>Cone 45°</i>	4,9	0,14	46,6	51,8

É interessante observar que os modelos analíticos prevêem valores para a carga no parafuso ligeiramente superiores aos resultados fornecidos pelo método de elementos finitos, apresentando entre si uma pequena dispersão, conforme mostrado na Tab. (1). Isto pode ser justificado pela pequena parcela da carga externa que é transmitida ao parafuso. De acordo com a Eq. (2) e os valores de C listados na Tab. (1), a carga transmitida ao parafuso está entre 1/9 e 1/3 da carga externa aplicada (P), o que, para os casos estudados, representa de 3% a 9% do valor da pré-carga no parafuso (F_i). Vale ressaltar que em um projeto de uma junta aparafusada existem duas limitações associadas à amplitude da carga externa. A primeira, limita a pré-carga a 75% da carga de prova, o que representa aproximadamente 64% da carga de escoamento do parafuso, no caso de parafuso reutilizáveis (Shigley & Mischke, 1989). A segunda limita o valor da carga externa de acordo com a Eq. (9) e está relacionada à força de separação (F_{sep}). Ambos os fatos limitam o acréscimo relativo à aplicação da carga externa a uma pequena fração do valor de F_i .

Em relação à carga de separação, observa-se que os modelos analíticos também prevêem valores superiores aos observados nas simulações por elementos finitos (até cerca de 30% maiores).

O modelo denominado *Cilindro 2*, apesar de apresentar uma boa concordância com os resultados numéricos em termos de rigidez, apresenta a maior discrepância em termos de carga no parafuso e carga de separação. Já o modelo

Cilindro_1, é o que apresenta uma melhor concordância em termos de cargas no parafuso e de separação, mas apresenta a maior discrepância em termos de rigidez. Isto indica que para os modelos analíticos estudados, uma melhor estimativa da rigidez dos flanges, k_m , não é suficiente para garantir valores da carga atuante no parafuso e da carga de separação mais precisos. No entanto, a comparação entre as cargas estimadas através das diversas metodologias, mostra uma variação de cerca de 3% para a carga no parafuso e de 33% para a carga de separação, indicando uma boa concordância em termos de um projeto tradicional de engenharia.

6. Conclusões

Neste trabalho, apresenta-se um estudo da rigidez de flanges utilizando um modelo elástico simplificado de elementos finitos, considerado como modelo de referência. Dessa forma, os resultados das simulações numéricas são usados para analisar o desempenho de alguns modelos analíticos disponíveis na literatura. Uma análise desenvolvida variando-se a espessura do flange mostra que esta variável influencia consideravelmente a distribuição de tensões no flange e, conseqüentemente, a região do flange que efetivamente contribui para a rigidez das partes unidas. Observa-se que essa região da junta flangeada apresenta uma forma aproximadamente cilíndrica. Os resultados obtidos para uma configuração de carregamento envolvendo carga externa, mostram que os modelos analíticos estudados apresentam previsões para a carga no parafuso ligeiramente superiores às obtidas pelo modelo de elementos finitos. O modelo numérico desenvolvido capturou a separação dos flanges, permitindo estimar a carga de separação de referência. Os resultados também indicam que, para os modelos analíticos estudados, uma melhor estimativa da rigidez dos flanges, k_m , não é suficiente para garantir valores da carga atuante no parafuso e da carga de separação mais precisos. No entanto, a comparação entre as cargas estimadas através das diversas metodologias, mostra uma variação de cerca de 3% para a carga no parafuso e de 33% para a carga de separação, indicando uma boa concordância em termos de um projeto tradicional de engenharia.

7. Referências

- Ansys (2000), “Ansys Manual” ver.5.6.
- Blake, J.C. & Kurtz, H.J. (1965), “The Uncertainties of Measuring Fastener Preload”, *Machine Design*, Vol.37, September, pp.128-131.
- DIN (1989). “DIN 7990 - Hexagon Head Bolts for Structural Steel Bolting for Supply with Nut”, Deutsches Institut Fur Normung E.V. (German Standard).
- Dowling, P.J., Knowles, P. and Owens, G.W. (1988), “*Structural Steel Design*”, Butterworths.
- Ito, Y., Toyoda, J. & Nagata, S. (1977), “Interface Pressure Distribution in a Bolt-Flange Assembly”, *ASME paper no.77-WA/DE-11*.
- Jinsong, T. & Zhaoyi, D. (1988), “Better Stress and Stiffness Estimates for Bolted Joints”, *Machine Design*, Vol.24, November, pp.114-117.
- Juinall, R.C. (1983), “*Fundamentals of Machine Component Design*”, John Wiley & Sons.
- La Cava, C.A.P.L., Silva, E.P., Machado, L.G., Pacheco, P.M.C.L. e Savi, M.A. (2000), “Modelagem de um Dispositivo de Pré-Carga com Memória de Forma para Juntas Flangeadas”, *CONEM 2000 – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Natal-RN.
- Osgood, C.C. (1970), “*Fatigue Design*”, Wiley-Interscience .
- Osgood, C.C. (1979), “Saving Weight in Bolted Joints”, *Machine Design*, Vol.25, October, pp.128-133.
- Osman, M.O.M., Mansour, W.M. & Dukkipati, R.V. (1976), “On the Design of Bolted Connections with Gaskets Subjected to Fatigue Loading”, *ASME paper no.76-DET-57*.
- Shigley, J.E. & Mischke, C.R. (1989), “*Mechanical Engineering Design*”, 5th edition, McGraw-Hill.
- Varga, L. & Baratosy, J. (1995), “Optimal Prestressing of Bolted Flanges”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol.63, pp. 25-34.

MODELING THE STIFFNESS OF BOLTED JOINTS

Paulo Pedro Kenedi

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 – Rio de Janeiro, RJ - Brazil
e-mail: pkenedi@cefet-rj.br

Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 – Rio de Janeiro, RJ - Brazil
e-mail: calas@cefet-rj.br

Eduardo Motta Decnop Coelho

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 – Rio de Janeiro, RJ - Brazil
e-mail: edudecnop@ig.com.br

Gustavo de Souza Matoso

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Industrial Mecânica
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - CEP 20271-110 – Rio de Janeiro, RJ - Brazil
e-mail: gmatoso@gmx.net

Abstract. *This work discusses some analytic models, available in the literature, used to estimate the stiffness of bolted flanges. A simplified finite element model that considers the contact stresses among the contact surfaces is developed. A study of the distribution of the contact stress and the identification of the region of the flange that contributes effectively to the flange stiffness is presented for several flange thickness. The results of the analytic models are compared with the results obtained by numeric simulations, supplying useful information for the mechanical project of bolted flanges.*

Keywords: *Bolt joint stiffness, modeling, numerical simulations, contact stresses, finite element method.*